Двойные интегралы

1. Основные понятия

Пусть D – некоторая замкнутая область в плоскость Oxy, на которой определена непрерывная функция двух переменных $z = f(x;\, y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i $(i = \overline{1, n})$, площади которых обозначим соответственно через ΔS_i. Теперь в каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i;\, y_i)$, после чего составим сумму $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i;\, y_i)\Delta S_i$, которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x;\, y)$ в области D.

Обозначим через d наибольший из диаметров областей D_i.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм σ_n при $d \to 0$, не зависящий от разбиения на области D_i и выбора точек M_i, то этот предел называется *двойным интегралом* функции $f(x;\, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x;\, y)dS$ или $\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy$. При этом функция $f(x;\, y)$ называется *подынтегральной функцией*, а область D – *область интегрирования*.

2. Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D (f(x;\, y) \pm g(x;\, y))dxdy = \iint\limits_D f(x;\, y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x;\, y)dxdy$.

2. $\iint\limits_D c \cdot f(x;\, y)dxdy = c \cdot \iint\limits_D f(x;\, y)dxdy$, где c=$const$.

3. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то $\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;\, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;\, y)dxdy$.

4. Если $m \le f(x;\, y) \le M$, то $mS \le \iint\limits_D f(x;\, y)dxdy \le MS$, где S – площадь области D.

3. Вычисление двойного интеграла

Различают два вида области интегрирования.

1. Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$, каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке. Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\, y)dy$, причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;\, y)dy$, в котором x считается постоянным.

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, а слева и справа – непрерывными кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке. Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_D f(x;\, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\, y)dx$, причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\, y)dx$, в котором y считается постоянным.

Правые части указанных формул называются *двукратными* (или *повторными*) интегралами.

В более общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к основным областям.

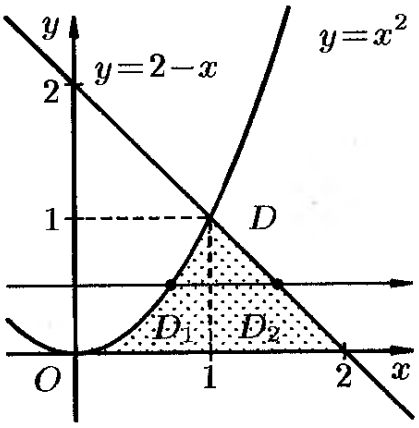
Примеры:

1. Вычислить $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$, если область D ограничена прямыми $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$.

Решение. Преобразуем двойной интеграл в повторный. Пределы интегрирования известны, поэтому

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \int\limits_0^2 x^2 dx \cdot \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 \cdot arctgy\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2,\ y = 0,\ x + y - 2 = 0$.



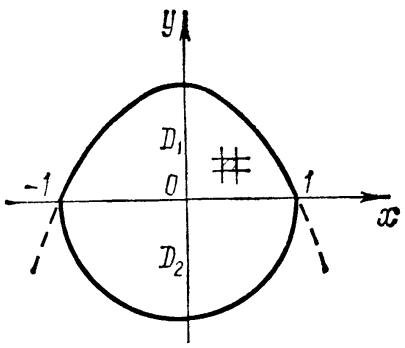
Решение. На рисунке изображена область интегрирования D. Она правильная в направлении оси Ox.

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \left(-\frac{(2-y)^3}{6} + \frac{7y^2}{4} - 2\cdot\frac{y^3}{3} - 4\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

3. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x;\, y)dy$.



Решение. Область интегрирования D ограничена линиями $x=-1,\ x=1,\ y=-\sqrt{1-x^2},\ y=1-x^2$. Изменим порядок интегрирования, для чего заданную область представим в виде двух областей (второго вида): D_1, ограниченную слева и справа ветвями параболы $x=\pm\sqrt{1-y}$ $(0 \le y \le 1)$, и D_2, ограниченную дугами окружности $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1 \le y \le 0)$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x;\, y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

4. Замена переменных в двойном интеграле

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки, т.е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Определим преобразование независимых переменных, как $x=\varphi(u;\, v)$ и $y=\psi(u;\, v)$. Если эти функции имеют в некоторой области D^* плоскости Ouv непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля *определитель Якоби* или *якобиан* $I(u;\, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, а функция $f(x;\, y)$ непрерывна в области D, то справедлива *формула замены переменных в двойном интеграле*: $\iint_D f(x;\, y)dxdy = \iint_{D^*} f(\varphi(u;\, v);\, \psi(u;\, v)) \cdot |I(u;\, v)| dudv$.

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y

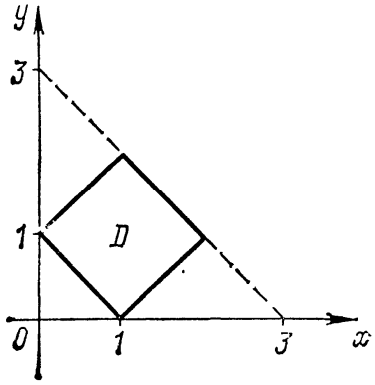
полярными координатами r и φ: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Якобиан определяется как

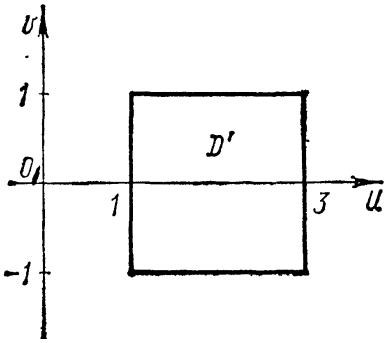
$$I(r;\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула замены переменных принимает вид: $\iint\limits_D f(x;\ y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi$, где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Примеры:

1. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$, если область D – квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1,\ x-y=1,\ x+y=3,\ x-y=-1$.





Решение. Положим $x+y=u,\ x-y=v$, откуда $x=(1/2)(u+v),\ y=(1/2)(u-v)$. Тогда якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \text{ т. е. } |J| = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy = \dfrac{1}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2 dudv$. Так как область D' также является квадратом, то

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 du \int_{-1}^1 v^2 dv = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3 \left[\frac{1}{3}v^3\right]\Bigg|_{-1}^1 du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^3(1+1)du =$$

$$= \frac{1}{12}u^4\Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

2. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, где область D – круг $x^2+y^2 \le 9$.

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{9-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\cdot rdrd\varphi = \iint\limits_D r\cdot\sqrt{9-r^2}\,drd\varphi .$$

Область D в полярной системе координат определяется неравенствами $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le r\le 3$. Заметим: область D – круг – преобразуем в область D^* - прямоугольник. Поэтому имеем:

$$\iint\limits_D r\cdot\sqrt{9-r^2}\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 \left(9-r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(9-r^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}(0-27)d\varphi = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi.$$

5. Приложения двойного интеграла

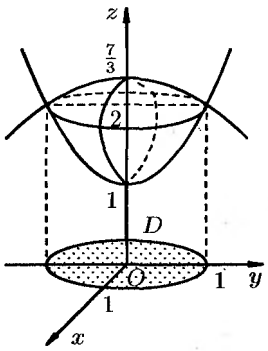
1. <u>Объем цилиндрического тела</u> находится по формуле $V=\iint\limits_D f(x;\,y)dxdy$, где $z=f(x;\,y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Пример: Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z+1=0$ и $x^2+y^2+3z-7=0$.

Решение. Данное тело ограничено двумя параболоидами. Решая систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=z-1, \\ x^2+y^2=-3z+7, \end{cases}$$

Находим уравнение линии их пересечения: $x^2+y^2=1,\ z=2.$



Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2+y^2\le 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями $z=\frac{1}{3}(7-x^2-y^2)$ и $z=1+x^2+y^2$. Имеем:

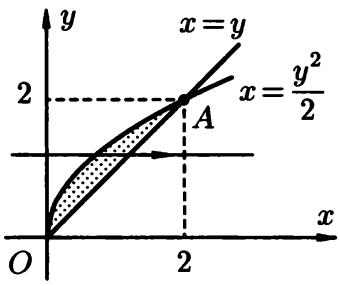
$$V=V_1-V_2 = \iint\limits_D \frac{1}{3}(7-x^2-y^2)dxdy - \iint\limits_D (1+x^2+y^2)dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_D (7-r^2)rdrd\varphi - \iint\limits_D (1+r^2)rdrd\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\varphi} d\varphi\int\limits_0^1 (7r-r^3)dr - \int\limits_0^{2\varphi} d\varphi\int\limits_0^1 (r+r^3)dr =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{12}\cdot 2\pi - \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

2. <u>Площадь плоской фигуры</u> D: $S=\iint\limits_D dxdy$.



Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $y = x$.

Решение. Направление, или порядок, интегрирования выберем так, как указано на чертеже.

Сначала определим координаты точки *A*:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2, y_2 = 2.$$

Проекция области *D* на ось *Oy* есть отрезок [0, 2]. Таким образом,

$$S = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y} dx = \int_0^2 dy \cdot x\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{y} = \int_0^2 \left(y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

3. <u>Масса плоской фигуры</u> D с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x; y)$ находится по формуле

$$m = \iint_D \gamma(x; y) dxdy.$$

4. <u>Статические моменты фигуры</u> *D* относительно осей *Ox* и *Oy* могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint_D y \cdot \gamma(x; y) dxdy \text{ и } S_y = \iint_D x \cdot \gamma(x; y) dxdy,$$

а координаты центра масс фигуры – по формулам $x_c = \dfrac{S_y}{m}$ и $y_c = \dfrac{S_x}{m}$.

5. <u>Моментом инерции материальной точки</u> массы *m* относительно оси *l* называется произведение массы *m* на квадрат расстояния *d* точки до оси, т.е. $M_l = m \cdot d^2$. Моменты инерции плоской фигуры относительно осей *Ox* и *Oy* могут быть вычислены по формулам:

$$M_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x; y) dxdy \text{ и } M_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x; y) dxdy.$$

Момент инерции фигуры относительно начала координат – по формуле $M_O = M_x + M_y$.