# コンパニオン行列のべき乗

Takanori MAEHARA*

March 18, 2014

## 1 概要

線型漸化式

$$x(n+k) = a(0)x(n) + a(1)x(n+1) + \cdots + a(k-1)x(n+k-1), \tag{1.1}$$

$$x(0), \ldots, x(k-1) : \text{given}. \tag{1.2}$$

の $m$ 項目を高速に計算する手法を与える．

コンパニオン行列 $A$ を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ a(0) & a(1) & a(2) & \cdots & a(k-1) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

で定義すれば，元の漸化式は

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ x(n+2) \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(k-1) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

と表現できる．したがって問題はコンパニオン行列のべき乗 $A^m$ を高速に計算することに帰着した．

普通に行列べき乗 $A^m$ を計算すると $O(k^\omega m)$ かかる（$\omega \approx 2.38$ は行列乗算の計算量の指数）．繰り返し二乗法を用いれば $O(k^\omega \log m)$ に削減できる．ここではさらにコンパニオン性を利用した，高速な手法を紹介する．この手法は古くは Krishnamurty [2] に発見され，その後 [1,3,4] によって再発見されている．ヘッセンベルク行列のべき乗への拡張は Datta and Datta [5] を参照されたい．

## 2 手法

第 $i$ 単位ベクトルを $e_i$ とする．このとき

$$A^n = \begin{bmatrix} e_1^\top \\ e_2^\top \\ e_3^\top \\ \vdots \\ e_k^\top \end{bmatrix} A^n = \begin{bmatrix} e_1^\top A^n \\ e_2^\top A^n \\ e_3^\top A^n \\ \vdots \\ e_k^\top A^n \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

である．また，コンパニオン行列の形から

$$e_j^\top A = e_{j+1}, \quad (j < k) \tag{2.2}$$

が成立する．このことから以下の主張が成り立つ．

*maehara@prefield.com

**Proposition 1.** $e_1^\top A^n$ が与えられたとき，$A^n$ は $O(k^2)$ で計算できる．

*Proof.* $e_1^\top A^n$ の右から $A$ をかけることで $(e_1^\top A^n)A = e_2^\top A^n$ を得る．さらに右から $A$ をかけることで $(e_2^\top A^n)A = e_3^\top A^n$ を得る．この操作を繰り返すことで $e_i A^n$ $(i = 1, \ldots, k)$ のすべてが $O(k^2)$ で計算できる（$A$ が疎行列であることを用いている）．これらを並べることで $A^n$ が $O(k^2)$ で計算できた． □

この主張から，高速なコンパニオン行列のべき乗アルゴリズムが次のように得られる：アルゴリズムは $A, A^2, A^4, \ldots$ を繰り返し二乗法によって計算するが，各計算の際には第 1 行目のみ真面目に計算して残りの行は上述の主張の方法で構成する．$A^n$ は一般に密行列なので普通に行列同士の積を計算すると $O(k^\omega)$ かかってしまうが，上述の主張の方法を使うことで，この部分の計算量が $O(k^2)$ に削減されることが要点である．この計算のついでに $e_1 A^m$ も計算し，最後に上述の主張の方法で $A^m$ を構成することで $A^m$ が効率的に計算される．以下に疑似コードを示す．計算量は反復回数が $O(\log m)$ であり，一反復あたり $O(k^2)$ なので，全体で $O(k^2 \log m)$ となる．

**procedure** FASTPOWER($A$, $m$)
    $u := e_1^\top$
    $A^{(1)} = A$
    **for** $n = m$; $n > 0$; $n = n/2$ **do**
        **if** $n \mod 2 = 0$ **then**
            $u = uA^{(n)}$
        **end if**
        $a^{(n)} :=$ the first row of $A^{(n)}$
        compute the first row of $A^{(2n)}$ by $a^{(2n)} = a^{(n)} A^{(n)}$
        construct $A^{(2n)}$ by $A^{(2n)} = [a^{(2n)}; a^{(2n)}A; \cdots; a^{(2n)}A^k]$
    **end for**
    **return** $A^m = [u; uA; \cdots; uA^{k-1}]$
**end procedure**

# References


[1] S. Barnett (1970): Number of zeros of complex polynomial inside the unit circle. Electron. Lett. 6, 164–165.

[2] E. V. Krishnamurty (1960): On solving an algebraic equation using higher powers of an associated matrix and the Cayley–Hamilton theorem. Q. J. Mech. Appl. Math. 13, 508–512.

[3] B. C. Roy and A. K. Choudhury (1970): On the computation of Laplace transform of the state transition matrix. Indian J. Pure Appl. Phys. 18, 217–222.

[4] D. Roychoudhury (1973): Algorithm for power of companion matrix and its application. IEEE Trans. Autom. Control AC-18, 179–180.

[5] B. N. Datta and K. Datta (1976): An algorithm for computing powers of a Hessenberg matrix and its applications. Linear Algebra Appl. 14, 273–284.