1. Combinatoria

A continuación se presentan los contenidos de combinatoria que debieran ser de conocimiento de los competidores.

1.1. Conteo

El conteo consiste en -tal cual lo indica su nombre- contar la cantidad de objetos en un contexto determinado. Las herramientas básicas para esto son:

La regla de la suma: Esta regla es muy natural. Se divide lo que se quiere contar en partes disjuntas, se cuenta por separado y luego se suma para obtener el total.

La regla del producto: Se considera la cantidad de posibilidades que se tiene y si el resto del problema es independiente, se puede multiplicar el resultado particular por la cantidad considerada inicialmente

Inducción: Se separa el problema para obtener uno más pequeño y de esta forma obtener reglas de recursión que permitan concluir.

Contar de varias formas: Muchas veces es posible contar cierta cantidad de formas distintas. Esto permite obtener identidades combinatoriales.

Hace falta tomar en cuenta que estas técnicas son poco significativas por separado debido a que la mayor parte del tiempo se ocupan al mismo tiempo. Algunos ejemplos permitirán aclarar esto:

Ejemplo 1.1. *El número de subconjuntos en un conjunto de n elementos es 2^n.*

Demostración. Consideremos un subconjunto. Para cada elemento de A, este elemento puede estar o puede no estar en este subconjunto. Es decir tenemos dos posibilidades. Al haber n elementos en A esto nos da un total de 2^n posibilidades. □

Para este ejemplo hemos decidido usar la demostración más rápida que había a nuestra disposición, sin embargo existen otras demostraciones más largas que permiten sin embargo obtener identidades interesantes.

Ejemplo 1.2. *El número de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Demostración. Para demostrar esto vamos a usar una técnica esencial. Ordenaremos los elementos, tomaremos los que necesitamos y dividiremos por total. Si escojamos un elemento, tenemos n posibilidades, a lo que quedan $n-1$ elementos. Si escojemos otro más tendríamos ahora $n-1$ posibilidades. Debemos hacer esto exactamente k veces pues queremos escoger k elementos. Con esto obtenemos $n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Podríamos detenernos aquí. Sin embargo, en nuestro proceder hemos ordenado involuntariamente los objetos, por lo que debemos restar las posibles combinaciones de elementos que hayamos contado varias veces. Como tenemos k elementos, debemos justamente dividir por $k!$ que corresponde al número de formas en que es posible ordenar k elementos. □

Notemos que con lo que acabamos de demostrar es facil concluir usando la regla de la suma el siguiente resultado:

Corolario 1.3. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Notemos que obtuvimos esta identidad contando justamente los mismos objetos de dos formas distintas. A continuación invitamos al lector a poner en practica lo aprendido con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4. *Un grupo de $2n$ jugadores participan en un torneo de tenis. Encuentro el número de pares posibles que se pueden formar para la primera fase del torneo.*

Demostración. Si ordenamos los jugadores. obtenemos $(2n)!$ combinaciones. Luego debemos dividir esto por el número de pares totales $n!$ y por las formas en que es posible esconjer los miembros de cada par 2^n. De ahí se obtiene el resultado: $\frac{(2n)!}{2^n n!}$. □

Se invita al lector a obtener este resultado obteniendo una forma de recursión y escogiendo cada par por separado y dividiendo por la cantidad de pares.

Propuesto 1.5. *¿De cuantas formas se pueden elegir dos conjuntos disjuntos en un conjunto de n elementos?*

Propuesto 1.6. *Considere un polígono convexo de n lados.*

- *¿Cuantas diagonales posee?*
- *¿Cual es el número de puntos de intersección de las diagonales?*
- *Supongamos que nunca sucede que tres diagonales intersectan en un mismo punto ¿En cuantas partes se divide el polígono?*
- *Supongamos que nunca sucede que tres diagonales intersectan en un mismo punto ¿En cuantas partes se divide el polígono? Se dibujan todas las diagonales tales que nunca sucede que tres intersectan en un mismo punto ¿Cuantos triángulos se pueden encontrar en esta figura?*

Por ultimo y para terminar esta sección ilustraremos como es posible usar formulas simples de conteo en diferentes contextos.

Ejemplo 1.7. *Considere un tablero de $n \times n$ ¿Cuantos caminos posibles hay desde la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha pasando solamente por la lineas del tablero, realizando movimientos hacia arriba y hacía la derecha?*

Demostración. Basta modelar en forma adecuada el problema. Notemos que cada camino realiza n movimientos hacía arriba y n movimientos hacía la derecha. Si los ordenamos obtendremos una lista consecutiva de movimientos

$(A, D, A, A, D..., D)$ donde D es moverse a la derecha y A es moverse hacia arriba. Ahora basta con que contemos de cuantas formas distintas se puede ordenar estos símbolos. O lo que es lo mismo, de cuantas formas se pueden ordenar las A en una lista de largo $2n$. Es decir, buscamos el número de subconjuntos de n elementos en un conjunto de $2n$ elementos. Lo que es $\binom{2n}{n}$. □

Proposición 1.8. $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Demostración. Notemos que el lado izquierdo corresponde al número de caminos de una esquina a otra pasando por un tablero. Si contamos ahora el número de caminos que pasa por la diagonal obtendremos lo siguiente: Para llegar a cada punto en la diagonal desde la esquina inferior izquierda se deben realizar n movimientos en total, de los que k son hacía la derecha y $n-k$ son a la izquierda. Luego basta con escoger k elementos entre n elementos, es decir $\binom{n}{k}$. Ahora para llegar de este punto de la diagonal a la esquina inferior derecha, por el mismo razonamiento se debe escoger entre $\binom{n}{k}$ caminos distintos. Luego multiplicando y sumando se obtiene lo pedido. □

Corolario 1.9. *Para todo p entero primo $\binom{2p}{p} - 2$ es divisible por p^2*

Lo cierto es que es importante modelar de forma adecuada los problemas de combinatoria y recordar todos los factores y posibilidades que se deben tomar en cuenta. Es esencial saber reconocer en que momento se esta ordenando la información y cuando para saber si hace falta dividir el resultado.

1.2. Tableros

Un tablero es un arreglo de casilleros, el más básico consiste en un cuadriculado de m x n, en el que se ponen piezas de alguna índole, e.g. piezas que usan un casillero, dominos.

La principal herramienta que utilizamos es la **coloración**. Esta técnica consiste en asignar colores a cada casillero y de esa forma estudiar como se comportan los casilleros de un solo color por vez. Para simplificar es usual utilizar letras mayúsculas como colores. Veremos como funciona esta técnica con dos ejemplos de coloraciones útiles.

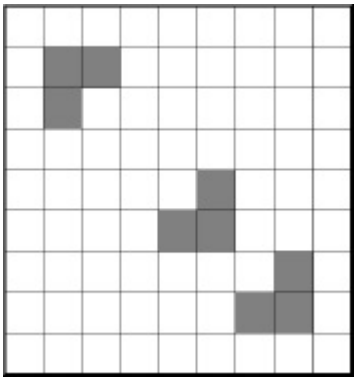
Ejemplo 1.10. *Tenemos un tablero cuadrado de 8 x 8, al que le quitamos la esquina inferior izquierda y la superior derecha. Demuestre que este tablero no puede ser cubierto por dominos, de modo que se cubran todas las casillas sin que los dominos se traslapen o salgan del tablero.*

Demostración. Primero intentamos con la coloración trivial, todas las casillas del color **A**.Cada domino cubre exactamente dos casillas A y en total tenemos 62 casillas de color A, así que hasta ahora no hay problemas para que se pueda rellenar con 31 dominos.

Ahora intentemos con la coloración de tablero de ajedrez, usando los colores A y B. Partimos con la casilla superior izquierda de color A y a cada casilla de

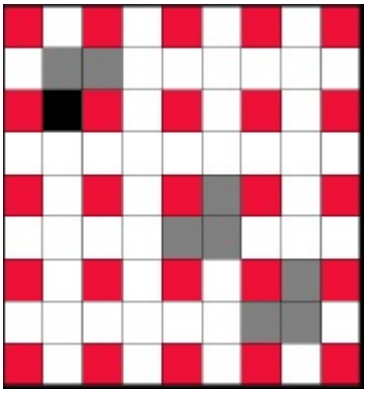
color A sus vecinos (arriba, abajo, izquierda y derecha) le corresponden casillas color B, análogo para las casillas de color B, i.e. con los colores que corresponden al tablero damero. Notamos que en el problema hay 32 casillas de color A y 30 casillas B, pero cada domino tapa exactamente una casila A y otra B. Como solo hay 30 casillas B, a lo más se pueden poner 30 dominos, de modo que no se pueden cubrir las 62 casillas del tablero. □

Ejemplo 1.11. *Niñita al intentar completar un puzzle ha colocado tres de sus piezas (todas de la misma forma) que ocupan las posiciones que se muestran en la figura siguiente*



¿Será posible completar el puzzle con esas tres piezas fijadas?

Notemos que dicho tablero es de 9x9, por lo que sería 27 piezas cada una ocupando 3 casillas del tablero. Si empleamos una coloración de dos colores Blanco y Rojo como se indica en la figura



donde también están presentes las tres piezas colocadas por Niñita. Entonces notaremos que ninguna de las tres piezas colocadas ocupa alguna de las casillas rojas y que cada casilla roja será cubierta por piezas distintas, de ser posible tal cubrimiento del tablero, gracias a la forma de las fichas. Bajo estas condiciones

la cantidad de piezas a utilizar nunca será menor que la cantidad de casillas rojas (25) más tres por las fichas ya puestas, o sea 28 lo cual entra en contradicción total con que sea realmente 27 piezas para cubrir el tablero de 9 x 9 puesto que 3 x 27 = 81. Por lo tanto tenemos que la operación de cubrir el tablero con las piezas del puzzle apoyados en las colocadas por pepito es imposible.

En esta clase de problemas hay que hacer volar la imaginación para encontrar una coloración apropiada. Aquí mostramos 2 coloraciones posibles. Otras coloraciones útiles son; pintar las filas o columnas (a veces usando más de dos colores) y colorear como tablero de ajedrez, pero con bloques de 2x2.

1.3. Teoría de Juegos

Veremos juegos de dos personas, en los que al finalizar hay un(a) ganador(a) y un(a) perdedor(a). Nuestro objetivo es determinar quién puede ganar independientemente de lo que haga su adversario(a).

Definición: Decimos que una posición/situación es perdedora (P) cuando al partir en esa situación el oponente puede ganar, independiente de lo que uno haga.

Definción: Decimos que una posición/situación es ganadora (G) cuando al partir en esa situación uno puede ganar, independiente de lo que el otro haga.

Nuestro proceso consistirá en determinar para cada situación si es G o P, partiendo por las posiciones finales (en las que es más fácil determinar si es G o P), llegando hasta la posición inicial.

Ejemplo 1.12. *En una mesa hay 2016 fichas. El jugador A retira cualquier número entre 1 y 1004 fichas. A continuación el jugador B retira un número no nulo de fichas no mayor a la mitad del número de fichas dejadas por A. Continuan de ese modo por turno, retirando cualquier número no nulo de fichas que no supere a la mitad de las fichas restantes en ese momento. Pierde el jugador que se queda con la última ficha y no puede, por lo tanto, cumplir con la regla. Determine cual de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.*

Solución
Si recibimos en la mesa:

- 1 ficha: P pues no podemos quitar ninguna.
- 2 fichas: G pues quitamos una ficha.
- 3 fichas: P pues solo podemos quitar una ficha y el otro queda en una situación ganadora.
- 4 fichas; G quitando 1 el otro pierde.
- 5 fichas: G quitando 2 el otro pierde.
- 6 fichas: G quitando 3 el otro pierde.
- 7 fichas: P pues solo se puede dejar al otro en una situación ganadora.

- ...

Así sucesivamente notamos que las posiciones de la forma $2^n - 1$ son perdedoras, mientras que las demás son ganadoras. Esto lo demostramos por inducción: Supongamos que las situaciones: $1, 3, 7, .., 2^n - 1$ son las únicas posiciones perdedoras hasta el momento. Luego las posiciones desde 2^n hasta $2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ son ganadoras, porque pueden retirar menos de la mitad de las fichas, dejando al otro jugador con $2^n - 1$ fichas en la mesa. Mientras que si quedan $2^{n+1} - 1$ estamos en una posición perdedora, pues solo podemos retirar entre 1 y $2^n - 1$, dejando al otro en posiciones ganadoras. Así como $2^{10} - 1 = 1023 < 2016 < 2047 = 2^{11} - 1$ 2016 es una posición ganadora y determinamos que A tiene estrategia ganadora,

1.4. Principio del palomar

Teorema 1.13. *Si se poseen $n + 1$ objetos y se quieren repartir en n cajas. Al menos una caja posee 2 de estos objetos.*

La idea general detrás de esto es la siguiente: Si se dispone de una cantidad suficientemente grande de objetos, estos no se pueden repartir de cualquier forma. Veamos:

Ejemplo 1.14. *Se marcan 17 puntos en un triangulo equilateral de lado 2 ¿Cual es la menor distancia máxima entre dos puntos?*

Demostración. Basta dividir el rectángulo equilatero en 16 rectángulos equilateros (Piense en el símbolo de la trifuerza). Luego si se reparten 17 puntos al menos un rectangulo posee dos puntos. Automáticamente estos no pueden estar a mayor distancia que el lado del triangulo. Esto es $\frac{1}{3}$. □

Esto también se puede enunciar de la siguiente forma:

Teorema 1.15. *Sean m, n y p tres números naturales. Si se desean colocar $np + m$ palomas en n cajas, alguna caja debe contener al menos $p + 1$ palomas. (Fuente: Wikipedia)*

El principio del palomar nos dice algo aparentemente obvio y en los casos más simples su aplicación también lo es. Sin embargo podemos encontrar problemas muy complejos en lo que se use. A modo de calentamiento invitamos al lector a tratar de hacer los siguientes ejercicios por si mismo:

- Dadas tres personas, siempre hay dos que son del mismo sexo.
- Dadas 13 personas, siempre hay dos que nacieron el mismo mes.
- Nadie tiene más de 300000 pelos en la cabeza. La capital del extraño país de **Sahlau-No** tiene 300001 habitantes ¿Podemos asegurar que dos personas tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza?
- ¿Cuantas personas se necesitan para asegurar que $2, 3, ..., n$ de ellas nacieron el mismo día del año?

- Una recta l no intersecta ni un vértice de un triangulo ABC sobre un plano. Mostrar que no puede intersectar todo los lados del triangulo.
- Mostrar que la representación decimal de $\frac{a}{b}$, con a y b coprimos, tiene un periodo de largo a lo más $b-1$.
- Mostrar que entre 11 números reales cuyo desarrollo decimal tiene una infinidad de cifras, podemos seleccionar dos de ellos de tal forma que tengan la misma n-esima cifra para una infinidad de n.
- Mostrar que entre doce enteros distintos entre si de dos cifras, siempre podemos elegir dos de ellos tal que su diferencia sea un número de la forma aa.
- Mostrar que si ninguno de los números $a, a+d, ..., a+d(n-1)$ es divisible por n entonces d y n son coprimos.

Mostraremos un ejemplo simple que permitirán entender el tipo de situaciones en las que se debe usar este principio.

Ejemplo 1.16. *Muestre que dados 10 enteros positivos de dos dígitos, se pueden escoger dos subconjuntos A y B disjuntos tales que la suma de sus elementos es la misma.*

Demostración. Vamos a modelar el problema de la forma siguiente. los valores posibles que pueden tomar las sumas de estos elementos van desde 0 hasta 1000. Los subconjuntos posibles son $2^{10} = 1024$. Luego por el principio del palomar hay dos conjuntos distintos que suman la misma cantidad. Por ultimo, supongamos ambos conjuntos poseen al mismo entero k, luego no son disjuntos. pero si tomamos ambos conjuntos esta vez sin el número k tendremos que suman la misma cantidad y no poseen ninguno al entero k. Si repetimos este proceso cuantas veces sea necesaria obtendremos los conjuntos disjuntos cuyos elementos suman lo mismo. □

Lo dificil del principio de palomar no es aplicarlo, sino comprender el tipo de situaciones en las que este se debe aplicar. La unica forma para desarrollar este sentido es hacer muchos ejercicios:

Propuesto 1.17. *El campeón mundial en comer baldes de pollo frito KFC ® tiene 77 días para preparase para un torneo. Tiene pensado comer al menos un balde por día pero menos de 132 baldes en total ya que sino podría sufrir graves problemas de salud. Muestre que existe una sucesión de días consecutivos durante los cuales comerá exactamente 21 baldes de pollo frito KFC ®.*

1.5. Ejercicios Propuestos

Propuesto 1.18. *¡Jou Hui está en la cárcel! Como ha cometido un crimen brutal e imperdonable, se le considera una reo de alta peligrosidad, y por ende se la ha enviado a una peculiar cárcel de .ªlta seguridad". La cárcel consiste en*

un edificio cuadrado de 100x100 celdas cuadradas, todas idénticas y conectadas entre si por una puerta. Se sabe que en la esquina superior derecha existe una puerta no vigilada hacia el exterior, por la que eventualmente se puede escapar de la cárcel. En cada celda (que puede tener 2, 3 o 4 puertas dependiendo de su posición), todas las puertas tienen una ampolleta, de las cuales sólo una esta encendida. Jou Hui se puede mover en la cárcel según la siguiente regla:

"Solo se puede atravesar la puerta que tiene la luz encendida, y cuando se cambia de celda, la ampolleta se apaga y se enciende la de la puerta contigua en en sentido horario".

Demuestre que Jou Hui ***si*** *puede escapar de la cárcel, independiente de la celda en la que se encuentre.*

Nota: Cada puerta tiene dos ampolletas, una por lado, y son independientes entre sí (si una esta encendida, la del otro lado no necesariamente lo está).

Propuesto 1.19. *El juego de los palitos consiste en tener 25 palitos en una mesa y por turnos cada jugador puede retirar 1, 2 o 3 palitos. Determine si el jugador que parte tiene estrategia ganadora*

Propuesto 1.20. *Ana y Beto juegan al siguiente juego; Se parte con 2016 canicas en una mesa y por turnos retiran una cantidad de canicas aue sea divisora de las canicas que quedan (antes de retirarlas). Pierde el que retira la última canica. Determine quien tiene estrategia ganadora, si Ana partió jugando.*

Propuesto 1.21. *En la pizarra está escrito el número 5. Andrea y Bianca juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada una en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes tres operaciones: multiplicarlo por 2, multiplicarlo por 3 o sumarle 1. Gana la primera que obtenga un resultado mayor o igual a 2016.*

Propuesto 1.22. *Un caballo de ajedrez parte en la casilla A y realiza varios movimientos, después de los cuales regresa a la casilla A. Demuestre que realizó una cantidad par de movimientos.*

Propuesto 1.23. *Demuestre que un tablero de m x n se puede cubrir con fichas de 1xk si y solo si k divide a uno de los entero m ó n.*

Propuesto 1.24. *Un tetrominó es una figura compuesta por cuatro cuadrados conectados, hay 5 de estas figuras; cuadrado, I, T, Z y L. Estas figuras se pueden rotar y reflejar de cualquier modo posible.*

Determine si se puede rellenar sin traslapar piezas, ni salirse:

- *un tablero de 10x10 con 25 piezas T*
- *un tablero de 10x10 con 25 piezas I*

- *un tablero de 10x10 con 25 tetraminos L*

Propuesto 1.25. *Determine la mayor cantidad de alfiles que se pueden poner en un tablero de 8x8, de modo que cada alfil es atacado como máximo por 1 alfil.*

Propuesto 1.26. *Hay n personas en un carrete. Muestre que al menos dos de ellas tienen el mismo número de conocidos en el carrete*

Propuesto 1.27. *Sea $a_1, a_2, ..., a_n$ una sucesión de enteros. Muestre que existe un subconjunto de estos números tal que su suma sea divisible por n.*

Propuesto 1.28. *Muestre que siempre que se escogen $(n+1)$ numeros en $\{1, 2, ..., 2n\}$ siempre hay uno que divide a otro.*

Propuesto 1.29. *Sean a, b coprimos. Entonces la ecuación $ax - by = 1$ posee al menos una solución con $x, y > 0$.*

Propuesto 1.30. *Se ordenan los enteros del 1 al 101 en orden. Muestre que se pueden borrar 90 de estos números de tal forma que los 11 restantes forman una sucesión monótona.*

Propuesto 1.31. *Se escogen 5 puntos en el plano con coordenadas enteras. Muestre que siempre se pueden escoger dos de estos tales que el segmento que los une pase por otro punto con coordenadas enteras.*

Propuesto 1.32. *En la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, ...$ Cada termino a partir del tercero es la suma de los dos anteriores modulo 10. Muestre que esta sucesión es periódica y encuentre una cota superior del periodo.*

Propuesto 1.33. *Muestre que para todo n existe un número de Fibonacci que termina con n ceros.*

Propuesto 1.34. *Sea a un entero coprimo con 10. Muestre que existe una potencia de a tal que termina en $00...(n-1) veces.,01$.*

Propuesto 1.35. *Se tienen 9 deliciosas laminas de queso de superficie 1 que se quieren poner sobre un pan de superficie 5. Muestre que hay almenos dos quesos que se superponen en al menos $\frac{1}{9}$.*

Propuesto 1.36. *En los juegos del dolor extremo organizados en el año 13574 hay 1985 participantes de distintas partes del mundo. Sabemos que dados tres participantes siempre hay al menos dos que hablan el mismo idioma. Suponiendo que no hay nadie que hable más de 5 idiomas. Muestre que hay al menos 200 personas que hablan el mismo idioma.*

Propuesto 1.37. *Se pinta el $12\,\%$ de la superficie de una esfera en negro y el resto se deja en blanco. Mostrar que existe un paralelepípedo rectángulo inscrito en la esfera tal que sus ocho vertices son blancos.*