PRIUCC
CURSO DE INGRESO A LA UNIVERSIDAD

Introducción a la Matemática

Compilador

Juan Lancioni

Autores

Juan Lancioni | Nilda Dumont

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CÓRDOBA
Universidad Jesuita

Carreras

Contador Público
Lic. en Administración de Empresas
Ingeniería en Sistemas
Ingeniería Mecánica
Ingeniería Civil
Ingeniería en Computación
Ingeniería Industrial
Ingeniería Electrónica

Coordinación y Asesoramiento pedagógico

Gabriela Eugenia Giordanengo

Mónica Binimelis

Corrección de estilo

Verónica Miriam Alvarez

Diseño gráfico

María Celeste Kulifay

Estimados alumnos, bienvenidos a la Universidad Católica de Córdoba.
Para comenzar esta nueva etapa de estudiantes universitarios, compartiremos estas clases donde vamos a recordar algunos conceptos de la matemática elemental para contar con herramientas que les permitan afrontar desafíos que se les presenten en el futuro.

Pretendemos acompañarlos en la recuperación de estos conocimientos previos y que descubran el para qué y porqué de los mismos, y su aplicabilidad en las diferentes áreas del conocimiento de la carrera universitaria que los formará como futuros profesionales de "Ciencia, Conciencia y Compromiso".

Hemos elaborado estas clases comenzando desde un nivel elemental, el cual se irá complejizando a medida que avancemos. También hemos pensado en ayudarlos con algunos interrogantes para recordar conceptos y modos de trabajar, por lo que es fundamental que leamos con detenimiento y esmero cada una de las consignas y/o ejercicios.

Estamos seguros que abordando este material con responsabilidad y esfuerzo, se pueden resolver por cuenta propia las actividades de cada clase y así autoevaluarse con las respuestas correspondientes y reconocer las propias capacidades.

Lo importante es el trabajo individual para analizar y resolver los temas propuestos. Esto permitirá recuperar razonamiento lógico, hábitos de estudio, habilidad en el manejo de resolución de problemas y lenguaje apropiado.
Puede suceder que la primera vez que se trate de resolver un ejercicio o problema, no se logre llegar al resultado correcto, no hay que desanimarse, sino comenzar de nuevo, y confiar en sí mismo.

El camino lo haremos juntos, ¡estamos para acompañarlos! Les compartimos un lindo pensamiento para que reflexionemos:
"Si das pescado a un hombre hambriento, lo alimentas por un día. Si le enseñas a pescar lo alimentarás para toda la vida".
Lao Tsé (s. IV a.c.)
Todo el equipo de docentes que los acompañará en estos días está inspirado en ese pensamiento.

Finalmente, queremos agradecer a todas aquellas personas que confiaron en nosotros para este desafío. En primer lugar a las autoridades de la Universidad y en particular a las autoridades de las Facultades correspondientes.
Como conformamos un equipo de profesionales que nos guiaron y corrigieron este trabajo, para ellos también un merecido reconocimiento, como así para los docentes involucrados en esta labor por su apoyo incondicional.

¡¡¡Suerte chicos, y adelante que confiamos en sus capacidades!!!

NILDA ELSA DUMONT

- TITULOS -

- BIOQUÍMICA - 1975

Facultad de Ciencias Químicas. Universidad Nacional de Córdoba.

- MASTER BUSSINESS ADMINISTRATION - 2001

ESADE. España.

- ACTIVIDADES ACADÉMICAS Y PUBLICACIONES -

Docente de Matemática I y Matemática II, en la Facultad de Ciencias Químicas. U.N.C. 1973-1994.

Docente de Análisis Matemático I y Análisis Matemático II, en la Facultad Regional Córdoba. U.T.N. 1985-1998.

Docente de Análisis Matemático, en la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración. U.C.C. 1975-Continuo.

Docente de Matemática I, Matemática II y Bioestadística, en la Facultad de Ciencias Químicas. U.C.C. 1995-Continuo.

Docente de Estadística en post grado, en la Maestría en Alimentos. Facultad de Ciencias Químicas. U.C.C. 1998-1999-2001.

Miembro de la Comisión de Autoevaluación para CONEAU. Facultad de Ciencias Químicas. U.C.C. 2004-2008-2014.

Coordinadora de Área Básica. Facultad de Ciencias Químicas. U.C.C.1998-hasta la actualidad.

Coordinadora Área Matemática. Facultad de Ciencias Económicas y de Administración. U.C.C. 1986-2001.

Miembro del consejo de Profesores. Facultad de Ciencias Económicas y de Administración. U.C.C. desde 2004- hasta la actualidad.

Autora del libro “Introducción a la Matemática. Aprendiendo a pensar”. 1ª Ed. 2005. Córdoba. ISBN: 987-43-9591-5.

Autora del libro “Introducción a la Matemática. Aprendiendo a pensar”. 2ª Ed. 2010. Córdoba. Editorial Universidad Católica de Córdoba, 2011.ISBN: 978-987-626-006-0.

JUAN NOLBERTO LANCIONI

- TITULOS -

- INGENIERO CIVIL - 1987

Facultad de Ingeniería. Universidad Católica de Córdoba.

- ESPECIALISTA EN DOCENCIA UNIVERSITARIA - 2000

Facultad Regional Córdoba. Escuela de Cuarto Nivel. Universidad Tecnológica Nacional.

- MAGISTER EN DOCENCIA UNIVERSITARIA - 2011

Facultad Regional Córdoba. Dirección de Posgrado de la Universidad Tecnológica Nacional.

- ACTIVIDADES ACADÉMICAS Y PUBLICACIONES -

Profesor universitario en el área de Física y Matemática, en la Universidad Católica de Córdoba. 1988-Continuo.

Docente universitario de Física I, en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba. 2009-Continuo.

Secretario Técnico de la Facultad de Ingeniería, en la Universidad Católica de Córdoba. 2002 – 2005.

Secretario Académico de la Universidad, en la Universidad Católica de Córdoba. 2006 - 2007.

Miembro de la Comisión de Evaluación Periódica del Personal Docente de Ingeniería, de la Universidad Católica de Córdoba. 2012.

Miembro del Consejo de Profesores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Córdoba. 2002-2003 y 2010-2014.

Miembro de la Comisión de Seguimiento y Revisión del Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería en Computación, en la Universidad Católica de Córdoba. 2014-Continuo.

Miembro de un grupo de investigación en el marco de la Maestría de Docencia Universitaria de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba, Escuela de Cuarto Nivel. 2008-2011.

Co-autor del libro “Álgebra Elemental / Alfredo Soletti… [et.al.]”, 2ª Ed. Córdoba: Editorial Universidad Católica de Córdoba, 2011, ISBN 978-987-626-156-2.

Co-autor del libro “Ingreso a la Educación Superior Universitaria, Docencia y Currículo por Competencias / María Carolina Ávila… [et.al.]”, compilado por María Carolina Ávila y Enrique Bambozzi. 1ª. Ed. Córdoba: Ediciones del Copista, 2011, ISBN 978-987-563-301-8.Córdoba 2010-2011. Capítulo nº 7, páginas 105 a 129.

Sobre la utilización de este material.

Iconografía

Importante

Texto de profundización

Actividad

Bibliografía

Para pensar y reflexionar

Actividad individual

Unir conceptos

Relacionar

Clase 1

Números Reales
y operaciones
matemáticas básicas

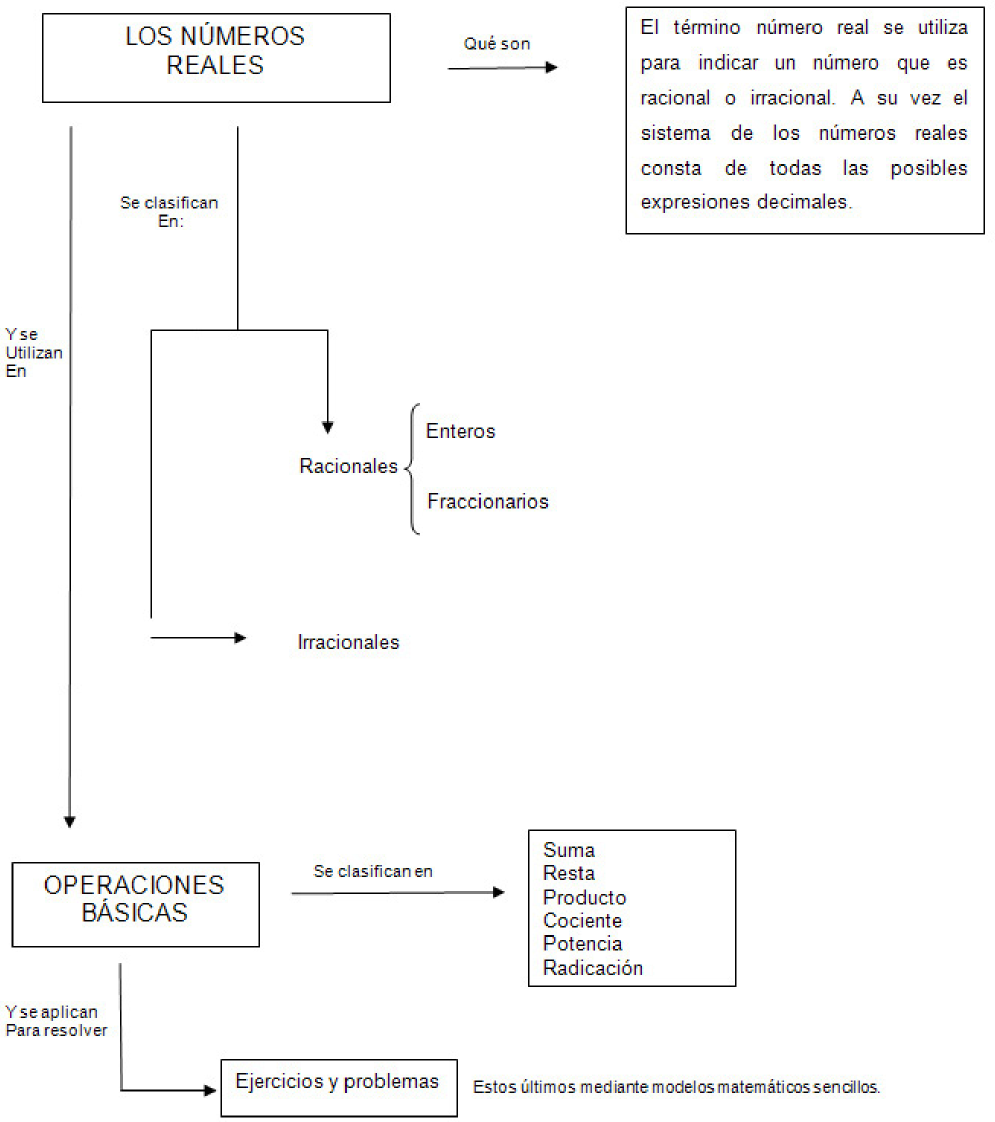
Objetivos específicos:

- Recuperar los conceptos fundamentales del álgebra elemental.
- Internalizar las reglas de los signos.
- Afianzar la destreza en resolución de ejercicios y problemas sencillos.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr la estima entre compañeros y docente.

Contenidos de la Clase:

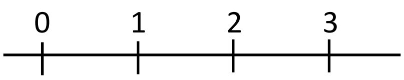
- Conjuntos numéricos – Los números reales.
- Operaciones aritméticas básicas.
- Suma, resta, producto y cociente.
- Potencia y radicación.
- Símbolos de comparación.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Ejercicios y problemas.

Esquema conceptual de la vinculación de los contenidos de la Clase 1:



Conjuntos numéricos
los números reales

Iniciemos la clase 1 recordando qué es un conjunto: “es una colección de objetos, cada uno de los cuales recibe el nombre de elemento del conjunto”.
Si esos elementos son números, entonces se los denomina “conjuntos numéricos”.
Los números reales 0, 1, 2, 3, etc. se denominan números naturales N. Son los que habitualmente usamos para contar.
Para su representación gráfica se utiliza una recta donde se considera un punto cualquiera como el origen 0 (cero) y se utiliza un segmento arbitrario como unidad.



Cabe aclarar que algunos autores no consideran el cero (0) dentro del conjunto de los números naturales y otros sí, lo incluyen. Nosotros adoptamos la segunda posición, es decir, incluir el cero (0) dentro del conjunto de los números naturales:
“Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es otro número natural. Por ej:

$$8+5=13$$
$$9\cdot 3=27$$

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural. Por ej:

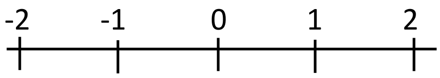
$$8-3=5$$
$$9\div 3=3$$

son números naturales, pero:

$$5-8=\ldots$$
$$2\div 7=\ldots$$

no dan como resultado un número natural”. (Arya -Larder, 2009)

Para salvar esta dificultad se extiende el sistema de los números naturales al sistema de los **números enteros Z**, en donde se les agrega a los naturales los **enteros negativos**, es decir, los naturales precedidos por el signo menos.
Si utilizamos la misma recta anterior, y teniendo en cuenta que cada número negativo equidista del origen, respecto de su correspondiente número natural, podemos representarlos de la siguiente manera:



Si bien con esto se resuelve que la suma, multiplicación o resta de dos enteros cualesquiera es otro entero, ¿qué ocurre con la división?. Por ejemplo:

$$8 \div (-4) = -2$$
$$9 \div 7 = \ldots$$

Esta limitación la podemos salvar incorporando nuevos números como los **números racionales Q.**

Se definen a los números racionales como fracciones periódicas o no periódicas; o también como el cociente de dos números enteros, a/b, en donde: “a” y “b” siendo enteros, representan el numerador y el denominador de esa fracción. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4}; -\frac{8}{3}; \frac{-2}{9}; \frac{1}{3}; etc.$$

Pero cuidado, ¡“b” debe ser siempre distinto de cero!

Cuando en las divisiones de números enteros, el dividendo no es múltiplo del divisor, surge este nuevo conjunto.

Un número fraccionario también puede escribirse como una expresión decimal. Ésta puede ser finita o infinita.

Esto es:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ Expresión decimal finita.

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ Expresión decimal infinita.

Estos números fraccionarios pueden representarse sobre la recta, construyendo las fracciones sobre la misma, como se muestra a continuación.

Recordemos que el numerador de la fracción indica la cantidad de unidades que debe tomar sobre la recta y el denominador la cantidad de particiones que se debe realizar sobre ese segmento:

“Estos números son muy usados a la hora de medir longitudes, pesos, voltajes, etc. ¿Sirven los números racionales para medir todas las magnitudes? La respuesta es, no. Este sorprendente hecho fue descubierto por los antiguos

griegos varios siglos antes de Cristo. Demostraron que a pesar de que mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes unitarias, no pueden escribirse como el cociente de dos números enteros. Por lo tanto no es un número racional, si no irracional". (Purcell- Varberg, 1993)

Entonces los **números irracionales** son aquellos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, como por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots; \quad \sqrt{3} = 1{,}7320\ldots; \quad \pi = 3{,}14159\ldots; \quad e = 2{,}\ 7172\ldots;$$

y una gran cantidad de números más.

Los números irracionales son aquellos que no se pueden escribir como fracciones periódicas o no periódicas, con lo cual tienen infinitas cifras decimales y sin embargo no forman período.
Estos números también pueden ser graficados en la recta, intercalándose entre los números racionales, formando un conjunto bastante denso.
El conjunto de números **racionales** junto con el conjunto de números **irracionales** forman el conjunto de los **números reales R**, que representados gráficamente se corresponden con todos los puntos de la recta.
Puede recordar una correspondencia biunívoca que dice: a cada número real le corresponde un punto sobre la recta y viceversa, a cada punto en la recta le corresponde un número real.
Una característica del conjunto de número reales es que éstos conforman un conjunto **denso**, es decir que entre un número real y otro, existen infinitos números.
Todos estos números conforman el conjunto de los **números reales**.

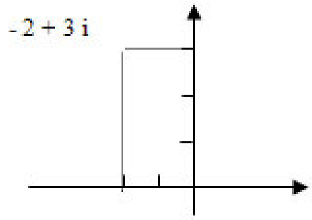
A modo de síntesis podemos decir:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales: } \mathbf{N}\\ \text{Enteros negativos}\end{array}\right\}\text{Enteros: } \mathbf{Z}\\ \text{Fraccionarios}\end{array}\right\}\text{Racionales: } \mathbf{Q}\\ \text{Irracionales}\end{array}\right\}\text{Números reales: } \mathbf{R}$$

También existen los **números complejos** que completan todo el sistema de números que utilizaremos a lo largo de este curso. Recordemos que los números complejos están formados por una parte real y otra imaginaria. Por ejemplo:

$$-2+3\cdot i; \quad 1-8\cdot i; \quad 0+i; \text{ donde: } i=\sqrt{-1} \text{ o bien, } i^2=-1.$$

Para poder graficarlos se necesita de los ejes de coordenadas cartesianas. Sobre el eje "x" (abscisa) se determina el componente real y sobre el eje "y" (ordenada) el coeficiente imaginario. La intersección de ambos valores muestra el punto correspondiente al número complejo. Observa el gráfico:



En algunas ecuaciones de segundo grado suelen presentarse estos números complejos como raíces de la ecuación cuando el discriminante de la fórmula correspondiente es negativo. ¡Este tema que abordaremos más adelante!

Para pensar y reflexionar

Ahora la pregunta es: ¿todos estos conjuntos numéricos son importantes en Matemática? Si la respuesta es sí, es que nos estamos amigando con esta ciencia formal y de hecho, ¡haremos uso de ellos en todo momento, si hacemos camino en alguna carrera de Ingeniería o de Ciencias Económicas! ¿Vamos por más?

OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS

Se entiende por operaciones básicas: la suma, la sustracción, el producto y el cociente, aunque no son las únicas. Lo que debe tener presente en cada caso son las reglas de los signos correspondientes, que se detallan y especifican a continuación:

- Un signo (+) que precede a un paréntesis, corchete o llave, no cambia los signos interiores. Por ej:

$$-3+(4+7)=-3+4+7=8$$

- Un signo (-) que antecede a un paréntesis, corchete o llave, cambia los signos interiores. Por ej:

$$-3-(-4+8)=-3+4-8=-7$$

El siguiente ejercicio plantea las operaciones básicas (suma y resta) con el conjunto de los números enteros:

$$-6-\{2+[-9+4-(-7+1)-2]\}+5=$$

Observemos cómo fue resuelto:

$$-6-\{2+[-9+4-(-7+1)-2]\}+5=$$

$$-6-\{2+[-9+4+7-1-2]\}+5=$$

$$-6-\{2-9+4+7-1-2\}+5=$$

$$-6-2+9-4-7+1+2+5=-2$$

IMPORTANTE: para llegar al resultado final, primero debemos eliminar los paréntesis, luego los corchetes y por último la llave; en ese orden, para no cometer errores.

También podemos calcular el resultado parcial de los elementos encerrados en el paréntesis, respetando el signo que lo antecede, y así sucesivamente con el corchete y llave.
Observemos el ejemplo:

$$-6-\{2+[-9+4-(-6)-2]\}+5=$$
$$-6-\{2+[-9+4+6-2]\}+5=$$
$$-6-\{2+[-1]\}+5=$$
$$-6-\{2-1\}+5=$$
$$-6-\{1\}+5=$$
$$-6-1+5=-2$$

Para resolver los siguientes ejercicios elegiremos la manera con la que nos sintamos más seguros. Usaremos las respuestas para la autoevaluación.

Actividad

a) $3-\{2+4-[5+1-(2+3-8)]-3+9\}=$ Rta: 0

b) $-10+\{3-[2-15+9+(2-7)-6]\}+4=$ Rta: 12

c) $-\{7-8+[15-12-(14+1-9)+5]\}=$ Rta. - 1

d) $-15-\{6+[(-3+1-8)-(4-1)]-7\}+1=$ Rta: 0

e) $-8+(-7+5)+3-[2-(4-9)+3]-(-7)+9=$ Rta: - 1

En el caso del producto, se cumple:

$a)\ (+)\cdot(+)=(+)\quad b)\ (-)\cdot(-)=(+)$

$c)\ (+)\cdot(-)=(-)\quad d)\ (-)\cdot(+)=(-)$

$$9\cdot(-3)=-27$$
$$(-1)\cdot(-3)=3$$

Por ejemplo:

Para el cociente, se cumple:

$$a)\ \frac{(+)}{(+)} = (+) \quad b)\ \frac{(-)}{(-)} = (+)$$
$$c)\ \frac{(-)}{(+)} = (-) \quad d)\ \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Por ejemplo:

$$\frac{9}{-3} = -3$$
$$\frac{-10}{-2} = 5$$

Otros ejemplos de operaciones sencillas

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{14-3}{21} = \frac{11}{21} \qquad \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{15}$$
$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{32+3}{24} = \frac{35}{24} \qquad -\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{3} = -\frac{2}{3}$$

Para los dos últimos ejemplos de productos de fracciones, es aconsejable simplificar numeradores con denominadores (si se puede) y luego operar aritméticamente.
Observemos en los dos siguientes ejemplos como un cociente de fracciones, o una fracción de fracción, se puede resolver transformando el cociente en un producto, multiplicando por la recíproca del denominador.

$$\frac{4}{3} \div \frac{8}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{3} \div 4 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

Importante
Es fundamental recordar el orden de las operaciones. Los paréntesis indican prioridades, las multiplicaciones o divisiones también. El pasaje de términos de un lado a otro del signo igual es también importante y es la causa más frecuente de errores. En operaciones de suma y resta, si un término cambia de miembro, cambia el signo de la operación. En operaciones de multiplicación o división, si un término cambia de miembro, cambia la operación.

Analicemos a continuación varios ejemplos válidos y no válidos:

$$2 \cdot (4+6) = 2 \cdot (10) = 20$$
$$(3 \cdot (-2)) + 4 = -6 + 4 = -2$$

En estos ejercicios conviene separar en términos a la hora operar matemáticamente:

$$\frac{7-3}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$$
$$(2 \cdot 3) - \frac{12}{3} = 6 - 4 = 2$$

Si se trata de transponer términos: $7 + (-2) = 5$ o bien $7 = 5 + 2$

o bien: $\frac{8-2}{4} = \frac{3}{2}$ es lo mismo que: $8 - 2 = \frac{3}{2} \cdot 4$

$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ pero no vale hacer: $2 + 1 \neq \frac{7}{3} \cdot 3$

Observemos detenidamente el siguiente ejemplo y nuevamente notaremos la importancia del uso de paréntesis y/o corchetes.
Recordemos que **no** se debe escribir dos signos seguidos. Estos **deben** estar separados por alguna de estas herramientas: paréntesis, corchetes, etc.

$$72:[18 + (-2).3] - [4.(-5) - 9:3] =$$
$$72:[18 - 6] - [-20 - 3] =$$
$$[72:12] - [-23] =$$
$$6 + 23 = 29$$

Los siguientes ejercicios combinan todas las operaciones elementales con los conjuntos de números presentados hasta ahora.

No olvidemos respetar todos los conceptos anteriores para lograr el resultado correcto. Como en los ejercicios anteriores, usaremos las respuestas para autoevaluarnos.

Actividad

a) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=$ Rta: $-\frac{5}{12}$

b) $\left(\frac{7}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)=$ Rta: $-\frac{47}{30}$

c) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{3}=$ Rta: $\frac{7}{8}$

d) $\frac{\frac{3}{4}-2}{\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)=$ Rta: $\frac{19}{8}$

e) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\frac{7}{15}}{\frac{1}{5}}\right)=$ Rta: 0

Para pensar y reflexionar

Hemos avanzado hasta esta instancia; nos podemos formular otra pregunta: ¿existen otras operaciones básicas del álgebra elemental que se pueden realizar con los conjuntos numéricos? Si la respuesta es afirmativa, ¡podemos seguir avanzando!

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Las operaciones de bastante relevancia usando números reales tienen que ver con raíces y potencias. En general algunas de las propiedades más usadas son:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n} \qquad (a.b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$$

$$0^0 = ind.\, matematica$$

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Importante

Tanto la radicación y como la potenciación no son distributivas respecto de la suma o resta.

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n \qquad (a-b)^n \neq a^n - b^n$$

Otra propiedad muy importante que vincula la potenciación con la radicación es:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Entonces, toda potencia fraccionaria se trasforma en raíz y viceversa.
También en estas operaciones es conveniente recordar ciertas reglas de los signos que se aplican para cada caso:

$$(-)^{par} = (+) \qquad \sqrt[par]{(+)} = (+)$$

$$(+)^{par} = (+) \qquad \sqrt[par]{(-)} = num.imaginario$$

$$(-)^{impar} = (-) \qquad \sqrt[impar]{(+)} = (+)$$

$$(+)^{impar} = (+) \qquad \sqrt[impar]{(-)} = (-)$$

Veamos los siguientes ejemplos:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

$$\left(3^3\right)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$$

$$\left(2^{-2}\right)^3 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$$

$$\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^{3+2} = 4^5$$

$$9^2 \cdot 9^{-3} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt{5 \cdot 5} = 5$$

$$\sqrt[4]{-16} = -2i$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

Importante

***"Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada principal de 4 es 2, no -2". (Haeussler-Paul, 1997).* Por lo tanto:**

$$\sqrt{4} = 2$$

Actividad

En base a los ejemplos brindados en el párrafo anterior, resolveremos los siguientes ejercicios. Las respuestas las utilizaremos para autoevaluarnos.

a) $x^{11} \cdot x^{-7} =$ Rta: x^4

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} =$ Rta: $\frac{1}{8}$

c) $\left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}} =$ Rta: $\frac{16}{81}$

d) $(64 \cdot a^3)^{\frac{2}{3}} =$ Rta: $16 \cdot a^2$

SÍMBOLOS DE COMPARACIÓN

Con estos símbolos se forman desigualdades y tienen mucho uso para realizar comparaciones. Básicamente estos símbolos son cuatro: > mayor; < menor; $\geq$ mayor e igual; $\leq$ menor e igual.

Por ejemplo:

$2 \succ 1$ Se lee 2 mayor que 1.

$\frac{3}{2} \prec \frac{10}{3}$ Se lee $\frac{3}{2}$ menor que $\frac{10}{3}$

$3 \geq 3$ Se lee 3 mayor e igual que 3.

$7 \leq 10$ Se lee 7 menor e igual que 10.

Más adelante trabajaremos con desigualdades al solo efecto de comparar un miembro con otro de la desigualdad.

En un curso de Matemática del grado, es decir, en primer año de nuestra carrera nos propondrán transponer elementos de un miembro a otro de una desigualdad y para ello nos ofrecerán las reglas pertinentes.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

En los conceptos de M.C.D. y m.c.m., se utiliza la descomposición de números en sus factores primos.
Las definiciones en cada caso son:
M.C.D.: es el producto de los factores primos comunes elevados al mínimo exponente.
m.c.m.: es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al máximo exponente.

A modo de ejemplo, se pide calcular el M.C.D. y el m.c.m. entre los números: 48, 280 y 720.

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$M.C.D. = 2^3 = 8$$
$$m.c.m = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$$

ACTIVIDADES DE EJERCITACIÓN Y PROBLEMAS DE LA CLASE 1

$$1 \rightarrow 3-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$$

$$R{:}\frac{11}{4}$$

$$2 \rightarrow -4+\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}=$$

$$R{:}-\frac{122}{45}$$

$$3 \rightarrow 2-\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{2+\frac{1}{3}}+3\right)=$$

$$R{:}-\frac{92}{21}$$

$$4 \rightarrow (4-3)^2+\left(\frac{5}{1-\frac{2}{3}}\right)^2+\frac{4}{3}=$$

$$R:\frac{682}{3}$$

$$5 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2+\frac{3}{11}}+\frac{1}{5}}=$$

$$R:\frac{4}{5}$$

$$6 \rightarrow 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$R:\frac{107}{180}$$

$$7 \rightarrow \frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) =$$

$R: -\frac{13}{6}$

$$8 \rightarrow -1 - \left\{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \left[-2 + \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] - \frac{1}{6}\right\} - \frac{1}{3} =$$

$R: -\frac{11}{12}$

$$9 \rightarrow \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{-\frac{1}{4}}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}\right)} - \frac{1}{3} =$$

$R: -\frac{12}{25}$

$$10 \rightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{6}\right)^2 \div \left(-\frac{5}{4}\right) =$$

$R: -\frac{1}{75}$

$$11 \rightarrow \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}} \cdot \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{2 + \frac{1}{3}} - \frac{1}{5 + \frac{1}{9}} \div \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{9 + \frac{1}{5}} =$$

$R: \frac{26}{15}$

$$12 \rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{15}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{20}} \div \frac{71}{3}\right) \cdot 100 + 43} =$$

$R: 7$

$$13 \rightarrow \left(\frac{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}}}\right)^{-2} =$$

$R: \frac{225}{4}$

$$14 \rightarrow \frac{4 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{5}}{4 \cdot \frac{11}{10} + \sqrt{\frac{4}{25}}} =$$

$R:1$

$$15 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{2}}{2 - \frac{13}{9}} + \frac{1}{5} \div \frac{\sqrt{\frac{16}{5} \div 5}}{5^{-2}} =$$

$R:-\frac{11}{25}$

$$16 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{6}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}}} \cdot \frac{10}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{3}}} =$$

$R:-3$

$$17 \rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}} - \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{4}} =$$

$R:-3$

$$18 \rightarrow \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\right)^{3} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{4} =$$

$R:\frac{9}{25}$

$$19 \rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \frac{5}{6}} =$$

$R:\frac{5}{6}$

$$20 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot (-1)} =$$

$R:\frac{1}{3}$

$$21 \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{-7} \div \left(\frac{5}{3}\right)^{-5} =$$

$R:\frac{9}{25}$

$$22 \rightarrow \frac{12}{5} \div \frac{3}{5} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} - \frac{50}{7} + \frac{3}{14} =$$

$R:-3$

$$23 \rightarrow \frac{\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6}}=$$

$R{:}-\frac{9}{10}$

24. Un obrero puede hacer un trabajo en 10 días, otro en 9 y un tercero en 5. ¿Qué parte del trabajo pueden hacer los tres juntos en un día?
R: 37/90

25. Una persona gastó 1/5 y luego 2/3 de una suma de dinero. ¿Qué parte del total gastó y que parte le queda?
R: 13/15; 2/15

26. Se vendió las 3/4 partes de un lote de mercadería, y luego la cuarta parte del resto. ¿Cuánto queda aún?
R: 3/16

27. Un obrero que debe abrir una zanja de 65 metros de largo, hizo primero los 2/13 de la misma y luego el duplo de lo ya hecho. ¿Qué longitud debe abrir aún?
R: 35 metros

28. ¿Cuántos días hay en los 3/5 de una año de 365 días?
R: 219 días

29. Obtener el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo entre los números:
a) 81 540 162 243
b) 84 189 210 105
R: a) 27 4860
b) 21 3780

30. Se desean repartir 180 libros, 240 cuadernos y 360 lápices entre cierto número de alumnos, de tal manera que cada uno reciba una cantidad exacta de libros, cuadernos y lápices. ¿Cuál es el mayor número de alumnos que cumplen con lo pedido?
R: 60

31. Dos engranajes giran uno sobre el otro; el primero tiene 48 dientes y da una vuelta cada 4 segundos; el segundo tiene 104 dientes. ¿Cada cuántos segundos pasan por la misma posición?
R: 52 seg.

32. Se quiere fabricar cajones para guardar 1830 latas de aceite y 1170 latas de alcohol de tal manera que cada cajón tenga el mismo número de latas, sin que sobre ninguna y sin mezclar las latas. ¿Cuál es el mayor número posible de latas que pueden ponerse en cada cajón? ¿Qué cantidad de cajones se necesitan?
R: 30; 100

Verificar las siguientes desigualdades:

$$33 \rightarrow \frac{4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{2}}{3 + \frac{2}{5} - \frac{4}{7}} \prec \frac{2 + \frac{5}{7} - \frac{7}{4}}{4 - \frac{5}{6} + \frac{7}{8}}$$

$R: si$

$$34 \rightarrow \frac{\sqrt{25} + \frac{8}{4} - 2}{\ } \leq \frac{2 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\ }$$

Estimados estudiantes, juntos hemos avanzado hasta esta instancia. Es muy importante que practiquemos y resolvamos los ejercicios y problemas que quedaron pendientes en este encuentro de hoy con la intención de afianzar todos los conceptos trabajados en esta clase.

Les sugerimos que anoten todo lo que no entiendan o no puedan resolver solos, ya que en el próximo encuentro tendremos un tiempo al comienzo de la clase para evacuar todo tipo de dudas y preguntas que quieran formular.

¡Mucha suerte y buena semana!

Clase 2

Expresiones
algebráicas

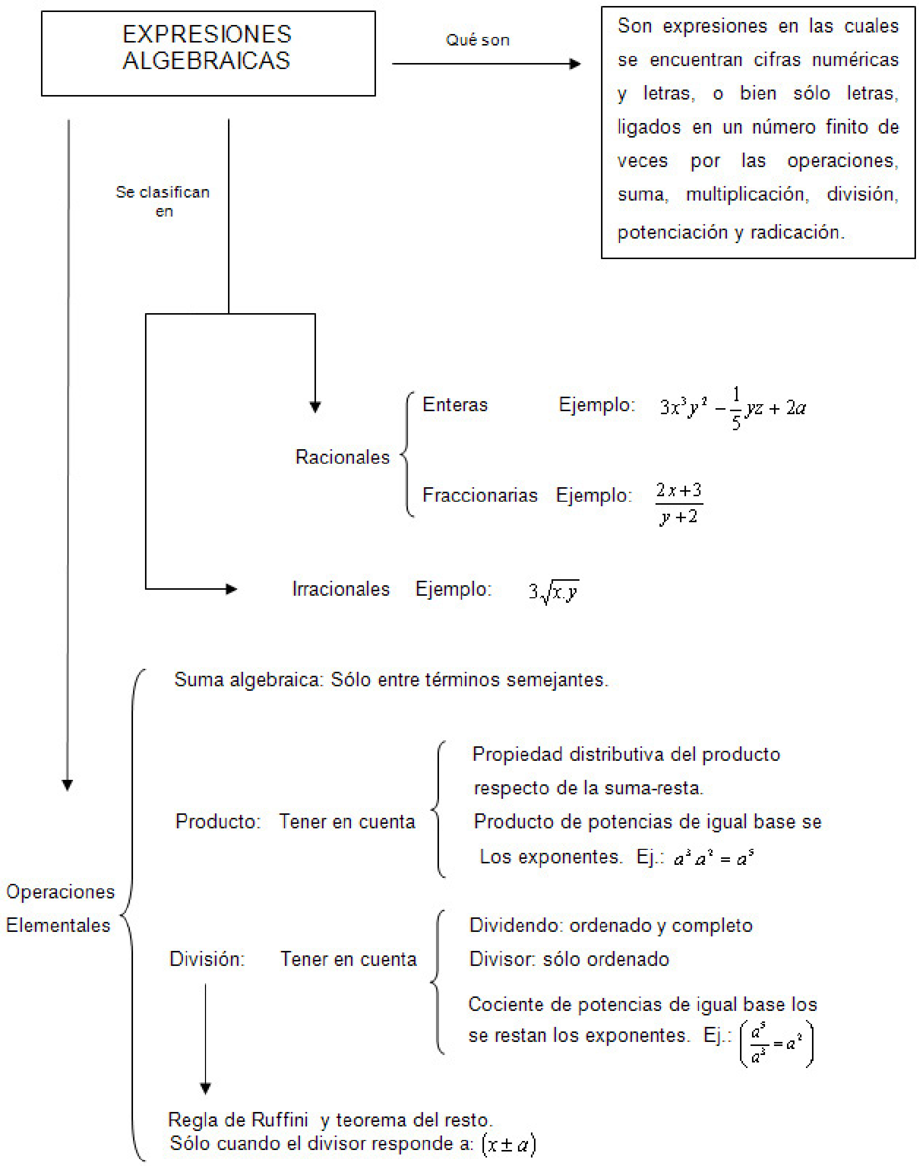
Objetivos específicos

- Recuperar los conceptos expresiones algebraicas y polinomios.
- Afianzar la destreza en resolución de operaciones polinómicas.
- Aprender a utilizar reglas matemáticas sencillas.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente.

Contenidos

- Expresiones algebraicas: conceptos generales.
- Monomios, binomios, trinomios, polinomios.
- Suma algebraica.
- Producto entre expresiones algebraicas.
- Cociente entre expresiones algebraicas.
- Casos particulares. Regla de Ruffini y Teorema del Resto.
- Concepto de divisibilidad.

Esquema conceptual: vinculación de contenidos de la Clase 2.



Expresiones algebráicas

Son expresiones en las cuales se encuentran cifras numéricas y letras, o bien sólo letras, ligadas en un número finito de veces por las operaciones suma; multiplicación; división; potenciación y radicación.

Ejemplos:

$a)\ 5x^4$ monomios

$b)\ \left(3y^3 - 2x\right)$ binomios

Estas expresiones algebraicas pueden clasificarse según el siguiente diagrama:

- Expresiones Algebraicas
  - Racionales
    - Enteras
    - Fraccionarias
  - Irracionales

Los bloques de construcción de una expresión algebraica se llaman términos.

En el ejemplo: $2x^2 - 3x + 7$,se reconocen tres términos: $2x^2$; $-3x$ y 7. A su vez, cada término en general cuenta con una parte numérica y/o literal. En el término $2x^2$, el factor 2 se denomina coeficiente numérico y el factor x^2 se llama parte literal del mismo. (Arya-Larder, 2009)

Observemos los siguientes ejemplos y tratemos de ubicarlos en la clasificación anterior:

$a)\ 3x^3y^2 - \frac{1}{5}y + 2a \quad b)\ 4x^5 - \frac{3}{x} + \frac{5x}{y} \quad c)\ \frac{2x+3}{y+2} \quad d)\ 3\sqrt{x}$

Recordemos que su nombre (expresiones algebraicas) se debe a que además de elementos numéricos en ellas existe una parte literal. Y es justamente debido a la ubicación de estos elementos que se las puede clasificar.

Para pensar y relfexionar

¿Cuáles son las características que presentan los elementos y que permiten ubicarlos en el diagrama mencionado?

Las expresiones algebraicas enteras reciben nombres tales como monomio, binomio, trinomio, y en general polinomio.
Intentemos recordar a qué característica responden dichos nombres.
Observemos los ejemplos e identifiquémoslos:

$a)\ \ 3x^2 \qquad b)\ \ 3x^2 + x \qquad c)\ \ 3 + 4x - x^2$

A estas expresiones algebraicas enteras las llamaremos de ahora en adelante **polinomios.**

Con estos polinomios también se pueden realizar operaciones como suma, producto, división. Para abordar estas operaciones, es necesario recordar algunos conceptos como:

Grado de un monomio: está dado por el número de factores literales que posee. Recordemos que en los factores literales debe considerar la potencia de cada uno de ellos.
¿Cómo indicaríamos el grado de los siguientes monomios? ¿Lo intentamos?

a) 5 x4 y   b) 6 y z   c) -2 x3 y z2

Grado de un polinomio: está dado por el grado, del término de mayor grado que está presente en él.
Por ejemplo el grado del polinomio: - 1/3 x4 y + 3 x2 y6 – 5 a x es: 8

Valor numérico: es aquel valor que se obtiene cuando se reemplaza la parte literal por un valor numérico prefijado, para cada una de las letras que la componen. De esta manera queda una expresión numérica, que debe resolverse mediante las operaciones aritméticas indicadas en la misma. Para realizar estos cálculos deberá recurrir a varios de los conceptos vistos en la clase1.
Ejemplo:

2 a2 + 5 a b – 3 b2 c   con: (a = 1; b = 2; c = - 1)
2 (1)2 + 5.1.2 – 3 (1)2 (- 1)
2 + 10 + 3 = 15

SUMA ALGEBRAICA

Observemos detenidamente el ejemplo que se presenta a continuación en donde se efectuó la suma entre dos polinomios.

$$(-5x^2y+\frac{1}{2}xy-2z+3a) \; + \; (2xy-3x^2y+5z-\frac{1}{5}b) \; =$$

¿Cómo fue realizada esta operación? ¿Qué se tuvo en cuenta para efectuarla? ¿Qué caracteriza a los términos de un polinomio que fueron sumados con cada término del otro?

Recordemos que para poder sumar polinomios sólo se pueden sumar los términos semejantes. Tratemos de explicar con terminología pertinente qué significa “términos semejantes”. Para que dos términos sean semejantes entre sí ¿qué deben tener en común?

Intentemos enunciar con lenguaje apropiado:

$$-5x^2y+\frac{1}{2}xy-2z+3a$$

$$+$$

$$-3x^2y+2xy+5z-\frac{1}{5}b$$

$$-8x^2y+\frac{5}{2}xy+3z+3a-\frac{1}{5}b$$

Veamos los siguientes ejercicios y controlemos con los resultados propuestos.

Actividad

$a)\quad 5y^2z+4xy-3xz \qquad con \qquad \frac{1}{2}xy-\frac{3}{5}xz-\frac{1}{8}y^2z$

$Rta: \frac{39}{8}y^2z+\frac{9}{2}xy-\frac{18}{5}xz$

$b)\quad 4x^2+3x-\frac{1}{5} \qquad con \qquad \frac{3}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{3}{7}$

$Rta: \frac{3}{4}x^3+\frac{15}{4}x^2+\frac{35}{9}x+\frac{8}{35}$

PRODUCTO ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para pensar y reflexionar

Observemos los ejemplos desarrollados y saquemos conclusiones. Tratemos de explicar, con lenguaje pertinente, cómo se debe realizar esta operación.

$$a)\quad \left(3x^3y\right).\left(-\frac{1}{2}ax^2y^{-3}\right) = -\frac{3}{2}ax^5y^{-2}$$

$$b)\quad \left(-5xz^{-2}+3a\right).\left(-\frac{1}{2}ax\right) = \frac{5}{2}ax^2z^{-2} - \frac{3}{2}a^2x$$

$$c)\quad \left(-2ay - \frac{1}{3}a^2\right).\left(2x^3+3y\right) = -4ax^3y - 6ay^2 - \frac{2}{3}a^2x^3 - a^2y$$

Recordemos que en el producto de potencias de igual base, los exponentes se suman entre sí. Es decir: a3. a2 = a5
Es importante destacar que este tipo de operación cumple con la propiedad distributiva. Es decir, que cada término de un polinomio debe multiplicar a cada uno de los términos del otro polinomio.
Si estas consignas no fueron descubiertas cuando observamos los ejercicios resueltos, volvamos sobre ellos e intentemos nuevamente.

A continuación, tenemos otros desafíos para aplicar lo visto. Utilicemos las respuestas para la auto-evaluación.

Actividad

$$a)\quad (4xz+2x+3z)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}z+2\right)=$$

$$Rta: 2x^2z+3xz^2+x^2+11xz+\frac{9}{4}z^2+4x+6z$$

$$b)\quad (5x^2+3x+2)\cdot\left(\frac{1}{2}x-3\right)=$$

$$Rta: \frac{5}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-8x-6$$

$$c)\quad (x^2-1)\cdot(x^3+2)=$$

$$Rta: x^5-x^3+2x^2-2$$

$$d)\quad (x+3)\cdot(2x^2-5x+7)=$$

$$Rta: 2x^3+x^2-8x+21$$

$$e)\quad (x+3a)\cdot\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{2}x+2\right)=$$

$$Rta: \frac{49}{6}xa+\frac{5}{2}x^2+2x+2a^2+6a$$

COCIENTE ENTRE EXPRESIONES ALGEBRÁICAS

Analicemos estos dos ejemplos resueltos para que a través de ellos recordemos esta operación y saquemos nuestras propias conclusiones.

a) $(3\,b\,c\,d + 12\,b\,c\,x - 9\,b^2\,c) : (3\,b\,c)$

Polinomio dividendo: D ▼ Polinomio divisor: d ▼

$$
\begin{array}{llll}
 & 3\,b\,c\,d + 12\,b\,c\,x - 9\,b^2\,c & \big| \; 3\,b\,c & \\
- & \underline{3\,b\,c\,d} & d + 4\,x - 3\,b & \text{polinomio cociente: C} \\
 & 0 \quad + 12\,b\,c\,x & & \\
- & \quad \underline{12\,b\,c\,x} & & \\
 & \quad 0 \quad - 9\,b^2\,c & & \\
- & \quad\quad \underline{-9\,b^2\,c} & & \\
 & \quad\quad 0 \leftarrow & \text{resto de la división: R} &
\end{array}
$$

b) $(25\,x^6 - x^4 – 2\,x^3 – 8\,x^2) : (5\,x^3 – 4\,x^2)$

$$
\begin{array}{lll}
 & 25\,x^6 + 0\,x^5 - x^4 - 2\,x^3 - 8\,x^2 & \big| \; 5\,x^3 - 4\,x^2 \\
- & \underline{25\,x^6 - 20\,x^5} & 5\,x^3 + 4\,x^2 + 3\,x + 2 \\
 & 0 \quad + 20\,x^5 - x^4 & \\
- & \quad \underline{20\,x^5 - 16\,x^4} & \\
 & \quad 0 \quad + 15\,x^4 - 2\,x^3 & \\
- & \quad\quad \underline{15\,x^4 - 12\,x^3} & \\
 & \quad\quad 0 \quad +10\,x^3 - 8\,x^2 & \\
- & \quad\quad\quad \underline{10\,x^3 - 8\,x^2} & \\
 & \quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

Observemos detenidamente el polinomio dividendo del ejemplo b). En él hay términos que fueron incorporados para completar las potencias decrecientes que no existían en un principio. Los coeficientes de dichos términos siempre deben ser cero. Además, los términos del polinomio dividendo y divisor deben estar ordenados en potencias decrecientes para simplificar las operaciones involucradas.
Recordemos que en el cociente de potencias de igual base, los exponentes se restan entre sí, es decir, el exponente del dividendo menos el exponente del divisor. Analicemos el ejemplo: x5: x2 = x3

Importante
Una forma de comprobar si las divisiones realizadas fueron correctas, es haciendo la prueba la división, es decir:

$$C \cdot d + R = D$$

¿Lo comprobamos en los ejemplos dados? Sólo deberemos recordar el concepto de suma y producto de polinomios vistos hasta el momento.

Para afianzar los conceptos analicemos las siguientes situaciones con sus respectivas respuestas.

Actividad

$a) \quad (6a^4b^2 + 4a^2b^4 + ab^5 + 7a^3b^3) : (2ab^2 + b^3) =$

$Rta: C = 3a^3 + 2a^2b + ab^2 \quad R = 0$

$b) \quad (4a^3b^2c + 12ab^2c^3 - 18a^4b^4c^4) : (2abc) =$

$Rta: C = 2a^2b + 6bc^2 - 9a^3b^3c^3 \quad R = 0$

$c) \quad (x^4 - 3x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 2) =$

$Rta: C = x^2 + 2x - 1 \quad R = (-6x + 3)$

$d) \quad (3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5) : (x + \frac{1}{5}) =$

$Rta: C = -\frac{x^2}{3} + \frac{31}{15}x + \frac{194}{75} \quad R = (\frac{1681}{375})$

REGLA DE RUFFINI

Como hemos visto, el polinomio que resulta después de realizar la división se denomina polinomio cociente y se lo simboliza como C(x) y al resto como R(x). La división termina cuando el polinomio resto es de un grado menor que el polinomio divisor.

Importante

Recordemos que no siempre se obtiene un polinomio resto igual a cero. Si ocurre esto último, ¡se dice que la división es exacta!

El procedimiento que acabamos de ver es general para cualquier tipo de división entre polinomios. No obstante, existe una regla práctica para resolver el cociente que se puede aplicar cuando los polinomios dividendo y divisor son en una sola indeterminada y el polinomio divisor es de la forma $(x \pm a)$, siendo "a" un número real. Dicha regla se conoce como **Regla de Ruffini,** es la que nos permite calcular de una manera más simple y directa los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división.

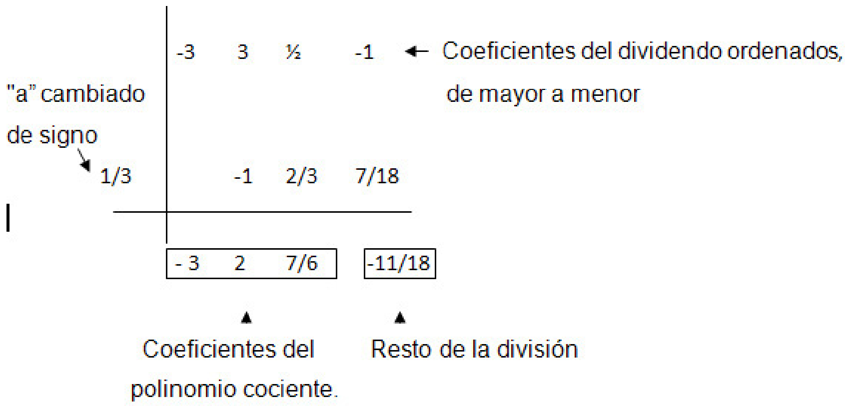
Analicemos el ejemplo siguiente. Después intentemos la explicación de cómo operar:

$$\left(\frac{1}{2}x - 1 - 3x^3 + 3x^2\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Primero ordenamos y completamos si hiciera falta, el polinomio dividendo. (Recordemos que para completar debemos hacerlo con coeficiente cero, por x elevada a la potencia faltante).

$$\left(-3x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

El esquema que se muestra a continuación, es utilizado frecuentemente como una manera práctica de obtener los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división.



Entonces el resultado a explicitar será:

$$C_{(x)} = -3x^2 + 2x + \frac{7}{6}$$

$$R_{(x)} = -\frac{1}{18}$$

¿Cómo se opera con esta regla práctica?

En la fila superior colocamos los coeficientes del polinomio dividendo, de manera ordenada, completa y decreciente respecto de “x”. En el vértice exterior izquierdo ubicamos el valor de “a”, del binomio divisor, cambiado de signo.

Debajo de la línea horizontal, pondremos de forma ordenada los coeficientes que resulten para el polinomio cociente y el resto de la división.

El primer coeficiente del polinomio cociente es siempre igual al del dividendo, por lo tanto lo colocamos directamente debajo de la línea horizontal.

Para obtener el segundo coeficiente del polinomio cociente, multiplicamos el primer coeficiente por “a” cambiado de signo, como ya figura en el vértice antes mencionado, y ese resultado se suma con el segundo coeficiente del dividendo (ubicado en la fila superior).

Una vez que obtuvimos el segundo coeficiente del cociente, repetimos la operación anterior (multiplicamos por “a” cambiado de signo y sumamos con el siguiente coeficiente) y así sucesivamente hasta terminar.

Observemos que sólo hemos calculado coeficientes, por lo tanto aún, nos falta determinar el polinomio cociente, y el resto de la división.

¿De qué grado será el polinomio cociente?

El grado del divisor siempre es uno (1) y además deberá tener en cuenta que en la división de potencias de igual base los exponentes se restan entre sí.

Con todos estos elementos y un pequeño esfuerzo, estaremos en condiciones de plantear el polinomio cociente completo y determinar el resto o residuo de la división. Intentémoslo en la actividad propuesta más adelante. Utilizaremos el ejemplo anterior para ayudarnos.

Para saber más

Para conocer más a Ruffini, podemos visitar esta dirección:
http://es.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini

La regla de Ruffini es muy útil para factorizar polinomios de grado “n” cuando se conoce una de las raíces del mismo. Con la raíz se puede formar el binomio de la forma $(x \pm a)$ según corresponda, obtener el polinomio cociente, y de esta manera plantear su forma factorizada, ya que siempre el resto es cero. Observemos el ejemplo.

Dado el polinomio $x^3 + x^2 - 4x + 2$, se sabe que una de sus raíces es uno, esto es $x_1 = 1$.

Por lo tanto el binomio $(x-1)$ es divisor exacto del polinomio dado. Aplicando la regla de Ruffini se determina el polinomio cociente, según:

	1	1	- 4	2
1		1	2	- 2
	1	2	- 2	0

Entonces: $C_{(x)} = x^2 + 2x - 2$ y $R_{(x)} = 0$

Por lo tanto:

$$x^3 + x^2 - 4x + 2 = \left(x^2 + 2x - 2\right)\left(x - 1\right)$$

Importante

A esta problemática de factoreo la retomaremos en la siguiente clase, ya que es un concepto muy importante, ¡y merece más desarrollo!

Vamos con alguna ejercitación interesante para aplicar la Regla de Ruffini y al realizarla controle sus respuestas con la información dada.

Actividad

$a) \quad (x^2 - 2x + 1) : (x + 1) =$

$Rta : C = x - 3 \qquad R = (4)$

$b) \quad \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right) : (x - 3) =$

$Rta : C = 4x^2 + \frac{23}{2}x + \frac{75}{2} \qquad R = (221/2)$

$c) \quad (x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 39) : (x + 3) =$

$Rta : C = x^3 - 2x + 13 \qquad R = (0)$

$d) \quad (5x + 7x^3 - 13) : (x + 1/2) =$

$Rta : C = 7x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{27}{4} \qquad R = (-131/8)$

TEOREMA DEL RESTO

Del mismo modo que existe la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de una división entre polinomios de una manera rápida y sencilla, cuando se cumplen las mismas exigencias descritas anteriormente, es decir, que el polinomio dividendo y divisor son en una sola indeterminada y el polinomio divisor es de la forma: $(x \pm a)$, también es posible calcular sólo el resto de la división, utilizando el Teorema del Resto.

Como su nombre lo indica, nos permite sólo conocer directamente el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma: $(x \pm a)$
¿Cómo se calcula dicho resto?
El resto es igual al "valor numérico" del polinomio dividendo cuando la variable es sustituida por el valor de "a" cambiado de signo.

Observemos el ejemplo y luego resolvamos los ejercicios planteados en la guía de ejercitación.

Calculemos el resto de la siguiente división: (5 x2 - 2 x + 4): (x + 3)
R=D (-a)=D (-3)=5. (- 3)2 - 2. (- 3) + 4
R=5.9 + 6 + 4 =
R=45 + 10 = 55

Para pensar y reflexionar

¿Qué importancia o utilidad puede tener el conocimiento de este procedimiento conocido como teorema del resto?
Pensemos en el término "divisibilidad". ¿Qué nos sugiere el significado matemático de dicho término?
¿Qué entendemos cuando expresamos que un polinomio es divisible por otro? ¿Cuál sería el resto de esa división?
La respuesta a estos interrogantes o mejor aún la aplicabilidad de este teorema la encontraremos cuando trabajemos con factorización o factoreo de expresiones algebraicas y se presente el caso "divisibilidad".

Veamos algunas aplicaciones del Teorema de resto.

Actividad

Para ello realizaremos el mismo cuadro de ejercicios propuestos en la última actividad, relacionada con la Regla de Ruffini. ¡¿Lo hacemos?!

Actividad individual

Determinar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

$$1 \rightarrow 5x^2y + 3xy^2 + 7xy = \quad para: \quad x = 1 \quad y = -1$$
$$R = -9$$

$$2 \rightarrow 4xy^3 + 9x^2y - \frac{2}{3}x = \quad para: \quad x = 2 \quad y = \frac{1}{2}$$
$$R = \frac{53}{3}$$
$$3 \rightarrow \frac{x+y}{x-1} + \frac{x+2y}{x-2} - \frac{x-y}{x} = \quad para: \quad x = -2 \quad y = 1$$
$$R = -\frac{7}{6}$$

Efectuar la suma de los siguientes polinomios:

$$4 \rightarrow (8xy - 2yz) \quad ; \quad (2xy - z + 6yz) \quad ; \quad (9yz - 7xy - 3z)$$
$$R = 3xy + 13yz - 4z$$
$$5 \rightarrow \left(4xy + 3x^2y - \frac{2}{3}xy^2\right) \; ; \; \left(\frac{5}{2}xy^2 + \frac{1}{5}xy - \frac{1}{3}x^2y\right)$$
$$R = \frac{8}{3}x^2y + \frac{21}{5}xy + \frac{11}{6}xy^2$$

Realizar las operaciones indicadas, con los siguientes polinomios:

$$P_{(x)} = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4$$
$$Q_{(x)} = 6x^3 + 2x^2 - 8x$$
$$R_{(x)} = -x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$
$$6 \rightarrow \left(P_{(x)} + Q_{(x)} - R_{(x)}\right) =$$
$$R = 2x^4 + 10x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 4$$
$$7 \rightarrow Q_{(x)} - \left(P_{(x)} + R_{(x)}\right) =$$
$$R = -2x^4 + 4x^3 + \frac{13}{2}x^2 - \frac{19}{2}x - 4$$

Completar los siguientes cuadros:

$8 \rightarrow$

P(x) – Q(x)	P(x)	Q(x)
$-3x^5 + 4x^2 - x - 4$	$-3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4$	

$9 \rightarrow$

P(x) – Q(x)	Q(x)	P(x)
$2x^4 + 7x^3 + 8x - 3$	$x^3 - x^2 + 2x$	

Dados los siguientes polinomios, efectuar las operaciones indicadas:

$P_{(z)} = z^2 - 1$

$M_{(x)} = -7x^2 + 1$

$H_{(y)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}y^3$

$S_{(z,y)} = 2zy + 2z^2$

$0 \rightarrow P_{(z)}.S_{(z,y)} =$

$1 \rightarrow H_{(y)}.M_{(x)} =$

P(x z) = 1/3 x5 z – 2/.3 x4 z2 + 3 x z3 +1/2 x z

W(x z) = -1/2 x2 z

S(x , y) = 36 x y6 – 6 x y3 + 18 x y5 – 12 x y4

T(x ,y) = 3 x y + 6 x y2

R(x) = 2 x4 + x – 3 x3

U(x) = 3 x2 + x

12. P(x , z) : W(x , z)
13. S(x,y) : T(x,y)
14. R(x) : U(x)

Completar los siguientes cuadros:

$15 \rightarrow$

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$(x + 2)(x - 3)^2$	$x^2 - 6x + 9$		

$16 \rightarrow$

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$8x^3 + 24xy^2 + 24yx^2 + 8y^3$	$(2x + 2y)^2$		

$17 \rightarrow$

Cociente	Divisor	Dividendo	Grado del Dividendo
$- x^2 - 8x + 9$	$(x - 4)$		

$18 \rightarrow$

P(x) :Q(x)	P(x)	Q (x)	Resto
$x^5 - 4x^3 - 3x^2 - 6x - 4$	$x^2 + 2$		

Resolver los siguientes cocientes aplicando la regla de Ruffini:

19. (x2 – 4) : (x + 2)=
20. (x3 – a3) : (x – a)=
21. (x4 + 2 x2 – x) : (- 2 + x)=
22. (-2x + 3x2 – 2x4 – x3 + x5) : (x – 4)=
23. (1/2 a3 + 2 a – a2 + 2) : (a – 2) =
24. ¿El polinomio (x2 + 4 – 4 x) es divisible por (x + 2)? Si. No ¿Por qué?

25. El resto de realizar (2 x2 +1/5 x – c) : (x – 3), es R=7. ¿Cuál es el valor del polinomio cociente C?. Sugerencia: utilizar la prueba de la división.

26. Obtener el valor de “m” para que la división siguiente sea exacta. (Utilizar el teorema del resto).

$$(2x^4 + 3x^3 - mx - 6):(x + 2) =$$

$$R = -1$$

27. ¿Cuál es el polinomio que dividido por (2x+3) tiene por cociente y por resto 37?

$$R = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 46$$

Estimados estudiantes, tenemos siete días hasta la próxima clase para revisar los contenidos trabajados hoy, y poder registrar todas las dudas que se presenten trabajando solos, sin la ayuda del docente.

Anotemos todo lo que no entendamos o no podamos resolver solos, ya que en el próximo encuentro tendremos un tiempo al comienzo de la clase para salvar todo tipo de dudas. Podemos trabajar con las actividades que quedaron pendientes de hacer en clase, o con cualquier libro que tengamos a nuestro alcance.

¡Confiamos en su capacidad para analizar y ejercitar lo visto en clase!

¡Buena semana y a trabajar!

Clase 3

Factorización de expresiones algebráicas

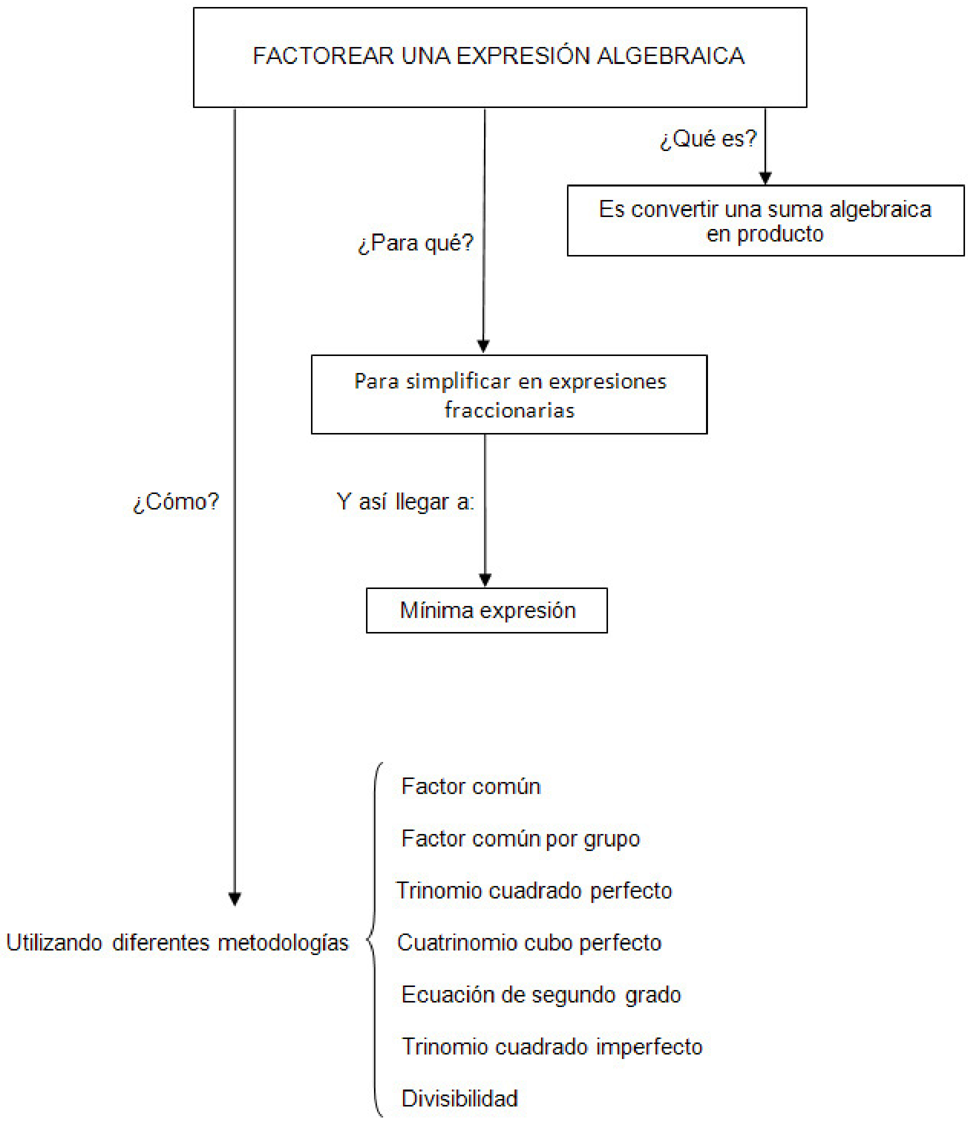
Objetivos específicos

- Comprender la importancia de factorear una expresión algebraica.
- Afianzar la destreza en las diferentes metodologías.
- Utilizar factoreo para simplificar expresiones algebraicas fraccionarias.
- Manejar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente.

Contenidos

- Factorización de expresiones algebraicas.
- Factor común.
- Factor común por grupo.
- Trinomio cuadrado perfecto.
- Cuatrinomio cubo perfecto.
- Ecuación de segundo grado.

Esquema conceptual: vinculación de contenidos de la Clase 3.



Factorización de expresiones *algebráicas*

¿Cómo podemos explicar el significado matemático de la palabra factoreo? ¿Qué reflexión nos propone el término factor?

Observemos atentamente el ejemplo siguiente:

$$P(x)= x^2 - 5x + 6 = (x - 2). (x - 3)$$

Para pensar y reflexionar

¿Cuál es la operación algebraica presente en cada uno de los miembros de la igualdad anterior?
¿Cuál es la operación que vincula a todos los términos del primer miembro de la igualdad y cuál la que vincula a los términos encerrados entre paréntesis del segundo miembro de la igualdad?
Realicemos este análisis y respondamos a las cuestiones planteadas, nos podemos ayudar con las siguientes ideas…
Si el producto de dos enteros "a" y "b" es "c", c=a. b, entonces "a" y "b" se llaman factores de "c".
Esta terminología también se utiliza en expresiones algebraicas.
Si dos o más expresiones algebraicas se multiplican a la vez, estas expresiones se dice que son factores de la expresión que se obtuvo como producto: por ejemplo, la expresión 2xy se obtuvo multiplicando 2, x e y, de modo que 2, x e y son los factores de 2xy.
De manera similar, x es un factor de la expresión $2x^2+3x$ puesto que podemos escribir $2x^2+3x = x\cdot(2x+3)$ y x^2 es un factor de $6x^2+9x^3$, dado que podemos escribir $x^2\cdot(6+9x)$. (Arya-Larder, 2009)
Los distintos métodos de factoreo requieren de un análisis e interpretación pertinente, por lo tanto a continuación desarrollaremos cada uno de ellos

FACTOR COMÚN

Comencemos con estos ejemplos:

a) $6\,a\,x^2 + 3\,a^2\,y - 3\,a\,b \;=\; 3\,a.\,(2\,x^2 + a\,y - b)$

b) $25\,a^2 + 30\,a^3 - 15\,a \;=\; 5\,a.\,(5\,a + 6\,a^2 - 3)$

Después de observar detenidamente los ejercicios resueltos, ¿pudimos recordar qué significa factor común?
Analicemos cada uno de los términos del título, factor común, y tratemos de enunciar una regla para este caso.
Es importante que las diferentes metodologías de factorización se manejen con la terminología correcta y **no** por número de caso, como tal vez lo hacíamos en el nivel medio de educación. Los nombres de cada uno nos ayudarán a interpretar cómo debemos operar para lograr transformar una suma algebraica en producto.

A continuación, tenemos algunos casos para trabajar:

Actividad

$a)\ 2a + 2ab - \frac{3}{5}ac =$ $\qquad Rta: a \cdot \left(2 + b - \frac{3}{5}c\right)$

$b)\ 4x^3y^2 - 2x^2y + \frac{8}{9}x^6y^5z =$ $\qquad Rta: 2x^2y \cdot \left(2xy - 1 + \frac{4}{9}x^4y^4z\right)$

$c)\ 169a^5b^3c - 13ab^3c^5 =$ $\qquad Rta: 13ab^3c \cdot (13a^4 - c^4)$

$d)\ 14a^3b^2n + \frac{7}{2}a^3bn^4 + 21a^3bn^2 =$ $\qquad Rta: 7a^3bn \cdot \left(2b + \frac{1}{2}n^3 + 3n\right)$

FACTOR COMÚN POR GRUPOS

No olvidemos analizar el significado de cada uno de los términos del tema planteado.
En los siguientes ejemplos visualicemos cómo han sido agrupados los términos del primer miembro y analicemos cuál es el factor común entre ellos, y finalmente, relacionemos estas ideas con el segundo miembro de la igualdad.

En esta instancia aún no se ha factorizado completamente. Recordemos que los signos (+) y (-) dividen términos. En cada uno de los sumandos, el factor común es $(x^2 + 2)$ para a) y (x+1) para b), respectivamente.

a) $x^3 + \boxed{3\,x^2} + 2\,x + \boxed{6} \;=\; x\,.\,(x^2+2) + 3\,.\,(x^2+2)$

$= (x^2+2)\,.\,(x+3)$

b) $a^2x + \boxed{b^2x} + a^2 + \boxed{b^2} \;=\; a^2.(x+1) + b^2.(x+1)$

$= (x+1)\,.\,(a^2+b^2)$

Después de observar atentamente estos ejemplos, podemos trabajar como se indicó en el punto anterior relacionando la idea ya formada de factor común con el término grupo. Intentemos hacer conclusiones, de enunciar con terminología pertinente como operar en este caso de factoreo.
¿Realizamos la siguiente propuesta de trabajo? ¡No olvidemos controlar los resultados con las respuestas!

Actividad

$a)\ 2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b =$ $\qquad Rta: (a+b)\cdot(2x-y+5)$

$b)\ \frac{1}{2}a^2x - 2ax^2 + ax - \frac{1}{2}ab + 2bx - b =$ $\qquad Rta: \left(\frac{1}{2}a - 2x + 1\right)\cdot(ax-b)$

$c)\ a^2x + b^2x + a^2 + b^2 =$ $\qquad Rta: (x+1)\cdot(a^2+b^2)$

$d)\ 7x + y - xy - 7 - z^2 + xz^2 =$ $\qquad Rta: (x-1)\cdot(7-y+z^2)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Esta operación también responde al nombre de **binomio al cuadrado**, ó **cuadrado de un binomio,** cuyo desarrollo nos lleva a obtener el primer miembro.

Analicemos los ejemplos que contínúan, y relacionemos cada uno de los términos que hacen al nombre de este caso:

a) $4x^2 + 12x + 9 = \left(2x + 3\right)^2$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (2x)^2 & 2.2x.3 & (3)^2 \end{array}$$

$$\left(2x + 3\right)^2 = (2x + 3)(2x + 3)$$

b) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x^2)^2 & 2x^2.\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{array}$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right).\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Para pensar y reflexionar

¿Por qué **trinomio**? ¿A qué se refiere cuando expresa **cuadrado perfecto**?
¿Cómo es el enunciado del desarrollo del binomio al cuadrado?
¿Cómo relacionamos el signo que vincula los dos términos del binomio con los signos que corresponden al polinomio desarrollado?

Recordemos que en la potencia de potencia los exponentes se multiplican entre sí, es decir:

$$\left(a^2\right)^3 = a^6$$

Importante

En general, escribimos como trinomio cuadrado perfecto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$$

Observemos en el segundo caso la alternancia de signo.

A continuación tenemos ejercitación para que vayamos afianzando este caso de factoreo.

Actividad

a) $(x^2 + 10x + 25) =$ $\qquad$ $Rta: (x+5)^2$

b) $(x^2 - 8x + 16) =$ $\qquad$ $Rta: (x-4)^2$

c) $\left(\dfrac{q^2}{4}\right) - pq + p^2 =$ $\qquad$ $Rta: \left(\dfrac{q}{2} - p\right)^2$

d) $36m^2n^4 - 24mn^2x^3 + 4x^6 =$ $\qquad$ $Rta: (6mn^2 2x^3)$

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

El ejemplo $x^3 + 3x_2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$, expone un caso sencillo que se presenta en este apartado. A partir del cual podemos enunciar el desarrollo de un binomio elevado al cubo, ¿lo intentamos?

Para pensar y relfexionar

¿Cuántos términos contiene el primer miembro de esa igualdad?
¿Por qué el nombre de cuatrinomio? ¿Por qué cubo perfecto?
¿Cuántos términos de ese primer miembro son cubos perfectos?
¿Cuántos términos de ese primer miembro no son cubos perfectos y cómo se relacionan con las bases de esos cubos perfectos?
Si logramos contestar todos los interrogantes planteados, entonces estamos en condiciones de elaborar un enunciado que se corresponda con él.

Importante

Cuatrinomio cubo perfecto:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$$

Intentemos utilizar los términos apropiados.
Observemos en el segundo caso la alternancia de signo.

Al segundo miembro de la igualdad, también se lo conoce con el nombre de **binomio al cubo**, cuyo desarrollo nos lleva a obtener el primer miembro de la misma. Si aún no logramos establecer una correcta relación entre el nombre **cuatrinomio cubo perfecto** con la forma de factorearlo, analicemos el próximo ejemplo desarrollado, donde se indica cómo debemos proponer a cada uno de los términos del primer miembro de la igualdad, para luego expresarlo en forma factoreada.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{8} & + & 8m^9 & + & \frac{3}{2}m^3 & + & 6m^6 & = & \left(\frac{1}{2} + 2m^3\right)^3 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\left(\frac{1}{2}\right)^3 & & \left(2m^3\right)^3 & & 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2.2m^3 & & 3.\frac{1}{2}\left(2m^3\right)^2 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 3.\left(\frac{1}{4}\right).2m^3 & & 3.\frac{1}{2}.4m^6 \quad 3 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \frac{3}{2}m^3 & & 6m^6 & &
\end{array}
$$

¿Realizamos las siguientes actividades? Luego de trabajar con ellas, controlemos los resultados obtenidos con las respuestas brindadas.

Actividad

$a)\ \left(8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3\right) =$ $\qquad$ $Rta: (2a + 3b)^3$

$b)\ \left(x^3 - \frac{3}{5}x^2y^2 + \frac{3}{25}xy^4 - \frac{1}{125}y^6\right) =$ $\qquad$ $Rta: \left(x - \frac{1}{5}y^2\right)^3$

$c)\ 1 - 3a + 3a^2 - a^3 =$ $\qquad$ $Rta: (1 - a)^3$

$d)\ 8n^{15}y^3 + m^3 + 12n^{10}my^2 + 6m^2n^5y =$ $\qquad$ $Rta: \left(2n^5y + m\right)^3$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

La expresión: $ax^2+bx+c=0$ se denomina ecuación de 2º grado.
En donde: $a, b\ y\ c \in \Re\ y\ a \neq o$
La misma también puede factorearse conociendo sus raíces.

Para pensar y relfexionar

Recordemos: ¿qué significa el término raíz de una ecuación?

Las raíces de la ecuación pueden determinarse a partir con la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Como podemos observar, esta fórmula sólo depende de los coeficientes de la variable “x”. Teniendo en cuenta los signos $\pm$ que figuran delante de la raíz cuadrada de la fórmula precedente, deducimos que los valores a determinar de “x” son siempre dos: x_1 y x_2 Dichos valores son las **raíces de la ecuación cuadrática**, es decir, aquellos **valores que hacen cero (0) a la ecuación.**

Importante

Entonces, una ecuación de 2º grado se factorea como se indica en la siguiente expresión:

$$ax^2+bx+c = a.(x-x_1).(x-x_2) = 0$$

Observemos el ejemplo:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

Una vez determinadas las raíces de la ecuación, esta puede factorearse como se indica:

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4).(x+1)$$

Esta forma de factorear se puede usar entonces, tanto para trinomios cuadrados imperfectos como perfectos.

Unir conceptos

A modo de conclusión: Factorizar un polinomio es expresarlo como un producto de una constante por uno o más factores primos o bien por factores primos entre sí, utilizando una o más metodologías.

A continuación tenemos algunos ejercicios para practicar este caso de factoreo. ¿Los resolvemos?

Actividad

$x^2 + x - 2 =$ $\qquad Rta: (x-1).(x+2)$

$x^2 + 4x + 3 =$ $\qquad Rta: (x+3).(x+1)$

$x^2 - 3x - 4 =$ $\qquad Rta: (x+1).(x-4)$

$2x^2 + 5x + 2 =$ $\qquad Rta: (2x+1).(x+2)$

Importante

Recordemos que sólo podemos simplificar una expresión algebraica fraccionaria cuando las mismas están factoreadas y siempre debemos llegar a la mínima expresión.

Si logramos recordar y fijar lo expuesto hasta aquí, estaremos en condiciones de aplicarlo en ejercicios combinados.
Veamos entonces un par de ejemplos:

$$1)\ \frac{8a^2-24ab+18b^2}{4a^2b-6ab^2}=$$

$$\frac{2.(4a^2-12ab+9b^2)}{2.a.b.(2a-3b)}=$$

$$\frac{(2a-3b)^2}{a.b.(2a-3b)}=\frac{2a-3b}{a.b}$$

$$2)\ \frac{x^3+x^2-4x+2}{x^2-5x+4}=$$

$$\frac{(x^2+2x-2).(x-1)}{(x-4).(x-1)}=\frac{x^2+2x-2}{x-4}$$

Actividad individual

1. Transformar las siguientes expresiones algebraicas en producto:

a) $x^2+x^3=$ $\qquad$ $Rta:\ x^2(x+1)$

b) $\frac{3}{4}m^2.p-\frac{1}{2}m.p^2+\frac{7}{8}m.p=$ $\qquad$ $Rta:\ \frac{1}{2mp}\left(\frac{3}{2}m-p+\frac{7}{8}\right)$

c) $4x^2z+8xz^2+2xz=$ $\qquad$ $Rta:\ 2xz(2x+4z+1)$

d) $x^2+y+x^2a^2+a^2y=$ $\qquad$ $Rta:\ (x^2+y).(1+a^2)$

e) $x^3+3x^2+2x+6=$ $\qquad$ $Rta:\ (x^2+2)(x+3)$

f) $a^2y+ab^2-axy-b^2x=$ $\qquad$ $Rta:\ (b^2+ay).(a-x)$

2. Indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

a) $x^2 + 32x + 64 = (x+8)^2$

b) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

c) $x^2 - 3x + 9 = (x+3)^2$

d) $x^2 - 6x + 9 = (x+3)^2$

e) $x^2 + 10x + 25 = (x-5)^2$

3. Tranformar las siguietntes expresiones algebráicas en producto:

a) $9y^2 + 12x.y + 4x^2 =$ $\qquad$ $Rta:\ (3y+2x)^2$

b) $\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{81} + \frac{1}{9}a^6 =$ $\qquad$ $Rta:\ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}a^3\right)^2$

c) $\frac{1}{4}m^2 + x^2 + x.m =$ $\qquad$ $Rta:\ \left(\frac{1}{2}m + x\right)^2$

d) $\frac{1}{9}y^2.x^2 - \frac{2}{3}x.y.z + z^2 =$ $\qquad$ $Rta:\ (\frac{1}{3}xy - z)^2$

a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b =$ $\qquad$ $Rta:\ (a+b)^3$

b) $-\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^4 - \frac{1}{8} + a^6 =$ $\qquad$ $Rta:\ \left(-a^2 - \frac{1}{2}\right)^3$

c) $8y^3 + x^3 + 12.x.y^2 + 6x^2.y =$ $\qquad$ $Rta:\ (2y+x)^3$

d) $\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^2a + \frac{3}{32}x.a^2 + \frac{1}{64}a^3 =$ $\qquad$ $Rta:\ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}a\right)^3$

4. Tranformar las siguietntes expresiones algebráicas en producto:

a) $2x^2 - 7x + 3 =$ $\qquad$ $Rta:\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right).(x-3)$

b) $x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} =$ $\qquad$ $Rta:\ (x+4).\left(x-\frac{1}{3}\right)$

c) $4x^2 - 7x - 2 =$ $\qquad$ $Rta:\ 4(x-2).\left(x+\frac{1}{4}\right)$

d) $x^2 - 2 =$ $\qquad$ $Rta:\ \left(x-\sqrt{2}\right).\left(x+\sqrt{2}\right)$

5. Reducir o simplificar las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias:

$$a)\ \frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} =$$

$$Rta = \frac{2x^2+4x-5}{x^2-1}$$

$$b)\ \frac{(x^3+8)}{(x+2)} \cdot \frac{(x+1)}{(x^2-2x+4)} \cdot \frac{1}{(x-1)} =$$

$$Rta = \frac{x+1}{x-1}$$

$$c)\ \frac{x^2-1}{15} \cdot \frac{3}{x^3-x} \cdot \left[\frac{5x^2}{x-1}\right]^2 =$$

$$Rta = \frac{5x^3}{(x-1)^2}$$

$$d)\ \left[x + \frac{y^2}{x}\right] \cdot \left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right] =$$

$$Rta = \frac{x^4-y^4}{x^2y}$$

$$e)\ \frac{(5-x)}{(x+y)} \cdot \frac{(y+x)}{(x-5)} \cdot \frac{2x}{(x+2)} =$$

$$Rta = -\frac{2x}{(x+2)}$$

$$e)\ \frac{3a^2b^2}{4xy} : \frac{ab}{xy^2} =$$

$$Rta = \frac{3}{4}aby$$

$$f)\ \frac{(x+y)^2}{x-y} \div \frac{x+y}{(x-y)^2} =$$

$$Rta = x^2 - y^2$$

$$g)\ \frac{x^2}{8+x^3} : \frac{x}{6+x} =$$

$$Rta = x.(6+x)/(x^3+8)$$

$$h)\ \frac{\frac{1}{x}+\frac{x^2}{y^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}} =$$

$$Rta = (x+y)/y$$

$$i)\ \frac{3}{x} : \frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-3} =$$

$$Rta = \frac{2x^2-11x-9}{x(x+1)(x-3)}$$

$$j)\ \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right) =$$

$$Rta = -1$$

$$k)\ \frac{x^2+8x+16}{x^2+x-12} =$$

$$Rta = (x+4)/(x-3)$$

$$l)\ \frac{x^3-8}{x^2-4} =$$

$$Rta = (x^2+2x+4)/(x+2)$$

$$m)\ \frac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5} =$$

$$Rta = (x-2)/(x+1)$$

$$n)\ \frac{x^2-x-2}{2x^2-5x+2} =$$

$$Rta = (x+1)/(2x-1)$$

Estimados alumnos, nos espera una semana con bastante trabajo por realizar, pero a no desanimarse que juntos lo podremos hacer con esfuerzo y dedicación. No olvidemos de anotar todas las inquietudes que se nos presenten a la hora de trabajar solos, para poder resolverlas en el próximo encuentro.
Nos despedimos con un pensamiento para reflexionar…

"Los libros son maestros que no riñen y amigos que no piden"

Clase 4

Divisibilidad y Racionalización

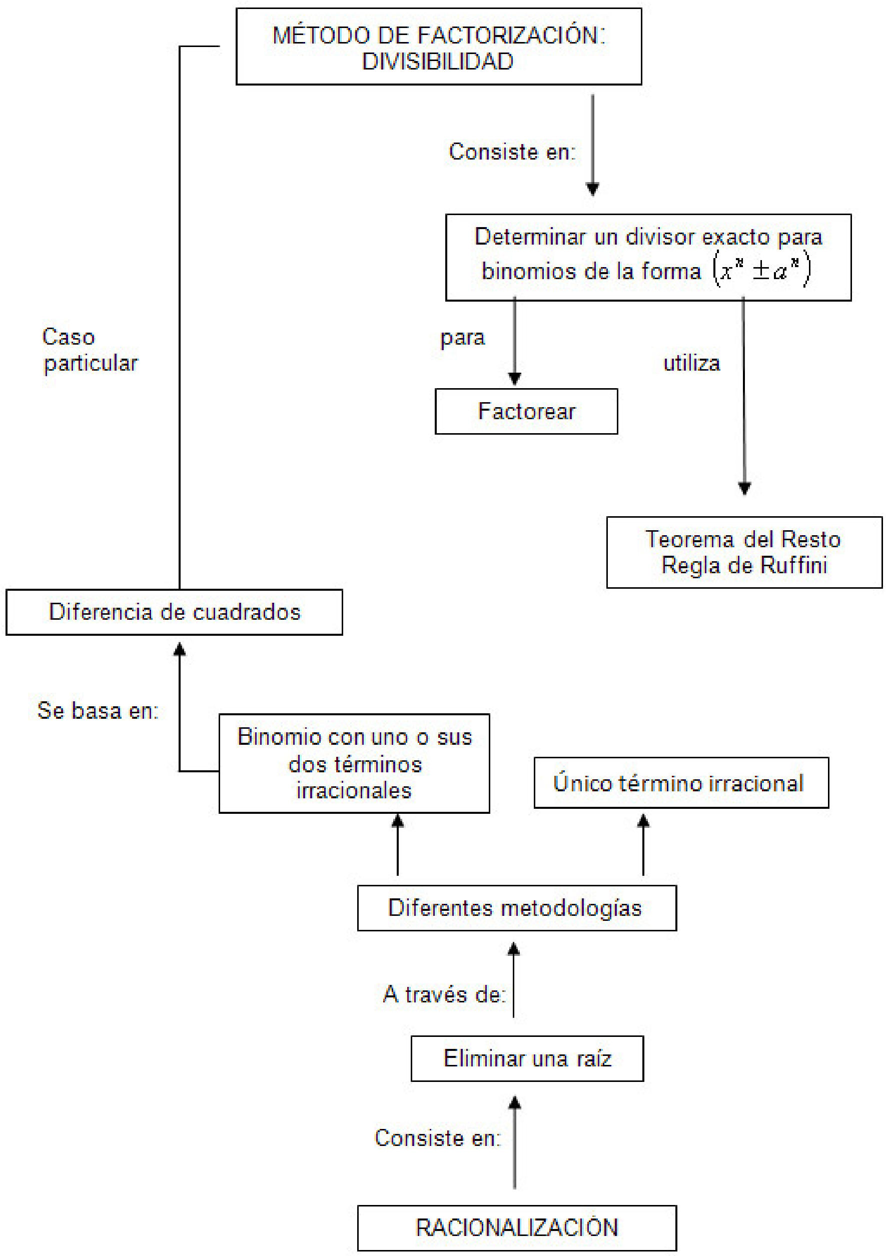
Objetivos específicos.

- Comprender el concepto de divisibilidad y método de factorización en sumas y diferencias de cubos.
- Aprender a factorear diferencias de cuadrados.
- Afianzar la destreza en las diferentes metodologías de racionalización.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente.

Contenidos

- Divisibilidad.
- Suma y diferencia de binomios de potencia impar.
- Suma y diferencia de binomios de potencia par.
- Racionalización.

Esquema conceptual: vinculación de contenidos de la Clase 4.



Divisibilidad

DIVISIBILIDAD

¿Qué pensamiento nos propone el término divisibilidad?
¿Cuándo dos polinomios son divisibles?
Observemos los ejemplos y luego intentemos definir matemáticamente el significado del título.

1.a) $(x^3+27):(x+3)=(x^3+3^3):(x+3)$

Si aplicamos el teorema del resto al cociente indicado en la expresión anterior, ¿Qué ocurrirá?

R(-a) = R(-3) = (-3)3 + 27 = 0

¿Qué relación guarda este resultado con el término divisibilidad?
¿Son o no divisibles entre sí, estos binomios?

1.b) $(x^3+27):(x-3)=(x^3+3^3):(x-3)$

Si aplicamos nuevamente el teorema del resto, ¿qué ocurre?

R(-a) = R (3) = 33 + 27 = 54

Para pensar y reflexionar

¿Qué podemos concluir del binomio dividendo respecto del divisor?
¿Son o no divisibles entre sí?
Observemos atentamente el binomio dividendo y divisor en ambos ejemplos, compáralos y saquemos conclusiones.

Relacionemos la potencia (par o impar) de los términos del polinomio dividendo, el signo que los vincula a dichos términos (negativo o positivo) y comparemos con el divisor en cada caso. ¿Cómo son los divisores respecto al dividendo?

¿Qué se puede deducir? ¿Cuándo es divisible la suma de potencias de exponente impar? ¿Es divisible por la suma o diferencia de sus bases?

Importante

La suma de potencias de exponente impar, sólo es divisible por la suma de sus bases.

Tengamos en cuenta que sólo hemos analizado la divisibilidad de la **suma de potencias de exponente impar**, no hemos factoreado.
Para ello debemos encontrar primero el polinomio cociente, el cual puede calcularse rápidamente utilizando la Regla de Ruffini para (x3 + 27), con el binomio divisor correspondiente, es decir $(x+3)$
Aplicando la Regla de Ruffini:

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	0

Observemos que en la primera fila del esquema aparecen algunos coeficientes 0 (ceros), esto se debe a que el polinomio dividendo debe estar siempre ordenado y completo en potencias decrecientes de “x” (es lo que habíamos visto en la Regla de Ruffini).

Con los coeficientes calculados se forma el polinomio cociente:

C(x) = x2 - 3 x + 9

Entonces, para poder factorizar la expresión (x3 + 27) debemos recordar que, cualquier polinomio dividendo siempre es igual al producto del polinomio cociente por el divisor, cuando el resto es cero.
Esto es:

$$P(x)=(x^3+27)=\boxed{(x^2-3x+9).(x+3)}$$

Expresión factorizada

Analicemos de la misma manera qué ocurre cuando se trata de la diferencia de potencias de índice impar.
¡Observemos, reflexionemos y elaboremos conclusiones!

2.a) $(x^3-27):(x-3)=(x^3-3^3):(x-3)$

2.b) $(x^3-27):(x+3)=(x^3-3^3):(x+3)$

Si trabajamos igual que en el punto anterior y aplicamos Teorema del Resto para ambos ítems, ¿qué ocurre?

2.a) R(3)=(3)3 - 27 = 0 2.b) R(-3)=(-3)3 - 27 = - 54

Para pensar y reflexionar

¿Qué terminología podemos utilizar para relacionar estos binomios entre sí, tanto en el ítem 2.a), como en el 2.b)? ¿Qué podemos decir del dividendo respecto del divisor?

Recordemos que para factorizar una expresión siempre debemos ser divisible por el binomio divisor. Es decir que el resto debe ser cero. Una vez elegido el divisor correcto, entonces, trabajamos utilizando la regla de Ruffini y continuamos como en el caso anterior, hasta que logremos factorizar la expresión: (x3 - 27).
Esto es:
(x3 - 27) = (x2 + 3x + 9).(x - 3)

Observemos que en los dos últimos ítems hemos trabajado con la diferencia de potencias de índice impar, relacionándolas con la suma y diferencia de sus bases.

Para pensar y reflexionar

¿La diferencia de potencias de índice impar es divisible por la suma o diferencia de sus bases?

Intentemos elaborar conclusiones y enunciarlas en base lo visto anteriormente, utilizando lenguaje pertinente.
¿Podremos asegurar lo siguiente?

Importante

La resta de potencias de exponente impar, sólo es divisible por la resta de sus bases.

Analicemos ahora la **diferencia de potencias de índice par.** ¿Cuándo son divisibles y cuál es su divisor?

3.a) $(x^4 - 16) : (x - 2) = (x^4 - 2^4) : (x - 2)$

3.b) $(x^4 - 16) : (x + 2) = (x^4 - 2^4) : (x + 2)$

Observemos que en ambos casos, las potencias de los términos del dividendo son de orden par, y el signo que los relaciona, es negativo. Asimismo los divisores a analizar son la diferencia y suma de sus bases, respectivamente.

Importante

Para poder factorizar el dividendo, utilice los conceptos y reglas correspondientes (Teorema del Resto y Regla de Ruffini).

Debemos averiguar primero por cuál de los dos binomios es divisible, (suma o diferencia de las bases), luego calcular el polinomio cociente y recién concluir en la expresión factoreada.

La cual responde a:

$$(x^4 - 16) = (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)(x - 2)$$

$$(x^4 - 16) = (x^3 - 2x^2 + 4x - 8)(x + 2)$$

Para pensar y reflexionar

¿Por qué (x4 - 16) puede factorearse de dos maneras?

Enunciemos las conclusiones con lenguaje apropiado. ¡Ya contamos con herramientas para hacerlo!

Ahora analicemos que ocurre con la suma de potencias de exponente par:

4.a) $(x^4 - 16) : (x - 2) = (x^4 - 2^4) : (x - 2)$

4.b) $(x^4 - 16) : (x + 2) = (x^4 - 2^4) : (x + 2)$

En ambos casos, aplicamos Teorema del Resto. ¿Son divisibles estos polinomios por la suma o diferencia de sus bases? ¿Qué podemos concluir del dividendo respecto de los divisores?

¿Puede ser factorizada la expresión (x4 + 16)? Justifiquemos nuestra respuesta.

Importante

Estos binomios, tan particulares, que hemos usado en los cuatro ítems anteriores pueden generalizarse como:

$$(x^n \pm a^n)$$

Donde "n" puede ser par ó impar y los divisores exactos pueden ser la suma o diferencia de las bases, es decir $(x \pm a)$**.**

Utilizando estas expresiones generales, podemos enunciar una regla para cada uno de los casos, refiriéndonos a la divisibilidad de cada uno de ellos, por la suma o diferencias de las bases respectivas.

Actividad

Intentemos realizar un esquema explicativo, donde figuren todos los casos planteados de divisibilidad.

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Leamos detenidamente el nombre que recibe este caso particular de divisibilidad. Relacionémoslo con el punto anterior y observemos el ejemplo como ayuda memoria.

Importante

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Es muy importante reconocer los factores encerrados entre paréntesis del segundo miembro de la igualdad.

Intentemos recordar el nombre que los identifica, y luego tratemos de enunciar, con lenguaje pertinente, cómo se descompone en factores, una diferencia de cuadrados. ¡Lo podemos hacer!

Ejemplo:

$$4y^2 \quad - \quad 16z^4 = \left(2y-4z^2\right)\left(2y+4z^2\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left(2y\right)^2 \qquad \left(4z^2\right)^2$$

Es importante que tengamos en cuenta que las potencias se distribuyen a cada uno de los factores de la base correspondiente, para determinarlas correctamente.

$a)\ x^2-9=$ $\qquad$ $Rta:(x+3).(x-3)$

$b)\ 4a^2-9b^4=$ $\qquad$ $Rta:\left(2a-3b^2\right)\left(2a+3b^2\right)$

$c)\ 169x^{12}-\dfrac{1}{49}y^6=$ $\qquad$ $Rta:\left(13x^6-\dfrac{1}{7}y^3\right).\left(13x^6+\dfrac{1}{7}y^3\right)$

$d)\ a^4-1=$ $\qquad$ $Rta:\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)$

RACIONALIZACIÓN

¿Qué sugiere el título? Expliquemos con nuestras palabras qué significa racionalizar. A continuación encontraremos algunos ejemplos para orientarnos, y contestar los interrogantes planteados.

$$a)\quad \frac{4}{\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{4.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2.2^3}}=\frac{4.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{4.\sqrt[3]{4}}{2}=2.\sqrt[3]{4}$$

$$b)\quad \frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=-1+\sqrt{2}$$

Existen diferentes metodologías para racionalizar. Sin embargo en este curso plantearemos sólo dos, que se relacionan directamente con los ejemplos anteriores:

- Cuando el término irracional es único (como en el primer ejemplo).
- Cuando uno o ambos términos del binomio son irracionales (como en el segundo ejemplo).

Volvamos a observar el primer ejemplo. Existe un único término irracional en el denominador de la fracción planteada. Para eliminar esa raíz procedemos a multiplicar y dividir a la fracción por el mismo término irracional de tal manera que podamos simplificar el índice de la raíz con la potencia adecuada que surge al multiplicar términos iguales.

En el segundo ejemplo, la raíz se presenta en uno de los dos términos, pero también podría ser en ambos términos; entonces debemos multiplicar y dividir por el conjugado de esa expresión. ¿A qué se le denomina conjugado? Observemos y tratemos de enunciarlo con nuestras palabras.

Importante

La expresión $(a+b)$ tiene como conjugado a $(a-b)$.

En el ejemplo, la expresión $\left(1+\sqrt{2}\right)$ tiene por conjugado a $\left(1-\sqrt{2}\right)$ y cuando multiplicamos esos términos conjugados entre sí, obtenemos una diferencia de cuadrados, la cual nos permitirá simplificar índice con la potencia y lograr así eliminar la raíz.

Si aún no hemos logrado recordar este conocimiento, veamos otro ejemplo para nuestro análisis:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{2.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{2.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$$

Unir conceptos

Si prestas atención, en este caso de racionalización donde se multiplica y divide por el conjugado, siempre se construye una diferencia de cuadrados y, a través de ese caso de factoreo es que se puede eliminar la raíz.

Importante

La importancia de manejar estos conceptos tendrá más sentido cuando cursemos Análisis Matemático I, en primer año de la carrera de nuestra elección.

Actividad individual

1. Factorear las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^4 - 81 =$ Rta: $(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)(x - 3)$ ó $(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)(x + 3)$

b) $x^3 - 64 =$ Rta: $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

c) $x^5 + 32 =$ Rta: $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)(x + 2)$

d) $x^2 - 64 =$ Rta: $(x + 8)(x - 8)$

e) $x^2 + 64 =$ Rta: *no se puede factorear proque no es divisible por la suma o diferencia de sus bases.*

a) $2x^2 - 5x + 2 =$ Rta: $(x - 2).(2x - 1)$

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 =$ Rta: $(x - 1).(x - 2)^2$

c) $2x^3 - 5x^2 + 2x =$ Rta: $x.(x - 2).(2x - 1)$

2. Racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2.\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

Rta: $2.\sqrt{2}$

b) $\dfrac{-3}{\sqrt{a^5 b^6 c^2}} =$

Rta: $\dfrac{-3.\sqrt{a}}{a^3 b^3 c}$

c) $\dfrac{5 - \sqrt{8}}{\sqrt{2} - 5} =$

Rta: $\dfrac{5\sqrt{2} - 21}{23}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{7x} + \sqrt{5x}} =$

Rta: $\dfrac{\sqrt{7x} - \sqrt{5x}}{x}$

e) $\dfrac{2n}{\sqrt{m+n} - \sqrt{m-n}} =$

Rta: $\sqrt{m+n} + \sqrt{m-n}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} =$

Rta: $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

Estimados estudiantes: hemos llegado a la mitad del camino que comenzamos a recorrer juntos hace algunas semanas atrás. Esperamos que después de tan arduo trabajo que hemos realizado, hayamos podido recuperar los conocimientos previos y recobrar la confianza en nuestras capacidades para la resolución de las diferentes problemáticas trabajadas.

¡Hasta el próximo encuentro!

Clase 5

Ecuación de primer grado y función lineal

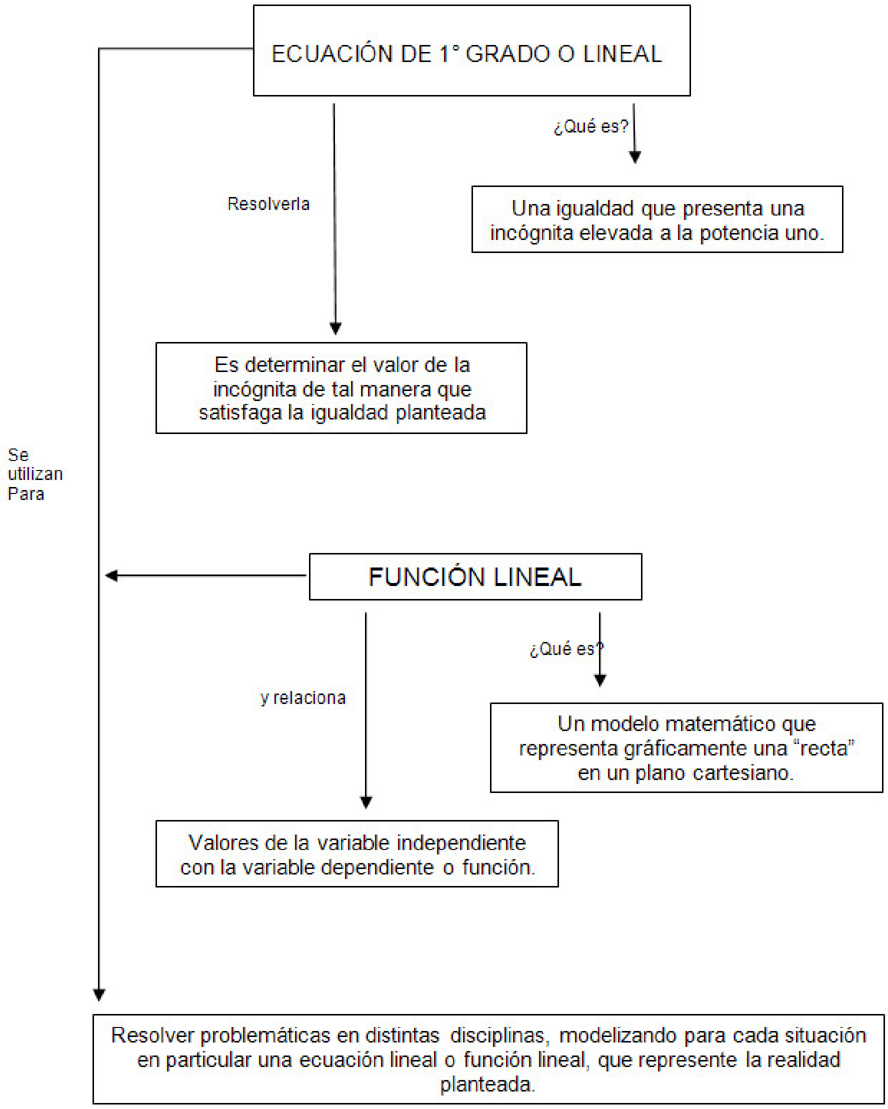
Objetivos específicos

- Comprender el concepto de Ecuación.
- Afianzar la destreza en la resolución de ecuaciones de 1° grado.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Reconocer una función lineal.
- Graficar una función lineal.
- Reconstruir el modelo matemático a partir del gráfico de una función lineal.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente.

Contenidos

- Ecuaciones.
- Ecuación de primer grado.
- Función lineal.
- Reconstrucción de una función lineal.
- Paralelismo y perpendicularidad.
- Actividades individuales de ejercitación y problemas.
- Palabras de cierre.

Esquema conceptual: vinculación de contenidos de la Clase 5.



Ecuaciones

Cuando se utiliza el término ecuación, ¿qué idea nos sugiere?

Para pensar y reflexionar

Observemos los diferentes casos que se nos pueden presentar. Todos ellos tienen algo en común que hace que se denominen en general ecuaciones.

a) $x + 5 = 0$ b) $\dfrac{x+3}{x-2} = 4$ c) $\log_2(x+2) = 3$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$ e) $3^x = 2$ f) $sen(x) = 1$

Tratemos de elaborar una conclusión que nos permita definir el término “ecuación”, teniendo en cuenta los casos anteriores, su análisis e interpretación. Las ecuaciones pueden clasificarse, según el tipo de operación que vincula a la incógnita “x” con el resto de la expresión, en:

- Ecuaciones
  - Algebraicas
    - Enteras
    - Fraccionarias
  - No algebraicas o trascendentes
    - Exponenciales
    - Logarítmicas
    - Trigonométricas

Actividad

Intentemos ubicar cada uno de los ejemplos en la clasificación correspondiente.

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Para pensar y reflexionar

A partir de los siguientes ejemplos, confiaremos en nuestra capacidad de observación y análisis:

¿Por qué se denominarán ecuaciones de 1º grado?

¿Qué supone **resolver** una ecuación de 1º grado con una incógnita?

Analicemos, interpretemos y enunciemos las respuestas con terminología adecuada.

a)

$$3x - 4 = 2$$
$$x = 2 + 4$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

b)

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 10$$
$$\frac{3x + 2x}{12} = 10$$
$$3x + 2x = 10.12$$
$$5x = 120$$
$$x = \frac{120}{5}$$
$$x = 24$$

Pueden además presentarse otras situaciones especiales, como por ejemplo:

$$3.(x+2) - 3 = 3.(x+1)$$
$$3x + 6 - 3 = 3x + 3$$
$$3x + 3 = 3x + 3$$
$$0 = 0$$

En realidad esto se comporta como una identidad, ya que se verifica para cualquier valor de la variable. Esto en matemática se conoce con el nombre de **compatibilidad** pero con *muchas* soluciones posibles.

Veamos este otro caso:

$$4.(x-1)-3=2.(2x+5)$$
$$4x-4-3=4x+10$$
$$4x-7=4x+10$$
$$-7=10 \quad ?$$

Es imposible de cumplir porque nos da un absurdo matemático. Esto recibe el nombre de **incompatibilidad.**

Muchas veces nos ocurre esto como ingenieros, contadores o administradores, ya que al modelizar una determinada situación problemática, se pueden plantear ecuaciones que finalmente no admiten solución.

¿Resolvemos algunas de estas ecuaciones lineales, despejando el valor de “x” mediante el pasaje términos de un miembro a otro?

Actividad

$a)\quad \dfrac{(5+x)}{2}\cdot 3-4=7 \qquad Rta: 7/3$

$b)\quad \left[\left(3+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{5}\right)\div 3\right]\div\left(\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{5}=22 \qquad Rta: 53/2$

$c)\quad \left[\left(3+\dfrac{1}{3}\right)\div\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\right]+\dfrac{3}{8}=-5 \qquad Rta: 129/338$

$d)\quad \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{5}{2} \qquad Rta: 14$

Importante

La utilidad del manejo de ecuaciones de primer grado, no es simplemente su resolución, sino que muchos problemas pueden resolverse planteando este tipo de ecuaciones.

Para lograr el planteo correcto en la solución de los mismos, leamos atentamente los enunciados tres veces (mínimo):

- la primera vez, simplemente nos dará una idea general de qué trata la problemática.
- la segunda lectura nos permitirá tomar los datos correctos que el enunciado te brinda y cuál es el objetivo que persigue.
- recién en la tercera lectura lograremos relacionar los datos entre sí para llegar al planteo de la ecuación (modelo matemático) que nos permitirá lograr el objetivo deseado.

Analicemos los siguientes ejemplos resueltos:

a) **¿Cuántos clavos tiene un cajón, si se sabe que puede vaciarse sacándole la primera vez, la mitad de los clavos, quitando luego, la mitad de los que quedan más un clavo y finalmente quitándole nueve clavos más?**

b) Para llegar a la ecuación que permitirá conocer la cantidad total de clavos presentes en el cajón, se debe asignar una variable, por ejemplo “x”, que represente la totalidad de clavos. A partir de ahí, relacionar los datos presentes en el enunciado, de acuerdo a esta variable “x” que representa el total.

Analicemos:

x: cantidad total de clavos

$\frac{x}{2}$: mitad de los clavos (primera vez)

$\frac{\frac{x}{2}}{2}+1=\frac{x}{4}+1$:la mitad de los que quedan más uno (segunda extracción)

9: clavos que finalmente se sacan.

Recién cuando se tiene claro cómo indicar en función de la variable “x” cada uno de los pasos que propone el problema, estás en condiciones de plantear la ecuación completa para su solución definitiva, es decir, ¡armar el famoso modelo matemático! Entonces, la ecuación es:

$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1+9 \longrightarrow$ **¡Este es el modelo matemático!**

$$x-\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=10$$

$$\frac{4x-2x-x}{4}=10$$

$$\frac{x}{4}=10$$

$$x=40$$

Rta: El cajón tiene 40 clavos en total

b) Encontrar un número sabiendo que su duplo es igual a su mitad más nueve.

¿Leímos el enunciado varias veces?. Entones…¡a pensar!

x: número a determinar

2.x : duplo del número

$\frac{x}{2}$: mitad del número

Entonces, la ecuación es:

$$2x = \frac{x}{2} + 9 \longrightarrow$$ **¡Este es el modelo matemático!**

$$2x - \frac{x}{2} = 9$$

$$\frac{4x - x}{2} = 9$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

Rta: el número es 6.

c) Para poder pagar el viaje a Bariloche, los alumnos del colegio ZZ entregan el 40% del total como anticipo, pagan en cuotas el 20% del resto y aún les falta abonar $2800. Cuánto le cuesta el viaje a cada alumno?

Pensemos…si:

x: total del costo del viaje

$\frac{40}{100}x = 0{,}4.x$ Entregan del 40%

$\frac{20}{100}(x - 0{,}4x) = 0{,}2.(0{,}6x) = 0{,}12x$ Pagan en cuotas el 20% del resto

$2800: falta abonar

La ecuación será:

$$x = 0{,}4.x + 0{,}12.x + 2800 \longrightarrow$$ **¡Este es el modelo matemático!**

$$x - 0{,}4x - 0{,}12x = 2800$$

$$x - 0{,}52x = 2800$$

$$0{,}48x = 2800$$

$$x \cong 5833{,}33$$

Rta: el costo del viaje es de $ 5833,33.

FUNCIÓN LINEAL

A partir de la siguiente expresión: $y = -2x + 1$

¿Cuántas incógnitas hay en ella? ¿Podríamos escribirla de otra manera? ¿Cómo? ¿Representa la misma expresión anterior?

Analicemos ahora, cómo podemos plantear una solución a dicha ecuación, teniendo en cuenta que las incógnitas que presenta son dos.

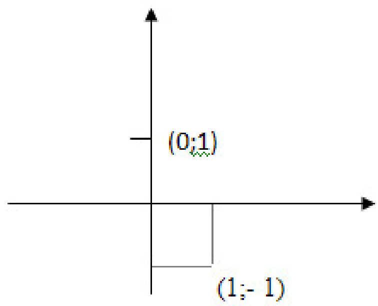
Si le adjudicamos a "x" valores del conjunto de los números reales, ¿qué ocurre con "y"?
Se puede apreciar que "y" depende de los valores que puede asumir "x"; o bien que para cada valor de "x", se obtiene un sólo valor de "y". A este tipo de relación se la denomina "función"; "x" recibe el nombre de variable independiente e "y" variable dependiente o función, ya que esta depende de los valores que asuma "x".
Retomando el ejemplo, podemos observar que **el exponente de la variable independiente es uno** por lo que esta función es de 1º grado, análogamente a la ecuación vista anteriormente.
Este tipo de funciones se denominan *"funciones lineales"*, donde además, para cada valor de "y" le corresponde un solo valor de "x", es decir que existe una correspondencia entre las variables, "uno a uno".
Para estas funciones, como para cualquier tipo de función es posible definir el Dominio de las mismas como todos los valores que puede asumir la variable independiente "x", tal que la función exista. Su símbolo es **D**.
De la misma manera se define la imagen de la función como todos los valores que asume la variable dependiente o función. Se simboliza con I.
En las funciones lineales, el Dominio está formado por el conjunto de los números reales, debido que la función existe, para cualquier número real. Por lo tanto, la Imagen también es el conjunto de los números reales.

Importante
Ahora bien, a estos valores de "x" e "y" que satisfacen la relación planteada, podemos expresarlos como un par ordenado (x ; y), donde el primer elemento del par, corresponde al valor asignado arbitrariamente a la variable "x" y el segundo elemento del par, corresponde al valor que toma la variable "y", que depende del anterior. Estos pares ordenados representan puntos del plano. Reflexionemos acerca del porqué de esta afirmación.

Analicemos: los valores arbitrarios de la variable "x", independientemente de los valores de "y", pertenecen al conjunto de los números reales. Por lo tanto dichos valores necesitan de una recta para ser representados geométricamente. Otro tanto ocurre con los valores que asume la variable dependiente "y".
Se necesita, entonces, una recta que represente al conjunto de valores de "x"

y otra recta para representar los valores de “y”. Surgen así las coordenadas cartesianas, donde cada eje representa a un conjunto de números reales.
Retomando el ejemplo planteado anteriormente: $y = -2x + 1$ podemos confeccionar una tabla de valores que represente a los pares ordenados que cumplen con la relación planteada, y graficarlos en el sistema de coordenadas antes mencionada. De esta manera, surgen los puntos en el plano que representan a cada uno de esos pares ordenados.

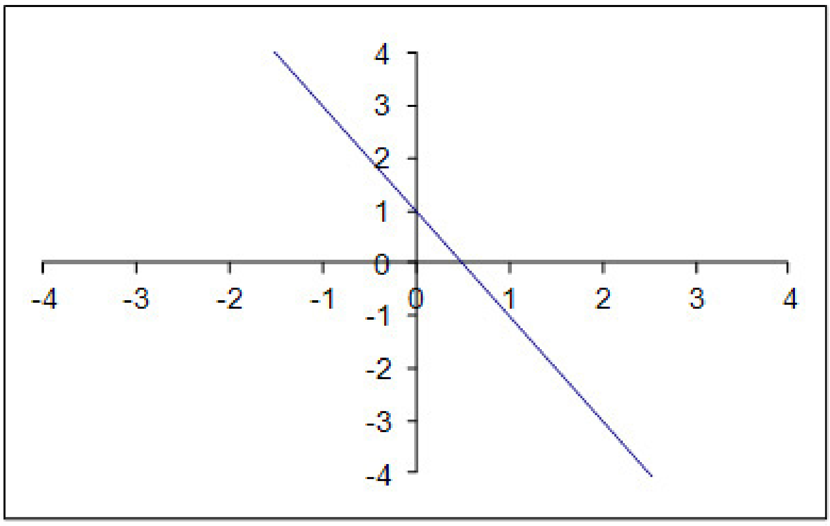
x	y
0	1
1	- 1



Se podrían plantear infinidad de pares ordenados, que satisfacen la “función”. Si a todos esos puntos representados en el plano, los unimos, surge así la línea recta que caracteriza el gráfico de esta función. Dicha recta es la representación geométrica de la relación: $y = -2x + 1$; llamada “función lineal”.

Para pensar y reflexionar

Observemos y analicemos detenidamente el gráfico, y vinculémoslo con lo expuesto anteriormente.



Nota: observemos que la recta corta en la abscisa $\boxed{x=1/2}$ y en la ordenada $\boxed{y=\ 1}$

Importante

En general:

$$y = a.x + b$$

Representa una función lineal y gráficamente es una recta, donde "a" y "b" son coeficientes constantes. El coeficiente "b" se denomina "ordenada al origen".

¿Podríamos explicar el porqué de su nombre y qué representa gráficamente?

Para pensar y reflexionar

¡Somos capaces de deducir el interrogante planteado! Para ello nos podemos ayudar observando el ejemplo anterior.

El coeficiente "a" recibe el nombre de "coeficiente angular", también denominado "pendiente" de la recta. Recordemos el porqué de su nombre.

Observemos los siguientes gráficos:

$$y = -x - \frac{1}{3} \qquad\qquad y = x - 5$$

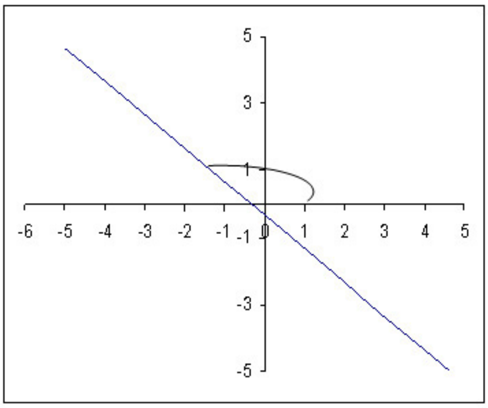


Figura 1

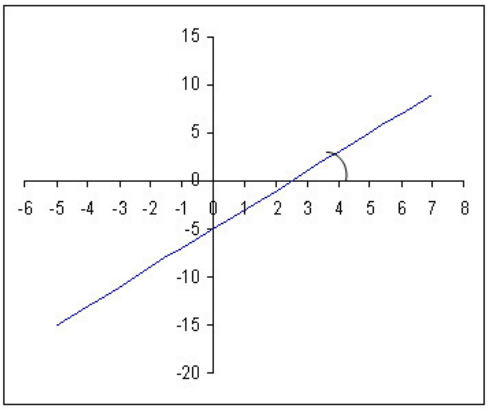


Figura 2

En general todas las rectas, salvo casos particulares que analizaremos más adelante, cortan al eje "x" (abscisas), formando con el sentido positivo del eje "x" (sentido hacia la derecha o antihorario), un ángulo: (β).
El coeficiente "a" es la tangente trigonométrica de ese ángulo.
Recordemos que las funciones trigonométricas de un ángulo, son valores numéricos que pueden determinarse en tablas específicas o bien en la calculadora.
Si ese tema no lo conocemos, no hay problema, pues lo retomaremos más adelante. Para graficar la función lineal es suficiente con determinar dos puntos en el plano, que respondan a la relación planteada entre "x" e "y".
Hacemos mención a esta relación de: a = tag (β), ya que es importante tener en cuenta esta igualdad porque nos permite analizar el signo de ese coeficiente con el tipo de inclinación que presenta la recta gráficamente. Si el ángulo β

está comprendido entre 0º y 90 º, es decir 0º < β < 90º, los valores de las tangentes trigonométricas correspondientes, son siempre positivas. De allí que el coeficiente angular o pendiente "a" es positivo o mayor que cero y las rectas presentan el tipo de inclinación que muestra la figura 2 de la página anterior. Ahora bien, si el ángulo β está comprendido entre 90º y 180º, es decir 90º < β < 180º, los valores de las tangentes trigonométricas correspondientes a dichos ángulos son de signo negativo. Entonces, el coeficiente angular "a" es negativo, y las rectas presentan el tipo de inclinación que muestra la figura 1 de la página anterior.
Es importante que analicemos y tengamos presente la relación que existe entre el signo del coeficiente angular o pendiente "a" y la inclinación que debe presentar la recta cuando se grafica. Esto nos permite formar una idea previa de cómo se debe ver la recta graficada antes de realizar algún tipo de cálculo. De esta manera, si incurrimos en algún error en los cálculos de los puntos (pares ordenados) que satisfacen la relación del modelo matemático, y el gráfico no se corresponde con esa idea previa, entonces podemos revisar dichos cálculos y corregirlos nosotros mismos. Lograremos así tener un gráfico que concuerde con la función dada.

Importante
Recordemos que para graficar una recta es suficiente con dos puntos del plano. "Dos puntos del plano determinan una y solo una recta".

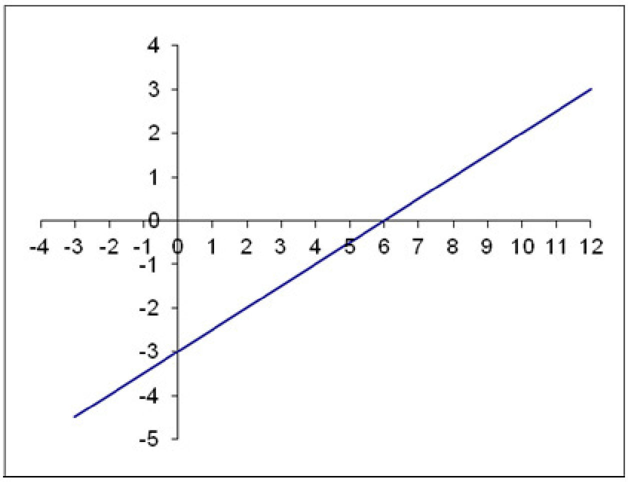
Un concepto útil y también de mucha aplicación para otras funciones se refiere a "los puntos de corte a los ejes". Es decir en qué puntos sobre los ejes cartesianos corta la función.

Para pensar y reflexionar

¿Cómo encontrar los puntos de corte? Reflexionemos:
Para que una recta corte al eje "y" (ordenada) ¿Qué variable debe valer cero?
Para que una recta corte al eje "x" (abscisa) ¿Qué variable debe valer cero?

Observemos el gráfico siguiente y respondamos los interrogantes. ¡Contamos con herramientas para hacerlo! Determinemos los puntos de corte a los ejes.

$y = \frac{1}{2}x - 3$



El concepto de puntos de corte a los ejes y el razonamiento que este incluye, es importante para muchas aplicaciones. Como por ejemplo función Costo total y función Ingreso total en una empresa. Conceptos tan válidos para las ciencias económicas como para ingenierías.

Casos particulares:

A continuación tenemos planteadas algunas expresiones como:

x = 3 x = - 2 o bien y = 4 y = - 1

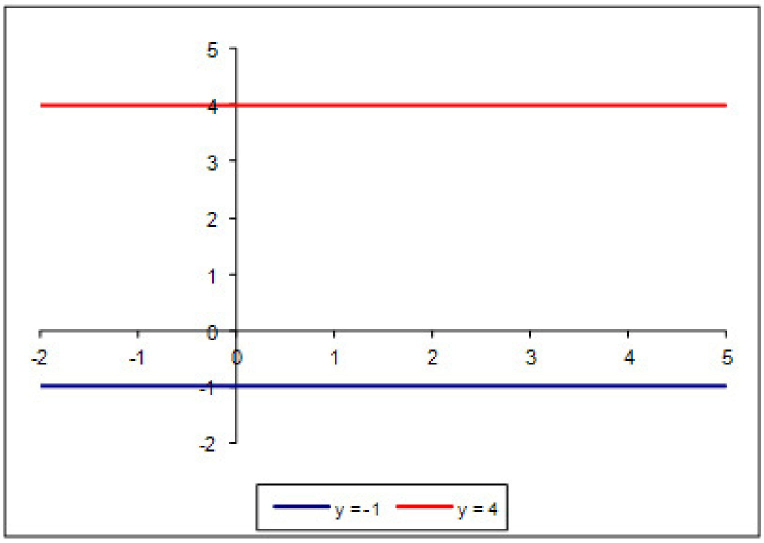
Dichas expresiones también representan rectas que manifiestan una particularidad en su gráfica.

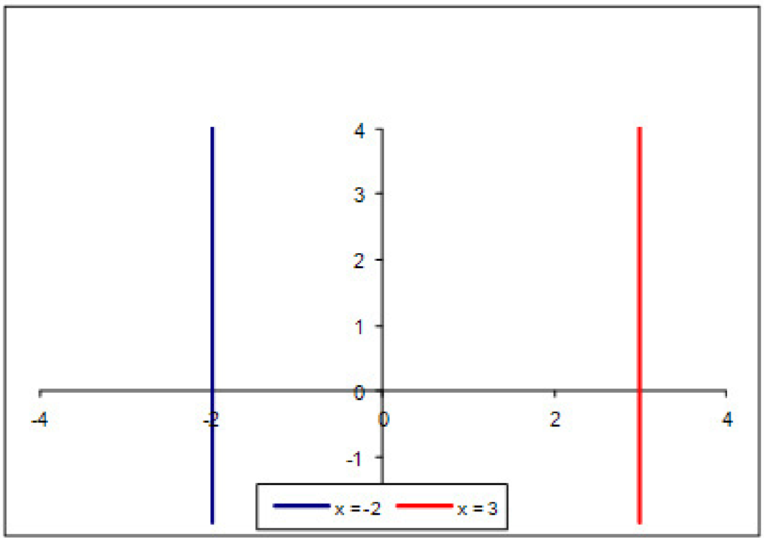
Recordemos ¿cuál es dicha particularidad?

Observemos que tanto "x" como "y" están igualadas a una constante. Eso quiere decir que esas rectas son paralelas a los ejes.

- En el caso en que "x" sea igual a una constante, entonces la recta es paralela al eje "y" (Recta vertical).
- En el caso que "y" sea igual a una constante, entonces la recta es paralela el eje de las "x" (Recta horizontal)

Observemos los siguientes gráficos y eso nos ayudará a reflexionar al respecto...





A continuación tenemos algunas rectas para graficar. Podemos controlar con las claves de respuestas dadas.

Actividad

$a)\quad y = 2x - 3$ $\qquad Rta: corta\ en x = 3/2\ e\ y = -3$

$b)\quad y = -\frac{1}{2}x + 4$ $\qquad Rta: corta\ en\ x = 8\ e\ y = 4$

$c)\quad 2x - 4y = 1$ $\qquad Rta: corta\ en\ x = 1/2\ e\ y = -1/4$

$d)\quad 4y - 3x = 2$ $\qquad Rta: corta\ en\ x = -2/3\ e\ y = 1/2$

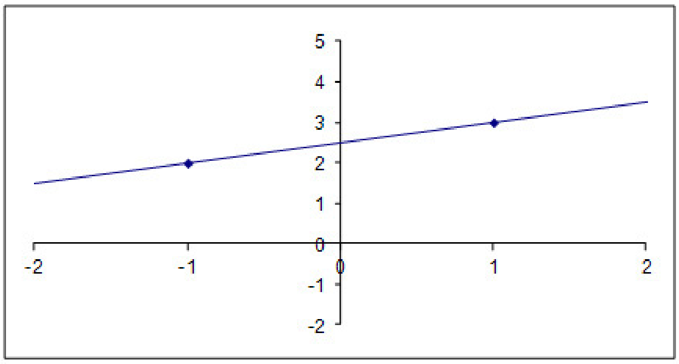
RECONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL

En muchas ocasiones se tiene que determinar la función lineal a partir de dos puntos conocidos. Una de las maneras de lograr la función correspondiente, es utilizando el mismo modelo matemático, es decir $y = ax + b$

Conocer los puntos por donde pasa la recta supone conocer los pares ordenados correspondientes (x ;y). Por lo tanto, si se reemplazan dichos valores en el modelo planteado, según corresponda, queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: "a" y "b" que puede ser resuelto por cualquier método que conozca: sustitución, igualación, suma o resta, etc, dichos métodos se plantean más adelante.

Observemos que los datos son justamente, valores de las variables "x" e "y" (pares ordenados). Por lo tanto para llegar al modelo lineal se debe determinar sus coeficientes "a" y "b".
Analicemos el ejemplo siguiente: determinar y graficar la función lineal que pasa por los puntos P1(-1; 2) y P2(1; 3).

Siempre es conveniente plantear los puntos en el sistema de coordenadas cartesianas y trazar la recta previa a los cálculos aritméticos para determinar los valores de los coeficientes "a" y "b". Esto nos permitirá ver claramente el signo del coeficiente angular que debe obtener de acuerdo a la inclinación de la recta, y además el valor de "b" (ordenada al origen), aproximadamente. Siempre debe realizar los cálculos en forma analítica.



Entonces, sustituyendo los valores de las variables “x” e “y” en el modelo lineal, ($y = ax + b$) nos queda el siguiente sistema:

$$2 = (-1)a + b$$
$$3 = (1)a + b$$

Para resolver este tipo de sistema, el método más adecuado es restando una ecuación de otra, miembro a miembro. Recordemos cómo debe efectuarse la resta en expresiones algebraicas (términos semejantes).

$$\begin{array}{l} 2 = (-1)a + b \\ - \\ \underline{3 = (1)a \;+\; b} \\ -1 = -2a \;\; \rightarrow \end{array}$$

Restando miembro a miembro como corresponde

De donde se puede despejar “a” coeficiente angular o pendiente

$a = \dfrac{1}{2}$ Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones anteriores, se obtiene analíticamente el valor de “b” (ordenada al origen).

$$2 = (-1).\frac{1}{2} + b$$

$$2 + \frac{1}{2} = b$$

$$b = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Una vez obtenidos los valores de los coeficientes “a” y “b”, sólo queda armar la función. Entonces, el modelo lineal que corresponde es: $y = \dfrac{1}{2}.x + \dfrac{3}{2}$

El modelo lineal se utiliza mucho en ciencias económicas e ingeniería para representar diferentes situaciones que hacen a la operatoria de la empresa. Es por esta razón que debe manejarse con idoneidad para poder comprender y sacar conclusiones cuando se transfiere a estas ciencias.
El problema que a continuación se plantea persigue ese objetivo.

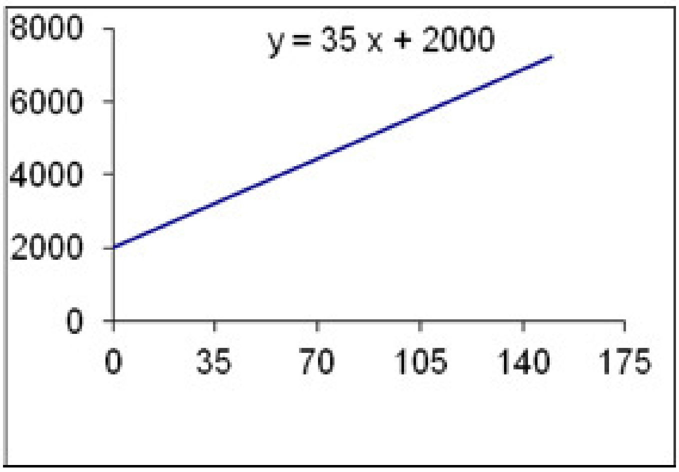
La empresa Betta S.A , de acuerdo a la Legislación de Riesgo del Trabajo, paga en concepto de ART un monto fijo mensual de $ 2000, y a su vez una tasa variable de $ 35 por empleado.

a) Determinar la función lineal que representa el costo en concepto de ART de esta empresa.
b) Graficar dicha función.
c) ¿Qué representa la ordenada al origen de dicha función?
d) ¿Cuál es el costo si el staff de la empresa está compuesto por 100 empleados?
e) ¿Cuántos empleados trabajan en la empresa si el costo de ART es de $12500?

Para resolver los diferentes ítems, primero deberemos asignar una variable que represente la cantidad de empleados que puede llegar a tener la empresa. A esta variable la simbolizamos "x", y a la función costo la representamos con "y".
Tengamos en cuenta que en el modelo deben figurar no sólo los costos variables por empleado sino también el monto fijo.
Entonces, si x: cantidad de empleados y se abona $35 por cada empleado, más el monto fijo, el modelo lineal puede ser planteado como:

a) $y = 35.x + 2000$

b) Gráfico:



c) Observemos el gráfico y analicemos: el valor de la ordenada al origen corresponde al monto fijo que debe pagar la empresa.

d) Para determinar el costo de 100 empleados, sólo debemoss tener en cuenta cuál es la variable que representa al número de empleados, en este caso "x".

Entonces, valuando la función, según corresponde, se tiene:

$$y = 35.(100) + 2000$$
$$y_{(100)} = \$5500$$

e) En este ítem la pregunta es sobre la cantidad de empleados que debería tener la empresa para afrontar un costo de $ 12500. Entonces se debe tener bien claro qué variable del modelo representa a ese costo. Por lo tanto:

$$12500 = 35.x + 2000$$
$$12500 - 2000 = 35x$$
$$\frac{10500}{35} = x$$
$$300 = x$$

Por lo tanto, cuando el costo en ART es de $ 12.500, la cantidad de empleados es 300.

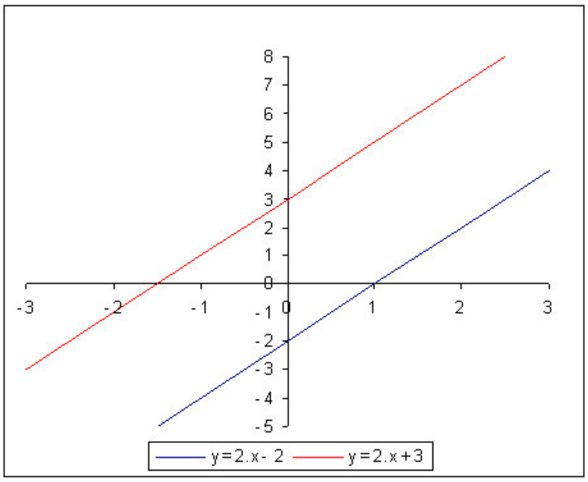
PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Los términos del título se refieren a la relación que guardan dos rectas entre sí.

Para pensar y reflexionar

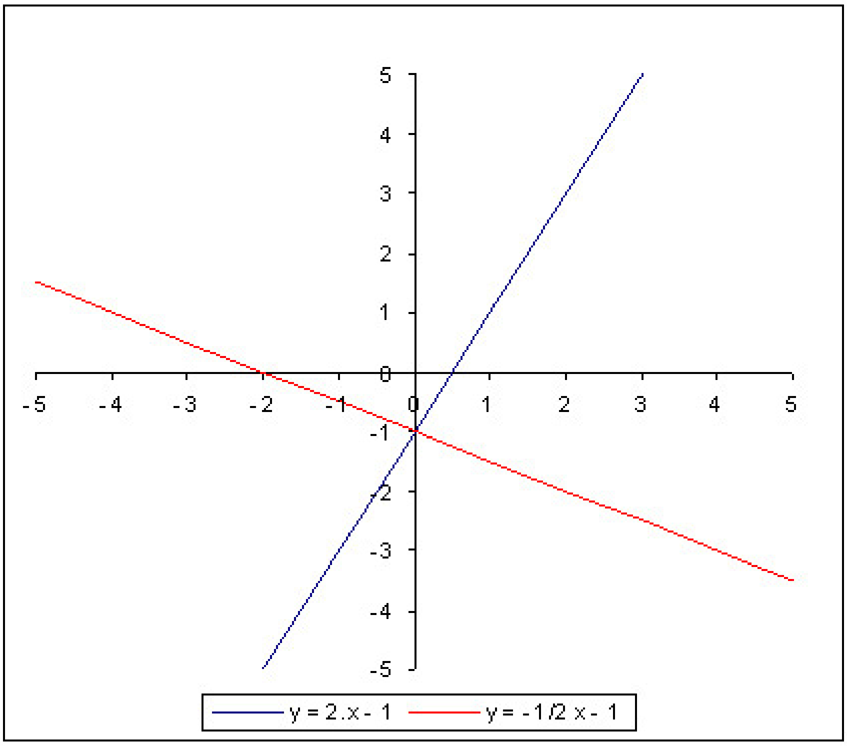
La pregunta es: ¿Cuándo dos rectas son paralelas entre sí? ¿Qué condición se debe presentar para que sean paralelas?
Podemos resolver estos interrogantes con las herramientas adquiridas y con el lenguaje pertinente.

A continuación tenemos un gráfico y las expresiones analíticas correspondientes a esas rectas.
Observemos atentamente los coeficientes angulares o pendientes de cada una de ellas y compáralos. Luego elaboremos las conclusiones al respecto.



Otra pregunta es: ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares entre sí? ¿Qué condiciones se deben cumplir? ¿Cómo se relacionan entre sí los coeficientes angulares de cada una de las rectas?

Con el siguiente ejemplo trabajemos de la misma forma que en el caso anterior.



Importante

A modo de conclusión:

"Dos rectas son paralelas entre sí, cuando sus coeficientes angulares son iguales".

Si $y_1 = a_1 + b_1$ **es paralela a** $y_2 = a_2 + b_2$ **, entonces:**

Observemos que las ordenadas al origen, son siempre diferentes, ¿Por qué? ¿Qué ocurre si las ordenadas al origen también son iguales? ¿Se trataría de una recta paralela o de la misma recta?

Importante

"Dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando sus coeficientes angulares son recíprocos y de signo contrario"

Si $y_1 = a_1 + b_1$ **es perpendicular a** $y_2 = a_2 + b_2$ **, entonces** $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Observemos que cuando las rectas son perpendiculares entre sí las ordenadas al origen de cada una de ellas pueden o no ser iguales. ¿Por qué?
Veamos los siguientes ejemplos:

a) Dada la función lineal $y = \frac{1}{2}x + 3$; **, encontrar la recta paralela a la misma y que pasa por el punto (1; -1).**

Para resolver el planteo anterior, se utiliza siempre el modelo lineal característico: y = a.x + b.
A partir de los datos podemos determinar el coeficiente angular, teniendo en cuenta las condiciones de paralelismo. Esto es: a = ½.
Reemplazando dicho coeficiente angular y los valores del par ordenado del punto dado en el modelo, se obtiene el valor de “b” (ordenada al origen).

$y = \frac{1}{2}x + b$ Esto, corresponde a reemplazar la pendiente por la condición planteada de paralelismo.

$-1 = \frac{1}{2}(1) + b$ Reemplazando ahora el par ordenado en la ecuación.

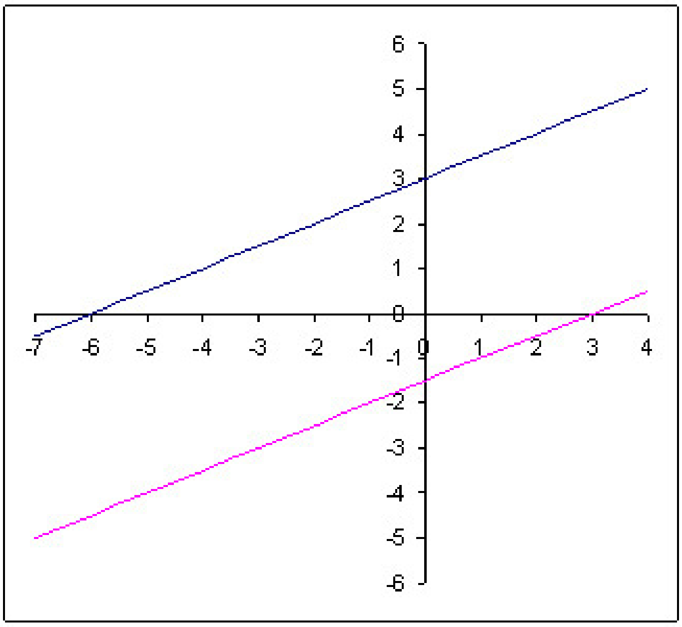
$$-1 = \frac{1}{2} + b$$

Operando algebraicamente, obtenemos la ordenada al origen.

$$b = -\frac{3}{2}$$

La función lineal paralela a la dada y que pasa por el punto (1 ; - 1) es:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

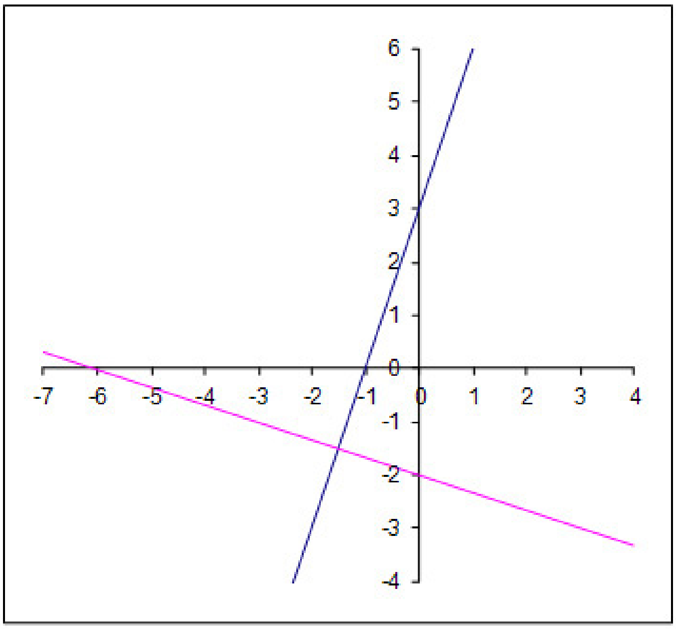


b) Dada la función: $y = -\frac{1}{3}x - 2$ **determinar la recta perpendicular a la misma y que pase por el punto (-1 ; 0).**
Utilizando el mismo razonamiento y la condición de perpendicularidad, se plantea la ecuación para determinar el coeficiente “b”.
La pendiente de la recta dada es $-\frac{1}{3}$, entonces, la pendiente de la recta perpendicular que buscamos es 3. Reemplazando convenientemente, la pendiente y el par ordenado en el modelo lineal, se obtiene la ordenada al origen.

$$0 = 3 \ (-1) + b$$

$$b = 3$$

La función perpendicular a la dada, y que pasa por el punto (-1 ; 0) es
$y = 3x + 3$



Este tipo de ejercitación se reforzará un poco más en las actividades individuales que te propondremos más adelante!

Actividad Individual

ACTIVIDADES DE EJERCITACIÓN Y PROBLEMAS DE LA CLASE 5

1. Resolver las siguientes ecuaciones de 1º grado:

a) $x(x-1).(x-2)=(x-1)^3$ $\qquad Rta: \ 1$

b) $\dfrac{x+\frac{2}{3}}{5}-\dfrac{x+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{x+7}{3}$ $\qquad Rta: \ -\dfrac{71}{19}$

c) $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{5}\right)=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$ $\qquad Rta: \ -\dfrac{11}{51}$

d) $\dfrac{1}{2}(2x+2)+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{3}{4}(1+x)-4$ $\qquad Rta: \ -\dfrac{17}{3}$

e) $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{x+2}{5}+\dfrac{x+1}{20}=\dfrac{3}{5}$ $\qquad Rta \ \ 12$

f) $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{2x+3}{x-1}-\dfrac{2}{1-x}$ $\qquad Rta: \ \dfrac{10}{3}$

g) $\dfrac{2x}{3}=3\left(2x-\dfrac{4}{3}\right)+20$ $\qquad Rta: \ -3$

2. Resolver los siguientes problemas, con un planteo pertinente:

a) Hallar un número sabiendo que su triplo excede a su mitad en 15.
Rta: 6

b) Se desea cortar un alambre de 18 metros de longitud en dos pedazos, tal que uno de ellos tenga una longitud que sea el triple de la del otro. ¿Cuáles son las longitudes de los alambres?
Rta: 13,5 (metros) y 4,5 (metros)

c) Si del total de páginas de un libro dedico 1/15 para reproducir fotografías y dibujos y quedan 434 hojas. ¿Cuántas páginas tendrá el libro?

$$Rta: x-\frac{1}{15}x=868 \ osea \ x=930 paginas$$

d) Una botella y su tapa cuesta \$6 y la botella cuesta 5 veces el valor de la tapa. ¿Cuál es el precio de la botella y de su tapa?
Rta: tapa: \$1 y botella: \$5

e) Un librero dice: Vendí un libro, un cuaderno y un lápiz por \$54. Por el cuaderno le pagaron el doble del valor del lápiz; por el libro 12 veces lo que le pagaron por el cuaderno. ¿Cuánto cobró por cada artículo?
Rta: lápiz \$2, cuaderno \$4 y libro \$48.

f) Un señor tiene 32 años de edad más que su hijo y dentro de 24 años su edad será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tiene el padre ahora?
Rta: 40 años.

3. En un mismo sistema de coordenadas cartesianas ubicar los siguientes pares ordenados:
(0 ; 1) (3 ; 0) ; (2 ;1/3) (-3 ; -7) ; (1/2 ; - 6) (-5 ;1/5)

4. Indicar cuál de las siguientes funciones son lineales:

a) $x + y = 7$ d) $\frac{x}{2} - 4 = \frac{y}{3}$

b) $y = x^2 + 3$ e) $x^{-1} + 3 = y$

c) $\frac{1}{2}x + y = 0$ f) $y = \frac{x+4}{2}$

5. Indicar, cuál o cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la función: $\frac{y-5}{3} = x$

a) (-3; 14)

b) $(2^{-1}$; 13/2)

c) (0 ; 5)

d) (- 1 ; 8)

e) (-5/3 ; 0)

f) $(3^{1/2}$; 14)

6. Graficar las siguientes funciones lineales:

a) $y = \frac{1}{3}x + 4$

b) $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}$

c) $3x = x + 2$

d) $2x + y = 3 + 2x$

e) $y = -\frac{1}{2}x$

f) $y = -3x + 6$

g) $y = x$

h) $y - x + 1 = 0$

7. Dada la función $y = -\frac{1}{2}x + 4$ determinar la recta paralela y perpendicular a la misma, y que ambas pasen por el punto (4 ; 0) respectivamente.

8. ¿Cómo se interpreta la igualdad f (3) = 5?

a) Que la imagen de 3 es 5.
b) Que la función valuada en 3 es 5.
c) Que el valor de la función es igual a 5 cuando x es igual a 3.
d) Todas las anteriores son correctas.
e) Ninguna de las anteriores es correcta.

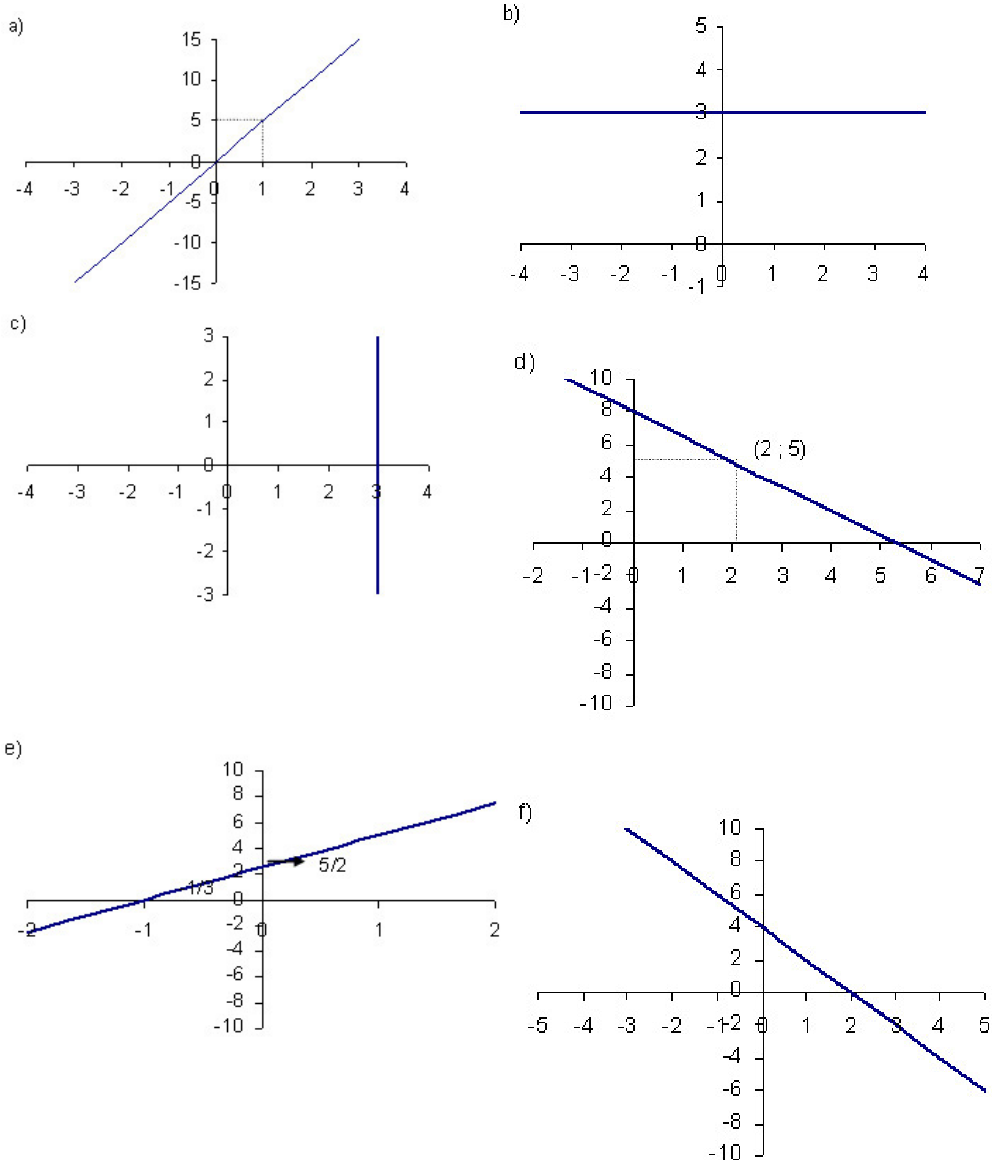
9. Encontrar la función lineal de acuerdo a los siguientes datos y graficarla:

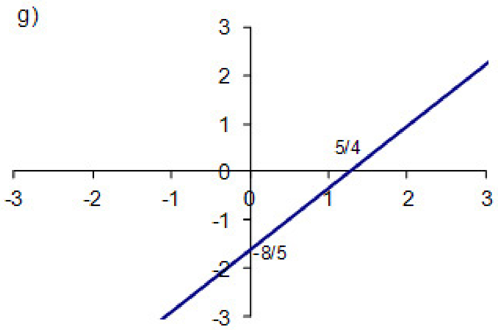
a) Pasa por los puntos (-3 ; 2) y (1/2 ; 7)
b) Pasa por los puntos (0 ; 3) y (1 ; -1)
c) Su pendiente es –2 y pasa por el punto (3 ; -1/4)
d) El coeficiente angular es 4/5 y pasa por el punto (-4 ; -2)

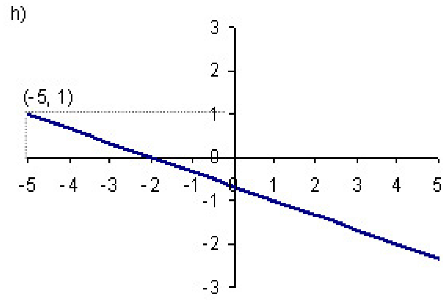
10. Dada una función *f(x) = a x + b* en donde "b" es positivo y "a" es negativo, indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) Cuando la variable independiente disminuye, la función disminuye.
b) La recta corta al eje de ordenadas en su sección positiva.
c) La recta corta al eje de las abscisas en su sección negativa.
d) La recta corta al eje de las abscisas en x = a.
e) El punto (0 ; - b) pertenece a la gráfica de la función.

11. Reconstruir las funciones a partir de los siguientes gráficos y los datos que en ellos están explicitados







Rtas:

b) $y = 3$

c) $x = 3$

a) $y = 5x$

e) $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$

f) $y = -2x + 4$

d) $y = -\frac{3}{2}x + 8$

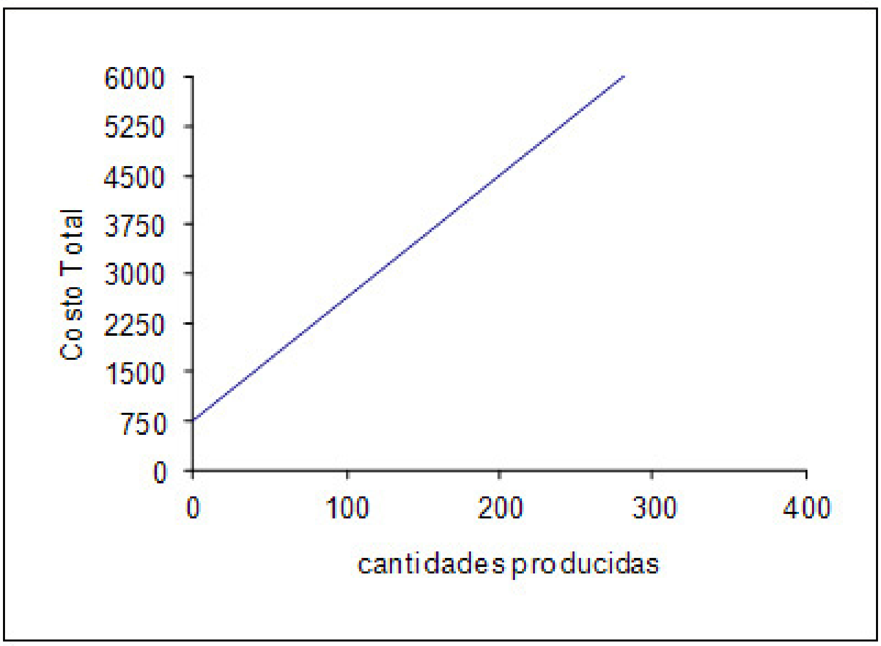
h) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

g) $y = \frac{32}{25}x - \frac{8}{5}$

12. Resolver los siguientes problemas de aplicación.

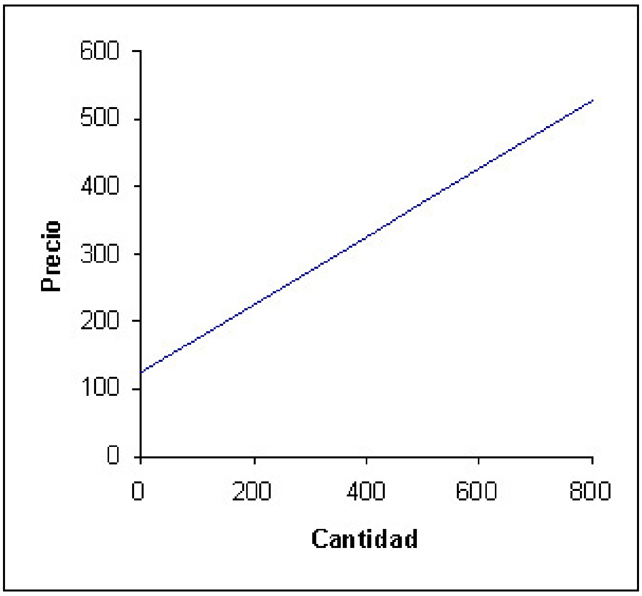
a) El costo de fabricar 120 artículos es de \$ 3000, mientras que si se producen 200 artículos, el costo es de \$ 4500. Suponiendo un modelo de costo lineal, determinar la función costo y graficar.

Rta: $CT(x) = 18{,}75x + 750$



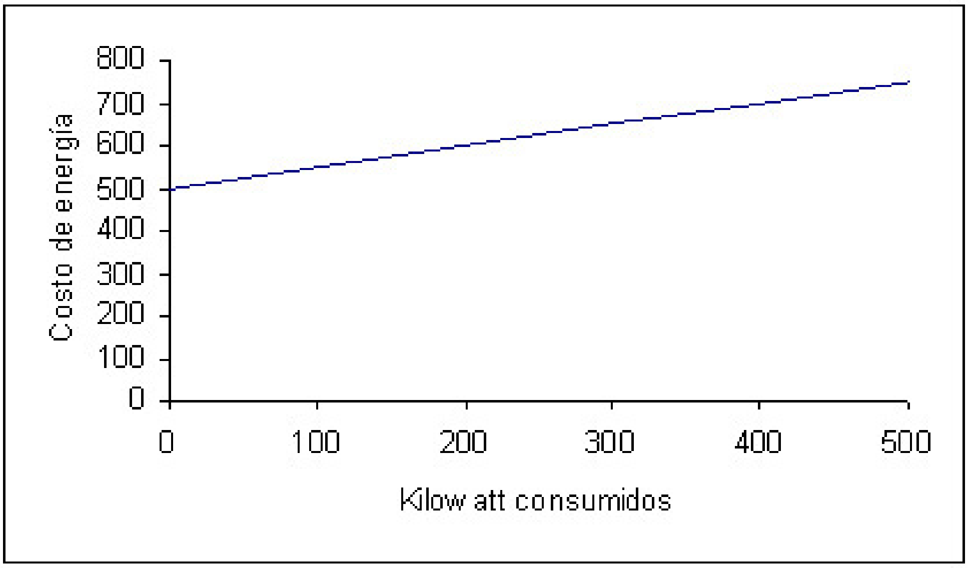
b) La empresa JJ decide vender 50 calefactores, si el precio por unidad es de \$150. Si el precio aumenta a \$200 por unidad, la empresa está dispuesta a vender 150 calefactores. Determinar el precio en función de la cantidad. Graficar.

Rta: $P = \frac{1}{2}q + 125$



c) El costo en concepto de Luz y Energía que la empresa ZZ debe enfrentar por mes, está compuesto por dos conceptos; por un lado la empresa debe abonar un monto fijo de \$500 por bimestre y a su vez por cada kilowatt consumido en el bimestre la empresa debe pagar \$0,50. Encuentre la función Costo Total y grafíquela en un sistema de coordenadas cartesianas.

Rta: $CT = 0{,}50x + 500$



Palabras de cierre

Estimados estudiantes, comenzamos en esta segunda etapa con ecuaciones y funciones. Tengamos en cuenta siempre el álgebra elemental que trabajamos anteriormente. En cada cálculo que tengamos que hacer, estará siempre presente.

Todavía quedan por revisar algunas funciones elementales que se han trabajado en el nivel medio.

Recordemos que al comienzo de nuestra próxima clase tendremos un tiempo para evacuar todas las dudas que surjan al trabajar solos.

¡Suerte! y hasta el próximo encuentro.

Clase 6

Sistema de ecuaciones lineales

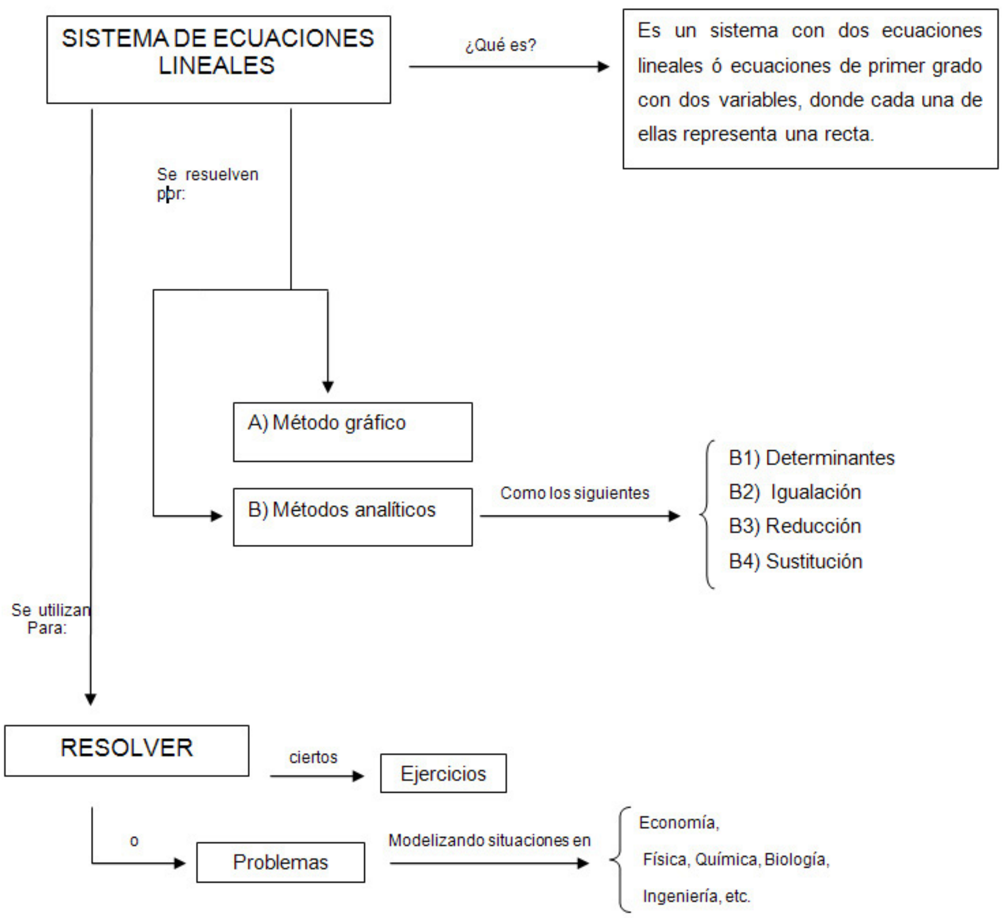
Objetivos específicos

- Recuperar el concepto de ecuación y hacerlo extensivo a sistema.
- Internalizar los métodos de solución de sistema de ecuaciones lineales.
- Afianzar la destreza en resolución de ejercicios y problemas sencillos.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente.

Contenidos

- Sistema de ecuaciones lineales.
- Definición y solución.
- Método gráfico.
- Métodos analíticos: determinantes, igualación, sustitución y reducción.
- Un problema de aplicación de sistema de ecuaciones lineales.
- Actividades individuales de ejercitación y problemas.
- Palabras de cierre.

Esquema conceptual: vinculación de contenidos Clase 6



Sistema de ecuaciones lineales

Observemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ -x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

La expresión anterior muestra lo que es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Para pensar y reflexionar

¿Cómo podemos explicar con lenguaje apropiado el por qué de su nombre?
Para responder tengamos en cuenta:

- ¿Qué es un sistema?
- ¿Qué es una ecuación?
- ¿Qué sugiere el término lineal?

Observemos las dos igualdades. Cada una de ellas es una ecuación lineal con dos incógnitas “x” e “y”.

DEFINICIÓN Y SOLUCIÓN

Se dice que “un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones de primer grado con dos variables bajo la forma:

$$\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y = c_1 \; (1) & con: a_1, b_1, a_2, b_2 \in R, \; denominados \text{ "coeficientes"} \\ & c_1, c_2 \in R \; llamados \text{ "términos independientes"} \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \; (2) & x, y, \text{ variables o incógnitas} \end{array}$$

La solución es el par ordenado (x ; y) que satisface simultáneamente ambas ecuaciones”. (Arya-Larder, 2009).

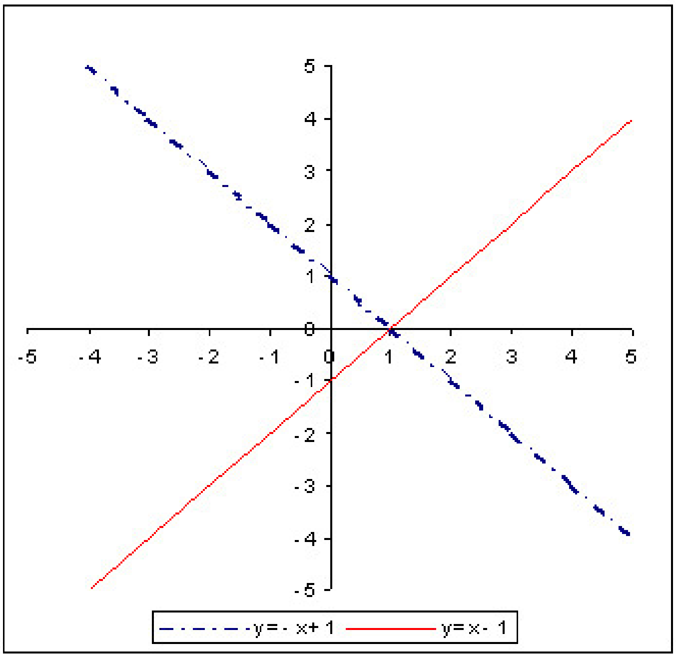
Para pensar y reflexionar

¿Qué implica entonces resolver un sistema de ecuaciones lineales?
¿Qué métodos son reconocidos como válidos para hacerlo?

Dijimos en la presentación que un sistema de ecuaciones lineales se puede resolver con dos métodos diferentes:

A) METODO GRÁFICO

Si recordamos que cada una de las ecuaciones representa una recta, y si el sistema tiene una solución única, evidentemente existe un par ordenado (x; y) que satisface a ambas ecuaciones. Gráficamente ese par ordenado que satisface a ambas ecuaciones, es el punto de intersección entre ambas rectas. Para ayudarnos, observemos el gráfico que representa al sistema planteado al principio, e intentémoslo nuevamente:

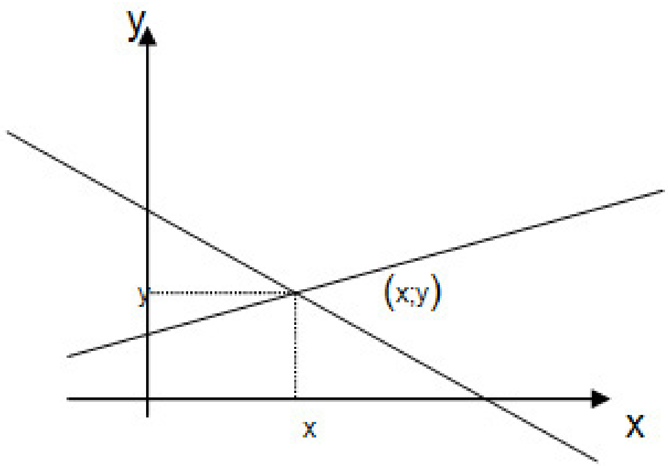


Seguramente debes recordar que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar en:

1. **Compatibles o consistentes:** con una o infinitas soluciones.
2. **Incompatibles o inconsistentes:** sin solución.

Esto se interpreta gráficamente de la siguiente manera:

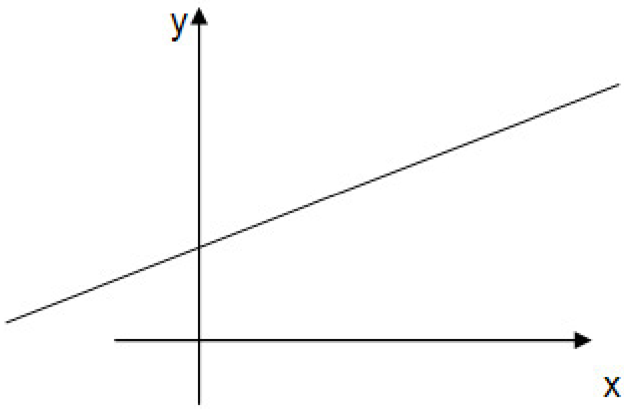
- El sistema con una solución única, corresponde a dos rectas que se cortan en un punto. El punto de corte es precisamente la solución del sistema.



Nota: este fue el caso que presentamos como ejemplo en el párrafo anterior.

Este sistema se dice que es **consistente de solución única.**

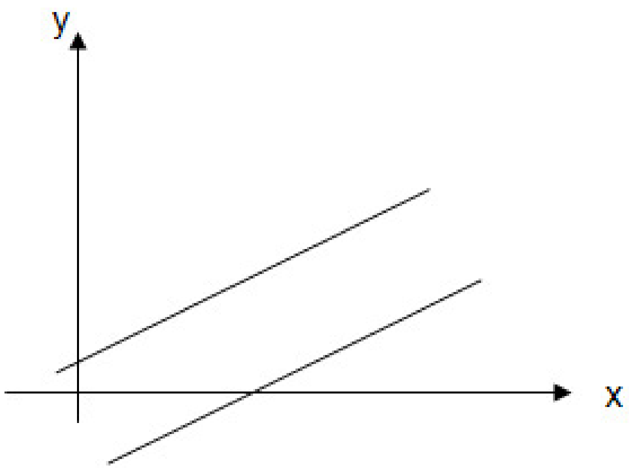
- El sistema con infinitas soluciones corresponde a dos rectas superpuestas o iguales. Por lo tanto todos los puntos sobre las rectas (que son infinitos), son solución del sistema.



Este sistema también es **consistente de infinitas soluciones**.

Y finalmente:

- El sistema sin solución corresponde a dos rectas paralelas. Por lo tanto al no cortarse nunca no aportan soluciones al sistema de ecuaciones planteado.



Este sistema es **inconsistente, es decir sin solución**.

B) METODOS ANALÍTICOS

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales existen varios métodos, entre los cuales podemos mencionar el método de sustitución, igualación, determinantes, por reducción y otros que se plantearan en el cursado de la carrera.

Algunos de estos métodos de resolución fueron estudiados, en el nivel medio, por lo tanto puedes acceder a cualquiera de ellos consultando la bibliografía utilizada en su momento.

Estos métodos no agotan la totalidad de maneras de resolver un sistema de ecuaciones. Por razones de practicidad solamente se plantean el método de determinantes, igualación, sustitución y de reducción.

B1) MÉTODO DE DETERMINANTES

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ -x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

¿En qué consiste el método?

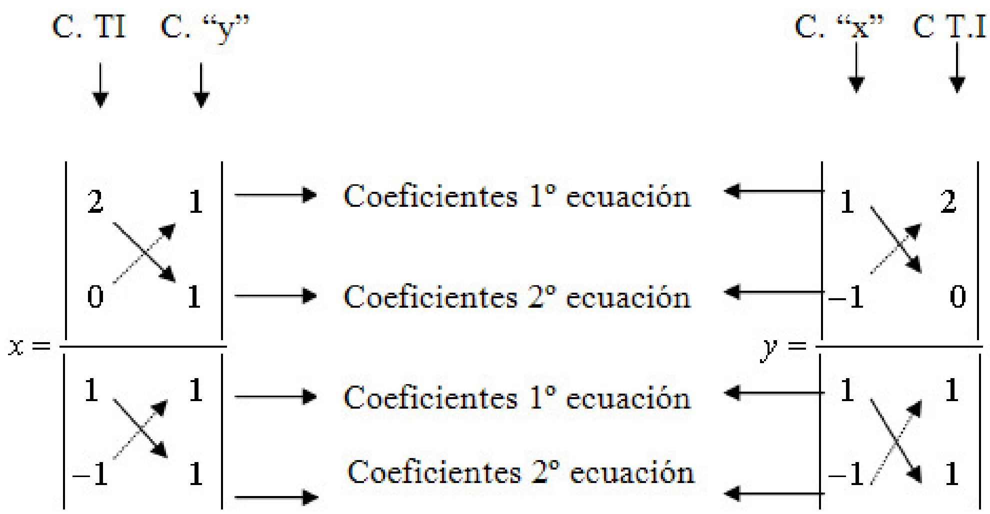
Como su nombre lo indica, para encontrar los valores de "x" e "y" que satisfacen a ambas ecuaciones, debemos formar un cociente entre dos determinantes. Un determinante numerador y otro denominador.

Los elementos que componen un determinante están ubicados y ordenados por filas (en lo horizontal) y por columnas (en lo vertical).

Dichos elementos son los coeficientes que se encuentran en las ecuaciones.

La pregunta es ¿cómo ordenarlos?

Observemos el desarrollo del método en el ejemplo y trate de llegar a alguna conclusión.



C : coeficiente

C. TI: coeficiente término independiente

C. "y": coeficiente de "y"

C."x": coeficiente de "x"

No perdamos de vista que para cada incógnita existe un cociente entre determinantes. Comparemos los determinantes denominadores para cada incógnita, ¿qué observamos? Dichos determinantes son iguales y reciben el nombre de **determinante principal.**

¿Cómo se ordenan los coeficientes dentro de ese determinante?

Observemos los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones, volvamos al planteo y analicemos las posiciones de los mismos en el determinante principal.

Ahora visualicemos cómo se construyen los determinantes del numerador, denominados **determinantes secundarios.**

Los coeficientes de “x” están ubicados en la primera columna, en el mismo orden que tenían en las ecuaciones originales.

Los coeficientes de “y” están ubicados en la segunda columna, respetando el mismo orden anterior.

¿Cómo se conforma entonces el determinante numerador?

Comparemos nuevamente la columna que pertenece a la incógnita buscada en el determinante numerador con la correspondiente en el determinante principal (denominador).

¿Qué ocurrió con los elementos? ¿Por qué valores fueron reemplazados? Observemos que la otra columna no fue alterada.

Importante

Conclusión: los determinantes del numerador, denominados secundarios, se construyen de la siguiente manera:

En los de la incógnita “x”, se reemplaza a los coeficientes de “x” por los de los términos independientes y los coeficientes de “y” quedan tal cual, es decir, como se posicionaron en el determinante principal.

En los de la incógnita “y”, reemplaza a los coeficientes de “y” por los términos independientes y los coeficientes de “x” quedan tal cual, o sea, como se posicionaron en el determinante principal.

Quizás con una sola lectura, este desarrollo parezca complicado. Volvamos a leerlo detenidamente y analicemos lo expresado en palabras con el desarrollo del ejemplo resuelto.

El problema ahora es resolver cada uno de esos determinantes. Por supuesto que cada uno de ellos se resuelve operando de la misma manera.

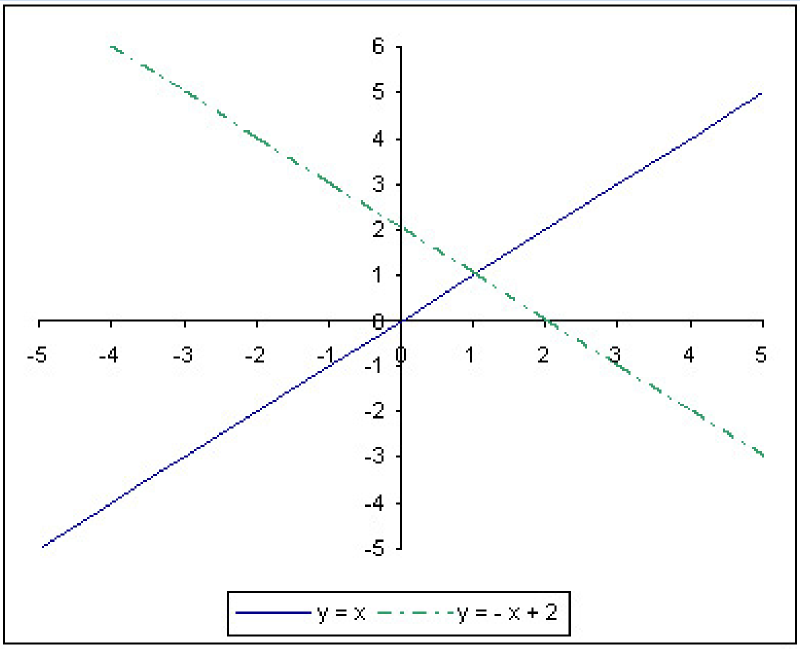
En los determinantes planteados, están señalados con una línea llena los extremos opuestos del determinante (de derecha a izquierda) y conforman lo que se denomina diagonal principal de un determinante. La línea en cambio denotada con puntos se denomina diagonal secundaria.

El valor numérico asociado a ese determinante, es la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal principal, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Observemos cómo se opera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2.1 - 0.1}{1.1 - (-1).1} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1.0 - (-1).2}{1.1 - (-1).1} = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces el valor de "x" que satisface al sistema de ecuaciones es uno y el valor de "y" que satisface al sistema de ecuaciones también es uno; que sea el mismo valor es sólo pura coincidencia.
Ambos valores conforman un par ordenado: (1; 1), el cual representa un punto en el plano. Dicho punto es donde se intersectan las rectas del sistema planteado cuando éstas son graficadas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, como lo muestra el gráfico siguiente:



A continuación tenemos un ejemplo resuelto, lo utilizaremos como autoevaluación. Es decir, resolvamos solos, y si no llegamos al resultado correcto, observemos y comparemos nuestro trabajo con el ejemplo. Busquemos y determinemos el error. ¡Suerte y adelante!

$$\begin{cases} -3x-4y=5 & (1) \\ -x-2y=2 & (2) \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{[5.(-2)]-[2.(-4)]}{[(-3).(-2)]-[(-1).(-4)]}=\frac{-10+8}{6-4}=-\frac{2}{2}=-1 \qquad \boxed{x=-1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{[(-3).2]-[(-1).5]}{[(-3)(-2)]-[(-1)(-4)]}=\frac{-6+5}{6-4}=-\frac{1}{2} \qquad \boxed{y=-½}$$

Por lo tanto, el par ordenado: (-1; - ½), representa la solución analítica del sistema de ecuaciones. Grafiquemos ambas rectas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas y comparemos el par ordenado con el punto de intersección de las mismas. Recordemos que deben coincidir.

Siempre que resolvamos un sistema de ecuaciones, verifiquemos los resultados a los que se arribó. ¿Qué significa verificar? Simplemente, debemos corroborar que los puntos que encontramos sean correctos, es decir, que verifiquen ambas ecuaciones del sistema y además sea el punto de intersección entre ambas rectas.

Para pensar y reflexionar

En los dos ejemplos dados, ¿ se puede decir si el sistema es consistente o inconsistente? De ser consistente, ¿cuántas soluciones admite, una o infinitas?

B2) MÉTODO DE IGUALACIÓN

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x+y=2 & (1) \\ -x+y=0 & (2) \end{cases}$$

Como se puede ver, hemos planteado el mismo sistema de ecuaciones que se utilizó con el método de determinantes. A través de un método distinto, se debe llegar al mismo resultado. Es importante que trabajemos siempre con aquel método que nos resulte más sencillo.

Para pensar y reflexionar

¿En qué consiste el método de igualación? ¿Qué supone igualar? ¿Qué elementos pueden ser igualados?

Como su nombre lo indica, el proceso de resolución busca igualar dos variables presentes en el sistema para poder reducirlo a una sola variable y encontrar así una de las incógnitas. Luego se utiliza ese valor para obtener la otra incógnita. Para poder igualar se debe tener alguna de las dos variables de la ecuación despejadas. En tal sentido, libremente elegimos qué variable despejar, es indistinto, aunque es recomendable que despejemos la variable "y", pues de ésta manera, ya tendremos el modelo lineal para llevarlo al gráfico. No olvidemos los conceptos algebraicos de trasposición de términos de un miembro a otro para despejar correctamente.

Entonces, despejando la variable "y" el sistema es:

$$\begin{cases} y=2-x \\ y=x \end{cases}$$

Ahora que tenemos la variable despejada se puede igualar los segundos miembros, ya que si "los primeros términos de las ecuaciones son iguales entre sí, entonces los segundos también lo son":

$$2 - x = x$$

Queda formada una ecuación lineal de una sola incógnita. Operando algebraicamente se encuentra el valor de "x". Entonces:
¿Cómo encuentra el valor de "y"? ¿En cuál ecuación debe reemplazar?
Como el valor de "x" verifica ambas ecuaciones al mismo tiempo, se puede reemplazar tanto en la primera como en la segunda ecuación (es indistinto).
Entonces:

$$y = 2 - x$$
$$y = 2 - 1$$
$$y = 1$$

Como se ve, el par ordenado, solución de éste sistema es (1; 1) como se comprobó anteriormente.

B3) MÉTODO POR SUSTITUCIÓN
Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ -x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

Para pensar y reflexionar

¿Cómo opera el método de sustitución? ¿Qué es sustituir?
El método por sustitución busca resolver el sistema de ecuaciones a través de "sustituir" o reemplazar en una ecuación, una variable por otra, para que se reduzca a una ecuación lineal con una sola incógnita.
Nuevamente para poder sustituir, debemos despejar una de las variables, lo cual es indistinto. No es necesario que despejemos la misma variable de ambas ecuaciones, basta simplemente que despejemos una variable en una de las ecuaciones.

Por ejemplo, si se despeja la variable "y" de la ecuación (1)
Se obtiene: y = 2 – x. Luego se sustituye la expresión anterior, en la ecuación (2) y esta se reduce a una ecuación lineal de una sola variable, con lo cual, operando algebraicamente se determina el valor de "x".

Observemos a continuación:

$$y = 2 - x \qquad (1)$$

$$-x + [2 - x] = 0 \qquad (2)$$

$$-x + 2 - x = 0$$

$$x = 1$$

Reemplazando el valor de “x” en la ecuación (1), se determina el valor de “y”.

$$y = 2 - x \qquad (1)$$

$$y = 2 - 1$$

$$y = 1$$

El par ordenado soluciones entonces, el punto (1; 1).

B4) MÉTODO POR REDUCCIÓN

Para resolver sistemas de ecuaciones por éste método, también conocido como método de suma y resta, utilizaremos el siguiente ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x - 4y = 5 & (1) \\ -x - 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

Para pensar y reflexionar

¿Cómo están ordenados los elementos del sistema? ¿Dónde se ubican “x”, “y” y los términos independientes de las ecuaciones?

¿Es necesario que siempre se mantenga dicho orden?

Para resolver el sistema es conveniente trabajar ordenando las variables en un miembro y los términos independientes en el otro miembro de la igualdad. El orden que elijamos en la primera ecuación, se debe mantener en la segunda.

¿Qué busca el método de reducción?

Como su nombre lo indica, el objetivo que persigue es reducir el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a una sola ecuación con una sola incógnita. Para ello, es necesario “reducir” o eliminar una de las variables, por la operación suma o resta entre las ecuaciones. Pero, ¿cómo se logra esto sin alterar el sistema?

Ahora bien, cuando una ecuación se multiplica por una constante distinta de cero, en ambos términos de la igualdad, ésta no cambia. El propósito que se persigue es eliminar una de las variables sumando o restando una ecuación de otra, por lo que los coeficientes de dicha variable deben ser iguales, pero de signo contrario, para cuando se efectúe la suma o resta, según corresponda, esta variable se elimina (ya que su coeficiente será cero) y el resultado obtenido es una ecuación de una sola incógnita. Entonces se propone seguir los siguientes pasos:

Importante

- **Multiplicar a alguna de las dos ecuaciones por una constante distinta de cero.**
- **Restar o sumar miembro a miembro de la ecuación (1), la ecuación (2), de acuerdo al signo de los coeficientes, para eliminar la variable.**
- **Operar algebraicamente para obtener el valor de la otra incógnita.**
- **Sustituir el valor de la incógnita determinado, en una de las ecuaciones planteadas, para lograr el valor de la incógnita faltante.**

Analicemos el siguiente ejemplo:

Se multiplica a la ecuación (2) por tres y luego se resta, entonces:

$$\begin{cases} -3x-4y=5 & (1) \\ -x-2y=2 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rl} -3x-4y=5 & (1) \\ -3x-6y=6 & (2) \\ \hline 0\ +\ 2y=-1 & \end{array}$$

¡¡¡Cuidado cómo restemos expresiones algebraicas!!!

El sistema se redujo a una ecuación con una sola incógnita, de la que se deduce que: y = - ½.

Sustituyendo dicho valor en cualquiera de las ecuaciones (generalmente reemplazamos en la ecuación que no hemos utilizado aún), se encuentra el valor de la otra incógnita:

$$-3x-4\left(-\frac{1}{2}\right)=5$$

$$-3x+2=5$$

$$x=-\frac{3}{3}=-1$$

El par ordenado solución del sistema planteado es: P (-1; - ½)

Por ahora, sólo planteamos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, debido a que sistemas más complejos como de tres o más ecuaciones con tres o más incógnitas, o bien sistemas mixtos, superan el objetivo perseguido en este curso y serán planteados, en las asignaturas correspondientes en la carrera elegida.

A continuación tenemos algunos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para que resolvamos por el método que nos quede más cómodo...

¡¿Lo hacemos?!
Contamos con las respuestas para que podamos controlar los resultados obtenidos:

Actividad

$a)\quad x+6y=1 \quad (1)$
$\quad\;\; 2x-6y=-7 \quad (2)$

$Rta: \left(-2; \frac{1}{2}\right)$

$b)\quad 5x+y=8 \quad (1)$
$\quad\;\; 4x-2y=-2 \quad (2)$

$Rta: (1;3)$

$c)\quad 2x-4y=10 \quad (1)$
$\quad\;\; 3x+6y=-9 \quad (2)$

$Rta: (1;-2)$

$d)\quad 2y=-6x+8 \quad (1)$
$\quad\;\; 3x-2=y \quad (2)$

$Rta: (1;1)$

Importante

Para cualquiera de estos métodos analíticos vistos, se deberá tener en cuenta que:

$$0 \cdot x = 0 \Rightarrow sist.\ con\ infinitas\ sol.$$

$$0 \cdot x = 4 \Rightarrow sist.\ sin\ sol.$$

UN PROBLEMA DE APLICACIÓN DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Veamos el siguiente caso:

La empresa "Genius" S.A. está interesada en determinar el nivel de producción a partir del cual la compañía obtiene utilidades. Las funciones costos e ingresos de la empresa son las que se detallan a continuación:

$$CT(x) = 10x + 500$$
$$I(x) = 15x$$

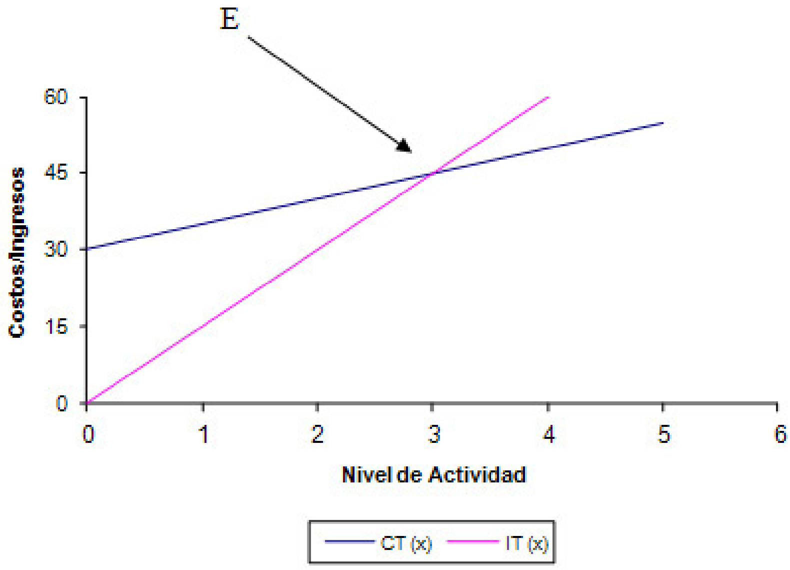
Para que la empresa obtenga utilidades, es necesario que el nivel de ingresos sea superior a los costos totales en que incurre la firma.

Para pensar y reflexionar

¿Cómo deben ser los ingresos en relación a los costos, para que la empresa no presente ni pérdidas ni ganancias?

Observemos el gráfico, analicemos la tabla y relacionemos ambos. Esto nos permitirá llegar a la conclusión correspondiente y responder la pregunta anterior.

Nivel de Producción	*CT (x)*	*IT (x)*
0	30	0
1	35	15
2	40	30
3	45	45
4	50	60
5	55	75



¿Qué representa el punto “E”?

Encontrar el “Punto de Equilibrio” supone hallar el nivel de producción para el cual los costos totales de la empresa son iguales a sus ingresos totales. Esto quiere decir que en el Punto de Equilibrio, la utilidad de la empresa es igual a cero.

¿Qué quiere decir esto desde el punto de vista matemático?

Para responder a ésta pregunta reflexionemos un momento:

¿Qué representan las funciones costo e ingreso? ¿Conforman ellas un sistema? ¿Qué supone resolver analíticamente un sistema de ecuaciones? ¿Qué es dicho punto de equilibrio?

Estas funciones son lineales y conforman un sistema lineal que se puede resolver utilizando los conocimientos previos. Entonces, el punto de equilibrio es el par ordenado (x, y) que verifica ambas ecuaciones. Por lo tanto lo que debemos hacer, es resolver el sistema (analíticamente) por cualquiera de los métodos expuestos anteriormente.

Propongámonos resolverlo aquí por el método de igualación, aunque somos libres de elegir otro método.

$$CT = IT$$
$$5x + 30 = 15x$$

El método de igualación, pone en evidencia el concepto económico del punto de equilibrio.
Luego, operando algebraicamente:

$$5x - 15x = -30$$
$$-10x = -30$$
$$x = 3$$

¿Qué significa “x = 3”?
Esto significa que cuando el nivel de producción es 3, los costos y los ingresos son iguales.
Pero no debes olvidar que al hablar de punto, debemos indicar no sólo el valor de abscisa (“x”), sino también el valor de ordenada (“y”).
Reemplazando en cualquiera de las funciones (tanto costos como ingresos) se obtiene:

$$CT(x) = 5x + 30$$
$$CT(3) = 5.3 + 30$$
$$CT = 45$$

Es decir que 45 es el valor que asumen los ingresos o los costos para un nivel de producción igual a 3.

¿Qué sucede en un nivel de producción inferior al de equilibrio? ¿Y en un nivel superior?
Como podemos apreciar en el gráfico, en un nivel de producción inferior al de equilibrio, por ejemplo cuando se producen 2 unidades, los costos de la empresa son superiores a los ingresos que ésta puede generar. Por lo tanto podemos decir que la firma está en una ***zona de pérdidas.***

Por el contrario, cuando la empresa produce en un nivel superior al de equilibrio, por ejemplo 4 unidades, los costos son inferiores a los ingresos, la compañía está en una ***zona de ganancias.***
Verifiquemos analíticamente cuáles son los costos y los ingresos para un nivel de actividad (producción) igual a 2 y 4.

Actividad Individual

ACTIVIDADES DE EJERCITACIÓN Y PROBLEMAS DE LA CLASE 6

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas en forma analítica practicando los distintos métodos analíticos.

$$1 \rightarrow x = 2y + 16$$
$$x = -y - 5$$
$$Rta: (2;-7)$$

$$2 \rightarrow 5x - 4y = 1$$
$$2x + 4y = -2$$
$$Rta: (-1/7;-3/7)$$

$$3 \rightarrow x/3 + y/2 = 14$$
$$x/3 - y/4 = -1$$
$$Rta: (12;20)$$

Graficar algunos.

$$4 \rightarrow 5x - 2y = -11$$
$$4x + 3y = -16$$
$$Rta : (-65/23; -36/23)$$

$$5 \rightarrow (1/3)x + (2/3)y = 8$$
$$(1/6)x - (5/6)y = -3$$
$$Rta : (12;6)$$

$$6 \rightarrow 2x + 4y = 14$$
$$x + 2y = 7$$
$$Rta : \inf\ initas\ solucione$$

$$7 \rightarrow x + 3y = 8$$
$$x/3 + y = 9$$
$$Rta : \sin\ solucion$$

$$8 \rightarrow 3x + y = 2$$
$$2x - y = 3$$

9. Un camión puede llevar 16 cajones de mercaderías A y 4 de las B. Si se quitan 6 cajones de la A puede poner uno más de la B. ¿Cuál es el peso de los cajones A y B si el camión puede cargar 4800 kilogramos?
Rta: 120 y 720 respectivamente.

10. La suma de dos números da 13 y su diferencia es 9. ¿Cuáles son esos números?
Rta: 11 y 2.

11. Si se aumenta en 2 [cm] el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta de 24 [cm]. Si el largo se disminuye en 2 [cm] resulta un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
Rta: 5 [cm] y 3[cm].

12. He comprado dos herramientas de distintos precios. La herramienta A cuesta $200 menos que el doble de lo que cuesta la B, y ésta vale $40 más que A. ¿Cuánto pagué por cada herramienta?
Rta: $120 y $160.

13. Determinar la edad de un señor y la de su hijo sabiendo que la del primero es el cuádruplo de la del segundo y que el padre tiene 24 años más que su hijo.
Rta: 32 y 8 años.

14. Un señor pagó por un lote de 12 caballos y 14 vacas \$3800 y por otro lote de 5 caballos y 3 vacas \$1300. ¿Cuánto pagó por cada caballo y cada vaca?
Rta: \$200 y 100 respectivamente.

15. El costo total diario (en dólares) de producir "x" sillas está dado por:
C(x) = 2,5 x + 300

a) Si cada silla se vende a \$ 4. ¿Cuál es el punto de equilibrio entre los costos y los ingresos?

b) Si el precio de venta se incrementa a \$ 5 por silla. ¿Cuál es el nuevo punto de equilibrio?

c) Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día. ¿Qué precio deberá fijarse con el objetivo de garantizar que no haya pérdidas?

Rta: a) El punto de equilibrio de verifica en (200 ; 800)
b) El punto de equilibrio de verifica en (120 ; 600)
c) El precio debería ser \$ 4, 5.

Palabras de cierre

Estimados estudiantes: nos espera otra semana con bastante trabajo por realizar, pero a no desanimarnos porque somos capaces de hacerlo.

Además, como los temas desarrollados en esta clase están en vínculo directo con la clase anterior, lograremos fácilmente cumplimentar las distintas actividades propuestas.

No olvidemos, como siempre, anotar todas las inquietudes que surjan a la hora de trabajar solos, para resolverlas en el próximo encuentro.

¡Nos vemos!

Clase 7

Ecuación de segundo grado y función de segundo grado

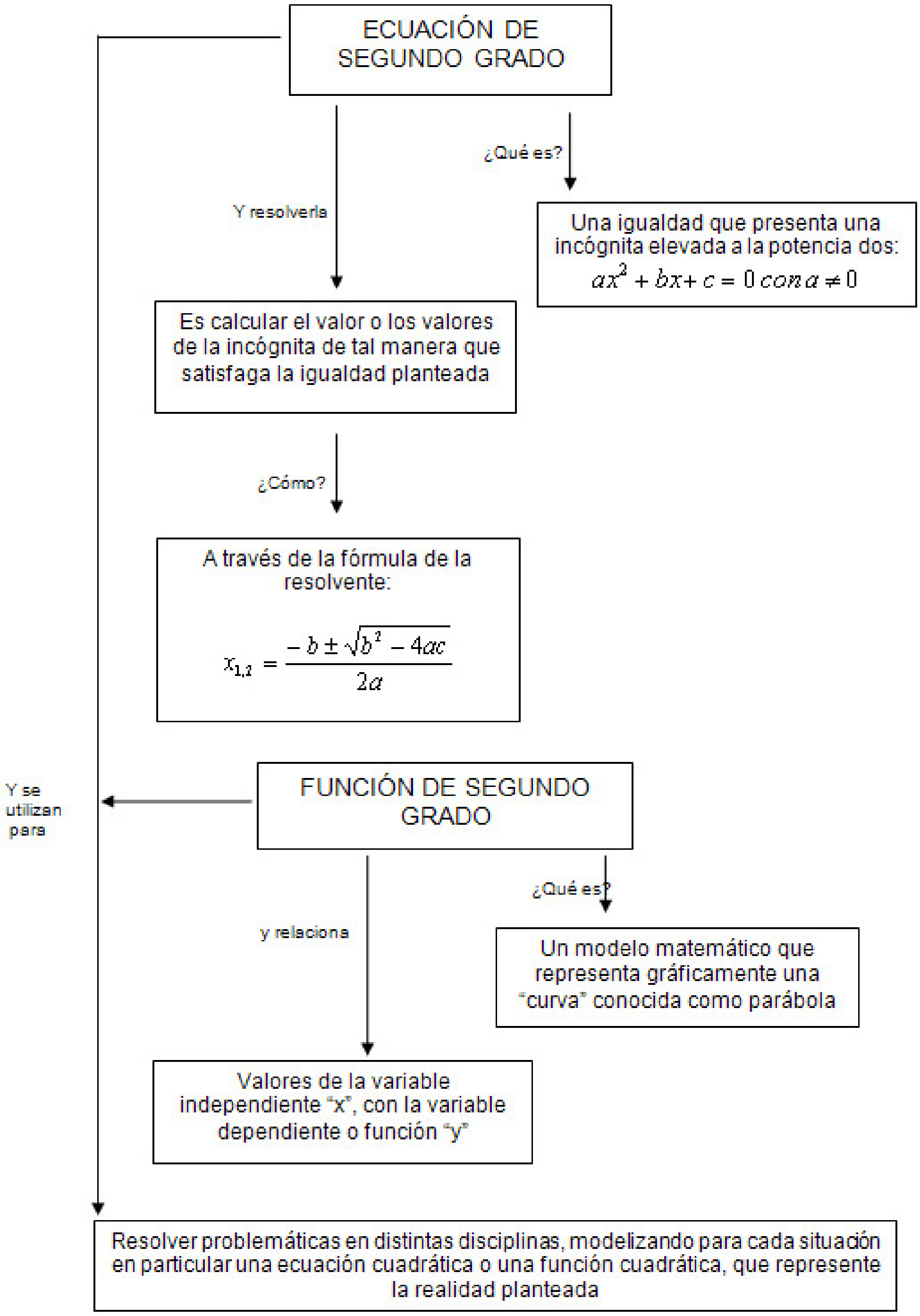
Objetivos específicos.

- Comprender el concepto de ecuación de segundo grado.
- Afianzar la destreza en la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Reconocer una función cuadrática.
- Graficar una función de cuadrática.
- Reconstruir el modelo matemático a partir del gráfico de una función cuadrática.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente.

Contenidos

- Definición y resolución de la ecuación de segundo grado.
- Ejemplos de distintas formas de solución.
- Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado.
- Expresión factorizada de la ecuación de segundo grado.
- Función de segundo grado.
- Casos particulares de la función de segundo grado.
- Reconstrucción de la función de segundo grado a partir del gráfico.
- Actividades individuales de ejercitación y problemas.
- Palabras de cierre.

Esquema conceptual de la vinculación de los contenidos de la Clase 7:



Definición y resuolción de la *ecuación de segundo grado*

Observemos el siguiente ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

La expresión planteada, es una ecuación de segundo grado.

Para pensar y reflexionar

¿Por qué utilizamos el término ecuación? ¿Por qué de segundo grado? ¿Cuál es la potencia de x en cada uno de los términos? ¿Cuál es el término de mayor grado?

Tratemos de responder con terminología pertinente, cada uno de los interrogantes.

La ecuación de segundo grado se presenta en general como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **a, b** y **c** son coeficientes numéricos y:

“a” se denomina **coeficiente** principal porque es la constante que acompaña a la variable de mayor grado presente en la ecuación.

“b” es el **coeficiente** del término de primer grado en la ecuación, y

“c” se denomina **término independiente.**

Importante

Recordemos que cuando a = 1, ¡la expresión anterior se llama reducida!

Nota que si bien a, b y c son constantes, a y b se los denomina coeficientes y no simplemente constantes.

Para pensar y reflexionar

¿Cuál será la diferencia entre una denominación y otra?

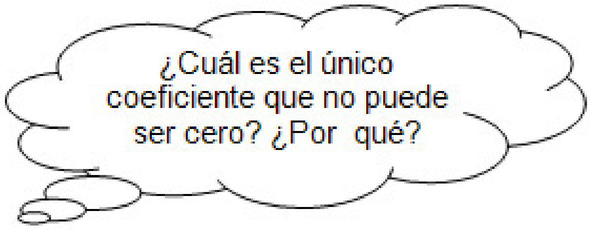
Veamos… se denominan coeficientes a aquellas constantes que multiplican a una variable en una ecuación, para significar justamente que no es una constante cualquiera.

La expresión anterior representa a la **forma completa** de la ecuación de segundo grado. ¿Por qué completa? ¿Están presentes todas las potencias decrecientes de **x**, desde dos hasta cero?

Para pensar y reflexionar

Observemos que las siguientes expresiones representan también ecuaciones de segundo grado. ¿Cuál es su particularidad?

a) $ax^2 + bx = 0$



b) $ax^2 + c = 0$

c) $ax^2 = 0$

Estas expresiones son **formas incompletas** de la ecuación de segundo grado. ¿Qué le sugiere el término incompleto? ¿Qué términos le faltan a cada una de ellas?

Y si ahora nos proponemos pensar en resolver una ecuación cuadrática… ¿qué supone resolver una ecuación de segundo grado? ¿Cuántos valores de **x** satisfacen la igualdad? ¿Qué significa el término **raíz** de una ecuación?

Resolver implica encontrar los valores de la variable que satisfacen o verifican la ecuación (o igualdad), es decir, determinar aquellos valores de **x** que hacen que al reemplazarlo, el valor numérico de la ecuación sea cero.

Importante

El Teorema Fundamental del Álgebra indica que todo polinomio de grado *n*, tiene *n* raíces que hacen cero al polinomio. Estas raíces pueden ser de distinta naturaleza, por lo tanto, recuerda qué se quiere significar con *naturaleza de las raíces.*

La ecuación de segundo grado, entonces tendrá dos raíces que verifican la igualdad, de acuerdo a lo que plantea el Teorema Fundamental del Álgebra.

Para determinar las raíces de una ecuación de segundo grado, se utiliza una fórmula que ya conocemos:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Observemos ahora el término que figura en el radicando: **b2 – 4.a.c.** Este término recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación de segundo grado. ¿Qué indica dicho término? ¿Qué supone discriminar desde el punto de vista matemático?

El significado de éste término está íntimamente ligado a la **naturaleza de las raíces** de una ecuación de segundo grado.

Así, el discriminante puede ser: mayor, menor o igual que cero, es decir:

$$b^2 - 4.a.c > 0 \quad (Expresión \quad positiva)$$

$$b^2 - 4.a.c = 0 \quad (Expresión \quad nula)$$

$$b^2 - 4.a.c < 0 \quad (Expresión \quad negativa)$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado pueden ser reales y distintas, reales e iguales o complejas conjugadas. Este comportamiento de las raíces está asociado precisamente con el signo del discriminante.

Para pensar y reflexionar

Podemos asociar el signo del discriminante con la naturaleza de las raíces de la ecuación… pensemos, analicemos y luego elaboremos una conclusión.

Veamos… toda ecuación de segundo grado tiene dos valores de **x** que la resuelven. Dichos valores se denominan **raíces** de la ecuación y pueden ser:

a) Reales y distintas, si: $b^2 - 4.a.c > 0$

b) Reales e iguales, si: $b^2 - 4.a.c = 0$

c) Complejas conjugadas, si: $b^2 - 4.a.c < 0$

Recordemos que las raíces complejas conjugadas son dos y están compuestas por una parte real y otra parte imaginaria.

Veamos los siguientes ejemplos con la intención de aclarar…

a) Determinar las raíces de la ecuación: $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Para determinar las raíces se utiliza la fórmula y con lo cual se debe reconocer cada uno de los coeficientes. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.3.(-5)}}{2.(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

Respuesta:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \text{ O sea, reales y distintas.}$$

Para pensar y reflexionar

¿Coincide la naturaleza de las raíces que obtuvimos con el signo del discriminante de la ecuación?

b) Determinar las raíces de la ecuación: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Para buscar las raíces con la fórmula, debemos reconocer que:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{array}\right\}$$

¿Cómo se denomina la ecuación que tiene como coeficiente principal a 1?

Veamos como calculamos…

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.(9)}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{array}\right\} \text{ O sea, reales e iguales.}$$

Para pensar y reflexionar

¿Coincide la naturaleza de las raíces que obtuvimos con el signo del discriminante de la ecuación?

c) Determinar las raíces de la ecuación: $x^2 + 2x + 2 = 0$

Si reconocemos los siguientes coeficientes como:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{array}\right\} \qquad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} \quad \begin{cases} x_1 = -1 + i \\ x_2 = -1 - i \end{cases}$$

Es decir, complejas y conjugadas.

Para pensar y reflexionar

¿Qué ocurrió con el discriminante? ¿Cuál es su signo?

Observemos ahora la estructura algebraica del ejemplo que se presenta a continuación, si bien no responde a la forma más sencilla de la ecuación de segundo grado, cuando se opera algebraicamente para determinar la mínima expresión se llega a una ecuación de segundo grado.

d) Determinar las raíces de la ecuación:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{2-x}{2x-6}$$

¿Cómo se resuelve una proporción?

$$(x-1).(2x-6) = (2-x).(-3)$$

Recordemos que los divisores de un miembro de la igualdad, son factores en el otro miembro.

$$(2x^2 - 6x - 2x + 6) = (-6 + 3x)$$

Tengamos presente que para multiplicar polinomios se debe aplicar la propiedad distributiva.

$$(2x^2 - 8x + 6) = (-6 + 3x)$$

Siempre se debe llevar todo a la mínima expresión. Para ello, agrupa términos semejantes.

$$2x^2 - 8x + 6 + 6 - 3x = 0$$

No olvidemos que el pasaje de términos de un miembro de la igualdad a otro en suma/resta, ¿qué ocurre con los signos de los mismos?

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

Y finalmente ¡la mínima expresión de la ecuación!

Entonces los coeficientes son:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -11 \\ c = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4.2.12}}{2.2}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{4} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$ **Es decir, raíces reales y distintas.**

Vamos con otro ejemplo…

e) Determinar las raíces de la ecuación: $4x^2 + \frac{5}{3}x = 0$

Observemos que este ejemplo responde a una de las formas incompletas de la ecuación de segundo grado. ¿Cuál es el término que falta?
Veamos una manera de calcular las raíces de la ecuación, **sin** la necesidad de utilizar la fórmula de la resolvente vista anteriormente. El procedimiento es mucho más simple y evita confusiones y errores comunes en los que puedes incurrir al utilizar dicha fórmula.

Relacionar

Recordemos que el concepto de factor común ya visto en clases anteriores y apliquémoslo a la ecuación planteada…

Entonces: $x.(4x + \frac{5}{3}) = 0$

Cuando existe un producto que está igualado a cero, basta que sea cero uno de los dos factores, por vez. Es decir, que puede hacerse cero el primer factor ó el segundo y de ésta manera el producto siempre dará cero y se verificará la igualdad. Por lo tanto se puede calcular las raíces de la ecuación, igualando a cero cada uno de los factores para encontrar el valor de **x** que hace cero cada factor y por ende, verifica la ecuación.

Si igualamos a cero el primer factor: x = 0, entonces una raíz es, x1= 0.
Si igualamos a cero el segundo factor y despejamos según corresponda, obtenemos la otra raíz, es decir x2.
Entonces:

$$4x + \frac{5}{3} = 0$$

$$4x = -\frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{5}{3.4} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{5}{12}$$

$$\left.x_1 = 0 \;\; \text{y} \;\; x_2 = -\frac{5}{12}\right\}$$ **Las raíces son reales y distintas.**

Verificamos que se llega al mismo resultado si utilizamos la fórmula para el cálculo de raíces y decide cuál método es más sencillo para utiliza.
Otro caso es:
f) Determinar las raíces de la ecuación: $3x^2 - 27 = 0$

Este ejemplo también responde a una forma incompleta de la ecuación de segundo grado, pero ¿cuál es el término que falta?

Relacionar

Contamos con otra manera de calcular las raíces de la ecuación, simplemente utilizando conocimientos algebraicos anteriores como por ejemplo intentar despejar la variable **x**…

$$3x^2 - 27 = 0$$
$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$\left.x_1 = 3 \quad y \quad x_2 = -3 \right\}$$ **De nuevo, raíces reales y distintas.**

Debemos recordar siempre que toda raíz de índice par y radicando positivo tiene dos resultados posibles. ¡Por eso el doble signo!

Sigamos con otro ejemplo…
g) Para que la ecuación ax2 + 12x + 36 = 0 tenga 2 raíces complejas conjugadas, ¿qué valor puede tomar el coeficiente a?

Para pensar y reflexionar

Intentemos pensar cuáles son los datos que disponemos y qué herramienta podemos utilizar para responder al enunciado. ¡Lo podemos hacer!
Si una ecuación de segundo grado tiene raíces complejas conjugadas, implica que el discriminante de la función debe ser menor que cero.
Simbólicamente: $b^2 - 4.a.c < 0$

Reemplazando los datos que obtenemos del enunciado, nos queda:

$$(12)^2 - 4.36.a < 0$$

y resolviendo convenientemente:

$$144 - .144.a < 0$$
$$144 < 144.a$$
$$1 < a \quad ó \quad a \rangle 1$$

Por lo tanto, para que la ecuación de segundo grado tenga raíces complejas conjugadas, ¡el coeficiente principal **a** debe ser mayor que uno!

A continuación tenemos algunos ejercicios para practicar:

Actividad

$a)\ \dfrac{2.(x-3)}{x} = \dfrac{5x-2}{x+2}$ — $Rta:\ complejas\ conjugadas$

$b)\ (x+1).(x-3) = -3$ — $Rta:\ x_2 = 2\ y\ x_2 = 0$

$c)\ x.(x-3) = 2x^2 + 2$ — $Rta:\ x_1 = -2\ y\ x_2 = -1$

$d)\ x.(x+3) = 5x$ — $Rta:\ x_1 = 2\ y\ x_2 = 0$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Conocer cómo se relacionan las raíces de una ecuación de segundo grado con los coeficientes de la misma, es muy importante, ya que conocidas las raíces, se puede reconstruir dicha ecuación.

Si llamamos **x1** y **x2** a las raíces de una ecuación de segundo grado que responde a la estructura general: **a x2 + b x + c = 0**, siempre se cumple que:

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}} \qquad \boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Utilizando las igualdades anteriores y tomando a como 1 (uno) salvo que se consigne lo contrario, se puede reconstruir la ecuación correspondiente, denominada forma **reducida de la ecuación.**

Veamos los siguientes ejemplos:

a) Si los valores de las raíces son: x1 = 3 y x2 = – 1

$$3 + (-1) = \frac{-b}{1}$$

$$3 - 1 = -b$$

$$\boxed{b = -2}$$

Y luego:

$$3(-1) = \frac{c}{1}$$

$$\boxed{-3 = c}$$

Recordemos que suponemos que **a** = 1 salvo que se aclare lo contrario.

Una vez determinados los coeficientes **a, b** y **c,** se reconstruye la ecuación como: $x^2 - 2x - 3 = 0$ ¡y esta es la respuesta!

Importante

Es importante que conozcamos bien la ecuación general y el lugar que ocupan cada uno de los coeficientes, o bien, a qué términos corresponden cada uno de ellos, para finalmente reconstruir la ecuación.

b) Nos dan los valores de las raíces, pero…

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -5$$
$$a = 2$$

Observemos que se indica el valor de **"a"** coeficiente principal de la ecuación.

$$3 + (-5) = \frac{-b}{2}$$
$$3 - 5 = \frac{-b}{2}$$
$$(-2).2 = -b$$
$$-4 = -b$$
$$\boxed{b = 4}$$

$$3.(-5) = \frac{c}{2}$$
$$(-15).2 = c$$
$$\boxed{c = -30}$$

Entonces la respuesta es: $2x^2 + 4x - 30 = 0$

EXPRESIÓN FACTORIZADA DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Conocer las raíces de la ecuación de segundo grado también es útil para poder factorear dicha ecuación. Recordamos qué significa factorear, ¿verdad? Entonces, la ecuación de segundo grado se puede escribir como:

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1)(x - x_2)$$

El primer miembro muestra la **forma polinómica** de la ecuación de segundo grado, mientras que el segundo miembro muestra la **ecuación factorizada**, ya planteada en la Clase 3!

A continuación tenemos algunos ejemplos para pensar:

a) $3x^2 - 6x - 9 = 0$

Para poder factorizar ésta ecuación, se necesitan conocer sus raíces. Verifiquemos que ellas son: x1= –1 y x2 = 3.

Por lo tanto:

$$3x^2 - 6x - 9 = 3.(x + 1).(x - 3)$$

Esto significa que conociendo las raíces de la ecuación de segundo grado podemos reconstruir la ecuación polinómica (forma reducida: coeficiente principal 1), realizando el producto correspondiente, con los factores que se determinan a partir de la estructura factorizada de la ecuación de segundo grado y su relación con las raíces de la misma.

b) $x^2 + 9 = 0$

Si tratamos de encontrar las raíces despejando simplemente, (o si lo preferimos utilizando la fórmula de la resolvente), encontraremos que ésta ecuación no tiene raíces en el campo real, sino que son complejas conjugadas.

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

$$x_1 = 3i$$

$$x_2 = -3i$$

Para pensar y reflexionar

¿Cómo factorizamos entonces la ecuación? ¿Podemos hacerlo?

Unir conceptos

Cuando las raíces de la ecuación de segundo grado no son reales, es decir que son complejas conjugadas, la expresión polinómica no puede factorizarse, es decir que estamos en presencia de **un polinomio primo o irreducible**, el cual ya está en su mínima expresión. Debemos recordar un caso de divisibilidad, planteado en la Clase 4. El ejemplo responde justamente a ese caso.

¿Esto implica que el polinomio no tiene raíces? Todo lo contrario, como demuestra el Teorema Fundamental del Álgebra, todo polinomio de grado dos, tiene dos raíces. En este caso particular las raíces son complejas conjugadas y no hacemos ningún análisis sobre ellas, en esta instancia. Quizás en alguna asignatura de la carrera volvamos sobre el tema en particular.

c) A partir de los siguientes datos, reconstruir la ecuación correspondiente:

$$x_1 = -\tfrac{1}{3}$$

$$x_2 = 5$$

$$a = -\tfrac{1}{2}$$

$$a.(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right].[x - 5] = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right).(x - 5) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 - 5x + \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\right) = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{5}{3}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{5}{6} = 0$$

$$\downarrow$$

Recordemos cómo se efectúa el producto entre polinomios...

Expresión polinómica de la ecuación de segundo grado.

Importante

A modo de conclusión podemos decir que dadas las raíces de una ecuación de segundo grado, se puede llegar a construir la ecuación correspondiente utilizando las propiedades de las raíces, o bien, planteando la expresión factoreada y resolviendo dicha expresión.

A continuación contamos con algunos ejercicios para practicar, en relación a los dos últimos temas vistos. ¡No olvidemos controlar tus resultados con las respuestas brindadas!

Actividad

Encontrar las ecuaciones de segundo grado con las condiciones:

a) $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ — $Rta: x^2 - 5x + 6$

b) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$ y $c = 70$ — $Rta: 2x^2 - 24x + 70$

c) $x_1 = x_2 = 2$ — $Rta: x^2 - 4x + 4$

FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

$ax^2+bx+c=0$ Ecuación de Segundo Grado

$ax^2+bx+c=y$ Función de Segundo Grado

Para pensar y reflexionar

¿Cuál es la diferencia entre las expresiones anteriores? ¿Qué sugiere la aparición de la variable **y**? ¿Depende esta variable **y** de los valores que asuma **x**? ¿Se puede asegurar que **y** depende de **x**? ¿Por qué se denomina función a la segunda expresión?

Identifiquemos los elementos de una función de segundo grado:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Variable dependiente ó función.

Término Independiente

Variable independiente

Coeficiente principal

Término Lineal

Esta expresión es función porque es una relación en la cual a cada elemento del domino (x), le corresponde una y solo una imagen. Es decir que a cada valor posible de **x** le corresponde un valor de **y.**

El valor que asume la variable dependiente o función, está condicionado o está en función del valor que asume **x**, es decir de la variable independiente.

Tengamos presente que el objetivo de modelizar con funciones matemáticas las situaciones económicas ó propias de las ingenierías, es poder volcarlas en un gráfico, sino pierde toda utilidad. Todas las herramientas que adquirimos en las clases anteriores deben ser para elementos que nos ayuden a graficar y poder interpretar en un gráfico una realidad determinada, independientemente de la ciencia de que se trate.

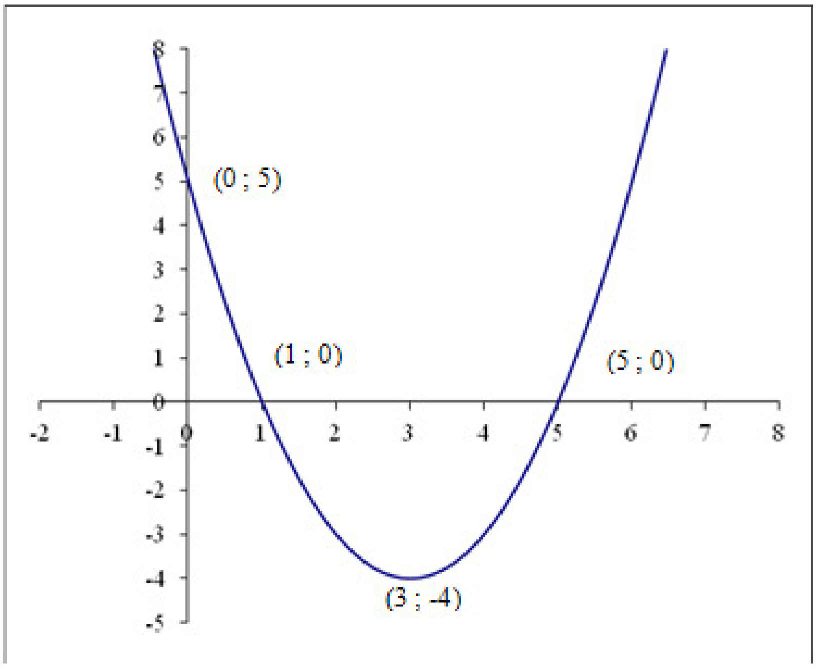
¿Qué nombre recibe la gráfica de la función de segundo grado? La curva recibe el nombre de **parábola**.

Como toda función, puede ser representada en un sistema de coordenadas cartesianas en el cual se ubica a los valores de la variable independiente en el eje de las abscisas (x) y al de la función en el eje de las ordenadas (y). Ahora, esta curva presenta una particularidad, ¿cuál era?

A los fines prácticos o de resolver problemas, hacemos una aclaración muy importante. Si bien a los coeficientes de la función cuadrática los generalizamos como **a, b** y **c**, esto no invalida que en otras funciones de aplicación pueden estos coeficientes o también las variables estar representados por otro tipo de simbologías que sean ilustrativas de realidades económicas, físicas, etc. Debemos saber cómo reconocer y operar con el modelo cuadrático, más allá de lo que estén midiendo las variables bajo análisis.

Observemos los siguientes casos, analicémoslos detenidamente relacionando los coeficientes de cada uno de los términos de la función con su correspondiente gráfica.
Realicemos lo propio con la naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado asociada a la función.

a) $y = x^2 - 6x + 5$



¿Cómo se obtiene dicho gráfico?
Una primera aproximación consiste en analizar el signo del coeficiente principal **"a"** con la orientación de las ramas de la parábola. Como **"a" es positivo**, y en este caso igual a 1, **las ramas de la parábola son siempre hacia arriba.**
¿Identificamos los pares ordenados más importantes de la función? ¿Cómo se obtienen dichos puntos? ¿Cómo hacemos para encontrar el punto de corte con el eje de las ordenadas, es decir con el eje **y**, qué valor debe asumir la variable **x**? Si nos ubicamos en el gráfico podremos ver que para que la función corte al eje **y** es necesario que la **x** valga cero. Por lo tanto para encontrar ese punto se reemplaza **x** por cero en la función dada y se resuelve aritméticamente según corresponda, como se muestra a continuación:

$$y(0) = (0)^2 - 6(0) + 5$$
$$y(0) = 5$$

Entonces cuando x = 0,   y = 5, se obtuvo el primer punto (0; 5).
Observemos: 5 es el valor del **término independiente**, es decir el coeficiente **c** el cual, indica el **punto de corte de la parábola con el eje de las "y".**

¿Cómo se determinan los puntos de corte con el eje **x**?

Retomemos el razonamiento ya utilizado anteriormente o bien observemos el gráfico y pensemos qué valor debe asumir **y** para que la curva corte al eje de las abscisas.

Para que esto ocurra, la variable **y** debe valer cero. Por lo tanto, si queremos conocer los puntos de corte con el eje de las **x** deberás hacer cero el valor de **y**. Entonces no queda: $0 = x^2 - 6x + 5$

Observemos que la ecuación planteada es de segundo grado. Dicha ecuación es la ecuación asociada a la función. Esto quiere decir que conociendo **sus raíces**, estas **representan los puntos de corte de la curva al eje x.**

Corroboramos que las raíces son -1 y 5. De allí que los puntos que muestra la gráfica son: ¡(- 1; 0) y (5, 0)!

Por último, se puede observa otro punto importante que es (3; -4) que corresponde al **vértice de la parábola.** Al ser un punto en el plano tiene asociadas coordenadas $(x_v; y_v)$. Dicho punto se calcula utilizando una fórmula que nos permite encontrar el valor de **x** correspondiente a ese vértice como:

$$x_v = \frac{-b}{2.a}$$

Que en nuestro ejemplo sería:

$$x_v = \frac{-(-6)}{2.1}$$

$$x_v = 3$$

Y si observamos nuevamente el gráfico podremos ver que ese valor calculado anteriormente, también puede obtenerse como la semisuma o el promedio de las raíces, es decir:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Para poder fijar el punto vértice en el plano como corresponde, se debe determinar también el valor de **y**. Por lo tanto una vez calculado el valor de **x** del vértice se debe calcular el **y** del vértice. Existe una fórmula para obtener dicho valor deducida de la misma función, pero no es necesario estudiar de memoria ninguna fórmula más.

Recordemos que la función y depende de los valores de la variable independiente x, por lo tanto para determinar su valor basta con que se reemplace el valor de x del vértice en la función dada y así obtener el valor de y correspondiente. Entonces: $y_v = a.(x_v)^2 + b(x_v) + c$

Retomando el ejemplo es:

$$y_v = (9)^2 - 6.3 + 5$$

$$y_v = 9 - 18 + 5$$

$$y_v = -4$$

Así, el punto vértice de la parábola es: (3; -4).

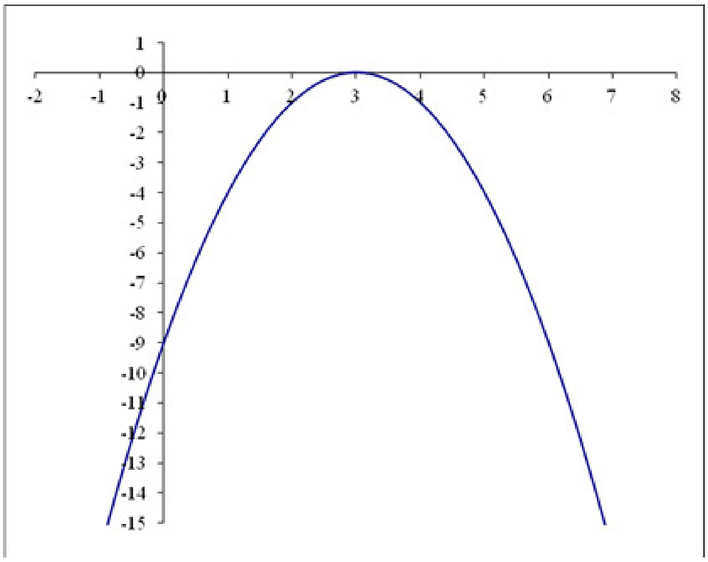
Para pensar y reflexionar

¿Qué importancia tiene el punto vértice de la parábola? ¿Qué relación guardan las ramas de la parábola respecto de una recta vertical (paralela al eje **y**) que pasa por ese punto vértice? ¿Qué entendemos por eje de simetría?

Si observamos el gráfico veremos que las ramas de la parábola son simétricas con respecto a su eje de simetría.
Luego, con sólo ubicar unos pocos puntos se puede esbozar el grafico (a mano alzada) de una función de segundo grado con bastante precisión.

b) $y = -x^2 + 6x - 9$

Tiene por gráfica:



Verifiquemos los puntos que a continuación se detallan:

$x_1 = 3$
$x_2 = 3$ Raíces reales e iguales.

a= -1 (coeficiente principal negativo).

$x_v = 3$
$y_v = 0$ Coordenadas del punto vértice.

Para pensar y reflexionar

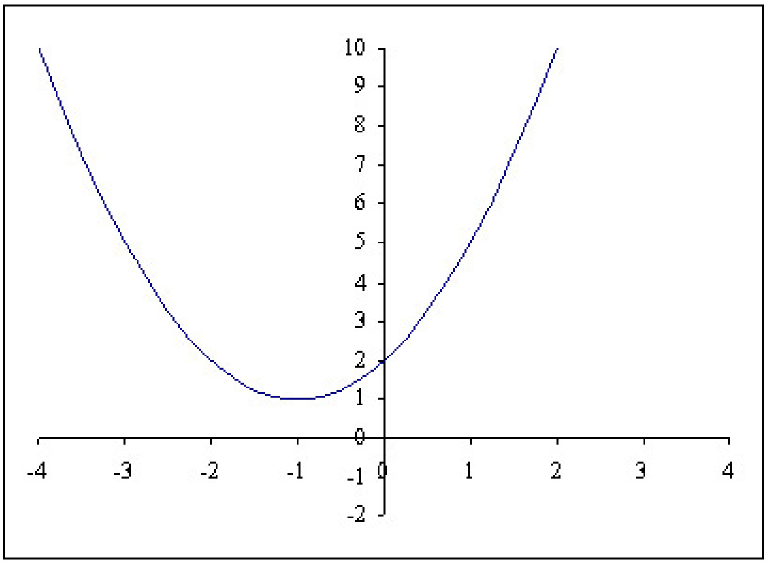
¿Qué conclusión podemos obtener respecto de la naturaleza de las raíces de la función y el punto vértice de la parábola? ¿La gráfica corta al eje x en ese punto? ¿Qué sucede con el discriminante de la ecuación de segundo grado asociada a la función?

Como podemos ver, **las ramas de la parábola son hacia abajo** debido a que el **coeficiente principal** es **negativo**.
¿Qué sucede con el punto de corte al eje x?
La **función** no corta al eje, sino que lo **toca y se vuelve**. Esta característica de la función de segundo grado se da cuando la misma tiene **raíces dobles**, es decir que la raíz es dos veces el mismo valor. Como las raíces de la función son reales e iguales, el discriminante de la función en dicho caso es igual a cero:

$$b^2 - 4.a.c =$$
$$36 - 4.(-1).(-9) = 0$$

Una característica de las funciones de segundo grado, que presentan raíces reales e iguales, es que estas coinciden con el **x** del vértice de la parábola e **y** del vértice siempre es cero.

c) $y = x^2 + 2x + 2$



Analiza, los puntos que se detallan a continuación.

$x_1 = -1 + i$
$x_2 = -1 - i$ Raíces complejas conjugadas.

a = 1 coeficiente del término de mayor grado positivo.

$x_v = -1$
$y_v = 1$ Coordenadas del punto vértice.

En los casos en que la función no corta ni toca, al eje de las abscisas **x**, puede ser necesario confeccionar una tabla de valores para aproximar el gráfico, como se muestra a continuación:

x	y
0	2
1	5
-2	2

Este es uno de los pocos casos en que se aconseja confeccionar una tabla.

Para pensar y reflexionar

¿Qué podemos concluir respecto de la gráfica y la naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado asociada a la función?

Esta gráfica no corta ni toca el eje de las x porque no tiene raíces reales. Se dice entonces que **la parábola vuela por arriba o por debajo del eje de abscisa** cuando las **raíces** son **complejas conjugadas**. Por lo tanto, el discriminante de la ecuación asociada es menor que cero. Compruébalo tú mismo!

Para pensar y reflexionar

Comparemos los ítems entre sí para establecer una relación entre la gráfica de la función y la naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado asociada a la misma. Analicemos el signo del coeficiente de mayor grado con el comportamiento de las ramas de la gráfica correspondiente.

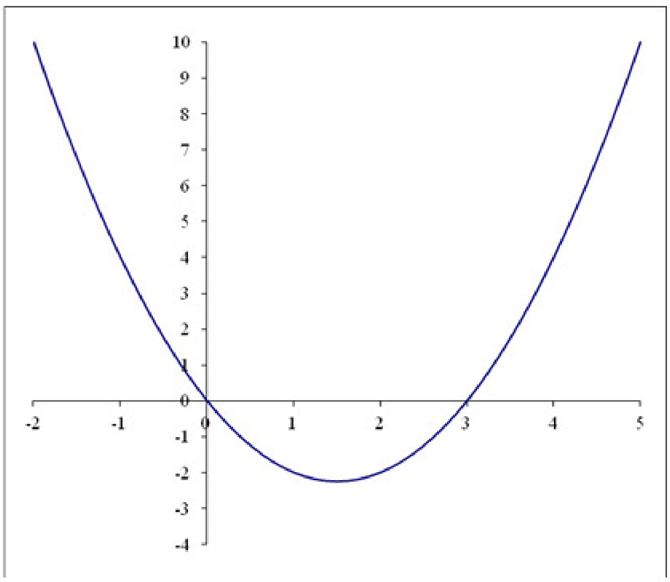
Actividad

Intentemos realizar un cuadro sinóptico que relacione todos los elementos analizados con el tipo de gráfica que corresponda. ¡Vamos! ¡Contamos con la capacidad para hacerlo!

CASOS PARTICULARES DE LA FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

Los ejemplos proporcionados a continuación tienen por objetivo analizar exhaustivamente, para elaborar nuestras propias conclusiones.

a) $y = x^2 - 3x$



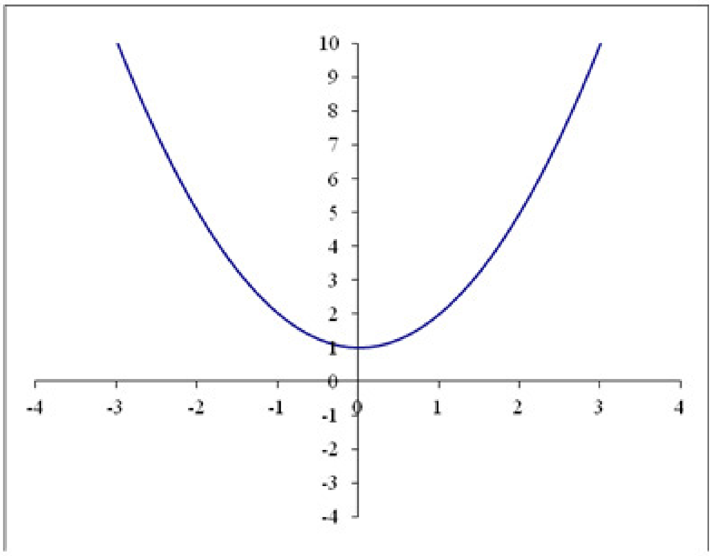
Para realizar el análisis correspondiente tengamos en cuenta:

- El signo de “a”
- ¿cuáles son las raíces de la función?
- las coordenadas del punto vértice
- ¿qué sucede con el término independiente?

Utilicemos también todos los conocimientos para trabajar la forma incompleta de la ecuación de segundo grado, asociada a la función, y determinar las raíces sin la utilización de la fórmula de Bascara o de la resolvente.
¡Vamos con el análisis!

Al ser el coeficiente principal positivo, las ramas de la parábola van hacia arriba.
El término independiente es igual a cero, el corte con el eje y debe ser cero.
A su vez las raíces (o ceros) de la función son 0 y 3, valores en los cuales la función corta al eje de las x, por ser reales y distintas.

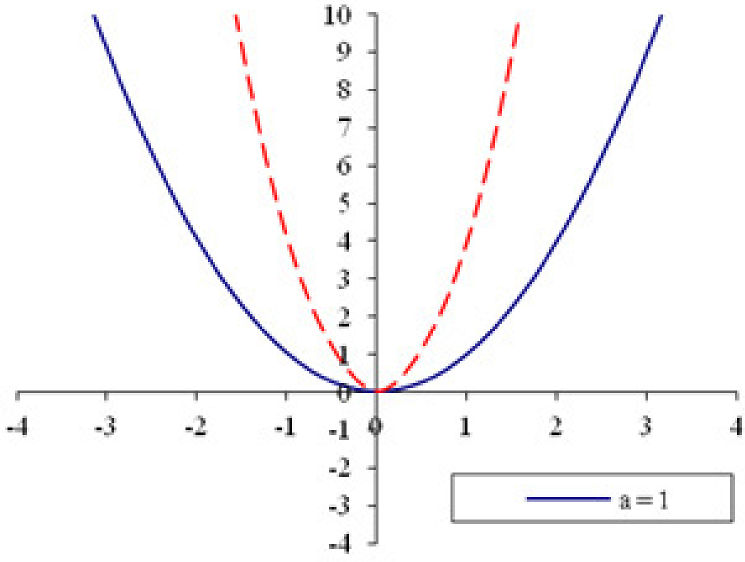
b) $y = x^2 + 1$



Podemos apreciar que esta función es también incompleta. ¿Cuál es el término que falta? Realicemos todos los razonamientos necesarios para justificar la gráfica que presenta.

c) $y = x^2 \quad \wedge \quad y = 4x^2$

Con estos ejemplos muy particulares de la función de segundo grado, vemos cómo se pueden analizar las diferentes parábolas que tienen como vértice el origen del sistema de coordenadas, de acuerdo al valor del coeficiente principal “a”.
No olvidemos tener presente cada uno de los elementos brindados en párrafos anteriores, eso nos ayudará a sacar las conclusiones para cada gráfico



Para pensar y reflexionar

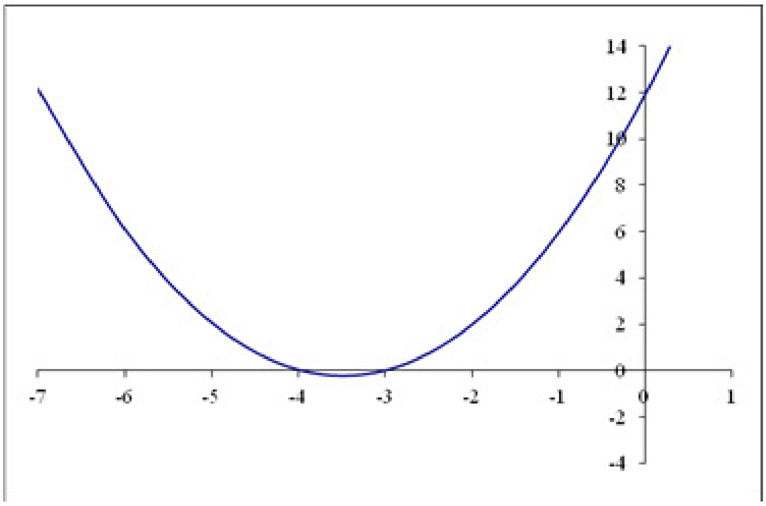
¿Qué efecto produce en la gráfica un incremento del coeficiente principal?

Podemos apreciar en el gráfico que cuando el coeficiente principal es mayor a uno, la parábola es más cerrada y las ramas se acercan más al eje de las y. ¿Qué ocurre si el coeficiente principal es menor a uno? ¿Cómo sería el comportamiento de las ramas de la parábola si la compara con las de $y = x^2$? Intentemos llegar a una conclusión, planteando un ejemplo cualquiera.

Al igual que en las otras funciones en las que el término independiente es cero, esta función corta el eje **y** en cero. Las raíces de ésta función son: x 1 = 0 y x 2 = 0, por lo tanto al ser una raíz doble no corta al eje de las **x**, sino que "toca" al eje, y además es el vértice de la parábola.

RECONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO A PARTIR DEL GRÁFICO.

El objetivo que se persigue ahora es lograr el modelo matemático que corresponde a una curva planteada. Por ejemplo:



Para pensar y reflexionar

¿Cómo debemos razonar para que a partir de este gráfico, obtengas la función de segundo grado o modelo matemático correspondiente?

En muchas oportunidades, sobre todo cuando se trabaja con datos concretos obtenidos a partir de la realidad, se grafican esos datos y a partir de la curva obtenida, se trata de encontrar un modelo matemático que la represente. Por lo tanto es importante que conozcamos y que manejemos los razonamientos apropiados para tal fin.

Una manera de comenzar a razonar desde la curva al modelo matemático es a partir de funciones ya conocidas como la función lineal y la función cuadrática. Para hacerlo es necesario identificar los puntos conocidos del gráfico y a partir de allí comenzar a relacionarlos con los conceptos que corresponden a la función cuadrática.

En este grafico en particular se visualizan las raíces de la ecuación y el término independiente. Entonces, los datos que se pueden obtener desde la curva son:

$$c = 12$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -4$$

A partir de la forma factorizada de la ecuación de segundo grado:

$$y = a(x - x_1).(x - x_2)$$

Se puede reconstruir la función.

Se debe tener presente que el valor de "a", es decir el coeficiente principal, no se conoce, pero es factible determinar cuál es su valor por las propiedades de las raíces, que sí conocemos y el valor del término independiente **"c"**. Es decir:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(-3).(-4) = \frac{12}{a}$$

$$a = \frac{12}{12}$$

$$a = 1$$

Reemplazando el valor de "a" y las raíces en la expresión factorizada, según corresponda, y efectuando las operaciones indicadas se llega al modelo polinómico de la función dada.

$$y = 1.[x-(-3)][x-(-$$
$$y = (x+3).(x+4)$$
$$y = x^2 + 4x + 3x + 12$$
$$y = x^2 + 7x + 12$$

$$\downarrow$$

Esta es la forma polinómica o **modelo matemático** correspondiente a la curva dada.

Para pensar y reflexionar

¿Cuál sería otra manera de resolverlo?
¿Podría ser a partir de las propiedades de las raíces...? Si puede ser, recordemos entonces que:

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}} \qquad \boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Los datos siguen siendo los mismos:

$$c = 12$$
$$x_1 = -3$$
$$x_2 = -4$$

Utilizando la propiedad del producto de las raíces, se determina el valor de **"a"**, como en el caso anterior. Una vez determinado **"a",** con la propiedad de la suma de las raíces, se puede determinar el coeficiente **"b"**. Es decir:

$$-3-4 = \frac{-b}{1}$$
$$-7 = -b$$
$$b = 7$$

Reconstruyendo la función a partir de la determinación de sus coeficientes, la función es: $\boxed{y = x^2 + 7x + 12}$

Revisemos el procedimiento utilizado para resolver el ejercicio y tratemos de resolver la ejercitación que se ofrece en las actividades pertinentes.

Despues de tan arduo trabajo, compartimos otro pensamiento:
"Los libros no piensan por nosotros, son instrumentos que nos hacen pensar".

Actividad individual

ACTIVIDADES DE EJERCITACIÓN Y PROBLEMAS DE LA CLASE 7

1. Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 9 = 0$ — $Rta: \ x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = -3$

b) $x^2 - 5 = 0$ — $Rta: \ x_1 = \sqrt{5} \quad \wedge \quad x_2 = -\sqrt{5}$

c) $3x^2 + x = 0$ — $Rta: \ x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

d) $12x^2 + 4x = 0$ — $Rta: \ x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2}x^2 = 0$ — $Rta: \ x_1 = o \quad \wedge \quad x_2 = 0$

f) $x^2 - x - 6 = 0$ — $Rta: \ x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = -3$

g) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ — $Rta: \ x_1 = \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{3}{2}$

h) $x^2 + 36 = 0$ — $Rta: \ x_1 = 6i \quad \wedge \quad x_2 = -6i$

2. Dada la siguiente ecuación: $2 - 3\ x = 2x\,(x - 2)$, indicar la respuesta correcta:

a) Tiene dos raíces reales e iguales.
b) Tiene dos raíces reales y distintas.
c) Tiene dos raíces complejas conjugadas.
d) Ninguna de las anteriores.

3. Factorear las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 81 = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

c) $-2x^2 - 8x - 8 = 0$

d) $-x^2 + 2x - 1 = 0$

e) $x^2 - 2x - 3 = 0$

f) $x^2 + 12 + 7x = 0$

4. Reconstruir la ecuación de segundo grado, según corresponda, en cada caso:

a) $x_1 = ½ \quad x_2 = 2$

b) $x_1 = 4 \quad x_2 = 1$ coeficiente del término de mayor grado: a = 1/3

c) $x_1 . x_2 = 9/5$ y $x_1 + x_2 = - 3/5$

d) $x_1 = 2$ y $2x^2 - 16x + c = 0$ entonces: c = ?

e) $x_1 = 2$; $x_2 = -3$ y $4x^2 + bx - 24 = 0$ entonces: b = ?

5. Resolver los siguientes ejercicios de acuerdo a las premisas de cada caso:

a) Para que la ecuación: 3.x2 + 2 x + c = 0 tenga 2 raíces reales y distintas, qué valor debe tomar c?

b) Para que la ecuación $\frac{1}{2}x^2 + b.x + 2 = 0$ tenga 2 raíces reales e iguales, qué valor debe tomar b?

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3}{2x-1} - \frac{3}{2x+1} = \frac{3+8x-x^2}{1-4x^2}$ $\quad Rta: \; x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = 9$

b) $\frac{2}{x-4} - \frac{4}{x+2} = \frac{x^2-7x}{-x^2+2x+8}$ $\quad Rta: \; x_1 = 4 \quad \wedge \quad x_2 = 5$

c) $\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{x^2 + 10 - \frac{7}{2}x}{x^2 - 9}$ $\quad Rta:\ x_1 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x_2 = 4$

d) $\frac{x-2}{x+1} + \frac{x-3}{x-1} = 1$ $\quad Rta:\ x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 5$

e) $\frac{2x-3}{1-x} + \frac{4x-4}{x-1} = 1 + x$ $\quad Rta:\ x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2$

f) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2 - 6x + 25}{(x+2)(x-1)}$ $\quad Rta:\ x_1 = -10 \quad \wedge \quad x_2 = 2$

7. Resolver los siguientes problemas con el planteo correspondiente.

a) El producto de dos números consecutivos, menos 30 es igual a 12. ¿Cuáles son esos números?
Rta: 6 y -7

b) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado disminuido en 20 es igual a 8 veces ese número?
Rta: 10 ó -2

c) El producto de dos números consecutivos es 240. ¿Cuáles son esos números?
Rta: 15 y 16 ó -15 y -16

d) El producto de dos números consecutivos pares es 360. ¿Cuáles son esos números?
Rta: 18 y 20

8. Graficar las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 + 2x + 8$

b) $y = x^2 + 2x$

c) $y = -x^2 + 36$

d) $y = x^2 - 3$

e) $y = -x^2 + 4x + 4$

f) $y = x^2 + 2x + 1$

g) $y = \frac{1}{2}x^2$

h) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

9. Si una función cuadrática f(x) = a x2 + b x + c; se anula (corta al eje x) para dos valores reales y distintos, indicar cuál de las siguientes afirmaciones son ciertas.

a) b > 4.a.c
b) b2 > 4.a.c
c) b2 < 4.a.c
d) b < 4.a.c
e) Ninguna de las anteriores.

10. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, para la función cuadrática: f(x) = 4 x2 – 5 x + 7

a) Pasa por el punto (7 ; 0)
b) No corta al eje de las ordenadas.
c) No corta al eje de las abscisas.
d) El vértice se encuentra en (5/2; 19/2)
e) Ninguna de las anteriores.

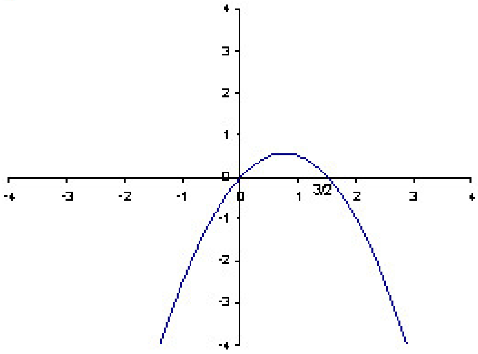
11. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para la función: f(x) = x2 – 4x + 4

a) Los ceros de la función son para: $x_1 = x_2 = -2$
b) Corta el eje de las ordenadas en : - 4
c) Las ramas de la parábola son hacia arriba.
d) Pasa por los puntos: (-2 ; 0) y (2; 0)
e) a y b son correctas.
f) a y c son correctas.
g) Ninguna de las anteriores.

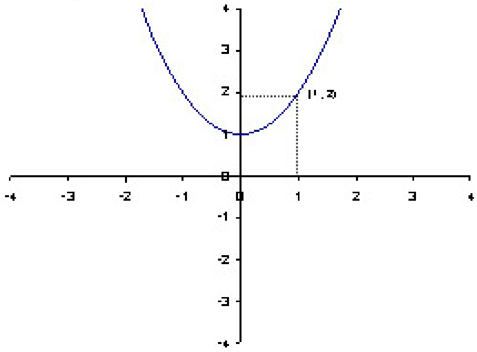
12. En la función cuadrática: $f(x) = a\,x^2 + 18\,x + 27$, , el producto de sus raíces es 9 y la suma de sus raíces es – 6. Determinar el valor de **a**.

13. Identificar los siguientes gráficos explicitando la función cuadrática:

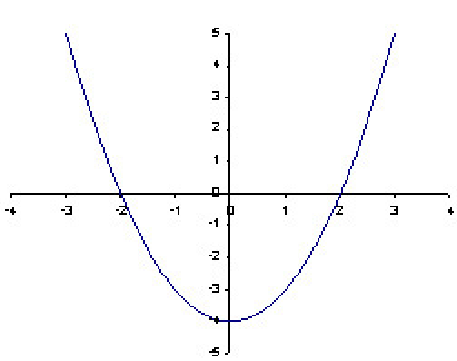
a)



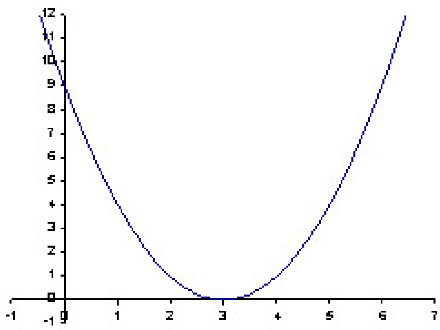
b)



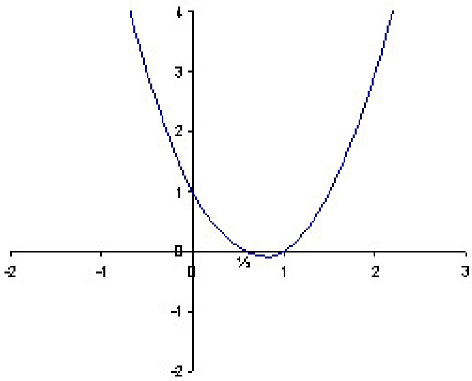
c)



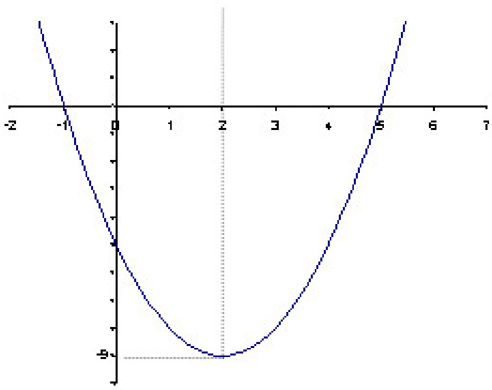
d)



e)



f)



14. Representar gráficamente la función luego de reconstruirla a partir del cuadro.

f (2)	*f (4)*	*f (0)*	*Vértice*
0	0	16	

Palabras de cierre

Estimados estudiantes, estamos prácticamente terminando este recorrido que iniciamos juntos hace ya siete encuentros. Tratemos, dentro de nuestras posibilidades y esfuerzo, de revisar los temas trabajados para salvar todas las dudas que se presenten y así lograr un examen final con éxito, ¡¡¡tal como se lo merecen!!!

¡Suerte y adelante!

¡Nos vemos!

Clase 8

Ecuación y función exponencial y logarítmica

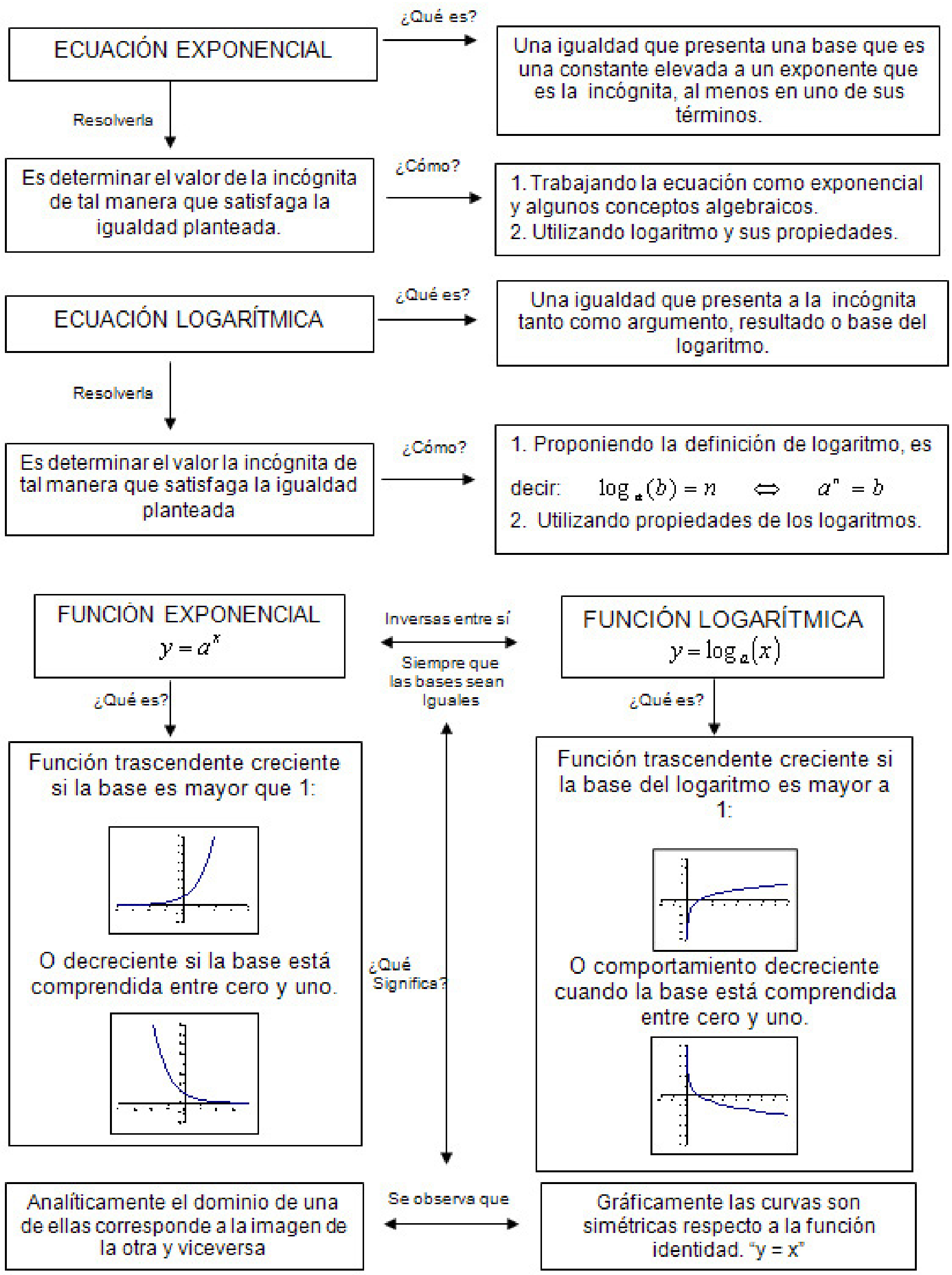
Objetivos específicos.

- Comprender el concepto de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Afianzar la destreza en la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Reconocer una función exponencial creciente ó decreciente.
- Reconocer una función logarítmica creciente ó decreciente.
- Graficar funciones exponenciales y logarítmicas.
- Utilizar la terminología adecuada.
- Interpretar consignas.
- Lograr estima entre compañeros y docente

Contenidos

- Ecuaciones exponenciales.
- Ecuaciones logarítmicas.
- Propiedades de los logaritmos.
- Función exponencial.
- Función logaritmo.
- Actividades individuales de ejercitación y problemas.
- Palabras de cierre.

Esquema conceptual de la vinculación de los contenidos de la Clase 7:



Ecuaciones exponenciales

A partir de los siguientes ejemplos, analicemos detenidamente y tratemos de indicar por qué a este tipo de ecuaciones se las denomina exponenciales.

a) $3^x = 1$ b) $2^{-x} = \frac{1}{4}$

c) $5^x - 25 = 0$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 20$

Para pensar y reflexionar

¿Tienen estas expresiones algebraicas elementos comunes entre sí? Si eso ocurre, ¿guardan una ubicación determinada?

Veamos... cada una de las igualdades anteriores presentan algo en común, básicamente en lo relacionado con la ubicación de la variable independiente. En todas, además, dicha variable se encuentra como exponente en alguno de sus términos, con la característica que su base es una constante, es decir un número real. Por esa estructura algebraica es que a estas ecuaciones se las denomina **exponenciales** y están comprendidas dentro de un grupo de funciones que se denominan **trascendentes**.

Importante

Resolver una ecuación exponencial supone determinar el valor de la variable independiente x tal que la igualdad se cumpla, como ocurre con cualquier tipo de ecuación.

Para encontrar la solución en el ejemplo a), resulta evidente el valor de **x,** ya que la pregunta sería: ¿A qué valor se debe elevar la base 3 para que el resultado sea "uno"?

Importante

Recordemos que todo valor elevado a la potencia cero es igual a uno, "salvo el cero", ¡es decir 0^0 !

En el ejemplo b), la pregunta a plantear sería la misma que en a). Lo que ocurre es que la respuesta no es tan obvia. Tengamos presente que cuando el exponente es negativo, indica que se debe invertir la base. Por lo tanto la ecuación que queda es:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$$

De donde se puede deducir entonces que x = 2

En los ejemplos c) y d) se debe tener en cuenta, además, otros conceptos algebraicos. Entonces, siempre que se desee determinar el valor de una incógnita, ésta debe ser despejada en función de los otros términos que presente la igualdad planteada. En particular, cuando se trata de ecuaciones exponenciales, el término exponencial debe ser despejado hacia un miembro de la igualdad.

Además, las ecuaciones deben considerarse como un todo, respetando los conceptos elementales del álgebra que en estos casos en particular, responden a la suma algebraica. Por lo tanto, primero despejamos y luego resolvemos el término exponencial, bajo la misma consigna de los casos anteriores.

Observemos y analicemos:

$a)\quad 5^x - 25 = 0$

$5^x = 25$

$x = 2$

$b)\quad \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 20$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 20 - 4$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$

$x = -2$

Aún cuando las ecuaciones sean exponenciales, siempre se deben tener en cuenta los conceptos generales del álgebra.

Examinemos la siguiente ecuación:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x .(4)^{2x} = (16)^{x+2}$

Como podemos ver, esta es también una ecuación exponencial, sólo que su estructura algebraica es un poco más compleja. Para poder resolverla, primero se deben transformar todos los términos exponenciales en términos equivalentes a los planteados para que todos tengan la misma base entre ellos.

Analicemos: $(2)^{-x}\left((2)^2\right)^{2x} = \left((2)^4\right)^{x+2}$

En el primer factor de la ecuación se invirtió la base, cambiándole el signo al exponente (propiedad algebraica). A la base 4 del otro factor lo expresamos como potencia de 2. Lo mismo ocurrió con la base 16 del otro término de la igualdad, que lo expresamos como potencia de 2. De esta manera, se logra el primer objetivo que era transformar todos los términos exponenciales expresados en una misma base. El próximo paso es resolver estas "potencias de potencias", según corresponde, aplicando otro concepto algebraico. ¿Recordamos cómo se resuelven las potencias de potencias? ¡Sus exponentes se multiplican entre sí!

Observemos y analicemos:

$$(2)^{-x}.(2)^{4x} = (2)^{4(x+2)}$$
$$(2)^{-x}.(2)^{4x} = (2)^{4x+8}$$

En el primer miembro de la igualdad, se presenta ahora, otro concepto algebraico. Es un producto de potencias de igual base. ¿Cómo se resuelven los productos de igual base? ¡Los exponentes se suman!
Observemos y analicemos:

$$(2)^{-x+4x} = (2)^{4x+8}$$
$$(2)^{3x} = (2)^{4x+8}$$

Para pensar y reflexionar
Si en una igualdad las bases de los dos términos son iguales, para que la igualdad se mantenga, ¿Cómo deben ser los exponentes entre si?

Entonces:
$$3x = 4x + 8$$
$$3x - 4x = 8$$
$$-x = 8$$
$$x = -8$$

Podemos apreciar que para resolver una ecuación exponencial debemos tener en cuenta muchas operaciones algebraicas. ¡No lo olvidemos!
Un poco más adelante contamos con algunas ecuaciones de estas características, ¡para que podamos practicar!

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Antes de plantear las ecuaciones de este tipo es importante que tengamos presente cómo se resuelve aritméticamente el logaritmo de un número. Observemos y analicemos:
$$\log 10 = 1$$
$$\log 100 = 2$$

La base de este logaritmo es 10. Por esa razón se denominan logaritmos decimales. Para llegar al resultado de cada una de las igualdades anteriores debes: elevar la base del logaritmo al resultado para obtener, el argumento del mismo.
Es decir:
$$(10)^1 = 10 \quad \Rightarrow \quad \log 10 = 1$$
$$(10)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad \log 100 = 2$$

Cuando la base es distinta de 10, esta debe expresarse como subíndice, para dejarla explicitada. La manera de interpretación del logaritmo de un número, cualquiera sea su base, es la misma.
Miremos detenidamente el ejemplo y razonemos:

$$\log_2(8) = 3 \quad \Rightarrow (2)^3 = 8$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(81) = -4 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$$

Existe un logaritmo muy particular que lo utilizan todas las ciencias, se denomina **logaritmo neperiano** o natural y se simboliza **Ln**. Este logaritmo tiene como base a un número irracional que se simboliza “e”. Su valor aproximado es 2,71. Pero en realidad nunca se lo expresa como cantidad si no por su símbolo. Por ejemplo:

$$Ln(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (e)^0 = 1$$

$$Ln(e) = 1 \quad \Rightarrow \quad (e)^1 = e$$

Podemos ver que nada cambia, es simplemente un logaritmo que tiene su propia simbología. Por lo tanto, se debe interpretar de igual manera que cualquier otro logaritmo, en cualquier base.

$$\log_a(b) = n \longrightarrow \text{Resultado}$$

b → Argumento del logaritmo

a → Base del Logaritmo

Importante

Entonces, tengamos presente que la base del logaritmo elevada al resultado del mismo es igual a su argumento. Este es el concepto fundamental a tener en cuenta para poder resolver las ecuaciones logarítmicas.

Para pensar y reflexionar

Si analizamos este concepto, podemos ver que el argumento de un logaritmo “no” puede ser negativo ni igual a cero. ¿Por qué? Sólo se pueden calcular logaritmos de números positivos mayores a cero.
Otro aspecto a tener en cuenta es que la base de los logaritmos sólo pueden ser positivas, mayores a cero y distintos de uno. ¿Por qué?

Para resolver los interrogantes planteados, reflexionemos sobre la definición de logaritmo, elaboremos un caso y prueba a ver qué ocurre cuando busquemos la solución al problema.
Otros conceptos que debemos tener en cuenta cuando trabajamos con logaritmos, cualquiera sea su base, son sus propiedades.

Propiedades de los logaritmos

1) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los factores.

$$\log_a(B.C) = \log_a B + \log_a C$$

2) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a\left(\frac{B}{C}\right) = \log_a B - \log_a C$$

3) El logaritmo de una potencia es igual a la potencia por el logaritmo de la base.

$$\log_a (B)^C = \quad C.\log_a B$$

4) Cuando en una potencia, el exponente es el logaritmo en la misma base, entonces es igual al argumento del logaritmo.

$$(a)^{\log_a (B)} = B$$

Ejemplos:

$$(10)^{\log(2)} = 2$$

$$(e)^{\ln 8} = 8$$

No interesa cuál sea la base del logaritmo, todos cumplen con estas propiedades. Observemos que no figura una propiedad para cuando el argumento es la raíz, ya sea de índice par o impar. Esto se debe a que las raíces pueden expresarse como potencia fraccionaria y por lo tanto se puede utilizar la misma propiedad de la potencia.

Observemos y analicemos los siguientes ejemplos de aplicación, de las propiedades enunciadas.

- $\log_8\left(x^2.\sqrt[3]{y}\right) = \log_8\left(x^2 y^{\frac{1}{3}}\right) = \log_8 (x)^2 + \log_8 (y)^{\frac{1}{3}} = 2.\log_8 x + \frac{1}{3}\log_8 y$

- $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{z^2}{y}\right)^3 = 3.\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{z^2}{y}\right) = 3.\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(z^2\right) - \log_{\frac{1}{5}} y\right] = 3.\left[2.\log_{\frac{1}{5}} z - \log_{\frac{1}{5}} y\right]$

- $2^{\log_2 (x.y)} = x.y$

- $\frac{2}{3}.(\ln x - \ln y) = \frac{2}{3}\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right] = \left[\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right]^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2}$

Observemos que las propiedades son igualdades, por lo tanto pueden trabajarse en ambos sentidos.

Recién ahora estamos en condiciones de plantear ecuaciones logarítmicas, después de un breve repaso sobre conceptos y propiedades generales.

Veamos y analicemos:

a) $\log_5(125) = x$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x) = -3$

c) $\log_x(16) = 4$

Si lo miramos detenidamente y comparamos los ejemplos entre ellos, podremos visualizar que la incógnita **x** se encuentra en diferentes posiciones en cada uno de ellos. En el caso a) la incógnita **x** está como resultado del logaritmo. En el caso b), como argumento del logaritmo y en el caso c), como base del logaritmo.

Importante

Sin embargo…para determinar su valor numérico se debe utilizar siempre la definición de logaritmo: la base del logaritmo elevada a su resultado es igual al argumento.

a) $\log_5(125) = x \quad \Rightarrow \quad (5)^x = 125$

$x = 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x) = -3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = x$

$x = 8$

c) $\log_x(16) = 4 \quad \Rightarrow \quad (x)^4 = 16$

$x = 2$

Cuando las ecuaciones son además expresiones algebraicas, se debe tener en cuenta las propiedades del logaritmo, los conceptos y operaciones algebraicas para llegar al resultado correcto.

Observemos y razonemos:

$$4.\log_4 2 = \log_4(x-2)$$

$$\log_4 2^4 = \log_4(x-2)$$

$$2^4 = x-2$$

$$64 = x-2$$

$$x = 62$$

Tengamos en cuenta que en ambos miembros de la igualdad el logaritmo es de la misma base, sólo porque son de igual base, se pueden igualar sus argumentos.

Para familiarizarnos con el logaritmo neperiano miremos otro ejemplo:

$$\ln(x+1) = 2$$
$$e^2 = x+1$$
$$e^2 - 1 = x$$

Podemos notar que el número **e** se deja expresado, no se calcula numéricamente, salvo casos necesarios.

Ahora que hemos trabajado con ecuaciones logarítmicas, volvamos a las ecuaciones exponenciales que dijimos, también se pueden resolver utilizando logaritmo y sus propiedades.

Retomamos los ejemplos anteriores.

a) $3^x = 1$ b) $2^{-x} = \dfrac{1}{4}$

c) $5^x - 25 = 0$ d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x + 4 = 20$

Tengamos presente que siempre debemos trabajar con una base del logaritmo que sea múltiplo de la base de la exponencial.

Para el ejemplo a), tomamos logaritmo en base 3, en ambos términos de la igualdad y para el ejemplo b) tomamos logaritmo en base 2 en ambos miembros. Recordemos que la igualdad debe mantenerse, por lo tanto toda modificación siempre debe hacerse en ambos términos.

$a)\ \log_3(3^x) = \log_3 1$

Aplicando propiedad de la potencia del logaritmo en el primer término y resolviendo el logaritmo en el segundo término, nos queda:

$$x.\log_3 3 = 0$$
$$x.1 = 0$$
$$x = 0$$

$b)\ 2^{-x} = \dfrac{1}{4}$

$$\log_2(2^{-x}) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right)$$

Hemos aplicado propiedad del logaritmo del cociente. Pero también se podría haber resuelto: $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2$

$$-x.\log_2(2) = \log_2(1) - \log_2(4)$$
$$-x.1 = o - 2$$
$$x = 2$$

En el ejemplo c), el logaritmo ¿en que base debemos aplicar en ambos miembros? La respuesta se visualiza en la solución:

$c)\quad 5^x - 25 = 0$

> Primero debemos despejar el término exponencial y luego aplicar logaritmo en ambos miembros y resolver según corresponda.

$$5^x = 25$$
$$\log_5\left(5^x\right) = \log_5(25)$$
$$x.\log_5(5) = \log_5(25)$$
$$x.1 = 2$$

Y para el ejemplo d), ¿qué puede ser prudente plantear?

$d)\quad \left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 20$

> Veamos y analicemos este ejemplo y tratemos de indicar qué operaciones se realizaron, con lenguaje apropiado.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 20$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 20 - 4$$
$$\log_4\left(\frac{1}{4}\right)^x = \log_4(16)$$
$$x.(-1) = 2$$
$$x = -2$$

A continuación tenemos algunas ecuaciones para que al resolverlas reforcemos todos estos contenidos. ¡Adelante!

Actividad

$a)\quad \log_2(x+3) = -1$ — *Rta* : $-5/2$

$b)\quad \ln(10x+5) - \ln(4-x) = \ln 2$ — *Rta* : $1/4$

$c)\quad 3^x 2^{3x} = 4$ — *Rta* : 0,4362

$d)\quad \left(2^x\right)^x = 25$ — *Rta* : 2,155

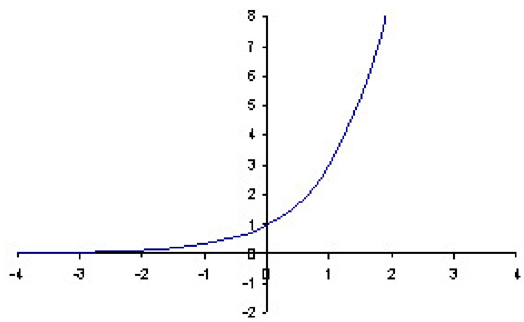
FUNCIÓN EXPONENCIAL

La expresión: $y = a^x$ representa una función exponencial, ya que la variable independiente es el **exponente** de la constante **a**. Por lo tanto, una función exponencial es aquella que presenta: base constante y exponente variable. El conocimiento de estas funciones y la interpretación de su gráfica son necesarios, debido a que muchos modelos tanto en economía como en ingeniería, se relacionan con este tipo de funciones.
Para llegar a determinar el comportamiento (tipo de curva) que presentan en general estas funciones, comenzamos planteando ejemplos y a partir de adjudicarle diferentes valores a la variable independiente, se determinan los valores que asume la variable dependiente o función **y**. De esta manera podemos ir construyendo una tabla de valores para ambas variables y con esos pares ordenados construir el gráfico correspondiente.

Veamos detenidamente, y reflexionemos con los siguientes ejemplos.

a) $y = 3^x$

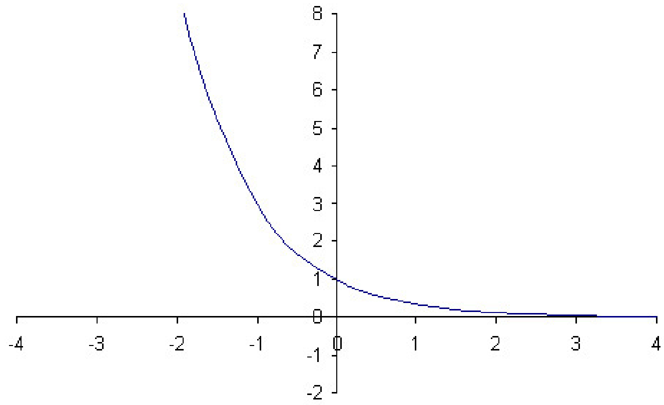
x	y = 3^x
-5	0,00411523
-4	0,01234568
-3	0,03703704
-2	0,11111111
-1	0,33333333
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243



Podemos observar que esta función es **creciente.** Es decir, a medida que los valores de **x,** variable independiente, aumentan, la función **y** también crece. Esta característica se cumple siempre que **la base** de la función es **mayor que uno.**
Observemos el punto de corte de la curva al eje de ordenadas: ¿Qué valor asume la variable independiente **x**?
A partir del gráfico, se puede determinar el dominio e imagen de la función.
Tengamos presente los conceptos analizados en la función lineal.
Entonces:
El dominio de la función está formado por el conjunto de los números reales, en símbolo: $D = \Re$; y la imagen por el conjunto de números reales mayores que cero, en símbolo: $I = \Re \rangle 0$

b) $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

Recordemos que cuando el exponente es negativo, se debe invertir la base de la función exponencial, debido a que no existen funciones exponenciales, con exponentes negativos.



Veamos que esta función es **decreciente**, es decir, a medida que los valores de **x,** variable independiente, aumentan; la función **y** disminuye. Esto se debe a que **la base** de la función es **mayor a cero y menor a uno**.
Determinemos el dominio e imagen para esta función.

Para pensar y reflexionar

Examinemos ambos gráficos, y tratemos de elaborar una conclusión, respecto al comportamiento de la función exponencial, en relación al tipo de base en cada una, (mayor a cero y menor a uno) y (mayor a uno). Analicemos y comparemos en ambas funciones el dominio e imagen de las mismas. ¿Cómo son?

A la brevedad y junto al tema que sigue, contamos con ejercitación, ¡para afianzarnos más en estos temas!

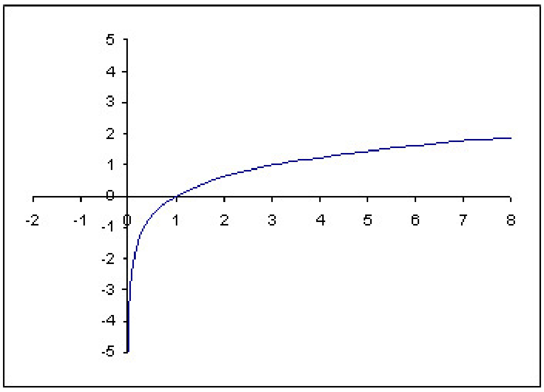
FUNCIÓN LOGARITMO

La expresión: $y = \log_a(x)$ representa la estructura general de una función logarítmica, donde la variable independiente **x** es el argumento de la función. Para despejar la variable **x** se debe recurrir a la definición de logaritmo. Esto es: $a^y = x$

Como podemos ver, la función que se obtiene al despejar **x** es una función exponencial. Por lo tanto se puede inferir que estas funciones son inversas entre sí.

Veamos y examinemos los siguientes ejemplos, teniendo en cuenta la base del logaritmo en cada uno de ellos.

a) $y = \log_3(x)$



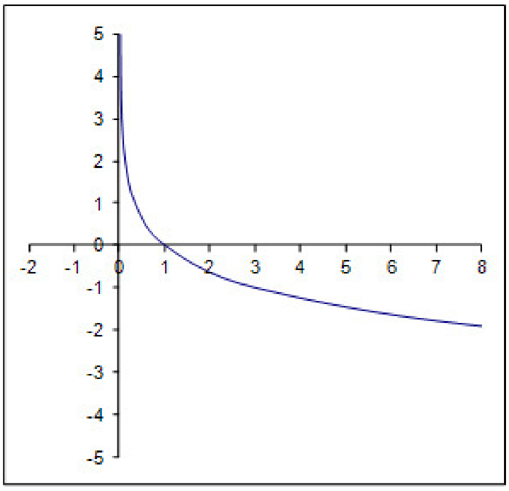
x	y
0,1	-2,09590327
0,3	-1,09590327
0,6	-0,46497352
0,9	-0,09590327
1	0
2	0,63092975
3	1
4	1,26185951
5	1,46497352

A partir del análisis del gráfico y la tabla de valores de esta función, teniendo en cuenta los conceptos correspondientes, (la base del logaritmo elevada al resultado, es igual al argumento del logaritmo) estamos en condiciones de determinar el dominio e imagen de esta función.

Para pensar y reflexionar

¿Cómo es el comportamiento de la función? ¿Es creciente o decreciente? ¿Por qué? ¿Cuál es el dominio e imagen de la función? ¿La función presenta puntos de corte a ambos ejes? ¿Cuál es el punto de corte?

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$



x	y
0,1	2,09590327
0,3	1,09590327
0,6	0,46497352
0,9	0,09590327
1	0
2	-0,63092975
3	-1
4	-1,26185951
5	-1,46497352

Para pensar y reflexionar

Realicemos el mismo análisis que en el gráfico anterior.

Comparemos cada uno de los gráficos y saquemos conclusiones respecto de las bases de cada uno de los logaritmos planteados y su comportamiento gráfico. ¿Qué función es creciente y cuál es decreciente?

Actividad

Intentemos realizar un cuadro conceptual que resuma las características de las funciones exponenciales y logarítmicas (crecimiento-decrecimiento, dominio e imagen), para cuando sus bases están comprendidas entre cero y uno y cuando las bases de ambos son mayores a uno.

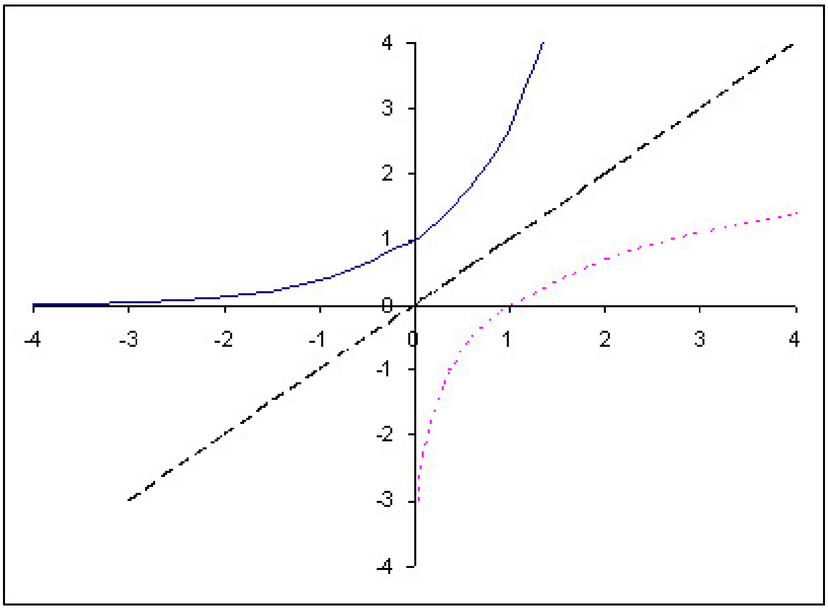
Hemos planteado anteriormente que la función logaritmo es la inversa de la función exponencial y viceversa. Es decir, la función exponencial es inversa de la función logaritmo.

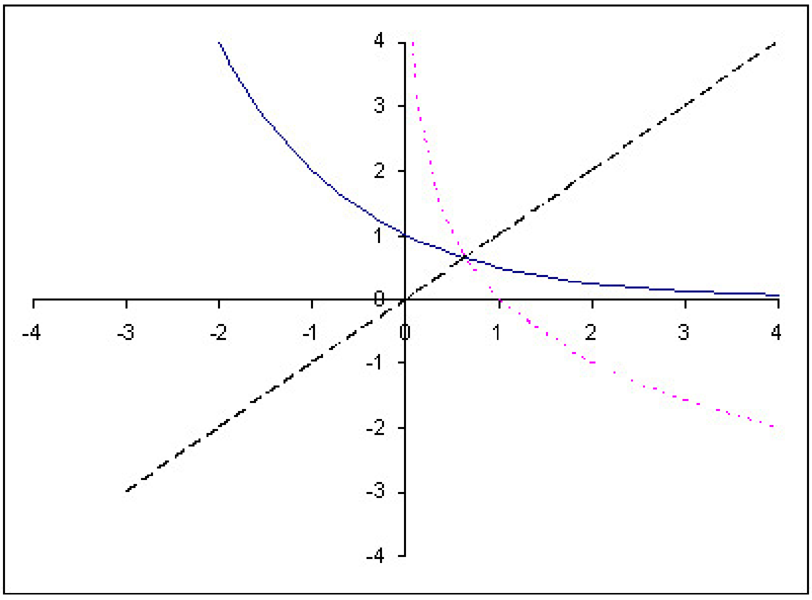
Otro concepto a tener en cuenta en funciones inversas, es que el conjunto dominio de una de ellas, es el conjunto imagen de la otra, y viceversa. La imagen de una función coincide con el dominio de su inversa. Esto se cumple para cualquier tipo de funciones inversas entre sí. No sólo para función exponencial y logarítmica.

Importante

Otra característica de las funciones inversas es que sus gráficos son simétricos respecto de la función identidad: *y = x*

Veamos los siguientes gráficos y elaboremos nuestras propias conclusiones:





El concepto de simetría siempre tiene un referente. En este caso el referente es la función identidad: y = x. Cada uno de los puntos de la curva exponencial equidista de su correspondiente en la curva logarítmica, respecto de esta función identidad.
Si se desea encontrar el modelo matemático que representa a una función inversa a partir de la dada, se debe operar utilizando los conceptos fundamentales de cada una en particular (exponencial – logaritmo).

Para pensar y reflexionar

¿Cómo determinar analíticamente la función exponencial correspondiente a partir de la función logaritmo?

Retomando el ejemplo: $y = \log_3(x)$

Despejamos la variable independiente **x,** basándonos en la definición correspondiente, es decir: $3^y = x$ Esta expresión analítica es la función inversa del logaritmo. Sólo por una cuestión operativa para llevarla al gráfico, sin tener que hacer rotación de ejes, se intercambian las variables entre sí.

Entonces la función inversa es: $y = 3^x$

Importante

Para encontrar una función inversa de otra siempre se debe operar con las mismas consignas, cualquiera sea la función que se trate. Esto es:

- **Despejar la variable independiente, de la función dada utilizando los procedimientos que correspondan.**

- **Una vez despejada la variable independiente, se intercambia esta por la variable dependiente y la expresión resultante es la función inversa correspondiente a la dada.**

Si se procede a graficar ambas en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, estas funciones son siempre simétricas respecto de la función identidad: y = x
Ahora bien, a partir de la función exponencial se quiere determinar su función inversa. Entonces se procede analíticamente, siempre respetando los conceptos correspondientes.

Analicemos el siguiente ejemplo:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Recordemos que para despejar una variable del exponente, el único procedimiento válido, es la utilización del logaritmo de la misma base.

$$\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(y) = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Por propiedades del logaritmo.

$$\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(y) = x.\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(y) = x$$

$$\log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(x) = y$$

En la última igualdad, simplemente se intercambiaron las variables, entre sí. Ahora intentemos encontrar el modelo de la función exponencial dada, a partir de esta función logaritmo, operando analíticamente según corresponda.
Por ejemplo: si en un modelo económico o financiero, existe una variable en el exponente de la función, la única herramienta que permite despejar dicha variable es el logaritmo de su misma base.

$$f_{(m)} = f_{(0)}.[1+i]^m$$

Donde:

$f_{(m)}$: El valor final de un capital inicial, en "m" unidades de tiempo, a una tasa de interés "i".

$f_{(0)}$: Capital inicial

i: es la tasa de interés vigente al momento de la operación financiera
m : unidades de tiempo

Entonces, si se desea despejar de este modelo la variable "m" que figura como exponente, la única herramienta algebraica que lo permite es el logaritmo. Veamos:

$$\frac{f_{(m)}}{f(0)} = [1+i]^m$$

$$\log_{(1+i)}\left(\frac{f_{(m)}}{f(0)}\right) = \log_{(1+i)}[1+i]^m$$

$$\log_{(1+i)}\left(\frac{f_{(m)}}{f(0)}\right) = m.\log_{(1+i)}[1+i]$$

Recordemos que el logaritmo de su misma base es uno. Entonces:

$$\log_{(1+i)}\left(\frac{f_{(m)}}{f(0)}\right) = m$$

El ejemplo es simplemente para ver la utilidad de este concepto en el futuro. En general los análisis financieros y/ o económicos utilizan el logaritmo natural. En el ejemplo, hemos utilizado el logaritmo de la misma base para simplificar los cálculos.
En los ejemplos analizados hasta el momento, el argumento de la función siempre es la variable independiente **x.** Pero ocurre que muchas veces ese argumento puede presentarse como una expresión algebraica y entonces para graficar esas funciones, es importante tener en cuenta el concepto de dominio, puntos de corte a los ejes y el comportamiento que tendrá la curva de acuerdo a si la base del logaritmo es mayor a cero y menor a uno. O bien mayor a uno.
Analicemos la siguiente función: $y = \log_2 (x+1)$
Como podemos apreciar, la base del logaritmo es mayor a uno, entonces se debe tener presente que todas las funciones logarítmicas con base mayor a uno, son crecientes. Esto nos ayuda a tomar una idea previa de cómo debe ser nuestra gráfica.

Por otro lado, determinar el dominio de la función nos lleva a pensar en la definición correspondiente, que en este caso, para que el logaritmo exista, entonces, el argumento del mismo, debe ser mayor a cero. Esto puede escribirse como:

$x+1 \rangle 0$

Entonces el dominio queda representado por: $x \rangle -1$

Es decir: D = $\Re \rangle (-1)$

Para determinar el punto de corte al eje **x**, la función debe valer "cero". Entonces, el argumento del logaritmo debe ser igual a uno, ya que el logaritmo de uno es siempre cero, cualquiera sea su base. Esto es:

$$x+1=1$$
$$x=1-1$$
$$x=0$$

Por lo que el punto de corte corresponde al punto (0, 0), origen del sistema de coordenadas cartesianas.
Teniendo en cuenta todos estos detalles, realicemos una tabla de valores y esbocemos el gráfico para esta función.
Ahora bien, si además se desea establecer y graficar su función inversa, se debe tener en cuenta que una vez graficada la función logarítmica y teniendo en cuenta el concepto de simetría que ellas presentan respecto a la recta y = x; entonces se puede esbozar el gráfico de la función inversa directamente a partir de la función logarítmica, ¡simplemente por simetría respecto a esa recta!

Por otro lado, se puede determinar la función inversa a la dada, en forma analítica, y a partir de allí, realizar el estudio correspondiente a: dominio, puntos de corte, etc y esbozar su gráfico. Es recomendable siempre esbozar ambos gráficos (función dada y su inversa) en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, para apreciar de esa manera su simetría, respecto a la función identidad.

Para determinar la función inversa a partir de una función dada, el procedimiento siempre persigue los mismos objetivos, independientemente de qué función se trate.

Primero, se debe despejar la variable independiente **x** de la función dada, por los procedimientos algebraicos que correspondan. Una vez que se tiene a la variable **x** despejada, por una cuestión de practicidad, se intercambia la variable **x** por la variable dependiente **y.** Esto se realiza directamente, para no hacer rotación de ejes y graficar de acuerdo a los mismos razonamientos de siempre.

Analicemos a partir del ejemplo planteado:

$$y = \log_2 (x+1)$$
$$2^y = (x+1)$$
$$2^y - 1 = x$$
$$2^x - 1 = y$$

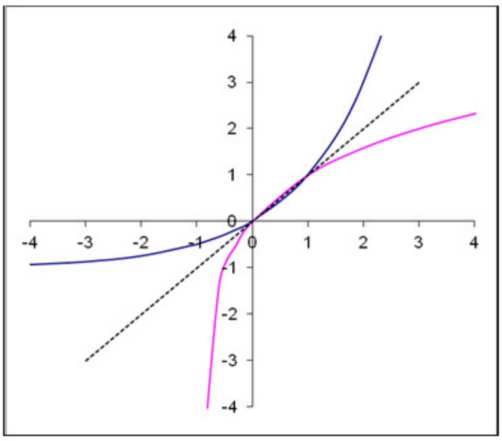
Esta última igualdad, representa en forma analítica, la función inversa a la dada. Como podemos apreciar es una función exponencial, aún cuando su estructura algebraica muestre dos términos. Lo que ocurre es que uno de ellos es una constante que no modificará en forma sustancial el comportamiento exponencial del otro término.

Entonces, a partir del modelo: $y = 2^x - 1$

Actividad

Determinemos dominio, punto de corte a los ejes, etc. Utilicemos los mismos razonamientos de siempre, fundamentados en los conceptos teóricos de cada uno de ellos. Realicemos una tabla de valores para las variables involucradas y grafiquemos la función.

Si realizamos con cuidado y detenimiento todos los pasos indicados, la gráfica de la función dada y su inversa, se debe corresponder a:



Actividad

Analicemos ahora cómo determinar la inversa, a partir de la función exponencial, en forma analítica. El razonamiento es el mismo. Primero se debe despejar la variable independiente y luego intercambiar las variables entre si.

A continuación contamos con la respuesta para que podamos comparar con lo que realizamos:

$$y = 2^x - 1$$
$$y + 1 = 2^x$$
$$\log_2(y+1) = \log_2 2^x$$
$$\log_2(y+1) = x.\log_2 2$$
$$\log_2(y+1) = x$$
$$\log_2(x+1) = y$$

Como se puede apreciar se llega a la misma función anterior, ya que ellas ¡son inversas entre sí!

Actividad Individual

ACTIVIDADES DE EJERCITACIÓN Y PROBLEMAS DE LA CLASE 8

1. Calcular los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $Log_5 625 =$ $\qquad$ $Rta:\ 4$

b) $Log_4 1 =$ $\qquad$ $Rta:\ 0$

c) $Log_{36} 6 =$ $\qquad$ $Rta:\ \frac{1}{2}$

d) $Log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}\right) =$ $\qquad$ $Rta:\ 5$

e) $Log_3\left(\frac{1}{27}\right) =$ $\qquad$ $Rta:\ -3$

f) $Ln\ e =$ $\qquad$ $Rta:\ 1$

g) $Ln\left(\frac{1}{e}\right) =$ $\qquad$ $Rta:\ -1$

h) $Log\left(\frac{1}{10000}\right) =$ $\qquad$ $Rta:\ -4$

2. Hallar el valor de x, despejando según corresponda:

a) $\log_3(x) = 6$ $\quad$ $Rta: \ x = 729$

b) $\log_x(64) = 2$ $\quad$ $Rta: \ x = 8$

c) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = x$ $\quad$ $Rta: \ x = -5$

d) $\log_x(49) = 2$ $\quad$ $Rta: \ x = 7$

e) $\ln \ (x) = -3$ $\quad$ $Rta: \ x = e^{-3}$

f) $\log_{\frac{1}{8}}(64) = 2 - x$ $\quad$ $Rta: \ x = 4$

g) $\log_x(3x-4) = 1$ $\quad$ $Rta: \ x = 2$

h) $\log_x(256) = \log 1000 - \log_3 9 + \log_4 64$ $\quad$ $Rta: \ x = 4$

3. Aplicar propiedades de los logaritmos según corresponda:

1. $\log\left(x^{4/5}.z^3\right) =$

2. $\log \sqrt[4]{(m+n)^{-3}.x^5.z^{-1}} =$

3. $Ln\left[\frac{x+3}{m^3.n^{1/3}} =\right]$

4. $\log\left(x^{1/4}y^{-6}\right) =$

5. $\log_5 \sqrt[5]{p.q^3.m} =$

6. $\log_2\left[(x+y).z\right]^{1/4} =$

4. Indicar cuál expresión es verdadera y cuál es falsa:

a) $Log \ x - Log \ y = Log \ (x-y)$

b) $\frac{1}{2} Ln \ (a+b) = Ln \ \sqrt{a+b}$

c) $7.Log_3 x = Log \ \sqrt[7]{x^3}$

d) $-\log_2(z-x) = Log_2\left(\frac{1}{z-x}\right)$

e) $\frac{1}{5}(Log \ 2 + Log \ x - Log \ y) = Log \ \sqrt[5]{2.x.z^{-1}}$

f) $Log \ \frac{1}{8} = -Log \ 8$

5. Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $7^{\frac{-2}{x}} = 49$ — $Rta: \; x = -1$

b) $-\frac{1}{2}.Ln\ 36 = Ln\ \ x$ — $Rta: \; x = \frac{1}{6}$

c) $x.\log\left(\frac{1}{16}\right) = \log\ 8$ — $Rta: \; x = -\frac{3}{4}$

d) $\log_4 x + \log_4 x = 1$ — $Rta: \; x = 2$

e) $\log 0{,}001 + \log_x 16 = 1$ — $Rta: \; x = 2$

f) $16^{3x+1} = 4^{2x-1}$ — $Rta: \; x = -\frac{3}{4}$

g) $125 = 5^{-15x}.\left(\frac{1}{125}\right)^{5x}$ — $Rta: \; x = -\frac{1}{10}$

h) $\log_2[x(x-2)] = 3$ — $Rta: \; x = -2 \;\wedge\; x = 4$

i) $(27)3^{-20x}.\left(\frac{1}{27}\right)^{-5x} = 1$ — $Rta: \; x = \frac{3}{5}$

6. Graficar las siguientes funciones, construyendo sus respectivas tablas de valores:

a) $y = 5^x$

b) $y = 4^{-x}$

c) $y = \log_5(x)$

d) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x)$

7. Graficar las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 2^x - ½$

b) $y = 3^{-x} + 4$

c) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 2$

e) $y = (6)^{2x}$

f) $y = e^x$

g) $y = (e)^{-x}$

8. Graficar las siguientes funciones logarítmicas:

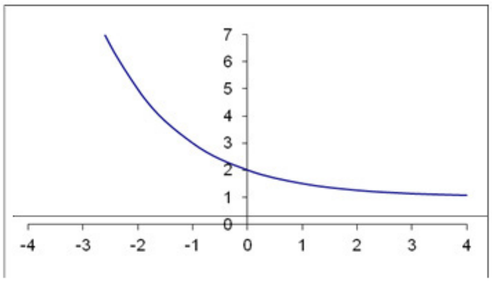
a) $y = \log_{\frac{2}{3}}(x+2)$

b) $y = Ln(x)$

c) $y = \log\ (x-3)$

d) $y = Ln(x+5)$

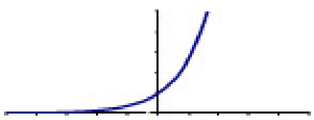
9. Dada la siguiente función: y = ax + b



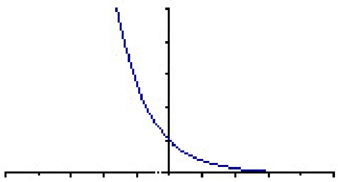
a) Determinar el valor de b.
b) ¿"a" es mayor o menor a uno?

10. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la función: $y = a^x$ con: $0 < a < 1$?

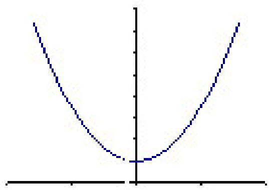
a)



b)



c)



11. Dada la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + c$, que pasa por el punto (-1; 5). Determinar el valor de la constante **c** y grafique.

12. Encontrar la función exponencial cuya base es 2 y corta al eje de las ordenadas en: –1/2.

13. ¿Cuál de las siguientes funciones exponenciales es creciente y corta al eje de las ordenadas en: –1?

a) $y = 3^{x} - 1$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} -$

c) $y = 3^{x}$

d) $y = 3^{x} - 2$

14. Dada la función: $f(x) = 1 + \log_a (x)$ y conociendo que f (8) = 4, indicar cuál afirmación es cierta:

a) a = - 2
b) a = 2
c) a = ½
d) a = - ½
e) no se puede responder por falta de información.

15. Dada la función $f(x) = \log_a (x)$, con a > 1
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) La función tiende al eje de las ordenadas, pero no lo corta.
b) La función es creciente.
c) Su gráfico corta al eje de las abscisas.
d) La imagen de la función son todos los números reales.
e) El dominio de la función son los reales.

16. Resolver los siguientes problemas de aplicación:

1) Durante un período de hiperinflación, el precio de los bienes aumenta diariamente en forma exponencial según la siguiente función:

$P(x) = 4.(1{,}05)^{x}$ siendo x = 1, 2, 3.... (Días).

Según éste modelo matemático:

a) ¿Cuánto costará ese bien al cabo de 30 días?
b) ¿Qué día costará $ 5,10?
c) ¿Cuánto aumentó el precio del bien el día 20 al día 21?

2) Cierto grupo de bacterias se reproduce y crece según la ley: $P = M.e^{kt}$, donde k es una constante y M se determina sabiendo que a t = 0 hay 8000 bacterias. Además se sabe que a t = 5 el número de bacterias es 12000. ¿Cuál es el número de ellas a un tiempo t = 15? (“t” son días).

17. Graficar las siguientes funciones y su inversa, en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta: dominio de existencia, el ó los puntos de corte a los ejes, el concepto de función creciente y decreciente:

a) $y = \log\ (x-3)$

b) $y = e^x$

c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

d) $y = Ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$

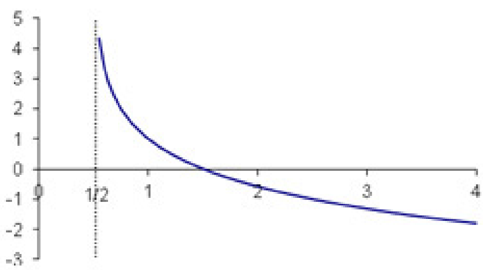
e) $y = 2^x + 3$

f) $y = \log_3(x+4)$

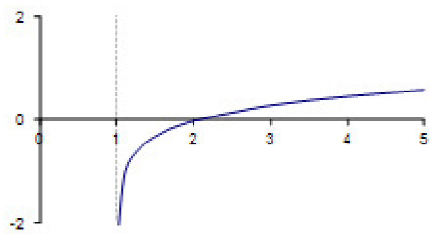
g) $y = e^{-x} + 2$

18. Indicar a qué tipo de función corresponde los siguientes gráficos:

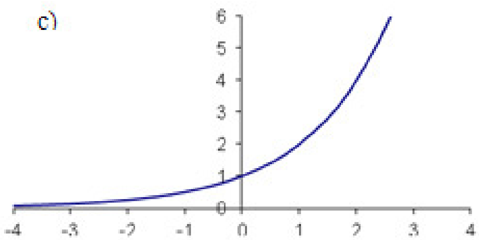
a)



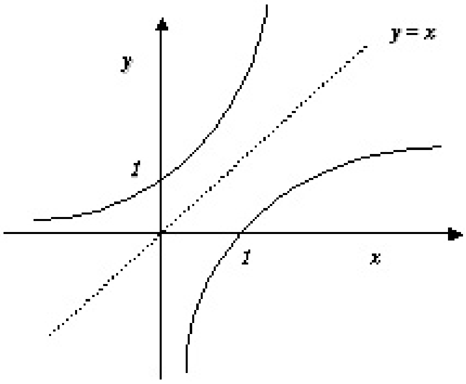
b)



c)



19. Identificar las funciones (en forma genérica) que están representadas en el siguiente gráfico:



20. Dada la función $y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$, cuál de las siguientes funciones representa a su función inversa:

a) $y = 3^{x}$

b) $y = 3^{-x}$

c) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

d) $y = \log_{3}(x)$

21. La función inversa de $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ es:

a) $y = \log_{5}(x)$

b) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x-1)$

d) $y = \log_{5}(x+1)$

e) Ninguna de las anteriores.

Palabras de cierre

Estimados estudiantes, terminamos un arduo trabajo después de estos ocho encuentros. Fue realmente un placer haber compartido estos momentos con todos ustedes. Esperamos haber logrado los objetivos y que sea un excelente examen final.

Queremos verlos pronto caminando por el campus de la Universidad, sonrientes, contentos y disfrutando de esta nueva etapa en sus vidas.

La vida universitaria es muy linda y una etapa que debe disfrutarse a pleno. Confiamos ampliamente en ustedes y sus capacidades para hacer frente a todo lo nuevo que se les presentará.

¡Mucha suerte y adelante!

Nos vemos pronto si Dios quiere.

Bibliografía

Arya Jagdish C. y Lardner Robin W. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*; con la colaboración de Víctor Ibarra Mercado. Editorial Prentice Hall. Quinta edición. México. Año 2009.

Autores varios de diversos libros de Matemática del Nivel Medio de Educación.

Dumont Nilda E. *Introducción a la matemática, aprendiendo a pensar.* Serie Cátedra. Editorial Universidad Católica de Córdoba. Segunda Edición. Córdoba. Argentina. Año 2010.

Haeussler E. Jr y Richard P. *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida.* Editorial Pearson-Prentice Hall. Octava edición. México. Año 1997.

Lancioni Juan N. *Álgebra. Apunte para el ingreso a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Córdoba.* Córdoba. Argentina. Año 2002.

Purcell Edwin J. y Varberg D. *Cálculo.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A. Sexta Edición. México. Año 1993.

UCC | Universidad Católica de Córdoba

Índice

CLASE 5

Ecuaciones.
Ecuación de primer grado.
Función lineal.
Reconstrucción de una función lineal.
Paralelismo y perpendicularidad.
Actividades individuales de ejercitación y problemas.
Palabras de cierre.

CLASE 6

Sistema de ecuaciones lineales.
Definición y solución.
Método gráfico.
Métodos analíticos: determinantes, igualación, sustitución y reducción.
Un problema de de sistema de ecuaciones lineales.
Actividades individuales de ejercitación y problemas.
Palabras de cierre.

CLASE 7

Definición y resolución de la ecuación de segundo grado.
Ejemplos de distintas formas de solución.
Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado.
Expresión factorizada de la ecuación de segundo grado.
Función de segundo grado.
Casos particulares de la función de segundo grado.
Reconstrucción de la función de segundo grado a partir del gráfico.
Actividades individuales de ejercitación y problemas.
Palabras de cierre.

CLASE 8

Ecuaciones exponenciales.
Ecuaciones logarítmicas.
Propiedades de los logaritmos.
Función exponencial.
Función logaritmo.
Actividades individuales de ejercitación y problemas.
Palabras de cierre.

Universidad Católica de Córdoba