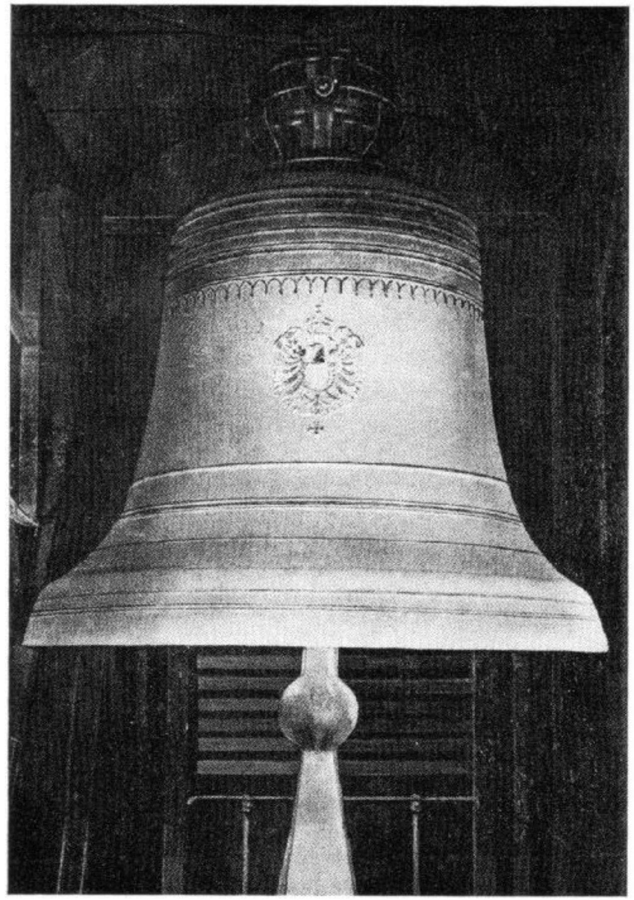
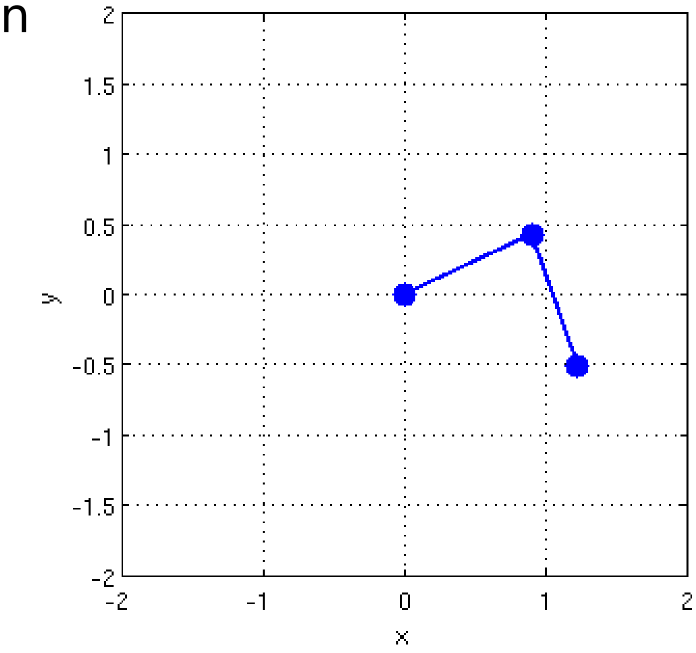
Lagrange-Mechanik: Beispiele



von Alexander Erlich

Gliederung

- **Lagrange-Formalismus vom physikalischen Standpunkt aus**
  - Zwangsbedingungen, Zwangskräfte, Freiheitsgrade
  - Lagrange-Gleichungen 2. und 1. Art
  - verallgemeinerte Impulse, zyklische Koordinaten
- **Beispiele** (2. Art)
  - Perle auf Parabelbahn
  - Rollpendel, Spezialfall
  - Doppelpendel
    - mathematisches, physikalisches
    - Matrix-Schreibweise von L, Kaiserglocke
- Sonstige
  - Perle auf Parabelbahn nach 1. Art
  - Systeme mit ode45 o.ä. analysieren



Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

- **Zwangsbedingungen** schränken die freie Bewegung der Systemteilchen ein (geometrische Bindungen)

- Zwangsbedingungen sind Auswirkungen von **Zwangskräften** (z.B. Auflagekräfte, Fadenspannungen)

- **Zwangsbedingungen** zu formulieren ist unerlässlich! **Zwangskräfte** auszurechnen ist für Physiker jedoch selten interessant

Zwangsbedingungen und Freiheitsgrade

- Freiheitsgrade sind die unabhängigen „Freiheiten“ des Systems
- Die häufigsten Freiheitsgrade sind für Translation, Rotation, Oszillation
- Die Zahl der Freiheitsgrade wird durch Zwangsbedingungen verringert
- Freiheitsgrade kann man gut intuitiv aufspüren!

	Translations	Rotation	Schwingung
zylinderförmiges Fass mit Schlupf	2	2	-
ohne Schlupf	1	-	-
starrer Stab	3	2	-
starres Dreieck	3	3	-
starrer Würfel	3	3	-

Klassifikation der Zwangsbedingungen

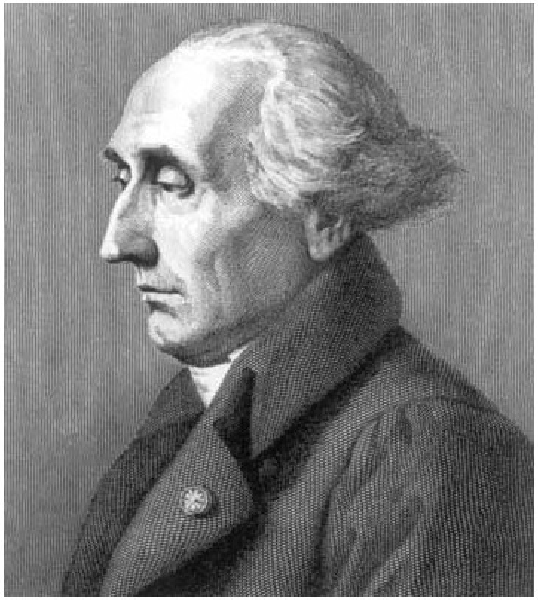
- **holonome** Zwangsbedingungen
  - holonom-**skleronom**, d.h. nicht explizit von der Zeit abhängig
  - holonom-**rheonom**, d.h. mit expliziter Zeitabhängigkeit

  Die Unterscheidung ist auch in Bezug auf Energieerhaltung wichtig.

- **nicht-holonome** Zwangsbedingungen
  - Zwangsbedingungen als **Ungleichungen**
  - Zwangsbedingungen in **differentieller**, schwer oder **nicht integrierbarer Form**

Zwangsbedingungen und Lagrange-Gleichungen

- holonome Zwangsbedingungen – ob zeitabhängig (rheonom) oder nicht (skleronom) **reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade**
- **Lagrange-Gleichungen 2. Art** sind dafür das Mittel der Wahl
- nicht-holonome Zwangsbedingungen (eher selten) können vorerst **nicht reduzieren**!
- Diese werden als Nebenbedingungen bei Lagrange-Gleichungen **1. Art** verwendet



- Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Lagrange-Gleichungen 2. Art

- Die *n* **verallgemeinerten Koordinaten**, welche die Freiheitsgrade beschreiben, seien

$$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$$

- Die **Lagrange-Funktion** sei

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)=T(\dot{\vec{x}})-V(\vec{x},t)$$

- Dann sind die *n* **Lagrange-Gleichungen 2. Art**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}=0$$

- Man benutzt sie, wenn ein Funktional **ohne Nebenbedingung** zu variieren ist

Lagrange-Gleichungen 1. Art

- Die k Zwangsbedingungen (holonom oder nicht-holonom) seien

$$g_1(\vec{x},t)=0,\ldots,g_k(\vec{x},t)=0$$

- Die k Lagrange-Multiplikatoren seien

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$$

Dann sind die $n+k$ **Lagrange-Gleichungen 1. Art**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial \vec{x}}$$

- Die Zwangskräfte, die von den Nebenbedingungen $g_i=0$ kommen, sind

$$F_i=\lambda_i\nabla g_i$$

verallgemeinerte Impulse, zyklische Koordinaten

- Kräfte und Impulse berechnet man aus der Lagrange-Funktion so:

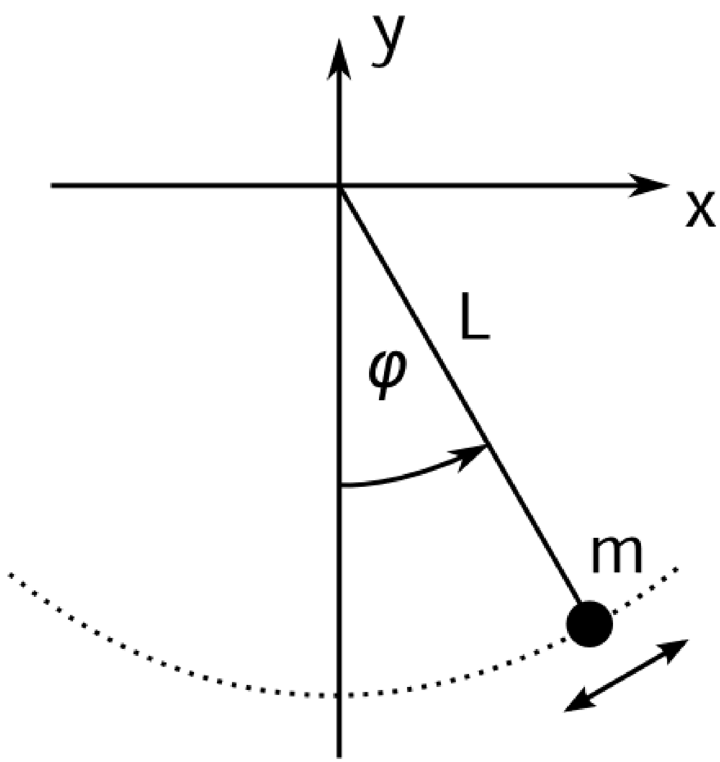
$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}, \quad \vec{F} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \qquad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \longleftrightarrow \dot{\vec{p}} - \vec{F} = 0 \right)$$

- Als zyklische Koordinaten bezeichnet man verallg. Koordinaten, die in der Lagrange-Funktion „nur gepunktet“ vorkommen, oder

$$x_i \ \ zyklisch \longleftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \longleftrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = const.$$

- Jede zyklische Koordinate führt auf einen Erhaltungssatz (Symmetrie)

mathematisches Pendel



- ein Freiheitsgrad, eine verallgemeinerte Koordinate φ
- Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + m g L \cos(\varphi)$$

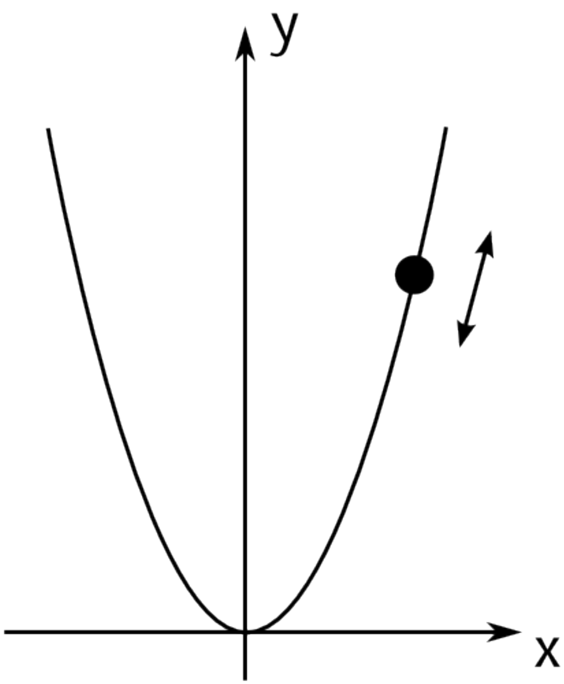
- Bewegungsgleichung für φ

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi)$$

Energieerhaltung (L nicht explizit zeitabhängig)

- `Pendel([1,100],[1;0])`

Perle auf Parabelbahn – nach 2. Art



- ein Freiheitsgrad, eine verallgemeinerte Koordinate x
- Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2) - mgax^2$$

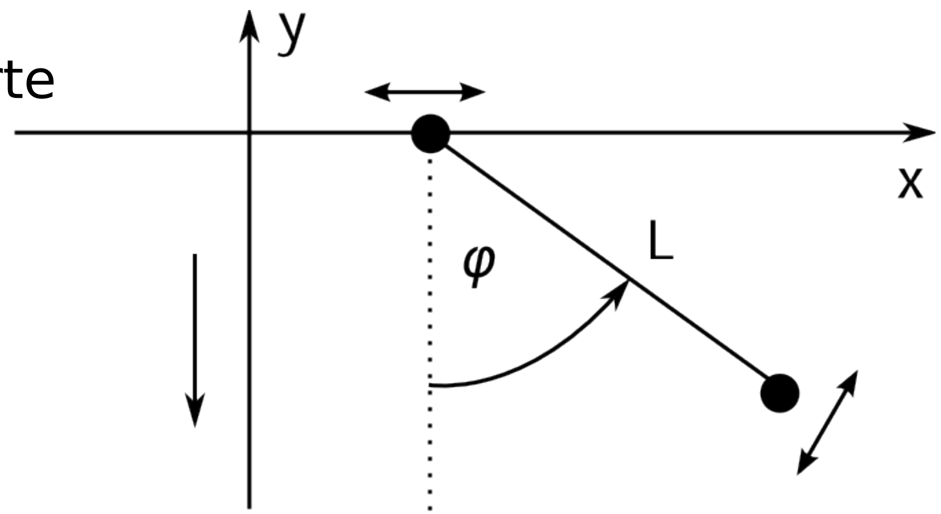
- Bewegungsgleichung für x

$$(1+4a^2x^2)\ddot{x} + 4a^2\ddot{x}^2 x + 2gax = 0$$

- Energieerhaltung
- `Parabelbahn([1,100],[1.2;0])`

Rollpendel

- zwei Freiheitsgrade, verallgemeinerte Koordinaten x_1 und φ



- Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \cos(\varphi)(\dot{x}_1 \dot{\varphi} + g)$$

- `Rollpendel([1,100],[0;3;0;-1])`

- Bewegunsgleichungen für x_1 und φ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 L(\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 L(L\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos(\varphi) + g\sin(\varphi)) = 0$$

Rollpendel

- x ist eine zyklische Koordinate, es ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\rightarrow p_{x_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=(m_1+m_2)\dot{x}_1+m_2 l\dot{\varphi}\cos(\varphi)=const.$$

- nach Liouville also **integrabel** (Energieerhaltung, p_x - Erhaltung)
- für $p_x= 0$ und Einheitsmassen/-längen folgt $-2\dot{x}_1=\dot{\varphi}$
- fordert man $p_x=0$ und integriert die obige Gleichung, ergibt sich

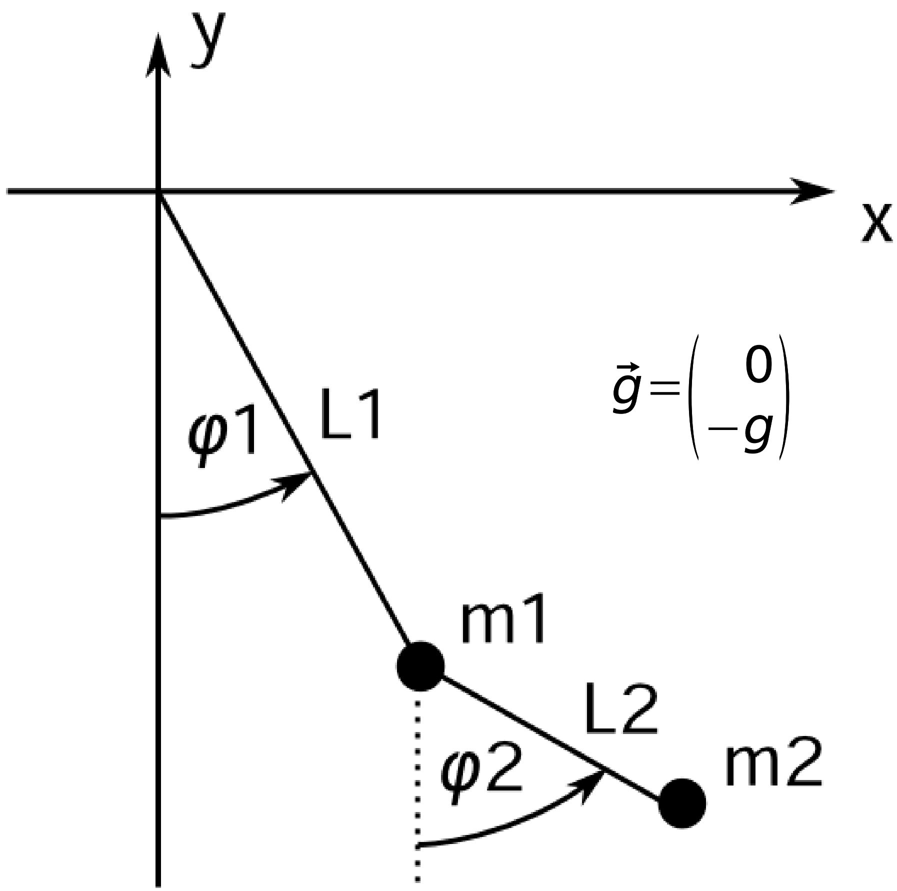
$$(m_1+m_2)x_1+m_2 l\sin(\varphi)=const.$$

- für $const.=0$ lässt sich zeigen, dass sich m_2 auf dem unteren Teil einer **Ellipse** bewegt. Die Halbachsen sind dann

$$a=l\frac{m_1}{m_1+m_2}, b=l$$

- `Rollpendel([1,100],[0;4;0;-2])`

„mathematisches“ Doppelpendel



$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

- ein „mathematisches“ Doppelpendel

- `Doppelpendel([1,100],[0;7;0;-2])`

„mathematisches“ Doppelpendel

- verallgemeinerte Koordinaten φ_1, φ_2
- Lagrange-Funktion $L = T + V$ mit

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$V = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\varphi_1) - m g l_2 \cos(\varphi_2)$$

- **Energieerhaltung** (nach Liouville vorerst **nicht integrabel**)
- Die **Bewegungsgleichungen** für φ_1 und φ_2 sind

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = l_1 \ddot{\varphi}_1 + g \sin(\varphi_1) + \frac{l_2 m_2}{m_1 + m_2} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \sin(\varphi_1) + l_1 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1]$$

Einschub: Lagrange-Funktion in Matrixschreibweise

- Die meisten Lagrange-Funktionen kann man auch schreiben in der Form

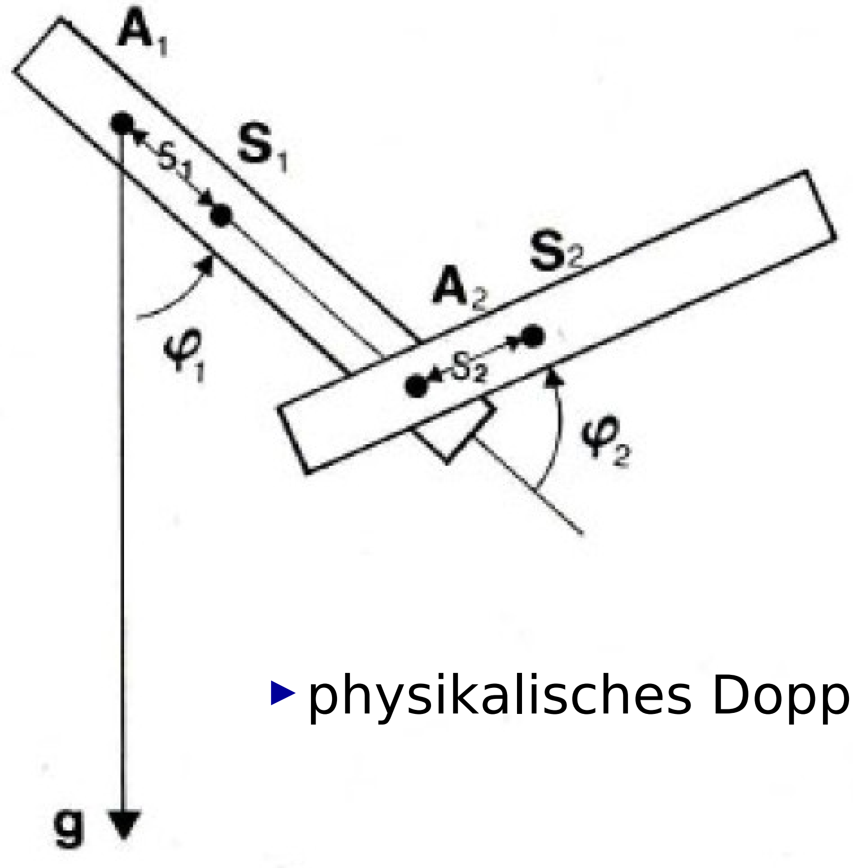
$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot\varphi_1, \dot\varphi_2)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\varphi_1, \varphi_2)\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}$$

- Dies ist leicht einsehbar, wenn man die Matrizen in der Lagrange-Gleichung ausmultipliziert. Z.B. ist dann die kinetische Energie T

$$T = \frac{1}{2}(\dot\varphi_1, \dot\varphi_2)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot\varphi_1, \dot\varphi_2)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(t_{11}\dot\varphi_1^2 + (t_{12}+t_{21})\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + t_{22}\dot\varphi_2^2)$$

Physikalisches Doppelpendel bei niedrigen Energien



- physikalisches Doppelpendel

Physikalisches Doppelpendel bei niedrigen Energien

- Die Lagrange-Funktion des realen Doppelpendels ist sehr lang! Deshalb hier skaliert und bis **zur 2. Ordnung entwickelt** (**!**)

$$L = T + V = \frac{1}{2}\left[(A+B+2)\dot{\varphi}_1^2 + 2(1+B)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + B\dot{\varphi}_2^2\right] - \frac{1}{2}\left[(C+1)\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + 1\varphi_2^2\right]$$

- *A*, *B* und *C* enthalten Informationen über Trägheitsmomente I_1 und I_2, Massen m_1 und m_2, Abstand *a* fixierter Punkte, Erdbeschl. *g*
- Dies erinnert an die Form der Matrixschreibweise

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\varphi_1, \varphi_2)\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, T = \frac{1}{2}(t_{11}\dot{\varphi}_1^2 + (t_{12}+t_{21})\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + t_{22}\dot{\varphi}_2^2)$$

- Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich: $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} A+B+2 & 1+B \\ 1+B & C \end{pmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} C+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Physikalisches Doppelpendel bei niedrigen Energien

- $L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\varphi_1, \varphi_2)\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}A+B+2 & 1+B\\ 1+B & C\end{pmatrix}, \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix}C+1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- Die Bewegungsgleichungen für diesen *kleinenergetischen* (!) Fall sind

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = 0 \leftarrow\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\dot{\vec{\varphi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{T}\vec{\varphi}\right) + \boldsymbol{V}\vec{\varphi} = \boldsymbol{T}\ddot{\vec{\varphi}} + \boldsymbol{V}\vec{\varphi} = 0 \leftarrow\rightarrow$$

$$\ddot{\vec{\varphi}} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{V}\vec{\varphi} = 0 \leftarrow\rightarrow \ddot{\vec{\varphi}} + \boldsymbol{M}\vec{\varphi} = 0, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{V} \quad (?)$$

- Die letzte Gleichung wird mit einem komplexen Exponentialansatz letzendlich zu einem Eigenwertproblem, denn

$$\vec{\varphi} = \vec{C}\cdot e^{i\omega t}; \quad \ddot{\vec{\varphi}} = -\vec{C}\,\omega^2 e^{i\omega t}\, \ddot{\vec{\varphi}} + \boldsymbol{M}\vec{\varphi} = 0$$

$$(\boldsymbol{M} + \omega^2 \boldsymbol{E})\vec{C} = 0; \quad \lambda = \omega^2$$

Ergebnisse der Lösung der Bewegungsgleichungen

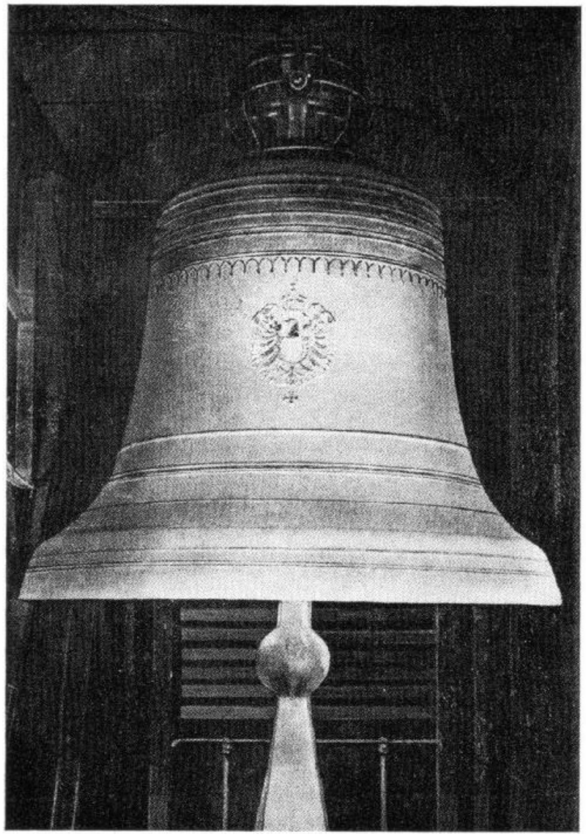
- Besonders ist die Parameterkombination $A=BC+C-1$
- Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen führt zu einem Eigenwertproblem, das nach laaanger Rechnung zwei Fälle aufzeigt:
  - eine „**langsame Schwingung**", bei der das Pendel nahezu in gestreckter Lage bleibt und somit $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ ungefähr *const.* ist

    `Doppelpendel([1,100],[0.2;0;0.3;0])`
  - eine „**schnelle Schwingung**", bei der die Pendelarme genau im Gegentakt schwingen und der Schwerpunkt in x-Richtung nahezu konstant bleibt

    `Doppelpendel([1,100],[0.4;0;-0.5;0])`

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1-C \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}$$

Das Versagen der Kölner Kaiserglocke



Die Kaiserglocke

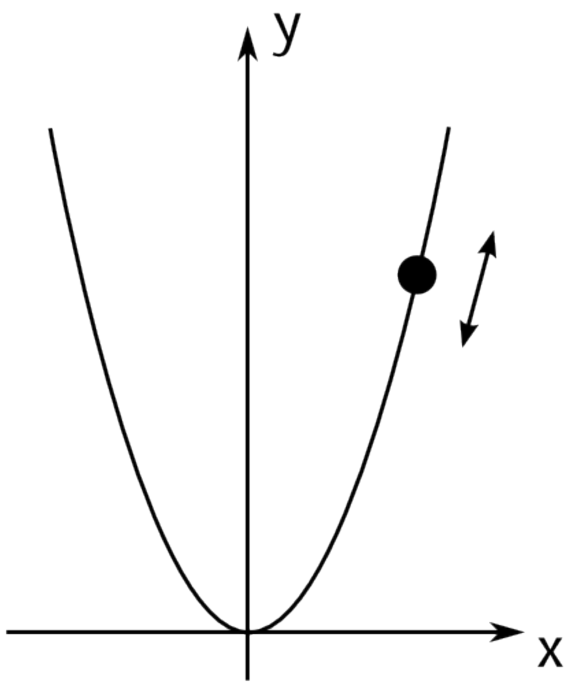
Zu Köln, da hängt seit Wochen schon
In des Domes unterstem Stocke
Zum stillen Ärger der Denkernation
Die eigensinnigste Glocke.

Wohl goß sie der Meister mit kundiger Hand
Aus hundert wälschen Geschützen;
An ihrer Wiege ein Kaiser stand:
Doch kann dies Alles nichts nützen.

Trotz aller Gebete der Clerisei
Im altkatholischen Rocke,
Trotz aller mühseligen Frillerei
Bleibt stumm die gewaltige Glocke.

- Textauszug aus: Neuer Social-Demokrat, 5. Jahrgang, Nr. 106 vom 8. September 1875

Perle auf Parabelbahn – nach 1. Art



- **Anders denken!** Zwei verallg. Koordinaten *x*, *y*; ein Freiheitsgrad!
- Die (einzige) Zwangsbedingung ist

$$y = a x^2 \rightarrow g = y - a x^2 = 0,\ \textit{Multiplikator}\ \lambda$$

- Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y$$

- Als (sinnvolle) Zwangskraft ergibt sich

$$F = \lambda \nabla g = \lambda \begin{pmatrix} -2ax \\ 1 \end{pmatrix}$$