Nombres complexes

Nombres complexes

Exercice 1 [02025] [correction]
Soit $z \in U \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2 [02026] [correction]
Soient $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

a) Montrer que tout élément de P à son image par f dans D.
b) Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.

Exercice 3 [02027] [correction]
a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.
b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 4 [02028] [correction]
Calculer pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 5 [02029] [correction]
Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 6 [03458] [correction]
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|z_0| \neq r$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.
a) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

b) En déduire que l'image de $\mathcal{C}$ par l'application $f : z \mapsto 1/z$ est un cercle dont on précisera centre et rayon en fonction de z_0 et r.

Module et argument

Exercice 7 [02030] [correction]
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 8 [02031] [correction]
Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z' = \lambda.z$$

Exercice 9 [02032] [correction]
Etablir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \leqslant |z+z'| + |z-z'|$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 10 Centrale MP [02356] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 11 [02033] [correction]
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{i\theta} + 1$ et de $\mathrm{e}^{i\theta} - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 12 [02034] [correction]
Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Exercice 13 [02035] [correction]
Déterminer module et argument de $e^{i.\theta} + e^{i.\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 Mines-Ponts MP [02646] [correction]
Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$$

montrer

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

Exercice 15 [00055] [correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1$$

Exercice 16 X MP [03040] [correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 17 X PSI [03107] [correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z \in B$ alors $1 - z + z^2 \in B$ et $1 + z + z^2 \in B$.
Déterminer B.

Exercice 18 [03249] [correction]
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}$$

Déterminer les valeurs prises par f.

Exercice 19 [03457] [correction]
En étudiant module et argument, établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(z)$$

Exercice 20 [03642] [correction]
a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leqslant \sqrt{2}$$

Exercice 21 [03651] [correction]
Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}^{+\star}$$

Racines de l'unité

Exercice 22 [02036] [correction]
Calculer le produit des racines de l'unité

Exercice 23 [02037] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité.
Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1|$$

Exercice 24 X PC [03353] [correction]
Soient $n \geqslant 3$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.
a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p$$

b) Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_i}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 25 [02038] [correction]
Soit ω une racine $n$ème de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 26 [02039] [correction]
Simplifier :

$$\text{a) } j(j+1) \quad \text{b) } \frac{j}{j^2+1} \quad \text{c) } \frac{j+1}{j-1}$$

Exercice 27 [02040] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 28 [02041] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n + 1 = 0$$

Exercice 29 [02042] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

Observer que celle-ci admet exactement $n-1$ solutions, chacune réelle.

Exercice 30 [02043] [correction]
Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 31 [02044] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.
a) Etablir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 32 Centrale PC [02531] [correction]
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Résolution d'équations et de systèmes

Exercice 33 [02045] [correction]
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ?
Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 34 [02046] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :
a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ b) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.

Exercice 35 [02047] [correction]
a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12i$.
b) Résoudre l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.
c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 36 [02048] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x+y=1+i \\ xy=2-i \end{cases}$$

Exercice 37 [02049] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$$

Exercice 38 [02050] [correction]
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|$$

Exercice 39 [02051] [correction]
Soit $Z \in \mathbb{C}^\star$. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 40 [02052] [correction]
Résoudre l'équation $|z+1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 41 [02053] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, lorsqu'elle a un sens, l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Puisque $z \in U$, on a $\bar{z} = 1/z$ donc

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{1/z+1}{1/z-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$$

puis

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

Exercice 2 : [énoncé]
a) Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

Si $y > 0$ alors $x^2+(y-1)^2 < x^2+(y+1)^2$ donc $|f(z)| < 1$. Ainsi,

$$\forall z \in P, f(z) \in D$$

b) Soit $Z \in D$.

$$Z = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow z = i\frac{1+Z}{1-Z}$$

avec

$$i\frac{1+Z}{1-Z} = i\frac{1+Z-\bar{Z}-Z\bar{Z}}{|1-Z|^2} = -\frac{2\mathrm{Im}(Z)}{|1-Z|^2} + i\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} \in P$$

Ainsi,

$$\forall Z \in D, \exists! z \in P, f(z) = Z$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $M = I$ est solution.
Pour $M \neq I$, I, M, M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda\overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{iz-i}{z-i} \in \mathbb{R}$.
Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
$\mathrm{Im}\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)+y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega \left|\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega' \left|\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 4 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1} = \mathrm{e}^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$C_n = \cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 5 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\theta} = (1+\mathrm{e}^{i\theta})^n = 2^n\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Ainsi

$$C_n = 2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2} \text{ et } S_n = 2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) On a

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z-z_0|^2 = r^2$$

et en développant

$$|z-z_0|^2 = (z-z_0)\overline{(z-z_0)} = z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0$$

b) Notons que $0 \notin \mathcal{C}$ puisque $|z_0| \neq r$. On peut donc considérer l'image $f(\mathcal{C})$.
Soit $Z = f(z)$ avec $z \in \mathcal{C}$. Puisque

$$|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

on a

$$1 - \frac{z_0}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} + \frac{|z_0|^2 - r^2}{z\bar{z}} = 0$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

donc
$$1 - z_0 Z - \bar{z}_0 \bar{Z} + \left(|z_0|^2 - r^2\right)|Z|^2 = 0$$
ce qui se réécrit
$$|Z|^2 - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2} Z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \bar{Z} = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2}$$
Posons alors
$$Z_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$$
et l'on obtient
$$|Z|^2 - \bar{Z}_0 Z - Z_0 \bar{Z} + |Z_0|^2 = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2} + \frac{|z_0|^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2} = \frac{r^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2}$$
Ainsi Z appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre Z_0 et de rayon $\frac{r}{\left||z_0|^2 - r^2\right|}$.
Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on obtient que tout point Z de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un certain z de $\mathcal{C}$.

Exercice 7 : [énoncé]
$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.
Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0, \pi/2]$ car $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \geqslant 0$.
On a $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ donc
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
avec $2\theta \in [0, \pi]$ donc $2\theta = \pi/4$ puis $\theta = \pi/8$.

Exercice 8 : [énoncé]
($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors, en divisant par $|z|$: $|1 + x| = 1 + |x|$ avec $x = z'/z \in \mathbb{C}$.
Ecrivons $x = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
$$|1 + x|^2 = (a + 1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$
et
$$(1 + |x|)^2 = (1 + \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}$$
$|1 + x| = 1 + |x|$ donne alors $a = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où $b = 0$ et $a \geqslant 0$.
Par suite $x \in \mathbb{R}^+$ et on conclut.

Exercice 9 : [énoncé]
On a
$$|z| + |z'| = \frac{1}{2}|(z - z') + (z + z')| + \frac{1}{2}|(z' - z) + (z' + z)| \leqslant |z + z'| + |z - z'|$$
Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.
Il y a égalité si, et seulement si, : $z - z' = 0$ (i.e. $z = z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}^+$ et $\frac{z+z'}{z'-z} \in \mathbb{R}^+$ ce qui se résume à $z' = -z$.

Exercice 10 : [énoncé]
Si $a = 0$, l'inégalité est vraie avec égalité si, et seulement si, $b = 0$.
Si $a \neq 0$, l'inégalité revient à
$$1 + |u| \leqslant |1 + u| + |1 - u|$$
avec $u = b/a$. En écrivant $u = x + iy$,
$$\begin{aligned}(1 + |u|)^2 &= 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \\ &\leqslant 2 + 2(x^2 + y^2) \\ &= |1 + u|^2 + |1 - u|^2 \\ &\leqslant (|1 + u| + |1 - u|)^2\end{aligned}$$
avec égalité si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 1$ et $\left|1 - u^2\right| = 0$ soit $u = \pm 1$ ce qui revient à $a = \pm b$.

Exercice 11 : [énoncé]
$z = \mathrm{e}^{i\theta} + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
Si $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ alors $|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$, si $\cos\frac{\theta}{2} = 0$ alors $|z| = 0$.
et si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ alors $|z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} + \pi \quad [2\pi]$.
$z' = \mathrm{e}^{i\theta} - 1 = 2i\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$ et la suite est similaire.

Exercice 12 : [énoncé]
$\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} + 1} = \frac{i\sin\theta/2}{\cos\theta/2} = i\tan\frac{\theta}{2}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 13 : [énoncé]
$e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}})=2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\frac{\theta-\theta'}{2}$.

Exercice 14 : [énoncé]
Puisque $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$, en multipliant par e^{-ix}, on obtient

$$1+e^{i\alpha}+e^{i\beta}=0$$

avec $\alpha=y-x$ et $\beta=z-x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-1\\ \sin\alpha+\sin\beta=0\end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha+\sin\beta=0$ donne

$$\alpha=-\beta\quad[2\pi]\ \text{ ou }\alpha=\pi+\beta\quad[2\pi]$$

Si $\alpha=\pi+\beta\quad[2\pi]$ alors la relation $\cos\alpha+\cos\beta=-1$ donne $0=-1$.
Il reste $\alpha=-\beta\quad[2\pi]$ et alors $2\cos\alpha=-1$ donne $\alpha=\pm2\pi/3\quad[2\pi]$.
Par suite $e^{i\alpha}=j$ ou j^2.
On obtient alors aisément $1+e^{2i\alpha}+e^{2i\beta}=0$ puis $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.

Exercice 15 : [énoncé]
Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z\neq1/\bar{a}$.
Si tel est le cas

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant1\Leftrightarrow|z-a|^2\leqslant|1-\bar{a}z|^2$$

Sachant $|x+y|^2=|x|^2+2\mathrm{Re}(\bar{x}y)+|y|^2$, on obtient

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant1\Leftrightarrow\left(|a|^2-1\right)\left(|z|^2-1\right)\geqslant0$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 16 : [énoncé]
Soit z un complexe du cercle unité avec $z\neq1$. Il existe $\theta\in]0,2\pi[$ tel que $z=e^{i\theta}$.
On a alors

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-e^{i\theta}}=e^{-i\theta/2}\frac{i}{2\sin\theta/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\mathrm{cotan}\frac{\theta}{2}$$

Quand θ parcourt $]0,2\pi[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\mathrm{cotan}(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x=1/2$.

Exercice 17 : [énoncé]
On observe que $B=\{i,-i\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ et $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définies par

$$f(z)=1-z+z^2\text{ et }g(z)=1+z+z^2$$

On remarque

$$|f(z)-i|=|z+i|\,|z-(1+i)|\,,\ |f(z)+i|=|z-i|\,|z-(1-i)|$$

$$|g(z)-i|=|z-i|\,|z+1+i|\ \text{ et }\ |g(z)+i|=|z+i|\,|z+1-i|$$

Soient $a\in B$ et $(z_n)_{n\geqslant0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$z_{n+1}=\begin{cases}f(z_n) & \text{si }\mathrm{Re}(z_n)\leqslant0\\ g(z_n) & \text{si }\mathrm{Re}(z_n)>0\end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n=\left|z_n^2+1\right|=|z_n-i|\,|z_n+i|$$

Si $\mathrm{Re}(z_n)\leqslant0$ alors

$$u_{n+1}=|f(z_n)-i|\,|f(z_n)+i|=u_n\,|z_n-(1+i)|\,|z_n-(1-i)|$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $|z_n-(1+i)|$ et $|z_n-(1-i)|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1.
Ainsi

$$u_{n+1}\geqslant\sqrt{2}u_n$$

Si $\mathrm{Re}(z_n)>0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0\neq0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0=0$ puis $a=\pm i$. Ainsi $B\subset\{i,-i\}$.
Sachant $B\neq\emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-i$ et inversement, on peut conclure

$$B=\{i,-i\}$$

Exercice 18 : [énoncé]
Soit $z\in\mathbb{C}$.
Si $z\in\mathbb{R}^-$ alors $f(z)=0$.
Sinon, on peut écrire $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in]-\pi,\pi[$ et alors

$$f(z)=r\frac{1+e^{i\theta}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Puisque $\cos(\theta/2) \geqslant 0$

$$|f(z)| = r\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}Z > 0\}$$

Inversement, soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}Z > 0$.
On peut écrire $Z = R\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $R > 0$ et $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$. Pour

$$z = \frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{2i\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = \mathrm{Re}^{i\alpha} = Z$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 19 : [énoncé]
Posons $x = \mathrm{Re}z$ et $y = \mathrm{Im}z$. On a

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \mathrm{i}\,\frac{y}{n}$$

Pour n assez grand, on a $1 + x/n > 0$ et donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \mathrm{e}^{in\theta_n} \text{ avec } r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan\frac{y/n}{1 + x/n}$$

Quand $n \to +\infty$

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \times \left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to \exp(x)$$

et

$$n\theta_n \sim n \times \frac{y}{n} \to y$$

donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(x)\mathrm{e}^{iy} = \exp(z)$$

Exercice 20 : [énoncé]
a) En développant

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.
b) On a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leqslant 4$$

donc parmi les quantités $|z_1 + z_2|$ et $|z_1 - z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 21 : [énoncé]
Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u = \bar{u}$.
On a alors

$$(z - a)^2 = (z - a)\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{(z - a)(\bar{a} - \bar{z})}{\bar{a}\bar{z}} = -a\frac{|z - a|^2}{\bar{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z - a}{z - b}\right)^2 = \frac{|z - a|^2}{|z - b|^2} \in \mathbb{R}^{+\star}$$

Exercice 22 : [énoncé]
Puisque le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme

$$\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp(i(n-1)\pi) = (-1)^{n-1}$$

Exercice 23 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

Alors

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\pi/n}}\right) = 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2\cot\frac{\pi}{2n}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 24 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}\,, \omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$$

a) Si n ne divise par p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega^p \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-ik\pi/n} \frac{1}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1} \cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \cdots$$

Exercice 25 : [énoncé]
On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - n\omega^n = -n$$

donc

$$S = \frac{n}{\omega - 1}$$

Exercice 26 : [énoncé]
a)

$$j(j+1) = j^2 + j = -1$$

b)

$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1$$

c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}$$

Exercice 27 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ les racines $n$ème de l'unité.
Si z est solution alors nécessairement $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc il existe $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$

Si $k = 0$ alors ce la donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1,\dots,n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.
Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}$$

Inversement, en remontant le calcul : ok
Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{-i\cot\frac{k\pi}{n} / k \in \{1,\dots,n-1\}\right\}$$

Puisque la fonction cot est injective sur $]0,\pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 28 : [énoncé]
On a

$$z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow z^n = \mathrm{e}^{i\pi}$$

$z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$ est solution particulière de l'équation et donc

$$\mathcal{S} = \{z_0\omega_k / k \in \{0,\dots,n-1\}\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} / k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 29 : [énoncé]
$z = i$ n'est pas solution.
Pour $z \neq i$,

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n-1\}\,,\ \frac{z+i}{z-i} = \omega_k$$

en notant $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$.
Pour $k = 0$, $\omega_k = 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ n'a pas de solution.
Pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $\omega_k \neq 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ a pour solution

$$z_k = i\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{z_1,\dots,z_{n-1}\}$ avec

$$z_k = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} = \cot\frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R}$$

deux à deux distincts car cot est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,\pi[$ où évoluent les $\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 30 : [énoncé]
On a

$$1 + A + B = 0,\ AB = 2 \text{ et } \mathrm{Im}(A) > 0$$

donc

$$A = \bar{B} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k)$$

Or on a aussi $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \cdots + z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.
b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.
c) Pour $z = 1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,

$$1 - \omega^k = -\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} 2i\sin\frac{k\pi}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k} = i^{n-1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

puis la relation proposée.

Exercice 32 : [énoncé]
Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation

$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$

et donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc

$$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

puis

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geqslant 0$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 33 : [énoncé]
$x = 1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$ ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$.
Lorsque $a = -1$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Lorsque $a = 3$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+i3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+i3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 34 : [énoncé]
a) $\mathcal{S} = \{1, -1 + 2i\}$,
b) $\mathcal{S} = \{-1 + i, -3 + 2i, 1 - i, 3 - 2i\}$.

Exercice 35 : [énoncé]
a) $\pm(3 - 2i)$
b) $a = -2i, b = -1 + 3i$ et $c = 2 + i$
c) $|c - b| = |c - a| = \sqrt{13}$ et $|b - a| = \sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 36 : [énoncé]
Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation

$$z^2 - (1 + i)z + (2 - i) = 0$$

On obtient l'ensemble solution

$$\mathcal{S} = \{(1 + 2i, -i), (-i, 1 + 2i)\}$$

Exercice 37 : [énoncé]
On a

$$4\sqrt{2}(1 + i) = 8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

donc $z_0 = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$ est solution particulière de l'équation.
L'équation $z^3 = z_0^3$ équivaut alors à l'équation $(z/z_0)^3 = 1$ dont l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \left\{z_0, z_0 j, z_0 j^2\right\}$$

Exercice 38 : [énoncé]
Soit $M(z)$ solution avec $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $a \geqslant 0$ et $b = \pm\sqrt{3}a$.
Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix}1\\ \sqrt{3}\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}1\\ -\sqrt{3}\end{matrix}\right.$.
Inversement : ok.

Exercice 39 : [énoncé]
Posons $\rho = |Z|$ et $\theta = \arg Z \quad [2\pi]$. $\mathrm{e}^z = Z \Leftrightarrow z = \ln\rho + i\theta + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 40 : [énoncé]
$|z + 1|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1$ et $(|z| + 1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$ donc
$|z + 1| = |z| + 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 41 : [énoncé]
L'équation a un sens pour $x \neq \pi/2 \quad [\pi]$. En exploitant $\cos(kx) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ikx})$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x}\right)$$

ce qui apparaît comme une somme géométrique.
Si $x \neq 0 \quad [\pi]$ alors $q = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos x} \neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - \mathrm{e}^{i(n+1)}x}{\cos x - \mathrm{e}^{ix}}$$

Il reste à en déterminer la partie réelle. Puisque

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{-i\sin x}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x(\cos x)^n}$$

Finalement, pour les x considérés

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = 0 \Leftrightarrow \sin(n+1)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad [\pi/(n+1)]$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Si $x = 0 \quad [\pi]$ alors x n'est pas solution car

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = n+1$$

Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{k\pi}{(n+1)} / k \in \mathbb{Z} \text{ et } (n+1) \not| k \right\}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD