Processus de Poisson et méthodes actuarielles

2013-2014 : Examen partiel. Durée : 2 heures

Sans documents ni calculatrice !

Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction. On pourra rédiger sa copie indifféremment en Anglais ou en Français. Une version anglaise du sujet suit la version française.

Exercice 1

Soit $\tau_1, \tau_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives, de même loi. Pour $n \geq 1$, on pose $T_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$. On suppose $\mathbb{P}(\tau_1 = 0) < 1$. On définit

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}\big(N_t \geq n\big) = \mathbb{P}\big(\exp(t - T_n) \geq 1\big)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(N_t \geq n) \leq e^t \left(\mathbb{E}[\exp(-\tau_1)]\right)^n$.
3. Montrer que $0 < \mathbb{E}[\exp(-\tau_1)] < 1$.
4. En déduire que N_t^k est intégrable pour tout $k > 0$.

Exercice 2

Un matériel subit des dommages suite à des chocs qui se produisent selon un processus de Poisson $N = (N_t, t \geq 0)$ de paramètre $\lambda > 0$. On note $T_1, T_2, \ldots$ les instants de chocs sucessifs.

Le $i-$ème choc produit un dégât aléatoire D_i. On suppose les dégâts indépendants entre eux et du processus N et de même loi intégrable. On suppose en outre que le dommage associé à un choc décroit exponentiellement : si le choc est subi à l'instant T_i, le dommage subi au temps $t \geq T_i$ est $D_i e^{-\alpha(t-T_i)}$ pour un certain $\alpha > 0$.

On note $\mathcal{D}_t$ le dommage total du système à l'instant $t \geq 0$. On a donc[1]

$$\mathcal{D}_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i e^{-\alpha(t-T_i)}.$$

1. Quelle est[2] la loi conditionnelle de $(T_1, \ldots, T_n)$ sachant $\{N_t = n\}$?
2. Pour un entier $n \geq 0$, calculer $\mathbb{E}[\mathcal{D}_t \,|\, N_t = n]$ en fonction de n, α, t et l'espérance commune des D_i.
3. En déduire $\mathbb{E}[\mathcal{D}_t]$ en fonction de λ, α, t et l'espérance commune des D_i.

Exercice 3

Soit $N = (N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. On se donne une application $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue croissante telle que $F(0) = 0$, et on pose

$$M_t = N_{F(t)}, \quad t \geq 0.$$

1. Donner la loi de M_t pour $t \geq 0$.
2. Le processus $(M_t, t \geq 0)$ est-il à accroissement indépendants ?
3. Montrer que le processus $(M_t - F_t, t \geq 0)$ est une martingale pour la filtration engendrée par $(M_t, t \geq 0)$.
4. Montrer que le processus $(M_t, t \geq 0)$ est à accroissements stationnaires si et seulement si $F(t) = ct$ pour une certaine constante $c \geq 0$.

[1] En convenant que $\mathcal{D}_t$ vaut 0 sur $\{N_t = 0\}$.

[2] On ne demande pas de redémontrer le résultat.

English version

Exercise 1

Let $\tau_1, \tau_2, \ldots$ be a sequence of nonnegative independent and identically distributed random variables. For $n \geq 1$, we set $T_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$. Assume that $\mathbb{P}(\tau_1 = 0) < 1$. Set

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

1. Show that $\mathbb{P}\big(N_t \geq n\big) = \mathbb{P}\big(\exp(t - T_n) \geq 1\big)$.
2. Show that $\mathbb{P}(N_t \geq n) \leq e^t \left(\mathbb{E}[\exp(-\tau_1)]\right)^n$.
3. Show that $0 < \mathbb{E}[\exp(-\tau_1)] < 1$.
4. Derive that N_t^k is integrable for all $k > 0$.

Exercise 2

A component is subject to shocks occuring according to a Poisson process $N = (N_t, t \geq 0)$ with parameter $\lambda > 0$. We denote by $T_1, T_2, \ldots$ the times of successive shocks.

The $i-$th shock produces a damage D_i. We assume that the damages are independent and with a common integrable law, and independent of N. We moreover assume that the damage associated to a a shock decreseases exponentially: if the shock is received at time T_i, then the damage suffered at time $t \geq T_i$ is $D_i e^{-\alpha(t - T_i)}$ for some $\alpha > 0$.

The total damage $\mathcal{D}_t$ received by the system is thus[3]

$$\mathcal{D}_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i e^{-\alpha(t - T_i)}.$$

1. What is[4] the conditional law of $(T_1, \ldots, T_n)$ given $\{N_t = n\}$?

[3] With the notational convention $\mathcal{D}_t = 0$ on $\{N_t = 0\}$.

[4] A proof of the result is not required.

2. For an integer $n \geq 0$, compute $\mathbb{E}[\mathcal{D}_t \mid N_t = n]$ as a function of n, α, t and the common expectation of the D_i.

3. Derive the value of $\mathbb{E}[\mathcal{D}_t]$ as a function of λ, α, t and the common expectation of the D_i.

Exercise 3

Let $N = (N_t, t \geq 0)$ be a Poisson process with intensity $\lambda > 0$. Let us be given a function $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continuous, non-decreasing and such that $F(0) = 0$. Set

$$M_t = N_{F(t)}, \quad t \geq 0.$$

1. Specify the law of M_t for $t \geq 0$.

2. Does the process $(M_t, t \geq 0)$ have independent increments?

3. Show that the process $(M_t - \lambda F(t), t \geq 0)$ is a martingale for the filtration generated by $(M_t, t \geq 0)$.

4. Show that the process $(M_t, t \geq 0)$ has stationary increments if and only if $F(t) = ct$ for some constant $c \geq 0$.