1. Geometría

A continuación se presentan algunos teoremas importantes que deberían ser conocidos para los competidores.

Puedes enviar tus dudas al siguiente correo **entrenamientochileno@gmail.com** con asunto nombre/Geometría.

1.1. Teoremas importantes

Desigualdad Triangular: En todo triángulo de lados a, b, c, la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.

Teorema de Thales: Si una línea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón $m : n$, entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón $m : n$.

Teorema de la Bisectriz: Dado un triángulo ABC y D el pie de la bisectriz desde el ángulo $\angle A$, entonces se cumple la relación $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

Teorema de Pitágoras: Dado un triángulo cualquiera de lados a, b, c. Dicho triángulo es rectángulo si y solo si se cumple la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

Teorema del seno: Dado un triángulo ABC de lados a, b, c y ángulos α, β y γ, se cumple que $\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c} = \frac{1}{2R}$ donde R es el circunradio del triángulo.

Teorema del coseno: Dado un triángulo ABC de lados a, b, c y ángulo α opuesto al lado a. Se cumple lo siguiente $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\alpha)$.

Cuadriláteros Cíclicos: Cuatro puntos A, B, C, D viven en una circunferencia si y solo si los ángulos opuestos del cuadrilátero convexo formado por esos puntos, suman 180 grados. Esto ocurre también si y solo si en ese mismo cuadrilátero convexo, los ángulos que forman un lado y una diagonal y el lado opuesto con la otra diagonal son iguales.

Potencia de un punto: Dado un punto fijo P y una circunferencia Ω. Para cualquier recta l que pase por P e intersecte a Ω en los puntos A y B, definimos la *potencia del punto P con respecto a Ω* como la cantidad $PA \cdot PB$ y aseguramos que este producto es constante (no depende de la recta escogida), es decir: dadas dos rectas l_1 y l_2 que pasan por P y cortan a Ω en A, B y C, D respectivamente, entonces se cumple que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Teorema de Ptolomeo: Un cuadrilátero $ABCD$ cumple la siguiente desigualdad: $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ y la igualdad ocurre si y solo si, el

cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Recta de Euler: En todo triángulo, el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro O viven en una recta. Además $HG : GO = 2 : 1$

Recta de Simson: Si desde un punto P se trazan perpendiculares a los lados de un triángulo o a sus prolongaciones, los respectivos pies de las perpendiculares serán colineales si y sólo si el punto P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo.

Teorema de Menelao: Dado un triángulo ABC, sean D, E, F , puntos sobre las rectas BC, CA, AB, respectivamente. Entonces, D, E y F son colineales si y sólo si se cumple que $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$

Teorema de Ceva: Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, y F que se encuentran sobre los lados BC, CA, y AB respectivamente, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes si y solo si se cumple que $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

1.2. Problemas

Problema 1. Dado un triángulo ABC, M el punto medio del lado BC, H su ortocentro y E, F los pies de las alturas sobre los lados CA y AB. Sea S la segunda intersección del circuncírculo del triángulo ABC con el circuncírculo del triángulo AEF. Entonces S, H y M son colineales.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y M, N los ortocentros de los triángulos ABC y ABD respectivamente. Pruebe que $MNCD$ es un paralelógramo.

Problema 3. ABC un triángulo acutángulo, de alturas AD, BE y CF (con D en BC, E en AC y F en AB). Sea M el punto medio del segmento BC. La circunferencia circunscrita al triángulo AEF corta a la recta AM en A y en X. La recta AM corta a la recta CF en Y. Sea Z el punto de corte de las rectas AD y BX. Pruebe que YZ es paralelo a BC.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD se cortan en E. Las prolongaciones de los lados AD y BC más allá de A y B se cortan en F. Sea G el punto tal que $ECGD$ es un paralelógramo, y sea H la imagen de la reflexión de E respecto a la recta AD. Pruebe que D, H, F, G son puntos concíclicos.

Problema 5. Sea ABC un triángulo que satisface que $AC + BC = 3 \cdot AB$. El incírculo del triángulo ABC tiene centro I y toca a los lados BC y CA en los puntos D y E, respectivamente. Sean K y L las reflexiones de los puntos D y E respecto al punto I. Pruebe que los puntos A, B, K, L viven en una

circunferencia.

Problema 6. En un triángulo acutángulo ABC la bisectriz interior del ángulo A corta a BC en L y corta al circuncírculo del triángulo ABC de nuevo en N. Desde L se dibujan perpendiculares hacia las rectas AB and AC, intersectandolas en los puntos K y M respectivamente. Pruebe que el cuadrilátero $AKNM$ y el triángulo ABC tienen la misma área.

Problema 7. Sea AD la altura relativa al lado BC del triángulo ABC, M y N son los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Sea E el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos BDM y CDN. Muestre que la recta DE pasa por el punto medio de MN.

Problema 8. Sea ABC un tráingulo. Sea D la reflexión de C con respecto a AB y sea E la reflexión de B con respecto a AC. Las rectas DB y EC se cortan en T. Pruebe que AT pasa por el circuncentro del triángulo ABC.