A análise dimensional é uma ferramenta de grande utilidade no estudo da Física: fornece pistas importantes para a solução de um problema, ajuda a intuição, e pode reduzir significativamente a complexidade de um problema. Este artigo pretende mostrar que usando adequadamente a análise dimensional, se podem obter inúmeros resultados importantes a partir de conhecimentos rudimentares de Física. Serão apresentados vários exemplos, com especial destaque para o mundo biológico.

O TAMANHO C
A ANÁLISE DIME
FÍSICA

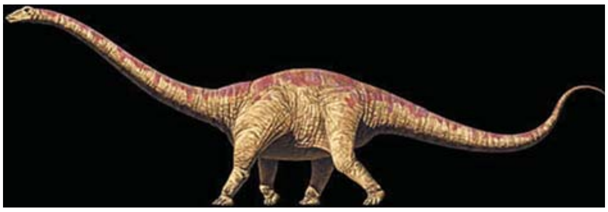
Armando Vieira
Departamento de Física
Instituto Superior de Engenharia do Porto
Rua de S. Tomé, 4200 Porto
e Centro de Física Computacional da Universidade de Coimbra
(asv@isep.ipp.pt)

Existem na Natureza fenómenos complexos sobre os quais não temos a sorte de possuir uma teoria adequada, como por exemplo o escoamento turbulento de um fluido. No entanto, usando apenas as dimensões das grandezas físicas intervenientes, podemos extrair uma quantidade de informação extraordinária. Embora pouco relevante do ponto de vista de compreensão dos fenómenos físicos, esta informação é extremamente útil do ponto de vista prático e ajuda-nos a compreender melhor o problema em estudo [1]

Embora a turbulência seja um fenómeno ainda não totalmente compreendido, podemos saber a *priori*, ignorando completamente os detalhes do problema, por exemplo, como se relacionam as forças exercidas numa dada superfície com a velocidade e a densidade do fluido.

O objectivo deste artigo é mostrar que, recorrendo à análise dimensional, se podem conhecer relações interesantes desconhecendo quase por completo a física dos fenómenos em causa. Em particular, serão abordados aspectos relacionados com o tamanho, ou seja, como variam certas propriedades na matéria e nos seres vivos quando se alteram apenas as suas dimensões. Podemos assim responder a questões como: em quanto varia a força de impacto de um projéctil ao reduzirmos a metade a sua densidade: quanto tempo a mais é preciso para cozer um bolo com o dobro do tamanho de outro? No caso da biologia, existem fenómenos muito curiosos que podem ser compreendidos à luz da análise dimensional, como, por exemplo, saber porque morre um homem numa queda de 10 m ao

ONTA
NSIONAL NA



passo que um pequeno rato sai geralmente ileso de um acidente do mesmo tipo.

A arte de adivinhar equações

Existem inúmeros casos na história da ciência onde as equações, antes de terem sido deduzidas, foram de certa forma adivinhadas ou intuídas pelos seus autores.

Vejamos como isso não é muito difícil. Tomemos o exemplo da queda dos graves. Suponhamos que queríamos determinar uma expressão para a velocidade terminal do objecto v em função da altura h de que foi largado. Como não sabemos nada de Física apenas temos de averiguar quais são as grandezas físicas relevantes. Neste caso consideramos, além da altura, a aceleração da gravidade da terra g. Vamos então supor que v se escreve como um produto:

$$v = \alpha g^x h^y ,$$

em que α é uma constante sem dimensões e x e y são expoentes a determinar. Para esta equação estar dimensionalmente correcta, o lado direito deve ter as dimensões de uma distância sobre tempo(L/T), ou seja, dimensionalmente:

$$LT^{-1} = \left(LT^{-2}\right)^x L^y .$$

Daqui se tira facilmente que $x + y = 1$, e $-2x = -1$,ou seja $x = y = \frac{1}{2}$.

Portanto obtivemos a expressão da velocidade que pretendíamos,

$$v = \alpha\sqrt{gh}$$

Resta-nos determinar a constante α, que pode ser obtida quer experimentalmente, quer por uma análise detalhada do problema. Através desta relação funcional reduzimos a nossa ignorância à mera determinação de uma constante, o que não deixa de ser notável.
Suponhamos agora que, erradamente, considerávamos também a massa como uma grandeza relevante para este problema. Então a equação dimensional ficava:

$$LT^{-1} = \left(LT^{-2}\right)^x L^y M^z$$

Pode verificar-se directamente que $z = 0$, ou seja, a velocidade de queda de um corpo não depende da sua massa.
É claro que esta expressão só é válida se desprezarmos a resistência do ar. Se a considerarmos, teríamos novas grandezas na expressão da velocidade. Elas seriam a densidade do ar ρ , a massa do corpo m e a área eficaz exposta ao deslocamento A . Ou seja,

$$v = f\left(\rho, M, A, h, g\right) .$$

Trata-se agora de um problema mais difícil de resolver pois temos 5 grandezas e apenas 3 equações: uma para o tempo, outra para o espaço e outra para a massa. Para estes casos existe um procedimento geral baseado no teorema π de Buckingam que permite obter relações entre quantidades adimensionais [2].

Podemos, no entanto, usar a intuição para reduzir a complexidade do problema. Por exemplo, devido agora à presença de uma forma de resistência que aumenta com a velocidade do corpo, a velocidade não pode aumentar indefinidamente. Logo a altura de queda, h , não deve entrar na expressão da velocidade a partir de um certo tempo. Após eliminarmos h não é difícil obter a seguinte expressão:

$$v \sim \sqrt{\frac{mg}{\rho A}} .$$

Podemos verificar que esta equação está correcta recordando que a força que um fluido exerce numa área A é $\rho A v^2$ e que esta deve igualar a força gravítica mg. A esta quantidade chama-se velocidade terminal, que para o corpo humano está compreendida entre 150 a 200 km/h (Figura 1). Recorde-se que a densidade do ar é cerca de 1kg/m^3.
A velocidade depende agora da massa mas não da altura. Isto significa que, na realidade, a velocidade do corpo aumenta inicialmente de acordo com a equação da queda

dos graves, mas que, após algum tempo, ela irá estabilizar num valor constante.
Como $m \sim l^3$, em que l é a dimensão linear do corpo, e $A \sim l^2$, a velocidade terminal é proporcional a $\sqrt{l}$: se aumentarmos o tamanho de um objecto ele irá cair com uma maior velocidade. Por exemplo, um elefante, que tem uma dimensão linear cerca de 100 vezes superior à do rato, terá uma velocidade terminal 10 vezes maior.

Mais uma vez a nossa ignorância acerca de um fenómeno complexo fica reduzida apenas à determinação de uma constante.

Vejamos mais um caso não trivial: encontrar uma expressão para a frequência de vibração fundamental f, de uma estrela. Usando o diâmetro da estrela D, a sua densidade ρ e a constante de gravitação universal G, o leitor pode obter facilmente a seguinte expressão:

$$f = C\sqrt{\rho}$$

Fig.1: Um paraquedista em queda livre atinge rapidamente a velocidade terminal.

em que $C = \alpha\sqrt{G}$. Ou seja, a frequência depende apenas da raiz quadrada da densidade e é independente do tamanho da estrela.

A semelhança mecânica

A análise dimensional é muito útil em engenharia para analisar processos que envolvem por vezes dezenas de grandezas físicas.

O teorema π de Buckingam estabelece a possibilidade de reescrever as equações que descrevem um dado fenómeno em função de quantidades adimensionais, em número sempre inferior à quantidade de grandezas físicas envolvidas no problema.

Ou seja, se tivermos um fenómeno descrito por uma relação funcional $f(q_1, q_2, ..., q_n) = 0$, em que q_i são grandezas físicas quaisquer, podemos sempre encontrar uma relação $F(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m) = 0$, em que π_i são grandezas adimensionais, sendo que em geral $m = n = -3$. Algumas dessas grandezas adimensionais são, por exemplo, o número de Reynolds ($Re = \frac{\rho l v}{\eta}$), em que ρ é a densidade do fluido η, a sua viscosidade.
A primeira vantagem de reescrever as equações com base em quantidades adimensionais é que reduzimos o número de variáveis no problema (normalmente ficamos com menos 3). Mas a principal vantagem talvez seja o facto de, ao reescrever as equações em função de grandezas adimensionais, podermos estabelecer semelhanças entre um modelo a escala reduzida e o protótipo real. Por exemplo, para estudar as forças exercidas pelo vento numa ponte é construído um modelo de dimensões reduzidas, tipicamente numa escala de 1:100, ou seja, uma ponte com 1 km é reduzida para 10 m. Para que os testes com o modelo sejam válidos é preciso conhecer a correspondência entre as forças exercidas no modelo e as correspondentes n protótipo. Se testarmos o modelo com valores das quantidades adimensionais iguais à realidade, e com as mesmas condições de fronteira, então teremos uma equivalência directa.

Neste caso há uma relação que pode ser facilmente extraída entre a força do vento exercida na ponte modelo e na ponte real.

Vejamos um outro exemplo. Se, num modelo de um arco feito de alumínio à escala de 1:3, é necessária uma força de 1 N para esticar a corda, que força será necessária aplicar num arco de aço de tamanho real? Como o módulo de Young E é dado por $E = F/l^2$, em que F é a força aplicada, temos que a relação de forças entre o protótipo e o modelo $K_F = F_{prototipo}/F_{modelo}$ é dada pela expressão:

$$K_F = K_E / K_l^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right) = 0,02 \quad ,$$

onde K_E é a relação dos módulos de Young entre o alumínio e o aço e K_l é a relação das dimensões lineares entre o protótipo e o modelo. Ou seja, teríamos de aplicar uma força de 1/0,02 = 50 N.

Outras aplicações

Vamos agora ver algumas aplicações ao mundo da biologia. Por que razão um rato consegue sair ileso de uma queda de vários metros de altura enquanto um ser humano fica esmagado?

Vejamos quanto vale a força de impacto de um corpo de massa m com velocidade v ao chocar com uma superfície rígida:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv^2}{\Delta x}$$

onde usámos o facto de $\Delta t = 2\Delta x / \Delta v$ para um movimento uniformemente retardado, sendo Δx o valor da distorção linear provocada pelo embate do corpo.
Usando a lei de Hooke, $F = k\Delta x$, com k a constante de elasticidade do material, fica

$$F = \sqrt{kmv}$$

Usando a equação da velocidade terminal de um corpo em queda, a força fica proporcional ao quadrado das dimensões lineares do corpo($F \sim l^2$) - lembremos que $m \sim l^3$.
Resta-nos saber como medir a taxa de destruição provocada por uma força num ser vivo. Iremos considerar a distorção percentual $\Delta x / l$ no corpo do animal para medir o seu "esmagamento". Então:

$$\Delta x / l = \frac{F}{kl} = \sqrt{\frac{m}{k} l}$$

Ou seja, quanto maior for o animal, mais será ele "esmagado". Um animal com o dobro do peso terá dimensões lineares $\sqrt[3]{2} = 1,26$ vezes maiores, ou seja um "esmagamento" maior. Deixo para o leitor a tentativa de explicar porque razão as crianças se magoam relativamente menos que os adultos numa queda.

Um outro exemplo interessante é perceber por que razão os animais nos climas frios tendem a ser maiores que nos climas mais quentes. A razão é que a perda de calor dos animais é essencialmente proporcional à superfície enquanto o calor gerado é proporcional ao volume. Logo a relação entre o calor gerado e o calor perdido é dada por volume/área = $l^3 / l^2 = l$. Ou seja, animais maiores perdem percentualmente menos calor.

Façamos finalmente uma aplicação a um problema de condução de calor. Consideremos o problema de saber o tempo necessário para arrefecer (ou aquecer) um corpo a uma temperatura no seu centro T_o, quando a sua superfície está à temperatura T_s. A relação que se obtém é:

$$f\left(\frac{T_o}{T_s}, Fo, Bi\right) = 0$$

em que $Fo = \frac{at}{l^2}$ é o número de Fourier e $Bi = \frac{hl}{k}$ é o número de Biot. As constantes são a difusividade térmica a, a condutividade térmica k, e o coeficiente de transferência térmica h . Ou seja, dimensionalmente pode escrever-se uma equação para o tempo da forma:

$$t = \frac{l^2}{a} f_1\left(\frac{T_o}{T_s}, Bi\right)$$

Podemos agora responder à questão de quanto tempo mais leva um corpo a arrefecer em relação a um outro nas mesmas condições mas de tamanho diferente. O tempo de arrefecimento é proporcional a l^2. Vamos ver o caso do arrefecimento do nosso planeta. Uma esfera de 1 m de raio com uma composição grosseiramente idêntica à da Terra levaria cerca de 10 h para que a temperatura no centro desça 90 por cento da temperatura inicial. Então para o centro da Terra (raio de 6400 km) arrefecer até 90 por cento da temperatura inicial levaria o tempo $10(640000)^2 = 4,1 \times 10^{14}$ horas. O que daria 46,7 mil milhões de anos. Como a Terra tem apenas cerca de 4 mil milhões de anos, podemos ficar descansados que tão depressa não ficaremos enregelados!

Leis de escala no mundo biológico

Sabe-se empiricamente que, com um bom grau de aproximação, quase todas as grandezas referentes aos seres vivos (chamemos-lhes X, que pode ser a força, o ritmo cardíaco, a taxa metabólica, etc.) variam com a sua massa da seguinte forma [2, 3, 4]:

$$X = \alpha\, m^{\pm\gamma}$$

em que γ=1/4 ou 3/4.

Com base nesta relação vamos tirar algumas conclusões. Vejamos por que razão uma formiga consegue levantar várias vezes o seu peso, enquanto um ser humano não. A força é dada por

$$F = c_1 m^{3/4}$$

e é menos que proporcional à massa do animal. Usando o facto de um homem poder suportar duas vezes o seu próprio peso, determinamos a constante c_1 = 60.

Uma formiga de massa m = 0,1 g terá uma força de 0,06 N. Como o seu peso é 0,001 N, ela consegue exercer uma força de cerca 60 vezes o seu peso! É por esta razão que, em geral, os campeões de ginástica são pessoas relativamente pequenas.

Note que estas relações não são exactas. Elas resultam de interpolações empíricas numa gama de massas de várias ordens de grandeza. Devem por isso ser aplicadas com algum cuidado, sobretudo quando se fazem extrapolações.

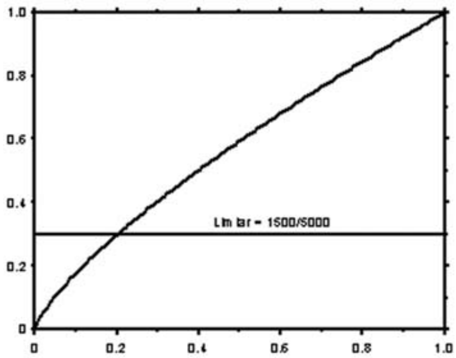


Fig.2: Quociente entre a potência necessária para voar e a potência exercida por um animal em função da sua dimensão linear. A linha horizontal marca o limiar acima do qual o animal não poderá voar.

Por exemplo, o elefante africano é o maior animal terrestre, com uma massa da ordem dos 5000 kg. Usando a expressão anterior, a força que ele pode exercer é cerca de 35 000 N, ou seja apenas 70 por cento do seu peso - ele não seria capaz de se sustentar!

O maior animal terrestre, o braquiosauro, que viveu no período Jurássico há 140 milhões de anos, pesava cerca de 80 000 kg. Segundo a nossa expressão, este animal devia ser capaz de exercer uma força de 28 000 N, ou seja apenas 30 por cento do seu peso. Embora se possa aceitar que o elefante seja capaz de se sustentar com uma força de 70 por cento do seu peso, muito provavelmente o braquiosauro não poderia fazê-lo. Daí a hipótese de esta ter sido uma criatura semi-aquática, usando a impulsão da água para suportar parte do seu enorme peso [5].
Vejamos agora, por exemplo, qual é o peso máximo que um animal pode ter para ser capaz de voar de uma forma auto-sustentada. Para massas inferiores a 100 kg, a velocidade máxima de um animal depende das suas dimensões lineares da forma [6]:

$$v_{\max} = 8m^{0.16} \sim 25\sqrt{l} \text{ m/s.}$$

Dado que a força que um animal exerce é $F = c_1 m^{3/4}$, a potência máxima de um animal é dada então por

$$P = Fv = c_1 l^{9/4} v \sim 1500\, l^{11/4}$$

É conhecido empiricamente que a potência necessária para suportar uma estrutura voadora depende das suas dimensões lineares de acordo com a expressão [2]:

$$P \sim 5000\, l^{7/2}$$

Combinando estas duas últimas expressões concluímos que terá de haver um limite para as dimensões lineares, dado por $l^{3/4} = 1500/1500$.

Resolvendo, obtemos a dimensão linear máxima que um animal pode ter para ser capaz de voar, l = 0,20 m. Para uma densidade de 0,5 g/cm^3 esse valor corresponde a um peso de 4 kg. Podemos ainda concluir que quanto menor for o animal mais facilidade terá em voar, como é o caso dos insectos.
Vamos terminar considerando ainda o que aconteceria se a gravidade da Terra fosse 10 vezes maior. Tomemos, por exemplo, o caso do coração. Como a potência necessária para bombear um caudal de fluido Q a uma altura h é $P = \rho g Q h$, se a gravidade fosse 10 vezes maior teríamos de ter um coração dez vezes mais potente. Ou seja um coração $10^{4/3} \approx 21$ vezes maior. O leitor pode tentar determinar como se deviam alterar as proporções do corpo nesta hipotética gravidade - seríamos nós mais baixos e mais robustos? Devíamos ter uma massa óssea percentualmente maior?

RESPOSTA À PERGUNTA FEITA ANTERIORMENTE:

Que altura deveria ter uma pessoa de 1.80 para pesar apenas metade?
Como a massa é proporcional ao cubo da altura, temos que m1/m2= (h1/h2)^3, Ou seja h2=1.8(1/2)^1/3 = 1.40 m, ou seja apenas 80% mais baixo. Qual seria a massa de uma pessoa com metade da altura: m3=m1(h3/h1)^3= 73(1/2)^3=9.1 kg, ou seja cerca de 1/8 da massa.

REFERÊNCIAS:

[1] Barnes, G., Physics Teacher, Abril, 234 (1989); Lin, H., American Journal Physics 50, 62 (1982).
[2] Szirtes, T., e Rozsa, P., Applied Dimensional Analysis and Modeling, McGraw Hill (1997).
[3] New Scientist, 403, 3 Abril (1999).
[4] McMahon, T., e Bonner, J., On Size and Life, Scientific American Books, New York (1983).
[5] Colbert, E. H., Amer. Mus. Novitates, 2076, 1 (1962).
[6] T. Garland, J. Zool., Lond. 199, 157 (1983).