# Guía de Preparación: Álgebra

**Para el Selectivo del Equipo Chileno de Matemáticas 2017**

22 de noviembre de 2016

A continuación se presentan los contenidos de álgebra que debieran ser de conocimiento de los competidores para la rendición del selectivo para las olimpiadas de matemática internacionales en las que Chile participará el 2017.

## 1. Inducción

El principio de inducción es una de las técnicas clásicas para resolver problemas que dependen de un número natural $n$, en los que la demostración del caso $n$ depende del (o de los) anteriores. En su forma más simple, este principio dice:

**Proposición 1.1** (Principio de inducción)**.** *Sea $P(n)$ una proposición que depende de un número natural $n$. Si esta proposición es correcta para $j$ (llamado* caso base*); y si al verificarse para un caso $k$ se verifica para el sucesor $k+1$ (llamado* paso inductivo*), entonces se cumple para todos los números naturales mayores o iguales a $j$.*

Asumiremos que el lector está familiarizado con el principio de inducción (en caso de no ser así, el libro *Problem Solving Strategies* de Arthur Engel contiene un buena cantidad de ejercicios para soltar la mano). También contaremos con la versión conocida como *principio de inducción fuerte*:

**Proposición 1.2** (Principio de inducción fuerte)**.** *Sea $P(n)$ una proposición que depende de un número natural $n$. Si esta proposición es correcta para $n = j$; y si al verificarse para todos los casos entre 1 y $k$ se verifica para el sucesor $(k+1)$, entonces se cumple para todos los números naturales mayores o iguales a $j$.*

La ventaja que da el principio de inducción fuerte es que permite demostrar la afirmación para un entero sin que dependa necesariamente del caso anterior. El siguiente problema es un ejemplo de esto.

**Ejemplo 1.3.** *Nicolás tiene una torre de $n$ monedas. En cada turno, Nicolás toma una torre y la divide en dos torres más pequeñas (no necesariamente simétricas). Esto lo hace hasta tener $n$ torres de una moneda. Demuestre que, sin importar cómo Nicolás separa dicha torre, se demorará $n-1$ turnos en ello.*

*Demostración.* La proposición que queremos demostrar es:

$$P(n): \text{ Nicolás demorará } n-1 \text{ turnos en separar la torre de } n \text{ monedas.}$$

Lo haremos utilizando inducción fuerte. Primero demostraemos el *caso base*. Si Nicolás inicia con una moneda, ya está separado, por lo que le tomó $0 = 1 - 1$ turnos. Por tanto la afirmación se cumple para $n = 1$.

Realizaremos ahora el *paso inductivo*. Fijamos un natural $k$ (este estará fijo, pero es un natural arbitrario), y supongamos que la afirmación se cumple para $1, 2, \cdots, k$. Intentaremos probar que en estas condiciones, también se cumple para $k+1$. Nicolás en su primer turno separa la torre de $k+1$

monedas en dos torres de $a$ y $b$ monedas, respectivamente (tales que $a+b=k+1$). Como $a, b$ son naturales menores a $k+1$, por *hipótesis inductiva* (los casos $1, 2, \cdots, k$ que estamos asumiendo), tenemos que Nicolás demorará $a-1$ turnos en la primera torre, y $b-1$ en la segunda. Por lo que en total tenemos

$$\underbrace{1}_{\text{Primera separación}} + \underbrace{a-1}_{\text{Separar la primera torre}} + \underbrace{b-1}_{\text{Separar la segunda torre}} = a+b-1 = (k+1)-1$$

turnos. Como este argumento sirve para cualquier movimiento inicial, tenemos que se cumple $P(k+1)$. Y, el *principio de inducción fuerte* nos asegura que se cumple para todos los naturales. Esto prueba lo solicitado. □

Otra ventaja es que permite lidiar cuando en el caso $k+1$ se requiere saber el caso $k-1$ o $k-5$ en vez del caso $k$. En esta situación, es necesario demostrar una mayor cantidad de casos base. Esto se debe a que si nuestra demostración del caso $k+1$ depende del caso $k-2$ y sólo conocemos el caso 1, podremos probar a partir de él el caso 4, pero no el 2 o el 3. Esto quedará mejor ilustrado con un ejemplo:

**Ejemplo 1.4.** *En un momento de locura de los gerentes del Dunkin Donuts, se les ocurrió empezar a vender donuts sólo en cajas de a 4 y de a 7. Demuestre que, eligiendo adecuadamente las cajas, es posible comprar exactamente $n$ donuts, para $n$ natural mayor o igual a 18.*

Antes de empezar, notemos que si se pueden comprar $n$ donuts, podemos comprar $n+4$ donuts, llevando una caja extra de 4 donuts. Esta es la idea clave del problema.

*Demostración.* Utilizaremos inducción fuerte. Lo que queremos demostrar es:

$$P(n): \text{ Podemos comprar } n \text{ donuts exactamente.}$$

Veamos primero que podemos comprar 18, 19, 20 y 21 donuts utilizando cajas de 7 y 4 donuts. En efecto,

$$\begin{aligned}
18 &= 7+7+4.\\
19 &= 7+4+4+4.\\
20 &= 4+4+4+4+4.\\
21 &= 7+7+7.
\end{aligned}$$

Por lo que la afirmación se cumple para $n = 18, 19, 20$ y 21. Supongamos Se cumple para todos los naturales entre 18 y $k$, con $k$ al menos 21. Queremos probarla para $k+1$, que es al menos 22. Por lo tanto, $(k+1)-4 \geq 18$. Gracias a esto y a la hipótesis de inducción, sabemos que es posible comprar exactamente $(k+1)-4$ donuts. Agregando una caja de 4 donuts extra, tenemos que se pueden comprar exactamente $k+1$ donuts. Esto completa el paso inductivo.

Por el principio de inducción fuerte, se concluye lo pedido. □

**Propuesto 1.5.** *Resuelva el problema anterior, pero solo utilizando inducción "simple".*

**Propuesto 1.6.** *Sea $f_0, f_1, \ldots$ la sucesión de Fibonacci, dada por $f_0 = 0, f_1 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$. Demuestre que, para todo $n$ natural, se tiene que:*

*(a)* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$.

*(b)* $f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.

*(c)* $f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$.

**Propuesto 1.7.** *Sea $\alpha$ un real tal que $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ es entero. Pruebe que, para todo $n$ natural, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ es entero.*

# 2. Polinomios

**Definición 2.1.** *Un polinomio $P(x)$ en una variable $x$ es una expresión de la forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*donde los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son constantes en algún conjunto como $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{A}$, con $\mathbb{A}$ un conjunto, lo denotamos por $\mathbb{A}[x]$.*

Sea $n$ el mayor exponente tal que $a_n \neq 0$. A este $n$ le llamamos el **grado** de $P(x)$ y lo denotamos por $\text{grad}(P)$ (o $\deg(P)$ usualmente). Decimos que un polinomio es constante si es de la forma $P(x) = a_0$. Si $a_n \neq 0$ decimos que $\text{grad}(P) = 0$. Si $P(x) = 0$, decimos que $\text{grad}(P) = -\infty$.

Decimos que dos polinomios $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ son iguales si sus coeficientes término a término son iguales. Definimos también una raíz de un polinomio $P(x)$ como un número $r$ tal que $P(r) = 0$.

Los polinomios, así como los enteros, están dotados de una estructura que permite operar con ellos: Podemos sumar, multiplicar y dividir polinomios. Definimos la suma de dos polinomios $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ con $n \geq m$ como

$$(P+Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots a_n x^n.$$

La resta se define aálogamente. La multiplicaciòn queda definida como

$$(PQ)(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \cdots + a_0 b_k)x^k + \cdots + (a_n b_m)x^{n+m}.$$

**Ejemplo 2.2.** *Consideremos $P(x) = x^4 + 2x + 5$, $Q(x) = 3x^2 + 7x$, entonces:*

$$(P+Q)(x) = x^4 + 3x^2 + 9x + 5.$$

$$(P-Q)(x) = x^4 - 3x^2 - 5x + 5.$$

$$(PQ)(x) = 3x^6 + 7x^5 + 6x^3 + 29x^2 + 35x.$$

Ahora veamos como funciona la división de polinomios. Asumiremos por conocidas la siguientes proposiciones:

**Proposición 2.3.** *Sean $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ ($o\, \mathbb{C}[x]$) con $Q(x) \neq 0$. Existen únicos $C(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que*

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x),$$

*con grad$(Q) >$ grad$(R)$.*

**Observación 2.4.** *Si $R(x) = 0$, decimos que $Q(x)$ divide a $P(x)$ y denotamos esto como $Q(x)|P(x)$.*

**Ejemplo 2.5.** *Consideremos $P(x) = x^5 - 3x^2 + 5x - 3, Q(x) = x^3 - 2x + 1$ Usando algoritmo de la división (que se asume sabido) podemos escribir $P(x) = Q(x)(x^2 + 2) + (-4x^2 + 9x - 5)$ y se cumple $3 =$ grad$(Q) >$ grad$(-4x^2 + 9x - 5) = 2$.*

**Proposición 2.6.** *Sea $P(x)$ un polinomio. Un número $r$ es raìz de $P(x)$* ***si y solo si*** *$(x - a)|P(x)$.*

Esta última proposición será fundamental en la demostración del siguiente hecho importante, al igual que el ya mencionado principio de inducción:

**Teorema 2.7.** *Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene n+1 raíces distintas, entonces $P(x) = 0$.*

*Demostración.* Lo haremos por inducción sobre $\deg(P) = n$.

Para $n = 1$, $P(x) = a_1 x + a_0, a_1 \neq 0$. Es fácil ver que $P(x)$ solo tiene como raíz a $-\dfrac{a_0}{a_1}$, con lo que queda probado el caso base.

Supongamos que el teorema es cierto para algún $n-1$ y lo demostraremos para $n$.

Sean $r_0, \cdots, r_n$ raíces de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Por la proposición 2.6, $P(x) = (x - r_0)Q(x)$ con $\text{grad}(Q) = n-1$. Así $Q(x)$ tiene $n$ raíces distintas, a saber, $r_1, \cdots, r_n$. Por la hipótesis de inducción, $Q(x) = 0$, lo que implica $P(x) = 0$. Así el teorema es cierto para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Y enunciamos la última proposición de la sección a continuación:

**Proposición 2.8.** *Sea $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Se cumple que $a - b | P(a) - P(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq b$.*

Se deja al lector los siguientes ejercicios:

**Propuesto 2.9.** *Muestre que $(x-1)^2 | (nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)$ para todo $n \geq 1$.*

**Propuesto 2.10.** *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Pruebe que si $P(0)$ y $P(1)$ son impares, entonces $P(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.*

# 3. Ecuaciones funcionales

Daremos por conocida la definición de función y la notación $f : A \to B$ para representar una función $f$ cuyo conjunto de inicio es $A$ y el de llegada es $B$. Una *ecuación funcional* es un problema donde lo que se intenta determinar son las funciones que cumplen una determinada condición. Un ejemplo de esto es el siguiente problema, que quedará propuesto sin mayores comentarios.

**Propuesto 3.1.** *Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

No es difícil comprobar que la función $f(x) = x^2$ cumple lo pedido; sin embargo, no es claro que sea la única. Con las técnicas que desarrollaremos en los siguientes párrafos, es posible encontrarlas todas.

La primera herramienta a tener en cuenta es *reemplazar valores*. Como la condición (usualmente) se cumple para todos los reales, tenemos plena libertad de hacer algunos reemplazos convenientes, a fin de obtener información del problema. Asumiremos que los competidores estarán familiarizados con este concepto, además de una buen comprensión de la aritmética de los conjuntos numéricos con los que se trabaja usualmente $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$.

**Ejemplo 3.2.** *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x+y) + xy = f(x)f(y), \qquad \textit{para todos } x, y \textit{ en } \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Intentaremos reemplazar $x$ e $y$ por valores convenientes. Veamos primero que la función $f$ es evaluada tres veces: en $x+y$, en $x$ y en $y$. Si esos tres valores fueran iguales, sería más fácil despejar el valor de $f(x)$. Así que intentaremos eso. Tomando $x = y = 0$, tenemos que $f$ cumple:

$$f(0+0) + 0 \cdot 0 = f(0)f(0).$$

Esto es,

$$f(0) = [f(0)]^2.$$

Desde acá, tenemos que $f(0)$ puede valer cero o uno. Por tanto, separaremos en dos casos:

- $\underline{f(0)=0}$: Es tentador intentar utilizar la información obtenida. Por tanto, nos gustaría que $x, y$ o $x+y$ sea cero, para así poder reemplazar el valor de $f(0)$. Por ello, tomaremos $y=0$, debido a que así los otros dos valores de la función ($f(x)$ y $f(x+y)$) pasan a ser iguales. Tomando $y=0$, tenemos que

$$f(x+0)+x\cdot 0=f(x)f(0).$$

Utilizando que $f(0)=0$, tenemos que

$$f(x)=f(x)\cdot 0=0.$$

Esto significa que $f(x)$ es cero sin importar el valor que toma $x$. Por lo tanto, $f(x)=0$ es una posible función. Para verificar que si cumple, deberíamos tener que

$$xy=0+xy=f(x+y)+xy=f(x)f(y)=0\cdot 0=0,$$

de donde $xy=0$ sin importar cuánto vale $x$ o $y$, contradicción. Por ello, esta función no cumple lo pedido.

- $\underline{f(0)=1}$: En este caso, al igual que arriba, intentaremos utilizar la información que ya tenemos. Si reemplazamos $x=0$ o $y=0$, no nos aporta información; por ello, reemplazaremos $x+y=0$. Para ello, tomemos $x=1, y=-1$. Tenemos que

$$f(1-1)+1\cdot(-1)=f(1)f(-1),$$

de donde

$$f(1)f(-1)=f(0)-1=1-1=0.$$

Por lo que $f(1)=0$ o $f(-1)=0$ (en este caso, se justifica que hayamos tomado $x=1$ y no $x=2$ o $x=100$, debido a que así llegábamos a que el producto de dos expresiones es cero). Tenemos dos mini-casos nuevamente.

  - $\underline{\text{f(1)=0}}$: Reemplazando $x=1$, tenemos que

$$f(1+y)+1\cdot y=f(1)f(y)=0.$$

    De acá, si llamamos $k=1+y$, tenemos que

$$f(k)+y=0\Rightarrow f(k)=-y=1-(1+y)=1-k.$$

    Por lo que la función $f(k)=1-k$ es nuestro segundo candidato a solución. Reemplazando en la condición pedida, tenemos que

$$1-(x+y)+xy=f(x+y)+xy=f(x)f(y)=(1-x)(1-y)=1-(x+y)+xy.$$

    Por lo que $f(x)=1-x$ cumple lo pedido.

- $\underline{f(-1) = 0}$: De la misma manera, reemplazando $x = -1$ tenemos que

$$f(-1 + y) + (-1) \cdot y = f(-1)f(y) = 0.$$

De donde

$$f(y - 1) = y$$

Llamando $k = y - 1$, tenemos que

$$f(k) = y = 1 + (y - 1) = 1 + k$$

Por lo que el tercer candidado a solución es $f(k) = 1 + k$. Verificando nuevamente,

$$1 + (x + y) + xy = f(x + y) + xy = f(x)f(y) = (1 + y)(1 + y) = 1 + (x + y) + xy$$

Probando que también es solución.

Gracias al análisis anterior, concluímos que las únicas funciones que cumplen lo pedido son $f(x) = 1 - x$ y $f(x) = 1 + x$. Esto concluye lo pedido. □

**Observación 3.3.** *No olvidar comprobar que cualquier posible candidato a solución en verdad satisface la ecuación inicial.*

Daremos por conocidas tambien dos propiedades de funciones que son útiles para resolver problemas: *inyectividad* y *sobreyectividad*.

**Definición 3.4.** *Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que $f$ es* inyectiva *si $f(a) = f(b)$ implica $a = b$, para todos los $a, b \in A$. Diremos también que $f$ es* sobreyectiva *si, para cada $b \in B$, existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.*

**Propuesto 3.5.** *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que, para todos $x, y > 0$,*

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y).$$

**Propuesto 3.6.** *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para todos $x, y$ reales,*

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

# 4. Desigualdades

Se asume que el lector está familiarizado con la existencia de los números reales, del conjunto de los números positivos, y de la siguiente propiedad:

**Proposición 4.1.** *Para todo números real $x$, se cumple $x^2 \geq 0$, con igualdad si y solo si $x = 0$.*

Asumiremos también que es lo que se entiende por una desigualdad y describir los casos de igualdad cuando estos existen, así como de resolver problemas de encontrar máximos o mínimos: Los tres teoremas siguientes serán las principale herramientas que consideraremos:

**Teorema 4.2** (Desigualdad MA-MG)**.** *Para todo natural $n$ y toda $n$-tupla de números reales positivos $a_1, \ldots, a_n$ se tiene*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

*donde la igualdad se da* ***si y solo si*** $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

**Teorema 4.3** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para todo natural $n$ y números reales $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ se cumple*

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq ({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2)$$

*donde la igualdad se da* ***si y solo si*** *existe un número real $\lambda$ tal que $a_1 = \lambda b_1, \ldots, a_n = \lambda b_n$.*

**Teorema 4.4** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz, forma de Engel)**.** *Para todo natural $n$, números reales $a_1, \ldots, a_n$ y números positivos $b_1, \ldots, b_n$ tenemos*

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + \cdots + b_n}$$

*con igualdad* ***si y solo si*** *existe un número real $\lambda$ tal que $a_1 = \lambda b_1, \ldots, a_n = \lambda b_n$.*

Las primeras dos desigualdades han sido extensamente trabajadas en olimpiadas, y no debería ser problema encontrar bibliografía. La tercera es menos conocida, pero no por eso menos . Una buena referencia para esta es el libro "Problems from the Book"de Titu Andrescu y Gabriel Dopinescu.

**Ejemplo 4.5** (India)**.** *Pruebe que para cualesquiera números reales $a, b, c$ tales que $a + b + c = 1$ se tiene*

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

*Demostración.* El truco es reescribir el lado izquierdo como $\dfrac{a^2}{a+abc} + \dfrac{b^2}{b+abc} + \dfrac{c^2}{c+abc}$. esta forma es ideal para utilizar la desigualdad de Cauchy Schwarz en la forma de Engel, y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} &= \frac{a^2}{a+abc} + \frac{b^2}{b+abc} + \frac{c^2}{c+abc} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} \\ &= \frac{1}{1+3abc}.\end{aligned}$$

De esto, para resolver el problema nos basta que $\dfrac{1}{1+3abc}$ sea mayor o igual a $9/10$, es decir, $abc \leq 1/27$. Pero esto puede obtenerse ocupando la desigualdad MA-MG, pues nos queda

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

□

**Propuesto 4.6.** *Para números reales aritrarios $a, b, c$ pruebe la desigualdad*

$$\frac{a}{c+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1. \tag{1}$$

**Propuesto 4.7.** *Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales no negativos. Muestre que, para cualquier número positivo $x$,*

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2.$$