Processus de Poisson et méthodes actuarielles

2014-2015

April 8, 2015

Cours 1 : 2 février

- Quelques notions sur les processus à temps continus.
- Définition d'un processus de comptage, d'un processus de comptage standard. Liens entre processus de comptage (N_t) et la suite de ses temps de sauts (T_n).
- Définition d'un processus de renouvellement.

Cours 2 : 5 février

- Définition (A) d'un processus $N = (N_t)$ de Poisson d'intensité $\lambda > 0$: processus de comptage standard, à accroissements indépendants et homogènes, tel que
$$N_t - N_s \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(\lambda(t-s)).$$
- Définition (B) d'un processus $N = (N_t)$ de Poisson d'intensité $\lambda > 0$: $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$ où (T_n) est un processus de renouvellement dont les interarrivées $T_n - T_{n-1}$ sont des variables aléatoires exponentielles (indépendantes) de paramètres λ.
- Propriétés de la loi exponentielle, loi gamma.

Cours 3 : 11 février

- Preuve de l'équivalence entre les définitions (A) et (B).

Cours 4 : 17 février

- Quelques propriétés du processus de Poisson. Loi des grands nombres : si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$,
$$t^{-1}N_t \longrightarrow \lambda$$
presque-sûrement lorsque $t \to \infty$.

- Définition et formule de la densité de la statistique d'ordre (du réarrangement croissant) d'un n-échantillon de loi absolument continue.

- Si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et si $0 < T_1 < \ldots < T_n <$ désigne la suite de ses temps de sauts, alors la loi conditionnelle de $(T_1, \ldots, T_n)$ sachant $N_t = n$ est la loi du réarrangement croissant d'un n-échantillon de variables uniformes sur $[0, t]$.

- Première application actuarielle.

Cours 5 : 3 mars

- Preuve du résultat précédent.

- Processus de Poisson mélange $\widetilde{N}_t = N_{\Theta t}$, où N est un processus de Poisson standard d'intensité λ et Θ est une variable aléatoire positive, indépendante de N. Intérêt de la modélisation : $\mathrm{Var}[\widetilde{N}_t] > \mathbb{E}[\widetilde{N}_t]$ dès que $\mathrm{Var}(\Theta) > 0$.

Cours 6 : 10 mars

- Un processus de Poisson mélange n'est pas à accroissements indépendants, mais il est en revanche à accroissements stationnaires.

- La loi conditionnelle des n premiers temps de saut sachant $N_t = n$ d'un processus de Poisson mélange est la loi du réarrangement croissant d'un n-échantillon de variables uniformes sur $[0, t]$.

- Le modèle de Cramer-Lundberg et la modélisation de la charge sinistrale. Prime de risque.

- Charge sinistrale à temps fixe. Loi binomiale négative. Calcul des premiers moments.

- Fonction génératrice des moments.

Cours 7: 17 mars

- Charge sinistrale en tant que processus. Processus de Poisson composé. Transformée de Laplace d'un processus de Poisson composé.

- Loi forte des grands nombres pour le processus de Poisson composé et le processus de récompense.

Cours 8 : 31 mars

- Processus de renouvellement. Fonction de renouvellement, mesure de renouvellement.
- Loi forte des grands nombres et théorème (élémentaire) de renouvellement.

Cours 9 : 7 avril

- Fonction et mesure de renouvellement.
- Equation de renouvellement.

Cours 10 : 14 avril

- Théorème de renouvellement.
- Modèle de ruine. Probabilité de ruine.

Cours 11 : 5 mai

- Modèle de ruine. Premiers théorème asymptotiques.
- Queues de distribution fines et epaisses ; caractérisation.
- Existence du coefficient d'ajustement.

Cours 12 : 12 mai

- Inégalité de Cramer-Lundberg.
- Contrôle de la probabilité dans le cas des petits risques. Lien avec le renouvellement.

Cours 13 : 12 mai

- Démonstration du théorème de renouvellement