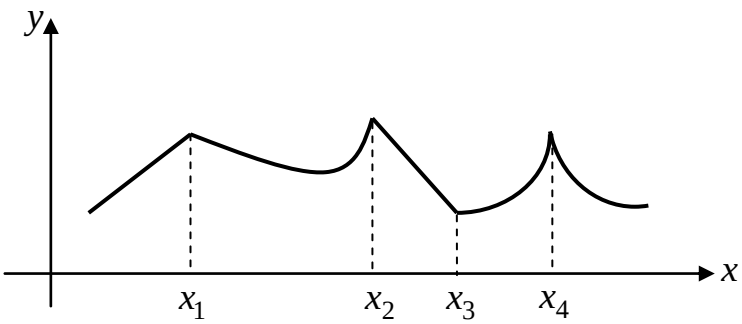
6. ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ 1
6.1. Геометрический смысл производной 1
6.2. Таблица производных и правила дифференцирования 1
6.3. Монотонность. Экстремумы 1
6.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 2
6.5. Выпуклость графика. Точки перегиба 2
6.6. Асимптоты 3
6.7. Четность, периодичность 3

6. ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

6.1. Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Поэтому в тех точках, где производная не существует, график будет иметь или вертикальную касательную, или различные касательные слева и справа. На изображенном графике это точки x_1, x_2, x_3 и x_4.



6.2. Таблица производных и правила дифференцирования

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ 2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ $\left(e^x\right)' = e^x$	3. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ 4. $\left(\sin x\right)' = \cos x$ 5. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$ 6. $\left(\mathrm{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 7. $\left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	8. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 9. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 10. $\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ 11. $\left(\mathrm{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2) $(Cu)' = Cu'$.

3) $(uv)' = u'v + uv'$.

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

5) Если $y = f(u(x))$, то $y' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Примеры. $y = x^2 \sin x$, $y' = \left(x^2\right)' \sin x + x^2 \left(\sin x\right)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

$y = \sin^2 x$, $y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

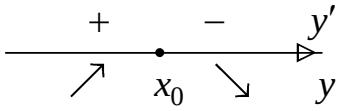
$y = \ln\left(\mathrm{arctg} 2^x\right)$, $y' = \frac{1}{\mathrm{arctg} 2^x} \cdot \frac{1}{1 + \left(2^x\right)^2} \cdot 2^x \ln 2$.

6.3. Монотонность. Экстремумы

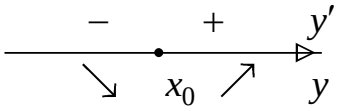
Если на некотором промежутке $y' > 0$, то на нем функция y возрастает.

Если на некотором промежутке $y'<0$, то на нем функция y убывает.

Если $y'(x_0)=0$ или не существует и производная меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка экстремума.



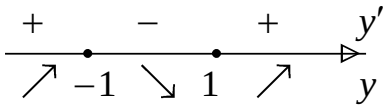
x_0 – *точка максимума*



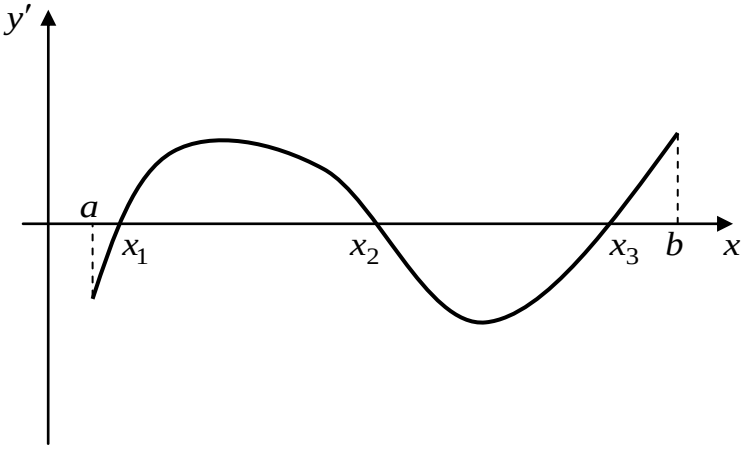
x_0 – *точка минимума*

Пример. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $y=x^3-3x$.

Решение. Находим производную $y'=3x^2-3$, $3x^2-3=0$, $x=\pm 1$.



Пример. Найти количество точек экстремума функции $y=f\left(x\right)$, если на чертеже изображен график ее производной.



Решение. Экстремум функции достигается в точках, в которых производная меняет знак.

Функция $y'=f'\left(x\right)$ меняет знак на протяжении отрезка $\left[a;b\right]$ три раза: в точках x_1, x_2 и x_3.

Значит, точек экстремума три.

6.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на отрезке $[a,b]$ значений непрерывной функции $y=f(x)$.

1) Найти критические точки функции.

2) Выбрать из них те, которые принадлежат отрезку $[a,b]$.

3) Вычислить значение функции в точках, отобранных в п. 2.

4) Вычислить значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.

5) Из всех полученных в пунктах 3 и 4 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезке $[0,3]$.

Решение. 1) Находим критические точки: $f'\left(x\right)=3x^2-3$; $3x^2-3=0$, $x=\pm 1$.

2) Точка $x=-1$ не принадлежит отрезку $[0,3]$.

3) Вычисляем значение функции в критической точке $x=1$: $f(1)=-2$.

4) Вычисляем значения функции на концах отрезках $f(0)=0$, $f(3)=18$.

5) Наибольшее значение функции $y_{\text{наиб}}=18$ достигается при $x=3$, наименьшее значение функции $y_{\text{наим}}=-2$ достигается при $x=1$.

6.5. Выпуклость графика. Точки перегиба

Если $y''>0$, то график функции вогнутый (выпуклый вниз), если $y''<0$, то график функции выпуклый (выпуклый вверх). Точки графика функции, при переходе через

которые, вторая производная меняет знак (выпуклость меняется на вогнутость или наоборот), являются точками перегиба.

6.6. Асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то $x=x_0$ есть <u>вертикальная асимптота</u>.

Уравнение <u>наклонной асимптоты</u>: $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{(x-4)^2}$.

Решение. Вертикальной асимптотой является прямая $x=4$, т.к. $\lim\limits_{x\to4+0}\dfrac{x^3}{(x-4)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to4-0}\dfrac{x^3}{(x-4)^2}=+\infty$. Прямая $y=x+8$ является наклонной асимптотой при $x\to\pm\infty$,

т.к. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x(x-4)^2}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{(x-4)^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{8x^2-16x}{x^2-8x+16}=8$.

Пример. <u>Горизонтальной асимптотой</u> графика функции $y=\dfrac{5-3x}{2x-4}$ является прямая $y=-\dfrac{3}{2}$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5-3x}{2x-4}=-\dfrac{3}{2}$.

6.7. Четность, периодичность

Если область определения функции $y=f(x)$ симметрична относительно нуля и для всех значений аргумента из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, то функция называется <u>четной</u>. Если же $f(-x)=-f(x)$, то <u>нечетной</u>. Остальные функции <u>общего вида</u>.

Пример. 1) Четные функции: $y=x^2$, $y=x^4$, $y=\cos x$, $y=3^{\cos x}$, $y=\sin\left(x^2\right)$ и т.д.

2) Нечетные функции: $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sin x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\dfrac{1}{x}$ и т.д.

Наименьший положительный <u>период функций</u> $y=\sin x$ и $y=\cos x$ равен $T=2\pi$, для функций $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$ равен $T=\pi$. Если аргумент функции умножается на число k, то период делится на это число.

Пример. 1) $y=\sin 2x$, $T=\pi$; 2) $y=\sin 3x$, $T=\dfrac{2\pi}{3}$; 3) $y=\sin\pi x$, $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$; 4) $y=\sin\dfrac{x}{2}$, $T=4\pi$; 5) $y=\mathrm{tg}5x$, $T=\dfrac{\pi}{5}$; 6) $y=\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$, $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.