# Técnicas y Conceptos Básicos en Matemáticas

Jairo Alvarez Gaviria
Ernesto Acosta
Miguel Marmolejo

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

# Presentación

El contenido de estos materiales está estructurado alrededor de los temas que, en opinión de los autores, permiten rescatar los puntos o metas terminales de la formación matemática que es razonable esperar de un estudiante egresado de nuestro Bachillerato (Aunque aún haría falta introducir algunos temas geométricos y de estadística descriptiva).

Su desarrollo está pensado, por lo tanto, para un estudiante que de una manera u otra ha estado expuesto a dicho conocimiento y cuyo interés central sea el de reconstruir, afinar y unificar conceptualmente tales conocimientos.

Este enfoque introduce modificaciones importantes en el tratamiento de los temas, los cuales no se pueden apreciar en una simple descripción del programa o contenido. El contenido está dividido en cuatro grandes Capítulos, en los cuales se tratan los temas terminales más relevantes de los programas del Bachillerato. El tema de cada Capítulo se trata sistemáticamente, pues, como se ha dicho, el propósito es reconstruir, afinar y organizar el conocimiento relacionado. Sin embargo, en su tratamiento se toma la libertad de introducir referencias de apoyo a temas, técnicas y conceptos importantes en la formación matemática del estudiante, que no han sido desarrollados en unidades anteriores, pero que serán tratados más adelante. Creemos que esta estrategia resulta conveniente, desde el punto de vista pedagógico. Por tanto no estamos comprometidos con una construcción axiomática que sólo avanza en la medida que va justificando y definiendo todos los elementos que necesita utilizar. Estamos interesados a este nivel en un conocimiento matemático, que como tal debe estar bien fundamentado pero efectivo operacionalmente hablando.

Por otro lado, contrario a la tendencia establecida en la mayoría de los libros a este nivel, hemos aplazado hasta el Capitulo 4 la definición formal de función, mas no la introducción de la idea básica que desde un principio se hace presente implícitamente de diversas maneras.

En este desarrollo preferimos enfatizar al principio la noción de "operación" entre números, mirando desde esta perspectiva la exponenciación, la radicación y la logaritmación, lo cual podría ser calificado como un retorno parcial al enfoque clásico. Creemos que este método (ya hemos tenido una primera experiencia) da mejores resultados en la asimilación del concepto de función; función inversa y del correspondiente manejo operativo.

Por último, el enfoque del contenido enfatiza también el cálculo numérico y el uso de las calculadoras de mano. Su utilización tiene obviamente un carácter práctico de acuerdo con la influencia de las calculadoras de bolsillo, pero con frecuencia, los cálculos numéricos se utilizan con un carácter didáctico para volver sobre definiciones y conceptos importantes.

Debemos comentar, por último, que aunque estos materiales han tenido ya la oportunidad de alguna experimentación están aún lejos de poderse considerar como un producto totalmente terminado. Agradecemos a la Fundación para la Educación Superior (F.E.S.) su apoyo para el desarrollo de estos materiales y del proyecto educativo en cuyo contexto se han venido gestando.

J. Alvarez G.
E. Acosta G.
M. Marmolejo L.

# Índice General

# Capítulo 1

# Sistemas numéricos

## 1.1. Tipos de números, expresiones y argumentos matemáticos

### 1.1.1. Los conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Empezamos repasando los diferentes tipos de números y sus formas de representación que han sido objeto de estudio en el Bachillerato.

Los primeros números que aprendemos son los **naturales**. El conjunto de los números naturales se suele representar por la sucesión de símbolos $1, 2, 3, 4, \ldots$ etc., donde el "etc" significa que todo número natural $n$ tiene un número natural $n + 1$ que le sigue. El conjunto de los naturales tiene, por tanto, infinitos elementos y no se puede decir que haya un último número natural o un número natural mayor que todos los demás. Utilizaremos el símbolo $\mathbb{N}$ para referirnos al conjunto de números naturales.

Se estudian también en el bachillerato los **números enteros** que se obtienen a partir de los números naturales (enteros positivos) adicionándoles el cero (0) y los llamados enteros negativos $-1, -2, -3$, etc. Los números enteros, que denotaremos con $\mathbb{Z}$ se suelen representar por la sucesión $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$, etc., donde el "etc", como en el caso anterior, indica que hay una sola regla de formación que permite generar al conjunto de los números enteros.

A partir de los números enteros se construyen los **números fraccionarios o números racionales**. Los números racionales son aquellos que se pueden representar en la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ y $q$ son números enteros y $q \neq 0$. Los símbolos $\frac{p}{q}$ se suelen llamar fracciones de enteros.

Un número racional puede ser representado por infinitas fracciones de enteros. Así por ejemplo la fracción $\frac{pk}{qk}$, siendo $k$ cualquier número entero no-nulo, representa el mismo número racional que $\frac{p}{q}$. Sabemos que dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ representan al mismo número racional, esto es $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, si y sólo si $mq = np$. (Sobre la frase "si y sólo si", ver Sección 1.1.5).

Se dice que $\frac{p}{q}$, con $q > 0$, es la fracción más simple que representa un determinado número racional si $p$ y $q$ no tienen factores comunes, y por lo tanto no admite simplificación.

Ejemplos de números racionales $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$. Pero no lo es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pues no se puede expresar como fracción de enteros. Tampoco lo serán $\frac{7}{0}, \frac{5}{0}$ que son expresiones indefinidas.

Puesto que cualquier número entero $p$ se puede expresar en la forma $\frac{p}{1}$, se concluye que todos los números enteros son números racionales. Utilizaremos el símbolo $\mathbb{Q}$ para referirnos al conjunto de los números racionales. De acuerdo con las observaciones que hemos hecho se puede escribir

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Además de los números racionales, el estudiante de Bachillerato se encuentra en sus estudios de matemática con otros números que no son expresables como fracciones de enteros y que se llaman **números irra-**

**cionales**. Utilizaremos el símbolo $\mathbb{I}$ para referirnos al conjunto de estos números. Ejemplos conocidos de números irracionales son $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$. Dijimos antes que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ no era un número racional, pues no se puede expresar como fracción entre enteros. "Fracciones" de este tipo, que no son racionales, también aparecen con frecuencia en el cálculo entre números reales. Estas fracciones que se pueden acoger bajo el nombre genérico de "fracciones reales", agrupándolas con las racionales, se comportan formalmente como las fracciones racionales y por lo tanto el criterio de igualdad entre ellas es el mismo que para los racionales.

Debe ser claro que, según la definición de número irracional,

$$\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset,$$

es decir, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$ no tienen elementos comunes.

El conjunto que resulta de la unión de los **números racionales** y los **números irracionales** constituye el conjunto de los **números reales** que denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}$. Consecuentemente:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Otro paso en la evolución del concepto de número llega a los llamados **números complejos** que se suelen representar en la forma $a + bi$, siendo $a$ y $b$ números reales y por definición $i^2 = -1$. La parte $a$ se suele llamar la parte real del número complejo y $b$ su parte imaginaria. Cuando el número es de la forma $0 + bi$ se considera igual a $bi$ y se dice que es imaginario puro. Cuando es de la forma $a + 0 \cdot i$ se considera igual a $a$ y se dice que el número complejo es un número real. Utilizaremos la letra $\mathbb{C}$ para representar al conjunto de los números complejos. Se puede escribir por lo tanto, con base en las consideraciones anteriores, que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Son ejemplos de números complejos $1 + i$, $1$, $6i$.

### 1.1.2. Numerales decimales

**Los números** son **ideas o conceptos** que requieren de **símbolos o numerales** para representarlos y para operar con ellos. De acuerdo con esta definición pueden existir, y de hecho existen, múltiples numerales para referirse a un mismo número.

La representación y manejo usual de los números reales se hace utilizando **el sistema de numeración decimal** que por utilizar la técnica del **valor de posición** hace posible que la representación de cualquier número real puede hacerse con un numeral construido a partir de los símbolos básicos $0, 1, 2, \ldots, 9$ llamados **dígitos**.

De acuerdo con esta técnica el valor numérico que representa un dígito varía según su posición en el numeral, excepto el 0 que siempre representa el mismo valor (valor nulo). El valor de un dígito en un numeral se reconoce a partir de la forma como se definen estos numerales. Así, el número real representado por el numeral 4832.51 está definido por la siguiente expresión polinómica que permite reconocer el valor numérico que representa cada dígito en el numeral:

$$\begin{aligned} 4\,8\,3\,2\,.\,5\,1 &\equiv 4000 + 800 + 30 + 2 + 0.5 + 0.01 \\ &\equiv 4 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2 + 5 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{10^2} \end{aligned}$$

O sea que el 4 representa cuatro mil unidades enteras; el 8, ochocientas unidades enteras; el 3, treinta unidades enteras; el 2, dos unidades enteras. Los dígitos que aparecen a la derecha del punto (llamado punto decimal) representan unidades fraccionarias. Así el 5 representa cinco décimas, el 1, una centésima.

El numeral 4382.15 se escribe, como en el caso anterior,

$$4382.15 = 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10 + 2 + 1 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{10^2}.$$

Obsérvese que en los ejemplos anteriores, el 8 aparece en ambos numerales y representa en ellos valores numéricos diferentes. En el primero ochocientas unidades enteras y en el segundo ochenta. Igual sucede con el 5. En el primero representa cinco décimas y en el segundo cinco centésimas. El dos por su parte representa en ambos numerales el mismo valor numérico por ocupar la misma posición.

Es importante observar, que en el lenguaje ordinario, y por razones de comodidad, los numerales se **identifican** con los **números que representan** y así se acostumbra decir "el número 7851" en lugar de "el número representado por el numeral 7851". Consecuentemente una expresión del tipo $\frac{3}{4} = 0.75$, que suele leerse "tres cuartos igual a cero setenta y cinco", debe entenderse en el sentido de que los numerales "$\frac{3}{4}$" y "0.75" representan el mismo número.

Se puede generalizar las observaciones anteriores diciendo que todo número real $\alpha$ admite una representación por un numeral decimal que es de la forma:

$$\pm a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{punto decimal}}}{.} b_1 b_2 b_3 \cdots$$

Donde los símbolos $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, b_2, b_3$, etc., son dígitos y los puntos suspensivos a la derecha del numeral indican que la sucesión de dígitos puede continuar indefinidamente.

El numero real que representa este numeral esta definido por la siguiente expresión polinómica que a su vez permite reconocer el valor numérico que representa cada digito:

$$\begin{aligned} &\pm a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots \equiv \\ \equiv \quad & \pm\Bigg(a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots a_1 \times 10 + a_0 + \cdots + b_1 \times \frac{1}{10} + \\ & + b_2 \times \frac{1}{10^2} + b_3 \times \frac{1}{10^3} + \cdots\Bigg) \\ & \equiv : \text{(definición)} \end{aligned}$$

Observe la correlación entre el subíndice que identifica la posición del dígito en el numeral y el exponente de la potencia de 10 asignada con el dígito.

Cuando a partir de un determinado dígito en la parte decimal del numeral, todos los dígitos son cero, se omite su escritura y el numeral es finito. Este es el caso del ejemplo que hemos considerado anteriormente, se escribe 4832.51 como una forma simplificada del numeral 4832.51000... y es por lo tanto un ejemplo de numeral finito. Si identificamos los dígitos en este numeral de acuerdo con la notación generalizada obtenemos la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & 8 & 3 & 2 & . & 5 & 1 & 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array}$$

en donde $n = 3$ y $b_3 = b_4 = b_5 = \cdots = 0$.

Otros ejemplos de numerales decimales son los siguientes:(Damos a la derecha de cada uno de ellos la expresión polinómica que lo define y que permite identificar al número real que representa).

1. $\begin{aligned} -10923 &= -\big(1 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3\big) \\ &= -\big(1 \times 10^4 + 9 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3\big) \end{aligned}$
2. $2.75 = 2 + 7 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{10^2}$
3. $1.53232\cdots = 1 + 5 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10^2} + 2 \times \frac{1}{10^3} + 3 \times \frac{1}{10^4} + \cdots$
4. $\begin{aligned} 2.101001\cdots &= 2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{0}{10^6} + \cdots \\ &= 2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \cdots \end{aligned}$

La representación decimal permite caracterizar y distinguir los diferentes tipos de números reales existentes. Las afirmaciones siguientes recogen resultados que el estudiante ha debido estudiar en el Bachillerato:

- El conjunto de los numerales decimales de la forma

$$\pm a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots$$

  se pueden identificar con el conjunto de los números reales. Es decir, cada numeral de este tipo representa un número real y a su vez todo número real admite ser representado de esta manera.

- Cuando a partir de un dígito $b_k$ de la parte decimal de un numeral hay una repetición indefinida de grupo de dígitos, el numeral se dice que es periódico y el número que representa es un número racional. Cuando este no es el caso el número representado es un número irracional.

- Debe ser claro que los numerales que hemos llamado anteriormente finitos representan números racionales, pues se trata de numerales periódicos en los cuales el grupo de dígitos que se repite esta constituido por el 0. Debe ser igualmente claro que los numerales del tipo $\pm a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ son casos especiales de este tipo de numerales y representan números enteros.

Si en el caso de numerales periódicos identificamos $c_1 \ldots c_m$ con el grupo de dígitos que se repite, el numeral se escribe de la siguiente forma:

$$\pm a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_k \overline{c_1 c_2 \cdots c_m}.$$

La raya sobre el conjunto de dígitos $\overline{c_1 c_2 \cdots c_m}$ indica que el numeral se obtiene por la repetición indefinida de dicho grupo de dígitos. El número $m$ de dígitos en el grupo se llama período de la fracción decimal.

Veamos los ejemplos de la página anterior. En el numeral

$$11.523232 \cdots = 11.5\overline{23}$$

el par de dígitos 23 se repite indefinidamente y por lo tanto es un decimal periódico con período 2. Así, $11.5\overline{32}$ representa un numero racional. En cambio $2.1010010001 \cdots$ representa un número irracional, pues es un numeral con infinitos dígitos que no es periódico en el sentido de la definición dada. 2.75, por ser una fracción decimal finita, denota un número racional, mientras que $-10923$ denota obviamente un número entero negativo.

En este contexto surge naturalmente el siguiente problema que el estudiante debe poder resolver.

> ***¿Si un número racional puede representarse por una fracción entre enteros y también por un número decimal periódico, cómo se puede pasar de una forma de representación a otra?***

En el ejercicio 29 de esta unidad se recuerda la manera de resolver este problema y se proponen algunos ejercicios específicos.

### 1.1.3. Números irracionales

El demostrar que un número dado es irracional no es, por regla general, un problema fácil. Las demostraciones de la irracionalidad de $\pi$, $\sqrt{2}$ y $e$, por ejemplo, fueron en su momento pasos importantes en el desarrollo de las matemáticas.

La demostración clásica de la irracionalidad de es la siguiente: Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional. Esto es, $\sqrt{2}$ se puede expresar como una fracción $\frac{p}{q}$, donde $p$ y $q$ son enteros. Simplificando esta fracción, si fuese necesario, podemos suponer que $p$ y $q$ no tienen factores comunes; o lo que es lo mismo, que la fracción ha sido reducida a su forma más simple. Se puede escribir:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \tag{1.1}$$

Por lo tanto

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.2}$$

Se deduce de esta última expresión que $p^2$ es par. Puesto que el cuadrado de un número impar es un número impar, el que $p^2$ sea par significa que $p$ también sea par. Por lo tanto $p = 2r$ siendo $r$ entero. Sustituyendo $p^2$ por $4r^2$ en (1.2) se tiene

$$4r^2 = 2q^2.$$

por lo tanto,

$$2r^2 = q^2.$$

Es decir, que $q^2$ también es par y, por la misma razón utilizada en el párrafo anterior, $q$ también lo será. Consecuentemente, $q$ es de la forma $q = 2k$, siendo $k$ entero. Este resultado permite concluir que 2 es un factor común de $p$ y de $q$, contra el supuesto de que no tenía factores comunes. Esto es una contradicción. Se deduce, por lo tanto, que el supuesto en la igualdad (1.1) no es válido y que $\sqrt{2}$ no es racional.

Seguramente que no es difícil para el estudiante aceptar que hay numerosos (infinitos) números racionales. ¿Qué se puede afirmar de los irracionales? ¿No habrá más irracionales que $\pi$, $e$,$\sqrt{2}$?. En realidad el conjunto de los números irracionales es infinito. Partiendo de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no es difícil demostrar, por ejemplo, que si $\frac{p}{q}$ es un número racional, $\frac{p}{q}+\sqrt{2}$ es un número irracional. Para demostrarlo procedamos de nuevo en forma indirecta. Afirmemos lo contrario de lo que queremos probar. Es decir, supongamos que $\frac{p}{q} + \sqrt{2}$ es racional y que por lo tanto se puede expresar como una fracción de números enteros $\frac{m}{n}$. Podemos escribir:

$$\frac{p}{q} + \sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}.$$

Pero $\frac{mq-np}{nq}$ es un número racional pues, tanto $mq - np$, como $nq$ son números enteros. Pero esto es una contradicción, pues esta fracción de números enteros es igual a $\sqrt{2}$ y demostramos, anteriormente, que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Se concluye, por lo tanto, que nuestra hipótesis de trabajo es falsa y que $\frac{p}{q} + \sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

La gran abundancia de números irracionales se puede intuir también utilizando numerales decimales y observando que serían inagotables las fracciones decimales infinitas no periódicas que podríamos construir. Ya vimos, por ejemplo, cómo el símbolo $2.101001000100001\cdots$ da claramente la ley de formación para una de tales fracciones y representa, por lo tanto, un número irracional. En realidad, se demuestra en matemáticas que mientras es posible ***enumerar al conjunto de los números racionales poniéndolos en correspondencia uno a uno***[1] ***con los números naturales, esto no es posible con los números irracionales y no se pueden listar mediante enumeración***. Es decir, que en la matemática, como en la vida real los "irracionales" abundan más que los "racionales".

### 1.1.4. Demostraciones directas e indirectas

Es importante que el estudiante comprenda bien el tipo de demostración que hemos realizado, que es bastante utilizado en la matemática y en general en la argumentación lógica. Esta demostración se llama **indirecta** y consiste en **afirmar lo contrario de lo que se quiere demostrar** para tratar de llegar, mediante un razonamiento deductivo a una contradicción. El alcanzar una contradicción indica que es falsa la premisa de trabajo que utilizamos y que, por lo tanto, tiene que ser válida la afirmación o tesis original.

[1]Sobre esta idea de enumerar y de correspondencia uno a uno ver Sección 1.1.6.

Este tipo de demostración, al cual el estudiante poco familiarizado con el estudio de la matemática suele presentar cierta resistencia, se llama in**directo** por oposición al **método directo**, más comúnmente utilizado, y en el cua1 el resultado que se quiere demostrar se deduce directamente medíante razonamiento lógico a partir de sus supuestos y utilizando resultados ya demostrados y/o definiciones dadas.

La demostración de la proposición "el cuadrado de un número impar es un número impar", utilizada en la demostración indirecta anterior puede servir como ejemplo sencillo de demostración directa.

Partimos en este caso de la definición de número impar: $n$ es un número impar si se puede escribir en la forma $n = 2k + 1$, donde $k$ es un número entero. 21 es impar y no es difícil ver que $21 = 2 \times 10 + 1$. En este caso $k = 10$. Utilizaremos también propiedades conocidas de los números enteros.

Sea $n$ un número impar. Por definición $n = 2k + 1$, donde $k$ es un entero.

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1. \end{aligned}$$

Puesto que $s = 2k^2 + 2k$ es un número entero, por serlo $k^2$ y $k$, entonces $n^2$ se puede expresar en la forma siguiente:

$$n^2 = 2s + 1.$$

Lo que prueba que $n^2$ es un número impar.

En matemáticas existen otros métodos de demostración. Está por ejemplo **el método de contraejemplo**. Este consiste en demostrar la falsedad de una proposición exhibiendo, o demostrando la existencia, de por lo menos un elemento que no cumple determinada propiedad, la cual afirma la proposición que es válida. Por ejemplo, para demostrar falsedad de la afirmación, "todo número real admite una representación mediante un numeral decimal periódico", se puede proceder por el método del contraejemplo demostrando que $\sqrt{2}$, siendo un número real, no admite una representación decimal periódica.

Está también el método de demostración por inducción que estudiaremos en detalle en la Unidad 1.4.

Vale la pena mencionar, por último, las demostraciones llamadas de existencia. En estas se demuestra que un objeto que cumple determinada propiedad existe. Un ejemplo típico podría ser la demostración de la afirmación "*existen números reales que no se pueden representar como fracción entre enteros*"

### 1.1.5. Cálculo proposicional

Las consideraciones anteriores llevan naturalmente al problema del lenguaje matemático y a sus formas de argumentación. En matemáticas se requiere distinguir inequívocamente entre razonamientos correctos y razonamientos incorrectos, y esto sólo es posible en la medida en que dispongamos de un lenguaje preciso. El estudio de las formas de argumentación en matemáticas es el tema de la lógica matemática.

En las argumentaciones matemáticas intervienen frases que tienen el nombre de proposiciones. **Una proposición es una frase bien formada en la cual se afirma algo cuya veracidad o falsedad se puede determinar inequívocamente**. Estas dos opciones se llaman valores de verdad de las proposiciones. Una proposición no es, por lo tanto, cualquier conjunto de palabras. Así, la expresión "el número $\sqrt{2}$" no es una proposición, pues no puede ser verdadera ni falsa. Pero la frase "el número $\sqrt{2}$ es un número racional" si es una proposición ya que podemos afirmar con absoluta certeza que es falsa. Las proposiciones pueden ser simples como "$\sqrt{2}$ es un número irracional". O compuestas como "$\sqrt{3}$ es un número irracional y es solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$".

**Las proposiciones compuestas** se obtienen a partir de proposiciones dadas mediante el uso de un pequeno número de palabras claves como "*no*", "*y*", "*o*", "*si... entonces*", "*si y solo si*". Estas palabras son llamadas **conectivos proposicionales**. **El cálculo proposicional** no es otra cosa que la definición de las reglas para el correcto uso de estos conectivos, o sea, para la correcta construcción de proposiciones compuestas a partir de proposiciones simples.

El uso correcto del cálculo proposicional es un requisito muy importante para la buena utilización e interpretación de argumentos matemáticos y, aunque pueda parecer algo fácil, el mal uso de éste suele ser causa de muchos errores y dificultades.

#### 1.1.5.1. El conectivo "no"

La negación de proposiciones es una manera de generar nuevas proposiciones. El símbolo "$\sim p$" significa que la proposición $p$ ha sido negada. Así, por ejemplo, si $p$ es la proposición "0.25 es un número racional", $\sim p$ será "0.25 es un número irracional".

De acuerdo con el sentido común si $p$ es verdadera, $\sim p$ debe ser falsa y si $p$ es falsa, $\sim p$ debe ser verdadera. Estas afirmaciones, que constituyen en realidad una definición lógica del conectivo "no", se resumen en la siguiente tabla llamada " Tabla de Verdad de la Negación". En ésta los valores de verdad de $\sim p$ se definen a partir de los valores de verdad de $p$, siendo $p$ cualquier proposición.

**Tabla de verdad de la negación** ($\sim$)

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

#### 1.1.5.2. El conectivo "y"

Es un conectivo que actúa sobre dos proposiciones $p$ y $q$ para generar una nueva proposición $p \wedge q$ que se llama su "conjunción" y que también se escribe "$p$ y $q$".

Si tenemos las proposiciones

$$p \equiv \text{“dos es un número primo”}$$

y

$$q \equiv \text{“cuatro es un número par”},$$

su conjunción será

$$p \wedge q \equiv \text{“dos es un número primo y cuatro es un número par”}.$$

El significado de la conjunción y el criterio para determinar cuándo es verdadera o falsa se intuye fácilmente del uso ordinario de "y". Debe ser claro que la conjunción es verdadera sólo cuando sus componentes lo son y que la falsedad de una de ellas determina su falsedad.

En la siguiente tabla se definen los valores de verdad de la proposición $p \wedge q$ a partir de los valores de verdad de $p$ y de $q$, siendo éstas proposiciones arbitrarias. Esta tabla no hace más que recoger el significado que en el lenguaje ordinario se le da al conectivo "y" en este tipo de construcciones.

**Tabla de verdad de la conjunción** ($\wedge$)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

#### 1.1.5.3. El conectivo "o"

Es un conectivo que actúa sobre dos proposiciones $p$, $q$ para generar una nueva proposición $p \vee q$ que se llama "disyunción" que también se escribe "$p$ ó $q$". Por ejemplo, si $p$ es la proposición "5 es impar" y $q$

es la proposición "$5^2$ es par", su disyunción será "5 es impar ó $5^2$ es par". Los valores de verdad de la disyunción se obtienen también del uso que en el lenguaje común se da al conectivo "o".

En el lenguaje ordinario el conectivo "o" tiene dos sentidos diferentes:

**En el sentido exclusivo** "José está en la escuela o está en la casa", es decir, José sólo puede estar en uno y solo uno de los dos lugares.

**En el sentido inclusivo**: "Antonio no puede estudiar si está cansado o con hambre", es decir, se afirma que si Antonio está cansado no puede estudiar, que tampoco puede estudiar si tiene hambre y con mayor razón no podrá estudiar si está cansado y con hambre.

El contexto o contenido de la proposición permite decidir en qué sentido se utiliza el "o" pero no siempre es fácil identificar dicho sentido. Cuando el "o" se utiliza en sentido inclusivo se afirma que por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera (podrían serlo ambas), mientras que cuando se utiliza en el sentido exclusivo se afirma que al menos una de las proposiciones es verdadera y al menos una es falsa. Según esta interpretación la disyunción de dos proposiciones, cuando se usa en el sentido inclusivo, será verdadera cuando al menos una de las proposiciones componentes es verdadera y será por lo tanto falsa sólo cuando ambas proposiciones sean falsas. En el sentido exclusivo será verdadera cuando siendo una falsa, la otra sea verdadera y será falsa cuando ambas proposiciones sean falsas o ambas verdaderas.

En matemáticas el sentido que le demos a la disyunción siempre debe estar claro, bien porque sea evidente en el contexto de la argumentación o bien porque se diga explícitamente. Cuando la disyunción "o" se usa en el sentido exclusivo en lugar de escribir el símbolo $\vee$ se suele escribir $\veebar$. Las siguientes tablas recogen las consideraciones anteriores:

**Tablas de verdad de la disyunción**

**Sentido inclusivo** ($\vee$)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

**Sentido exclusivo** ($\veebar$)

| $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

La negación de la forma $p \vee q$ y $p \veebar q$ suelen causar dificultades a los estudiantes y resulta conveniente hacer algunas observaciones al respecto. Si nos remitimos al sentido formal que hemos dado a la disyunción y a la conjunción, sentido que como hemos dicho proviene del uso que se les da en el lenguaje ordinario, no es difícil ver cuál es el significado y forma que deben tener estas negaciones. Consideremos las tres proposiciones siguientes que pueden darse en el contexto de una conversación:

Pedro es más alto y más pesado que Juan. ($p \wedge q$).

Pedro perdió el examen de matemáticas o el de física ($p \vee q$).

Pedro dijo mentira ó Juan dijo verdad. ($p \veebar q$).

¿Cómo podría alguien desmentir tales afirmaciones, es decir, negar su veracidad?

En el primer caso la falsedad de la proposición quedaría en evidencia si alguien nos afirma que **Pedro no es más alto que Juan, o bien que Pedro no es más pesado que Juan**. Se puede extender este significado diciendo que la negación de una proposición de la forma $p \wedge q$ está dado (se suele decir es equivalente) por la proposición $\sim p \vee \sim q$. Simbólicamente se escribe:

$$\sim (p \wedge q) \underset{\uparrow}{\equiv} \sim p \vee \sim q$$

(es equivalente)

La expresión de la derecha da pues una regla que nos sirve de guía para obtener la negación de proposiciones de la forma $p \wedge q$.

En el segundo caso la falsedad de la proposición quedaría evidenciada si se comprueba que Pedro no perdió el examen de matemáticas ni tampoco perdió el examen de física. Extendiendo este significado, como en el caso anterior, se puede decir que la negación de una proposición de la forma $p \vee q$ está dada por la proposición $\sim p \wedge \sim q$. Simbólicamente

$$\sim (p \vee q) \underset{\uparrow}{\equiv} \sim p \wedge \sim q$$

(es equivalente)

La expresión de la derecha da la regla para obtener la negación de proposiciones de la forma $p \vee q$.

Por último, la falsedad de la tercera proposición se pondría en evidencia, bien porque ambas afirmaciones fueran falsas ($\sim p \wedge \sim q$ sea verdadera), o bien porque ambas afirmaciones fueran verdaderas ($p \wedge q$ sea verdadera). Es decir que *su falsedad se comprueba bien porque Pedro no dijo mentira y Juan no dijo la verdad, o bien porque Pedro dijo mentira y Juan dijo verdad.* Este significado se puede expresar en forma general mediante la siguiente expresión simbólica:

$$\sim (p \veebar q) \underset{\uparrow}{\equiv} (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

(es equivalente)

Remitimos al estudiante a los ejercicios 31 y 33 de esta sección para practicar este y otros tipos de negación.

#### 1.1.5.4. El conectivo "si ... entonces ...". Implicaciones

A partir de dos proposiciones $p$ y $q$ podemos generar su implicación, que es una nueva proposición que se escribe de cualquiera de las siguientes formas: " si $p$ entonces $q$", "$p \Rightarrow q$" o "$p$ implica $q$". En la implicación a $p$ se le llama **antecedente** y a $q$ **consecuente**.

La proposición "si 120 es divisible por seis entonces 120 es divisible por dos" es un ejemplo de implicación en la cual $p$ corresponde a "120 es divisible por seis" y $q$ a "120 es divisible por dos". Esta implicación se puede expresar también en las formas:

"El que 120 sea divisible por seis implica que 120 sea divisible por dos".

"120 es divisible por seis $\Rightarrow$ 120 es divisible por dos".

En el lenguaje ordinario es posible identificar diferentes tipos de implicación. En las demostraciones matemáticas estaremos interesados principal mente en implicaciones en las cuales la conexión entre el antecedente y el consecuente es de carácter lógico, como en el ejemplo anterior. En este sentido la implicación no afirma que su antecedente sea verdadero, sino solamente que si su **antecedente es verdadero** entonces su **consecuente también es verdadero**. Así, la implicación del ejemplo anterior no afirma que "120 es divisible por seis". Dice simplemente que "120 será divisible por dos si lo es por seis". Consecuentemente, si alguien quiere negar esta implicación y comprobar que es falsa, tendría que mostrar que siendo 120 divisible por seis (es decir $p$ es verdadera), no fuese divisible por dos (es decir $q$ fuese falsa), es decir, tendría que mostrar que la conjunción "120 es divisible por seis y no es divisible por dos" fuese una proposición verdadera.

Estas consideraciones nos llevan a definir el significado de **la negación de la implicación** $p \Rightarrow q$ **mediante la proposición** $p \wedge \sim q$. Por lo tanto tendremos que $p \Rightarrow q$ será verdadera o falsa según lo sea la proposición $\sim (p \wedge \sim q)$. En otras palabras, $\sim (p \wedge \sim q)$ constituye una forma equivalente de expresar $p \Rightarrow q$ y en realidad es utilizada para definir su significado lógico. Por lo tanto se escribe simbólicamente:

$$p \Rightarrow q \underset{\uparrow}{\equiv} \sim (p \wedge \sim q)$$

(definición)

$$\sim (p \Rightarrow q) \underset{\uparrow}{\equiv} p \wedge \sim q$$

(equiva1ente)

En la siguiente tabla se definen los valores de verdad de la proposición $p \Rightarrow q$, en términos de los valores de verdad de $p$ y $q$.

**Tabla de verdad de la implicación ($\Rightarrow$)**

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p\wedge \sim q$ | $\sim (p\wedge \sim q)$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | V | V | F | F |
| F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | F | V | V |

El estudiante podrá preguntarse cómo una implicación puede ser verdadera siendo falso el antecedente. Más aún podrá parecer razonable que falso implicara falso, pero cómo puede ocurrir que falso implique verdadero? No se debe olvidar que la implicación no afirma la veracidad de las proposiciones componentes, si no, como se dijo, que el consecuente es verdadero si lo es el antecedente. Los siguientes ejemplos ilustran cómo "falso" puede implicar "verdadero" o "falso", o dicho de otra manera cómo "falso" puede implicar cualquier cosa. Sean las proposiciones:

Si 3 es par entonces 9 es par.
Si 3 es par entonces 18 es par.

Tomando como verdadera la proposición "si un número entero es par (impar) su cuadrado es par (impar)" que hemos utilizado en las secciones 1.1.3 y 1.1.4, se puede concluir la veracidad de la primera proposición pues 9 es el cuadrado de 3. Este será un ejemplo de cómo "falso" puede implicar "falso"

Para la segunda proposición, utilicemos la veracidad de la primera. Podemos decir, por lo tanto que si 3 es par, entonces 9 será par y, como $18 = 2 \times 9$, 18 será también par. Es decir, que hemos concluido que 18 es par sobre el supuesto de que 3 es par. Este sería un ejemplo de cómo "falso" puede implicar "verdadero".

Asociada con la implicación hay una terminología muy utilizada en matemáticas. Cuando la proposición $p \Rightarrow q$ ($p$ implica $q$) es verdadera se suele decir que "*$p$ es condición suficiente para $q$*" y que "*$q$ es condición necesaria para $p$*". Así, en el ejemplo "si $n$ es un número natural divisible por seis entonces $n$ es divisible por dos", la cual es una proposición verdadera, se puede expresar en esta terminología diciendo

> "el que un número natural sea divisible por seis es suficiente para que sea divisible por dos",

o bien

> "el que un número natural sea divisible por dos es condición necesaria para que sea divisible por seis".

El calificativo de "**condición necesaria**" puede interpretarse en el sentido de que si $q$ no es verdadera no puede serlo $p$. Así, utilizando el ejemplo anterior, se puede decir que un número natural que no es divisible por dos no puede serlo por seis.

#### 1.1.5.5. El conectivo "... **si y solo si** ...". Equivalencias

Dada la proposición $p \to q$, podemos intercambiar las posiciones de antecedente y consecuente que ocupan $p$ y $q$ para formar la proposición $q \Rightarrow p$, que se llama la recíproca de $p \Rightarrow q$. De la validez de una de las dos implicaciones no se sigue la validez de la otra. Así, por ejemplo, "si $n$ es divisible por 6 entonces $n$ es divisible por 2" es una proposición verdadera pero no lo es la recíproca.

De gran importancia en el estudio de la matemática son los casos en que las implicaciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ son ambas verdaderas.

En el contexto anterior surge el conectivo "si y solo si" (se abrevia sii) o de equivalencia. Se habla también de la doble implicación o del conectivo bicondicional.

Si $p$ y $q$ son proposiciones, la proposición $p \Leftrightarrow q$ se puede escribir también "$p$ sí y sólo $q$" ó "$p$ es equivalente con $q$" ó "$p$ es condición necesaria y suficiente para $q$". El sentido de esta proposición está dado por la conjunción de $p \Rightarrow q$ con su recíproca $q \Rightarrow p$. Es decir, por definición $p \Leftrightarrow q$ es lo mismo que $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, lo que permite determinar los valores de verdad de las proposiciones componentes.

Como ejemplos de doble implicación tenemos:

> "un número natural es divisible por seis si y solo si es divisible por dos"

que es una proposición falsa;

> "un numeral decimal representa un número racional si y solo si el numeral es periódico"

que es una proposición verdadera. Esta última se puede expresar diciendo "una condición necesaria y suficiente para que un numeral decimal represente un número racional es que el numeral sea periódico".

En ocasiones el conectivo "si y solo si" se utiliza como un mecanismo de definición de conceptos o expresiones matemáticas, con un sentido algo diferente al que hemos definido anteriormente.

En la sección 1.1.1. hemos hecho uso de este conectivo en este sentido. Hemos dicho, por ejemplo, para las fracciones entre enteros $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ que:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \text{si y sólo si} \quad mq = np.$$

En este caso, como en muchos otros, no se trata de que una proposición pueda deducirse a partir de la otra o viceversa. Se trata de una definición que establece su equivalencia, dando sentido a la expresión de la izquierda en términos del significado de la expresión de la derecha.

Otro ejemplo similar es el siguiente: un número entero $n$ es par si y solo si es de la forma $n = 2k$, siendo $k$ un número entero.

#### 1.1.5.6. Tautologías

En las páginas anteriores hemos definido el significado de los conectivos $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, tal como se usan en matemáticas para construir proposiciones compuestas a partir de proposiciones dadas. Es importante observar que expresiones como $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, etc., más que proposiciones concretas son moldes o fórmulas que podríamos llamar "expresiones proposicionales"[2]. Estas indican maneras generales de combinar proposiciones específicas para obtener nuevas proposiciones. Este procedimiento puede reiterarse para crear expresiones proposicionales cada vez más complejas. Los valores de verdad de estas expresiones proposicionales se pueden deducir a partir de los valores de verdad de las proposiciones componentes mediante tablas de verdad en las cuales intervienen las definiciones de los conectivos lógicos. Cuando los valores de verdad de una expresión proposicional son siempre verdaderos, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes, se dice que ésta es una **tautología**.

[2]En los textos de lógica matemática se refieren a estas expresiones proposicionales como "fórmulas"

Si por el contrario los valores de verdad de la expresión proposicional son siempre falsos, se dice que es una **contradicción**. Ejemplos típicos pueden ser los siguientes: $p \vee \sim p$ (tautología) y $p \wedge \sim p$ (contradicción). En el primer caso, independientemente de la veracidad o falsedad de $p$, $p \vee \sim p$ siempre será verdadera, lo cual se puede comprobar fácilmente construyendo su tabla de verdad. En el segundo, independientemente de la veracidad o falsedad de $p$, $p \wedge \sim p$ solo admite "falso" como valor de verdad.

Un tipo de tautología particularmente útil en el razonamiento matemático es la que da origen al concepto de "**expresiones o formas proposicionales equivalentes**". Se dice que dos expresiones proposicionales son equivalentes cuando ligadas por una doble implicación definen una tautología. Cuando este es el caso, en lugar de "$\Leftrightarrow$" utilizaremos el símbolo "$\equiv$". En realidad ya hemos utilizado en páginas anteriores este tipo de tautología cuando definimos el significado de la negación de $p \wedge q$, $p \vee q$ y $p \Rightarrow q$ utilizando las expresiones:

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \Rightarrow q) &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

Estas definiciones son equivalencias lógicas pues

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) &\Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) &\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow p \wedge \sim q \end{aligned}$$

son en realidad tautologías, tal como se puede comprobar construyendo sus tablas de verdad (Ver ejercicio 35 de esta unidad). Otra tendencia muy utilizada está dada por la tautología $\sim (\sim p) \Leftrightarrow q$, que permite identificar a $p$ con su doble negación $(\sim (\sim p)) \equiv p$.

Una equivalencia que vale la pena destacar separadamente y que se usa con mucha frecuencia en la argumentación matemática es la que se da entre la implicación $p \Rightarrow q$ y la implicación $\sim q \Rightarrow \sim p$ que se llama su **contrarrecíproca**. La siguiente tabla de verdad muestra que

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

es una tautología.

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim q \Rightarrow \sim p$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ | $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F | V | V | V |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V | V |

El concepto de expresiones proposicionales equivalentes es muy útil en los procesos de demostración, pues permite sustituir una expresión por otra equivalente, lo cual puede facilitar la demostración. La equivalencia de una implicación con su contrarrecíproca es bastante utilizada en este sentido ya la hemos utilizado (ver demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$) Para demostrar que si $n$ es par $(p)$ entonces $n^2$ también era par $(q)$. Aplicando implícitamente la equivalencia anterior supusimos que ello era equivalente a demostrar que si $n$ es impar $(\sim q)$ entonces $n^2$ es impar $(\sim p)$.

#### 1.1.5.7. Proposiciones abiertas

En el lenguaje matemático se presentan con frecuencia frases que tienen la forma de una proposición pero que no son proposiciones. Por ejemplo, "$x$ es un número primo" y "$x^2 - 2 = 0$" no son proposiciones pues no está claro qué número representa $x$ en dichas expresiones. La misma situación se presenta en expresiones del tipo "$x+y=z$" y "$x-1 \geq 2$". En muchos libros se le da a estas expresiones el nombre de proposiciones abiertas. Los símbolos, como $x$ e $y$, se denominan variables ya que sirven para representar cualquier número de un conjunto numérico determinado que se llama dominio de la variable. En nuestros ejemplos tanto a $x$ como a $y$ se les puede asignar $\mathbb{R}$ como dominio, pero también podría ser $\mathbb{C}$ u otros conjuntos numéricos según las circunstancias.

Una propiedad importante de estas frases matemáticas es que al sustituir las variables por números arbitrarios en su dominio se obtienen proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. Así, por ejemplo, si en la proposición abierta $x+y=2$ se hace $x=\frac{1}{2}$ y $y=\frac{1}{2}$ se obtiene $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ que es una proposición falsa, pero si se hace $x=3$ y $y=-1$ se obtiene $3-1=2$ que es una proposición verdadera. De Igual manera se obtiene una proposición falsa y una proposición verdadera si en la expresión $x-1 \geq 2$, se reemplaza $x$ primero por 2 y luego por 5.

Ecuaciones e inecuaciones, en una o varias variables, que tendremos oportunidad de estudiar sistemáticamente en la Unidad 2.3, no son otra cosa que proposiciones abiertas que por su importancia toman nombres especiales. Según esto resolver una ecuación o una inecuación es encontrar los conjuntos de valores de las variables que hacen verdadera la proposición abierta que las define.

#### 1.1.5.8. Cuantificadores

Las proposiciones abiertas generan verdaderas proposiciones no sólo por reemplazamiento de variables por valores numéricos en su dominio, sino combinadas con los llamados **cuantificadores**.

En el lenguaje matemático son comunes frases del siguiente tipo:

i) Para todo número real $x$, $x^2 \geq 0$.

ii) Existe un $x$ real tal que $x^2-2=0$.

iii) Para todo $x$ complejo existe otro complejo $y$ tal que $x+y=0$.

iv) Existe un número entero $N>0$ tal que para todo real $x$, si $x \geq N$ entonces $\frac{1}{x}<0.1$.

Estas frases, en las cuales aparecen proposiciones abiertas, son proposiciones pues se puede determinar si las afirmaciones son verdaderas o no y han sido obtenidas con el auxilio de frases como "para todo $x$", "existe un $x$", que se llaman cuantificadores.

El cuantificador "para todo" se llama universal y se denota con el símbolo $\forall$. El cuantificador "existe un" se llama existencial y se denota con el símbolo $\exists$.

Utilizando los símbolos para los cuantificadores y notación conjuntista, que el estudiante debe conocer, las proposiciones anteriores pueden escribirse de manera más compacta para visualizar mejor su estructura. Los paréntesis se usan para separar las frases e indicar también el alcance de los cuantificadores.

i) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$.

ii) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2-2=0)$.

iii) $(\forall x \in \mathbb{C})(\exists y \in \mathbb{C})(x+y=0)$.

iv) $(\exists N \in \mathbb{N})\big((\forall x \in \mathbb{R})(x \geq N \Rightarrow \frac{1}{x}<0.1\big)$.

Un aspecto operativo importante en el manejo de argumentos matemáticos es la negación correcta de proposiciones con cuantificadores. Como en casos anteriores, la forma de obtener estas negaciones se puede hacer recurriendo al sentido común de estas frases, preguntándose de qué manera podría alguien desmentir o negar la veracidad de tales afirmaciones.

Así por ejemplo, si alguien quiere negar la veracidad de la proposición i) y comprobar su falsedad deberá encontrar y exhibir un $x$ real para el que $x^2<0$. Es decir, la negación de tal proposición está dada por:

" existe un $x$ real tal que $x^2 < 0$".

Simbólicamente, podemos expresar este hecho escribiendo:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0) \equiv (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0).$$

La proposición ii) sería falsa si ningún $x \in \mathbb{R}$ cumple la condición $x^2 - 2 = 0$. Es decir que su negación estaría dada por la proposición

"para todo $x$ real, $x^2 - 2 \neq 0$",

y se puede escribir simbólicamente

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R})(x^2 - 2 = 0) \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 2 \neq 0).$$

En cuanto a la proposición iii), si alguien quiere comprobar que es falsa tendrá que comprobar que hay un número real $x$, no importa cual y real escoja, tal que $x + y \neq 0$. Es decir, que su negación estaría dada por la proposición

"existe un número real $x$ tal que para cualquier $y$ real, $x + y \neq 0$".

Simbólicamente se puede escribir que:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0) \equiv (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0).$$

Por último para comprobar la falsedad de la proposición iv) habría que de mostrar que, no importa qué número natural $N$ se escoja, siempre habrá un real mayor que $N$ para el cual $\frac{1}{x} \geq 0.1$. Es decir, su negación estaría dada por la proposición

"para todo $N$ existe un $x$ real tal que $x \geq N$ y $\frac{1}{x} \geq 0.1$".

Este planteamiento e puede recoger en forma simbólica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\sim (\exists N \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) \left( x \geq N \Rightarrow \frac{1}{x} < 0.1 \right) \equiv \\ &\equiv \quad (\forall N \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R}) \left( x \geq N \wedge \frac{1}{x} \geq 0.1 \right). \end{aligned}$$

Observe que, como en los casos anteriores, la proposición abierta "$x \geq N \wedge \frac{1}{x} \geq 0.1$" que aparece al final de la proposición negativa, no es otra cosa que la negación de la proposición abierta "$x \geq N \Rightarrow \frac{1}{x} < 0.1$" al final de la proposición negada.

En la tabla siguiente recogimos en forma general los esquemas de negación de proposiciones con cuantificadores que fueron objeto de consideración en los ejemplos anteriores. En este caso $E$ y $F$ son conjuntos arbitrarios y $p(x)$, $p(x, y)$ denotan proposiciones abiertas arbitrarias en una y dos variables respectivamente.

| Tipo de proposición | Esquema de negación |
|---|---|
| $(\forall x \in E)\,(p\,(x))$ | $(\exists x \in E)\,(\sim p\,(x))$ |
| $(\exists x \in E)\,(p\,(x))$ | $(\forall x \in E)\,(\sim p\,(x))$ |
| $(\forall x \in E)\,(\exists y \in F)\,(p\,(x, y))$ | $(\exists x \in E)\,(\forall y \in F)\,(\sim p\,(x, y))$ |
| $(\exists x \in E)\,(\forall y \in F)\,(p\,(x, y))$ | $(\forall x \in E)\,(\exists y \in F)\,(\sim p\,(x, y))$ |

Observe en el cuadro anterior la regla que liga la negación del cuantificador universal con el cuantificador existencial y viceversa.

Una observación final resulta pertinente. En general los cuantificadores se omiten cuando se escriben proposiciones matemáticas, pero aparecen implícitas en el contexto en que se presentan las distintas proposiciones. Así, por ejemplo, se puede escribir "Sea $a$ real, entonces $a^2 > 0$", en lugar de "para todo $a$ real, $a^2 \geq 0$"; "$x^2 - 2 = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$" en lugar de "existe $x$ en $\mathbb{R}$ tal que $x^2 - 2 = 0$"; "$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$" lugar de "para todo $x$ en $\mathbb{R}$ y todo $y$ en $\mathbb{R}$, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$".

### 1.1.6. Conjuntos

Un componente muy importante del lenguaje matemático es el lenguaje conjuntista, que viene asociado naturalmente a conceptos y nociones básicas de la matemática. Un buen manejo de este lenguaje y una adecuada comprensión de los conceptos asociados con él resultan de mucha ayuda para interpretar y expresar problemas matemáticos de manera más eficiente.

Suponemos que el estudiante está familiarizado con el uso y significado de los símbolos "$\subset$", "$\in$", "$\cup$" , "$\cap$", que de hecho hemos empezado a usar libremente en la presente Unidad. Queremos sin embargo, a manera de repaso, reproducir sus definiciones y destacar un par de conceptos, especialmente el de coordinabilidad de conjuntos.

#### 1.1.6.1. Definición de conjuntos

Partimos de la noción intuitiva de conjunto, que lo define como una "**colección de objetos**". Recordemos que los conjuntos se definen por **extensión** mediante el listado de sus elementos y por **comprensión** mediante el enuncia do de una propiedad que se aplica a los elementos de un conjunto de referencia. Así, por ejemplo, si se escribe $A = \{1, -1\}$, el conjunto $A$ se ha definido por extensión, al igual que un listado de alumnos define por extensión un curso determinado. La expresión $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\right\}$ define por comprensión el mismo conjunto $A$, así como, podemos definir por comprensión un conjunto de estudiantes diciendo "los estudiantes de la Universidad del Valle que ingresaron en 1984 al primer semestre".

Es importante notar que en las definiciones por comprensión el enunciado de la propiedad que especifica el conjunto es una proposición abierta.

La expresión $a \in A$ se lee "$a$ es un elemento de $A$". La expresión $A \subset B$ se lee "$A$ está contenido en $B$" y significa que todo elemento de $A$ es también un elemento de $B$. Se dice también que $A$ es un subconjunto de $B$.

Dos conjuntos $A$ y $B$ se dice que son iguales, y se escribe $A = B$, si están constituidos por los mismos elementos, o, lo que es lo mismo, si $A \subset B$ y $B \subset A$. y Simbólicamente:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

#### 1.1.6.2. Operaciones entre conjuntos

Las siguientes operaciones permiten generar nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados. En lo que sigue $A$ y $B$ denotaran dos subconjuntos de un conjunto de referencia $X$.

El complemento de $A$ en $X$ es el conjunto de los elementos de $X$ que no están en $A$. Simbólicamente:

$$\mathcal{C}_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Si el conjunto de referencia se subentiende, se escribe también $\mathcal{C}A$ o simple mente $A^c$.

El complemento de $B$ con respecto a $A$, o diferencia entre $A$ y $B$, es el conjunto de los elementos de $A$ que no están en $B$. Simbólicamente:

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

La unión de $A$ y $B$ es el conjunto de elementos que pertenecen a $A$ o a $B$. Simbólicamente:

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección finita de subconjuntos de $X$, la operación de unión se puede extender naturalmente mediante la siguiente definición:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in X \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}.$$

Un elemento está en la unión $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ si este pertenece por lo menos a uno de los conjuntos $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

La intersección de $A$ y $B$ es el conjunto de elementos que pertenecen a $A$ y a $B$. Simbólicamente

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

La operación de intersección se puede extender también naturalmente mediante la siguiente definición. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una colección finita de subconjuntos de $X$. Definimos su intersección así:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in X \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}.$$

Un elemento está en la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ si éste pertenece a cada uno de los conjuntos $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

La sucesión de elementos $a, b$ en dicho orden, que representaremos en la forma $(a, b)$, se llama **par ordenado**. El elemento $a$ se llama primera componente del par y el elemento $b$ segunda componente del par. Dos pares ordenados son iguales si y solo si sus componentes homólogos son iguales.

El producto cartesiano de $A$ y $B$ es el conjunto de pares ordenados cuya primera componente $a$ es un elemento de $A$ y la segunda componente $b$ es un elemento de $B$. Simbólicamente:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de pares ordenados de números reales, con junto con el cual el estudiante está familiarizado en los sistemas de coordenadas cartesianas que habremos de encontrar con frecuencia a lo largo de este curso.

La operación de producto cartesiano se puede realizar también entre varios conjuntos a partir de la noción de $n$–upla ordenada. Así, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección finita de conjuntos se puede definir su producto cartesiano de la siguiente manera:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}.$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama $n$–**upla ordenada**.

#### 1.1.6.3. Operaciones entre conjuntos y cálculo proposicional

Las operaciones entre conjuntos están íntimamente relacionadas con las operaciones entre proposiciones, lo cual se puede ver si se observa con cuidado las definiciones de tales operaciones. Se puede precisar un poco más esta observación considerando las siguientes equivalencias dadas por las definiciones mencionadas. Si $A$ y $B$ son subconjuntos de $X$ y $x$ es un elemento arbitrario de $X$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{C}_X A &\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A, \\ x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B, \\ x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, \\ x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B. \end{aligned}$$

Con base en esta conexión se pueden demostrar fácilmente propiedades de las operaciones entre conjuntos semejantes a las propiedades de las operaciones entre proposiciones (ejercicio 19).

En particular las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva dela intersección en la unión se reducen a propiedades iguales en el cálculo proposicional. Se pueden comprobar igualmente las famosas **Reglas de DeMorgan**, probablemente conocidas por el estudiante. Estas reglas se expresan así:

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c, \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c, \end{aligned}$$

y son resultado directo del esquema lógico de negación de proposiciones del tipo $p \vee q$ y $p \wedge q$.

Comprobemos la primera regla. Por la definición de la igualdad entre con juntos, debemos comprobar que $x \in (A \cup B)^c$ si y solo si $x \in A^c \cap B^c$. Esto se deduce de las siguientes equivalencias:

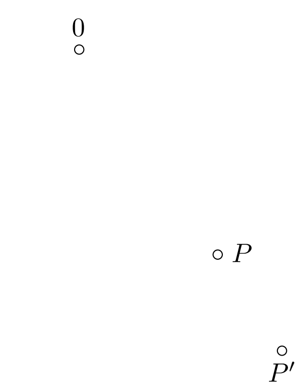
$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow\ x \notin (A \cup B) && \text{(Definición de complemento)}\\
&\Leftrightarrow \sim (x \in A \cup B) && \\
&\Leftrightarrow \sim (x \in A \vee x \in B) && \text{(Definición de unión)}\\
&\Leftrightarrow \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) && \text{(Negación de la disyunción)}\\
&\Leftrightarrow\ (x \notin A) \wedge (x \notin B) && \\
&\Leftrightarrow\ x \in A^c \wedge x \in B^c && \text{(Definición de complemento)}\\
&\Leftrightarrow\ x \in A^c \cap B^c && \text{(Definición de intersección)}
\end{aligned}$$

#### 1.1.6.4. Correspondencia biunívoca y conjuntos numerables

Se dice que entre dos conjuntos $A$ y $B$ existe una **correspondencia biunívoca** cuando entre ellos se define un "apareamiento" o "ley de correspondencia" entre los elementos de $A$ y los elementos de $B$, de suerte que a cada elemento $x$ de $A$ se le asocia exactamente un elemento $z$ de $B$ y cada elemento $z$ en $B$ tiene en $A$ exactamente un elemento $x$ con el cual está asociado.

La vida ordinaria está llena de este tipo de correspondencia. En un salón de clase donde hay 30 sillas y 30 alumnos y cada alumno está sentado en una sola silla, se define naturalmente una correspondencia biunívoca entre el conjunto de sillas y el conjunto de estudiantes. Una lista de 30 estudiantes de un curso establece una correspondencia biunívoca entre los nombres de los estudiantes y el subconjunto de los números naturales de 1 a 30.

En matemáticas el concepto de "correspondencia biunívoca" es básico y de gran utilidad y permite establecer comparaciones entre conjuntos no sólo finitos, sino también infinitos. El siguiente diagrama, muy conocido, permite visualizar cómo es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una circunferencia (excepto por un punto) y los puntos de una recta.




"Al punto $P$ sobre la circunferencia se le asocia el punto $P'$ sobre la recta". Excepto por el punto 0, a todos los puntos de la circunferencia se le puede asignar un punto sobre la recta y cada punto sobre la recta está asociado con un punto sobre la circunferencia.

La correspondencia entre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y el conjunto de los números reales no negativos mediante la cual a cada número real $x$ se le asocia su cuadrado $x^2$ ($x \leftrightarrow x^2$) no es una correspondencia biunívoca pues cada número positivo está asociado con dos números, uno positivo y otro negativo. En efecto el 9 está asociado con el 3 y el $-3$ pues $3^2 = (-3)^2 = 9$.

Cuando entre dos conjuntos se puede establecer una correspondencia biunívoca se dice que son coordinables y que poseen el mismo número cardinal y se escribe $\overline{A} = \overline{B}$.

La acción de **contar**, se puede interpretar como una manera de establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto y un subconjunto de los números naturales. Así, al afirmar que un conjunto tiene $n$ elementos significa que es posible definir una correspondencia biunívoca entre sus elementos y el conjunto los $n$ primeros números naturales.

En matemáticas, esta noción de contar que en la vida ordinaria está restringida a números finitos, se extiende a conjuntos que puedan tener un número infinito de elementos. Se dice entonces que un **conjunto se puede enumerar o contar cuando se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto finito o infinito de los números naturales**. Nuestra afirmación sobre la enumerabilidad de los números racionales tiene este sentido.

La enumerabilidad de los números racionales es fácil de ver mediante la observación del siguiente diagrama en el cual se describe una manera de generar todas las fracciones enteras posibles, varias de las cuales pueden representar un mismo número racional, por ejemplo $\frac{1}{3}$ en la primera fila, representa el mismo número que $\frac{2}{6}$ en la segunda fila, que $\frac{3}{9}$ en la tercera fila, etc.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\pm 1 & \rightarrow & \pm\frac{1}{2} & & \pm\frac{1}{3} & \rightarrow & \pm\frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \cdots \\
\pm 2 & & \pm\frac{2}{2} & & \pm\frac{2}{3} & & \pm\frac{2}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \cdots \\
\pm\frac{3}{1} & & \pm\frac{3}{2} & & \pm\frac{3}{3} & & \pm\frac{3}{4} & & \cdots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \vdots & \swarrow & \vdots & \nearrow & \cdots \\
\pm\frac{k}{1} & \rightarrow & \pm\frac{k}{2} & & \pm\frac{k}{3} & \rightarrow & \pm\frac{k}{4} & & \cdots
\end{array}
$$

Aunque varias fracciones pueden representar al mismo número racional debe ser claro que si podemos "contar" las fracciones enteras en el diagrama anterior ello implica automáticamente que también es posible contar los números racionales que ellas representan. Si recorremos el diagrama siguiendo el camino definido por las flechas podremos recorrer todo el diagrama, pasando por cada una de las fracciones enteras que lo constituyen lo cual permite ir contándolas, es decir poniéndolas en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}$.

Aunque con mucha menos facilidad es posible demostrar que una correspondencia semejante, no se puede establecer entre los números naturales y los números irracionales.

### 1.1.7. Ejercicios

En los ejercicios 1 al 20 responda falso o verdadero justificando su respuesta. Si quiere de una demostración para las justificaciones, diga si esta es directa, indirecta o por el método de contraejemplo.

1. Todo número natural es un número entero.
2. Todo número entero es un número racional.
3. Todo número racional es un número real.
4. Todo número real es un número complejo.
5. Todo número irracional es un número real.
6. Existen números racionales que son irracionales.
7. Existen números irracionales que son racionales.
8. (a) $n_1 + n_2$ y $n_1 - n_2$ son números naturales si $n_1$ y $n_2$ los son.
   (b) $n_1 \cdot n_2$ es un número natural si $n_1$ y $n_2$ los son.
   (c) $\dfrac{n_1}{n_2}$ es un número natural si $n_1$ y $n_2$ los son.
   (d) $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$, $r_1 \cdot r_2$ y $r_1 \div r_2$ son números racionales si $r_1$ y $r_2$ los son.
   (e) $\alpha + \beta$ o $\alpha \cdot \beta$ son números irracionales si $\alpha$ y $\beta$ los son.
   (f) $\alpha \div \beta$ es un número irracional si $\alpha$ y $\beta$ los son.

9. Si $r$ es racional y $\alpha$ es irracional entonces $r+\alpha$ es irracional.

10. Si $r$ es racional entonces $r \cdot \sqrt{2}$ es irracional.

11. Existen números irracionales $\alpha$ y $\beta$ tales que $\alpha + \beta$ es racional.

12. Existen números irracionales $\alpha$ y $\beta$ tales que $\alpha \cdot \beta$ es racional.

13. $\sqrt{17}$ es racional.

14. $\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

15. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

16. $\dfrac{3}{4} = 0.75 = \dfrac{7}{10} + \dfrac{5}{10^2}$

17. $\dfrac{1}{3} = 0.33 = \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{10^2}$

18. $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$

19. El cuadrado de todo número impar es un número impar.

20. El cuadrado de todo número par es un número par.

21. Identifique como entero, natural, racional, irracional o complejo cada uno de los siguientes números, justificando su respuesta.
$\frac{1}{3}+4$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, $(-19)^{10}$, $\frac{8}{2}$, $-0.5+\frac{1}{4}$, $1.2\overline{51}$, $(\sqrt{2})^2$, $3+2i$, $1+\sqrt{2}$, $-3.12112111211112\cdots$, $1.2\overline{13}-0.3\overline{3}$, $\sqrt{2}+4i$.

22. Diga cuáles entre las siguientes fracciones reales representa un mismo número real o complejo y clasifique el número que representa.
$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{120\pi}{40}$, $\dfrac{(\sqrt{2})^3}{4}$, $\dfrac{50}{100}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, $-\dfrac{11 \times 0.25}{110}$, $\dfrac{i}{4}$, $\dfrac{\pi}{0.3}$, $\dfrac{1}{40}$, $-\dfrac{2}{i}$, $3\pi$.

23. Describa por extensión, los conjuntos de números que se definen a continuación, clasifíquelos como enteros, racionales o irracionales.

$\{a_4a_3a_2a_1a_0 \mid 1 \le a_4 \le 3, a_3 = 3a_4,\ a_2 = 2a_4,\ a_1 = a_4, a_0 = 0\}$

$\{132.b_1\overline{3c_1c_2} \mid 4 \le b_1 \le 5,\ 0 \le c_i \le 2,\ i = 1,2\}$

$\{0.a_1a_2a_3\cdots \mid 1 \le a_1 \le 2,\ a_2 = 0,\ a_3 = a_4 = a_2,\ a_5 = 0,\ a_6 = a_7 = a_8 = a_1,\ \text{etc.}\}$

24. De la expresión polinómica de los numerales decimales correspondientes a los números que se indican a continuación.

$125.31\overline{4546}$, $0.00\overline{93}$, $\dfrac{2.5}{10^3}$, $3.4\overline{2} - 4.51\overline{2}$, $12.121221\cdots$, $1.404004\cdots$

25. Dada la expresión polinómica, hallar los numerales correspondientes.

   (a) $5\times 10^2 + 6\times 10 + 3 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{4}{10^4} + \cdots$

   (b) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{4}{10^4} + \dfrac{5}{10^5} + \dfrac{1}{10^6} + \dfrac{2}{10^7} + \dfrac{3}{10^8} + \dfrac{3}{10^9} + \dfrac{3}{10^{10}} + \cdots$

   (c) $3\times 10^2 + 2\times 10 + 5 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dfrac{1}{10^4} + \dfrac{2}{10^5} + \cdots$

   (d) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{4}{10^5} + \dfrac{5}{10^7} + \dfrac{6}{10^9} + \cdots$

   (e) $\dfrac{7}{10^3} + \dfrac{1}{10^4} + \dfrac{3}{10^5} + \dfrac{4}{10^6} + \dfrac{5}{10^7} + \dfrac{5}{10^8} + \dfrac{1}{10^9}$

26. Utilice el método indirecto para demostrar que si $\alpha$ es un número irracional entonces:

   (a) $\dfrac{p}{q} + \alpha$ y $\dfrac{p}{q} \cdot \alpha$ son números irracionales. $p$ y $q$ son números enteros ($q \neq 0$).

   (b) $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{p}$ son números irracionales cuando $p$ es un entero primo.

27. Aplique los resultados generales anteriores para clasificar los siguientes números: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{2}$, $0.25+\pi$, $\dfrac{2}{3}+\sqrt{3}$, $(\sqrt[3]{2})^9$, $\dfrac{3}{\pi}$, $4.\overline{32}\cdot\sqrt{3}$.

28. Diga para qué valores de $x$ los siguientes numerales no representan un número real.
$\dfrac{5x+2}{x+1}$, $\dfrac{x+3}{2x+6}$, $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{0}{x^2+10}$, $\dfrac{6x}{x^2+1}$, $\dfrac{7x+2}{0}$, $\dfrac{x+4}{x^2-16}$.

29. (a) Exprese los numerales decimales (fracción decimal) y su definición polinómica correspondiente a los números representados por los siguientes numerales: $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $-1821$, $\frac{4521}{7}$. (En los casos de fracciones realice la división entera para obtener la fracción decimal pedida).

(b) Encuentre fracciones enteras (del tipo $\frac{p}{q}$ con $p$ y $q$ enteros) que representen a los números racionales $-82.25$, $13.25\overline{31}$, $121.\overline{2}$, $0.362$, $0.412\overline{314}$.

**Ayuda:**

– En el caso de la fracción finita $-82.25$, obsérvese que si $N = -82.25$ entonces $N \times 100 = -8225$ lo que permite escribir $N$ como fracción entera.

– En el caso de la fracción periódica $13.25\overline{31}$, observe que si $N = 13.25\overline{31}$ entonces

$$\begin{aligned} N \times 100 &= 1325.\overline{31} \\ N \times 1000 &= 132531.\overline{31} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N \times 9900 = 132531 - 1325$$

Lo que permite escribir a $N$ como fracción entera.

(c) Con base en estos ejercicios de una regla general para obtener una fracción entera que represente al número racional simbolizado por el numeral

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_k \overline{c_1 c_2 \cdots c_k}$$

30. De las siguientes frases diga cuáles son proposiciones y cuáles no. Además diga cuáles son proposiciones abiertas.

(a) El triángulo es más grande que el círculo.

(b) $1 + \sqrt{2}$ es un número irracional.

(c) Si dos rectas son paralelas se intersecan.

(d) Existen infinitos números pares.

(e) La suma de dos enteros impares es par.

(f) $5^2$ es par y 5 es par.

(g) ¡Vamos!

(h) $x^2 + 2x + 1 = 0$.

(i) Existe en $\mathbb{R}$ una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

(j) Si $x^2 = 4$ entonces $x = 2$.

(k) Para todo $x$ real, $x^2 \geq 0$.

(l) Dado un número real $x$, positivo, negativo o nulo.

(m) Para todo $x, y$ en $\mathbb{R}$, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

(n) Sean $a, b$ números reales. Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

(o) $x$ número real; $5x - 3 = x + 5$ si y solo si $x = 2$.

(p) $n$ número natural; $n$ es divisible por 3 o es divisible por 2.

(q) $328.51\overline{23} < 328.5\overline{22}$.

(r) $(x-1)(x+1) \geq 0$.

31. En los casos que identificó como proposiciones en el ejercicio anterior, dé su negación y diga cuál de las dos proposiciones es verdadera.

32. Dé la negación de las siguientes proposiciones cuantificadas:

(a) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 5x + 4 = 0)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{Q})(0.3 < x < 0.33)$

(c) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a + b = b + a)$

(d) $(\forall x \in \mathbb{C})(\exists y \in \mathbb{C})(x \cdot y = 1)$

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y)$

33. Traduzca al lenguaje simbólico las siguientes proposiciones y sus negaciones.

(a) La ecuación $x^2 - x + 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$.

(b) Todo número racional $a \neq 0$ tiene otro número racional $b \neq 0$ tal que $a \cdot b = 1$.

(c) Todo número entero $n$ tiene en $\mathbb{Z}$ otro número $m$ tal que $m + n = 0$.

(d) Algún número entero no es par.

(e) Todo número entero se puede descomponer como producto de factores primos.

34. De la tabla de verdad de la doble implicación.

35. Demuestre que las siguientes expresiones proposicionales son tautologías y diga qué expresa cada una de ellas.

(a) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

(c) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

(d) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

(e) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

36. De la negación, la recíproca y la contrarrecíproca de las siguientes implicaciones y diga cuál de las proposiciones es verdadera.

(a) Si un número entero es primo, no es divisible por 3.

(b) Dados $a$ y $b$ números reales, si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

(c) Dado $x$ número real, si $0 < x < 1$ entonces $0 < x^2 < x$.

37. Escriba en forma simbólica las siguientes proposiciones, dé su negación y diga cuáles son falsas y cuáles son verdaderas.

(a) $\sqrt{3}$ es un número racional o irracional.

(b) 18 es divisible por tres y por seis.

(c) Una condición necesaria para que $3^2 = 10$ es que $8 - 3 = 6$.

(d) Una condición suficiente para que $2 < 3$ es que $2 < 5$.

(e) Una condición necesaria y suficiente para que 0.75 sea un número racional es que se pueda escribir como fracción entre enteros.

38. Defina una forma comprensiva y una forma extensiva los siguientes conjuntos.

(a) El conjunto de todos los números menores que 7.

(b) El conjunto de todos los enteros pares.

(c) El conjunto de todos los números naturales mayores que 13 y menores que 31.

(d) El conjunto de todos los números naturales impares menores que 13

39. Defina en forma comprensiva los siguientes conjuntos.

(a) El conjunto de todos los números racionales.

(b) El conjunto de todos los números complejos.

(c) El conjunto de todos los números reales menores que $-2$ y mayores o iguales que 5.

(d) El conjunto de todos los números irracionales mayores que 0 y menores o iguales que $-1$.

40. Indique cuáles de los siguientes casos son verdaderos y cuáles falsos, justificando su respuesta.

(a) $2 \in \{2, 3\}$

(b) $3 \in \{2, 3\}$

(c) $2 \subset \{2, 3\}$

(d) $3 \subset \{3, 4\}$

(e) $\{x, y\} = \{\{y, x\}\}$

(f) $7 = \{7\}$

(g) $\{\emptyset\}$ es el conjunto vacío.

(h) $\{1, 3\}$ y $\{1, 5, 15\}$ no tienen elementos comunes.

41. Considere el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{ etc.}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ etc.} \right\}$$

Diga cuáles de las siguientes casos son verdaderos y cuáles son falsos justificando su respuesta.

(a) $\sqrt{2} \in A$

(b) $\mathbb{R} \subset A$

(c) $\mathbb{Q} \subset A$

(d) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset A$

(e) $\mathbb{N} \subset A$

(f) $\mathbb{R} \in A$

(g) $\mathbb{Q} \in A$

(h) $\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \in A$

(i) $\mathbb{N} \in A$

(j) $A \subset A$

(k) $A \in A$

(l) $\mathbb{R} \in A$

42. Sean $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cup C$

(b) $A \cap C$

(c) $A \cap (B \cup C)$

(d) $B \cap C$

(e) $A \cup (B \cap C)$

(f) $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(A)$

(g) $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(B \cup C)$

(h) $B - A$

(i) $C - B$

(j) $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(A - B)$

(k) $A \times B$

(l) $A \times C$

(m) $A \times (B \cup C)$

(n) $(A \times B) \cup (A \times C)$

43. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 8\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\}$. Encuentre los siguientes conjuntos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

44. Sean $A$, $B$ y $C$ tres conjuntos. Demuestre que:

    (a) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

    (b) $A \cap B = B \cap A$

    (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

    (d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

    (e) $A \cup B = B \cup A$

45. Demuestre la segunda ley de De Morgan.

46. Demuestre que los siguientes conjuntos son coordinables con $\mathbb{Z}$, o con un subconjunto suyo, y por lo tanto que son enumerables.

    (a) Los números pares positivos.

    (b) Los números impares positivos.

    (c) Todos los enteros múltiplos de 5.

    (d) El conjunto de los números que se obtienen al elevar el $-3$ sucesivamente a la primera potencia, a la segunda potencia, etc.

47. Indique la manera de establecer una correspondencia biunívoca entre los siguientes conjuntos:

    (a) El alfabeto espanol y un subconjunto de los números naturales.

    (b) Entre los números reales positivos y los números reales positivos mayores que 1.

    (c) Entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y los puntos del plano.

## 1.2. Mediciones y números reales

### 1.2.1. Interpretación geométrica de los números reales

La descripción que hemos hecho de los números, clasificándolos en naturales, enteros, racionales e irracionales, a pesar de lo breve y fácil que hoy puede parecer, es el producto de un largo y difícil proceso de desarrollo del concepto de número. Este proceso que se va realizando mediante sucesivas ampliaciones del concepto de números corre ligado al desarrollo de los procesos productivos en las distintas sociedades humanas. Se inicia en los albores mismos de las sociedades primitivas, pasando por la antigua Grecia y la Edad Media, para llegar hasta el siglo XIX cuando se alcanzan las primeras construcciones rigurosas y completas del sistema de los números reales.

*La noción de número natural surge como abstracción del* ***proceso de contar***. A partir de esta noción, *todo el proceso del desarrollo del* **concepto de número** *puede mirarse como el perfeccionamiento paulatino de un modelo conceptual y simbólico, que debía permitir la descripción, representación y manipulación de las* ***operaciones de medición***, cada vez más complejas, *asociadas a diferentes procesos comerciales, técnicos y científicos.*

Desde este punto de vista aspiramos a hacer ver al estudiante que *el sistema de los números reales puede considerarse como un modelo de entes abstractos que representa y generaliza* ***la noción de medición*** *que se da en el mundo físico.* Además, que *en la dinámica de su desarrollo confluyen e interactúan necesidades externas a las matemáticas*, provenientes del comercio, la tecnología, etc., *y de las necesidades intrínsecas de las matemáticas*, provenientes de las limitaciones operativas y conceptuales de sus propios modelos y sistemas.

Los problemas de medición que determinaron históricamente el desarrollo del concepto de número real tienen una interpretación geométrica. ***Medir*** *es*, esencialmente, *un proceso de comparación de dos "cantidades" homogéneas una de las cuales se toma arbitrariamente como patrón de comparación.* Consecuentemente, no es difícil ver que *cualquier medición física de carácter escalar* (especialmente de magnitudes fundamentales) *puede ser idealizada*, en términos geométricos, *mediante la comparación de dos segmentos de recta, uno de los cuales se toma arbitrariamente como patrón de medida.*

Esta idealización geométrica de cualquier medición escalar puede describirse de la siguiente manera. Sean $AB$ y $AC$ dos segmentos de la recta $L$, tal como se indica en la Figura 1, de los cuales $AB$ se toma arbitrariamente como patrón de medida. (En la práctica, y según el tipo de medición, este segmento representa unidades con nombres diferentes: metros, pie, kilogramo, libra, hora, etc.)

$$\underbrace{\overset{A}{\circ} \qquad\qquad \overset{B}{\circ}}_{\text{Patrón de medida}} \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{C}{\circ} \qquad\qquad\quad L$$

Figura 1.

Dos opciones se presentan al comparar las longitudes de los segmentos propuestos según que el segmento $AB$ pueda o no acomodarse un número entero de veces en el segmento $AC$.

En el primer caso la operación de medir se reduce a la de contar las veces que $AB$ se puede acomodar en $AC$. La medida de $AC$, respecto de $AB$, que denotaremos como $m(AC|AB)$, estará dada por el número entero $m$ de veces que $AB$ cabe en $AC$. Es decir $m(AC|AB) = m$. Cuando el patrón de medida se subentiende y no hay peligro de confusión escribiremos simplemente $m(AC)$. En lo que sigue sólo haremos referencia al patrón de medida cuando lo consideremos conveniente.

En particular, puesto que $AB$ cabe exactamente una vez en $AB$ se tendrá que $m(AB) = 1$. Podemos representar este hecho (Figura 2) en nuestra recta ideal tomando el punto $A$ como referencia, asociándole él número 0 y asociándole a los puntos $B$ y $m$ los números enteros correspondientes a sus medidas $m(AB)$ y $m(AC)$ respecto de $AB$.

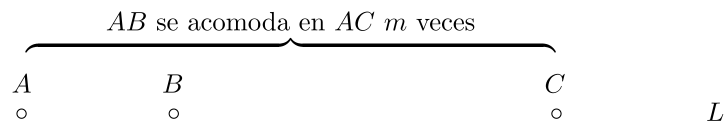



Figura 2. Medida de $AB$ respecto de $AB \equiv m(AB) = 1$, Medida de $AC$ respecto de $AB \equiv m(AC) = m$.

En la segunda opción ($AB$ no puede acomodarse un número entero de veces en $AC$), que en realidad se presenta en la mayoría de las veces, la comparación se extiende introduciendo nuevas unidades (sub-unidades o unidades fraccionarias) que se obtienen subdividiendo en partes iguales, digamos $n$, el patrón original[3]. En el modelo geométrico que estamos utilizando esta sub–unidad se puede identificar con el segmento $AD$, cuya medida respecto de $AB$ se conviene en representar con el símbolo $\frac{1}{n}$. Es decir $m(AD|AB) = \frac{1}{n}$ (Ver Figura 3).

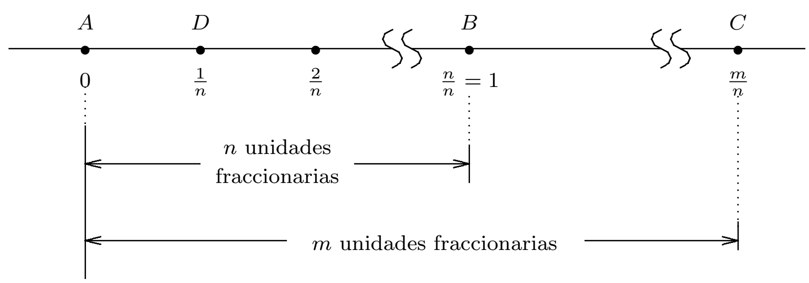



Figura 3.

En la práctica estas subunidades y según el tipo de medición, toman también nombres especiales. Así el metro se subdivide en 100 centímetros, el pie en 12 pulgadas, el kilogramo en 1000 gramos, la libra en 16 onzas, la hora en 60 minutos, etc.

De nuevo la operación de medición se reduce a determinar él número de veces que esta subunidad puede acomodarse en $AC$. Si éste es un número exacto e igual a $m$, el número fraccionario $\frac{m}{n}$ indicará este hecho y servirá para representar la medición de $AC$ respecto de $AB$. Simbólicamente $m(AC|AB) = \frac{m}{n}$. También se podría escribir $m(AC|AD) = m$. Es decir, que por definición,

$$m(AC|AB) = m(AC|AD) \cdot m(AD|AB).$$

El proceso de medición no se agota, sin embargo, con la introducción de unidades fraccionarias. Por lo menos, desde un punto de vista teórico cabe la siguiente pregunta:

> *Dado el segmento $AC$ y el patrón de medida $AB$ será siempre conmensurable respecto de $AB$, es decir, ¿será siempre posible encontrar una unidad fraccionaria $AD$ de $AB$, que pueda acomodarse en $AC$ un número exacto de veces?*

Obsérvese que dicha pregunta puede interpretarse también como una pregunta sobre la suficiencia del conjunto de los números racionales para representar la totalidad de resultados posibles en un proceso de medición. Una respuesta positiva significa que toda medición puede representarse por un número fraccionario $\frac{m}{n}$ mientras que una respuesta negativa indicaría que existen mediciones que no pueden ser representadas por símbolos numéricos de esta forma. Si suponemos de otro lado que a todo segmento debe corresponder un "*numero*" como medida o representación de su longitud respecto de un patrón de medida determinada, una respuesta afirmativa implicaría que el sistema de los números racionales seria suficiente para describir los resultados de las mediciones escalares que se dan en el mundo físico, mientras que una respuesta negativa estaría indicando la necesidad de introducir un nuevo concepto de número que permita representar este tipo de mediciones.

[3]Dado un segmento se demuestra geométricamente, utilizando técnicas de regla y compás, que al menos teóricamente, se puede dividir en $n$ segmentos iguales, para $n$ un número natural arbitrario.

Otro aspecto fundamental en este problema, y que establece una diferencia cualitativa con el paso de los números enteros a los números racionales es que empíricamente no es posible dar una respuesta afirmativa a esta pregunta. En la práctica, el proceso de determinación y uso de unidades fraccionarias, a partir de un patrón dado, tiene una limitación que viene dada por el nivel de precisión de los instrumentos de medición de que se dispongan. A partir de un metro, puede ser fácil determinar y utilizar decímetros, centímetros y probablemente milímetros, pero a partir de esta subunidad el manejo de unidades menores tiende a convertirse en una operación de alta precisión. No es posible por medios empíricos dar una respuesta afirmativa o negativa a la pregunta que hemos formulado, pues nuestros instrumentos, por finos que sean, no pueden ir más allá del manejo de subunidades de determinada finura.

Una respuesta satisfactoria a la pregunta propuesta se puede obtener con el modelo geométrico que hemos venido utilizando para senalar las conexiones entre los problemas de medición y el desarrollo del concepto de número real. En realidad esta pregunta empezó a resolverse históricamente en la medida en que dicho modelo geométrico había alcanzado cierto desarrollo teórico y prácticamente había permitido ya establecer una teoría geométrica de los números.

Considere en la Figura 4, el segmento $AB$ que se toma como patrón de medida y construya el cuadrado $ABA'B'$ tal como se indica.

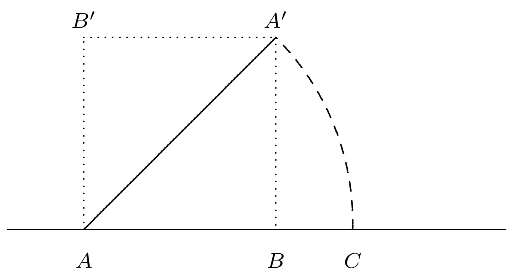



Figura 4.

Construya la diagonal $AA'$ y determine el segmento $AC$ sobre la recta de referencia, trazando un círculo con radio $AA'$, con centro en $A$. El segmento así construido será congruente con la diagonal $AA'$.

Aplicando el teorema de Pitágoras se puede escribir la siguiente relación entre las medidas de $AA'$, $AB$ y $BA'$ respecto de $AB$

$$m(AA')^2 = m(AB)^2 + m(BA')^2$$

Puesto que $ABA'B'$ es un cuadrado y la longitud de su lado respecto de $AB$ es 1, sé puede escribir

$$\begin{aligned} m(AA')^2 &= 1+1=2 \\ m\,(AA') &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

En la Unidad 1.1. demostramos que $\sqrt{2}$ no puede tener forma fraccionaria.

En conclusión, y contrario a lo que puede indicar la intuición, hemos construido un segmento $AC$ que es inconmensurable respecto de un patrón de medida determinada, en el sentido de que no es posible encontrar una unidad fraccionaria de $AB$ que pueda acomodarse en $AC$ un número exacto de veces y que, por lo tanto, su medición, pueda expresarse como un número fraccionario $\frac{m}{n}$. La medición de este segmento $AC$ respecto de la unidad de medida $AB$ será expresada por el número irracional $\sqrt{2}$.

El problema de las mediciones físicas contribuyen originalmente al desarrollo del concepto de número real positivo pero eventualmente y por razones tanto prácticas como teóricas resulta necesario el concepto de número negativo que puede considerarse asociado con la noción de medida relativa. Este concepto se puede incorporar en el modelo geométrico que hemos venido considerando, introduciendo un "*sentido*" en nuestra recta ideal: "*positivo*" a la derecha y "*negativo*" a la izquierda. De acuerdo con este convenio ***la medida*** (en este caso relativa) ***de un segmento*** *dependerá de su orientación en la recta y por lo tanto dos puntos $A$ y $C$ definen los segmentos $AC$ y $CA$ cuyas medidas respecto del patrón de medida que se adopte serán de signos contrarios $m(CA) = -m(AC)$. $m(AC)$ será positivo si $C$ está a la derecha de $A$ y negativo si está a la izquierda de $A$.*

Se puede decir que, en términos intuitivos, y teniendo en cuenta su origen histórico, ***los números reales*** *pueden interpretarse como longitudes de segmentos respecto de una unidad de medida determinada y que su clasificación en racionales e irracionales responde a la posibilidad teórica de los resultados cualitativamente diferentes en todo proceso de medición.* ***Los números racionales****, incluidos los enteros expresan la longitud de segmentos conmensurables respecto de la unidad de medida adoptada, mientras que los llamados* ***números irracionales*** *expresan la longitud de segmentos que son inconmensurables respecto de dicha unidad.*

### 1.2.2. La recta numérica

De acuerdo con lo anterior, si tomamos una recta ideal en la cual se ha tomado un punto $A$ de referencia y un segmento arbitrario $AB$ como patrón de medida y un sentido de medición, "*positivo*" a la derecha y "*negativo*" a la izquierda, todo punto $P$ sobre la recta determinará un segmento $AP$ cuya medida relativa respecto del patrón $AB$ será un número real $x$. (Ver Figura 5). Recíprocamente todo número real $x$ corresponderá, por definición a la medida de un segmento $AP$ sobre la recta (Ver figura 5).

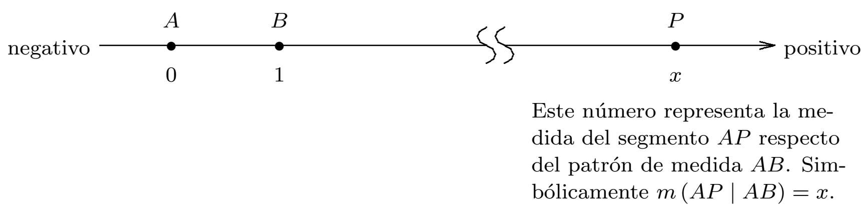



Figura 5.

Si el punto $P$ está a la derecha de $A$ el número real $x$ asociado será positivo y será negativo si $P$ está a la izquierda de $A$. Los números racionales corresponden a los puntos $R$ tales que los segmentos $AR$ son conmensurables respecto de la unidad de medida $AB$. Así, por ejemplo, los números enteros estarán asociados con los puntos que se obtienen al desplazar el patrón de medida $AB$ a izquierda y derecha sucesivamente. El número $\frac{1}{n}$ corresponderá al punto extremo de la unidad fraccionaria que se obtiene al dividir en $n$ partes iguales al patrón de medida (Ver Figura 6).

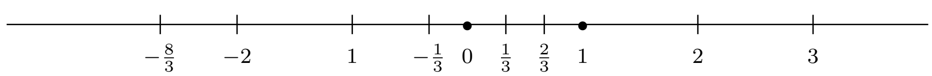
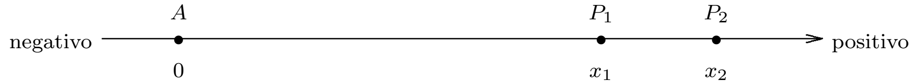



Figura 6. Ubicación de los números racionales de la forma $\frac{m}{n}$, para $n = 3$.

Desplazando esta unidad de medida fraccionaria a izquierda y derecha sucesivamente se obtienen los puntos correspondientes a los números fraccionarios de la forma $\frac{m}{n}$.

Los números irracionales corresponden a los puntos $I$ tales que los segmentos $AI$ son inconmensurables respecto del patrón de medida $AB$[4]. Esta correspondencia biunívoca (o identificación) entre puntos de una recta ideal y números reales da origen al concepto de recta numérica que nos permite hablar indistintamente de "*números*" o "*puntos*" y que nos permite entender e interpretar muchas de las propiedades de los números reales en términos de su representación como puntos de una recta.

El número asociado a un punto $P$ arbitrario se llama ***coordenada del punto***. Si $P_1$ y $P_2$ son dos puntos arbitrarios en la recta numérica con coordenadas $x_1$ y $x_2$ la medida relativa de $P_1P_2$ se calcula mediante la expresión $m(P_1P_2) = x_2 - x_1$. Consideremos el caso particular que se indica en la figura 7.




[4]La ubicación de muchos de los números irracionales es difícil de realizar, sin embargo es posible obtener ubicaciones aproximadas recurriendo a su representación decimal sobre lo cual se ha de comentar en la sección siguiente.

Figura 7.

Se puede escribir:

$$\begin{aligned} m(AP_2) &= m(AP_1) + m(P_1P_2) \\ x_2 &= x_1 + m(P_1P_2) \\ \therefore\ m(P_1P_2) &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Estudiando los otros casos posibles en lo que respecta a la ubicación relativa de los puntos $P_1, P_2$ respecto del origen $A$ se puede comprobar que la fórmula anterior sigue siendo válida (Ver ejercicios).

La recta numérica permite visualizar igualmente el orden natural que se da entre los números reales. Si $x$ e $y$ son números reales asociados con los puntos $P$ y $Q$, $x$ será menor que $y$ ($x < y$) si $P$ está a la izquierda de $Q$ y por lo tanto $m(PQ) = y - x$ es positivo.

Se establece también de manera natural la noción de distancia entre dos puntos o números reales sobre la recta numérica. Por definición la distancia entre dos puntos será la medida del segmento determinado por ellos, en la dirección positiva de la recta y se llamará medida absoluta del segmento.

Si $P$ es un punto sobre una recta numérica y $x$ es el número real asociado con él, tal como se indica en la figura 8, definimos valor absoluto de $x$, y lo denotaremos $|x|$, como la distancia de $P$ al origen.

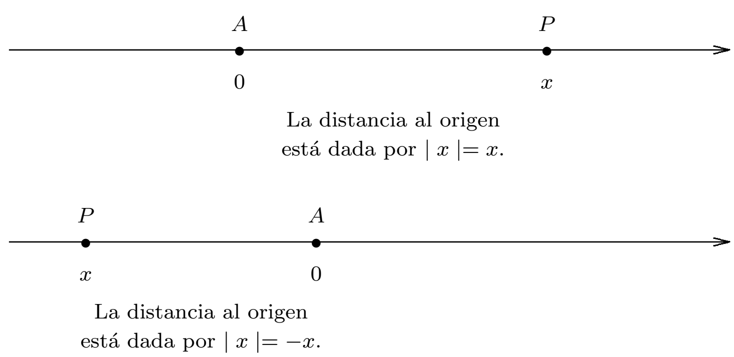



Figura 8.

Utilizando la definición de distancia dada anteriormente, se puede observar que si $P$ está a la derecha del origen $A$, $x$ es positivo y su distancia al origen estará dada por $m(AP) = x - 0 = x$, mientras que si $P$ está a la izquierda de $A$, $x$ será negativo y su distancia al origen estará dada por $m(PA) = 0 - x = -x$. Se puede concluir por lo tanto que:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Si $P_1$ y $P_2$ son puntos arbitrarios sobre una recta numérica con coordenadas $x_1$ y $x_2$, respectivamente, la distancia entre $P_1$ y $P_2$ estará dada por $m(P_1P_2) = x_2 - x_1$, si $P_1$ está a la izquierda de $P_2$ ($x_1 < x_2$) y por $m(P_2P_1) = x_1 - x_2$, si $P_2$ está a la izquierda de $P_1$ ($x_2 < x_1$).

Así, la distancia entre $P_1$ y $P_2$ esta dada por el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de los dos puntos. Se puede escribir por lo tanto:

$$\text{Distancia entre } P_1 \text{ y } P_2 = |x_2 - x_1|$$

De acuerdo con las definiciones anteriores $\left|\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, lo cual se desprende claramente del significado intuitivo que le hemos dado al valor absoluto de un número y que en este caso dice que la distancia al origen de los puntos marcados con $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ es la misma. Por otra parte, si $P_1$ y $P_2$ son puntos con coordenadas $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = -1$, respectivamente, se tiene que la distancia entre $P_1$ y $P_2$ viene dada por la expresión

$$|x_2 - x_1| = \left|-1 - \tfrac{3}{4}\right| = \left|-\tfrac{7}{4}\right| = \tfrac{7}{4}.$$

### 1.2.3. Observaciones complementarias

Concluimos esta sección reiterando nuestra afirmación inicial de qué el concepto de número real ha sido el resultado de un largo proceso que está lejos de haberse planteado en los términos lineales y esquemáticos que aquí hemos utilizado. En sus orígenes, por ejemplo, el símbolo $\frac{m}{n}$ no representó mas que una manera de representar una medición específica, utilizando unidades fraccionarias, pero no tenía el status de número atribuido a los números naturales. Tal como se dice en [1],

> "*sólo después de varios siglos de tentativas el símbolo $\frac{m}{n}$ quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medida y a las cantidades medidas, y fue considerado simplemente como un número (número racional), un ente en sí mismo, en el mismo plano de los números naturales*"

Dos razones se utilizan para explicar este proceso de creación de lo números racionales a partir de la introducción de los símbolos $\frac{m}{n}$ para denotar diversos tipos de mediciones. De un lado, el descubrimiento de propiedades de estos símbolos que permitieron definir entre ellos las operaciones de adición y multiplicación que hoy conocemos, con las mismas propiedades formales de estas operaciones entre naturales (conmutativa, asociativa, distributiva) y que permitían calcular la medida de la "*suma*" de segmentos mediante la suma de las medidas de los segmentos y el área de rectángulos multiplicando las medidas de los segmentos que los determinan. De otro lado la existencia de problemas matemáticos propiamente dichos que tenían que ver con las limitaciones operativas de los números naturales. En la aritmética de los números naturales, mientras las operaciones de suma y multiplicación son siempre posibles no ocurre lo mismo con las operaciones de división entera y resta. La división $b \div a$ sólo tiene sentido cuando $b$ es un múltiplo entero de $a$. La diferencia $b - a$ sólo la tiene cuando $b$ es mayor que $a$. La introducción primero de las *fracciones* y luego de *los números negativos* permiten resolver estas limitaciones pasándose al sistema de los números racionales en los cuales las operaciones aritméticas básicas de suma, multiplicación, sustracción y división (excepto por cero) son siempre posibles.

> *"Extender un dominio (numérico) por la introducción de nuevos símbolos, de tal modo que las leyes que valen en el primero continúan rigiendo en el segundo, es uno de los aspectos del proceso de generalización característico de la matemática. La generalización del concepto de número natural al de número racional satisface por una parte, la necesidad teórica de suprimir las restricciones a la sustracción y a la división y, por otra, cumplen la necesidad práctica de tener números que representan los resultados de mediciones, del hecho de que los números racionales satisfacen esa doble necesidad resulta verdaderamente su gran importancia"* [1].

Consideraciones semejantes a las anteriores son aplicables al desarrollo del concepto general de número real como una extensión del concepto de número racional. La evolución del concepto de raíz $n$–ésima y su relación con el problema de cantidades inconmensurables condujeron paulatinamente a la identificación y perfeccionamiento del concepto de número irracional y en general a la creación de los sistemas de números reales y números complejos.

### 1.2.4. Mediciones y numerales decimales

En los procesos de medición física siempre se definen "*sistemas de medición*" respecto de los cuales se realizan y se expresan tales mediciones. Un "*sistema de medida*" está constituido básicamente por un "*patrón*" de comparación y un conjunto de unidades que son "*múltiplos*" o "*submultiplos*" del patrón de medida. En la práctica, y según el tipo de magnitud que se considere, existen diferentes tipos de sistemas. En magnitudes como longitud, peso, área, volumen, el sistema que tiende a imponerse universalmente es el decimal. Es decir, aquellos sistemas en los cuales las medidas de las diferentes unidades están ligadas entre si por potencias de 10. El siguiente sistema definido en la recta numérica puede considerarse como una idealización de este tipo de sistemas y por lo tanto tiene sentido llamarlo **sistema de medición decimal abstracto**.

Sea la recta numérica en la cual se ha tomado el segmento $AE_0$ como patrón de medida. Tal como se ilustra en las figuras 9 y 10, se pueden considerar unidades de medida que son "*múltiplos*" o "*submúltiplos*" de 10 del patrón de referencia y que llamaremos, respectivamente unidades enteras o fraccionarias. Estas unidades se generan de la siguiente manera:

#### 1.2.4.1. Unidades enteras

**Unidades enteras de orden 0.** Esta dada por el segmento de recta que se toma arbitrariamente como patrón de comparación y se denota $AE_0$ (Figura 9). Se tiene por definición que:

$$m\left(AE_0|AE_0\right) = 1$$

**Unidades enteras de orden 1.** Está dada por segmentos de recta que se obtienen yuxtaponiendo 10 unidades enteras de orden 0. Si se representa por el segmento. $AE_1$ (Figura 9) se tiene por definición que:

$$m\left(AE_1|AE_0\right) = 10$$

**Unidades enteras de orden 2.** Está dada por segmentos de recta que se obtienen yuxtaponiendo 10 unidades enteras de orden 1 o, lo que es lo mismo, $10^2$ unidades enteras de orden 0. Si se representa por el segmento $AE_2$ (Figura 9) se tiene, por definición que:

$$m\left(AE_2|AE_1)\right) = 10$$

y

$$\begin{aligned} m\left(AE_2|AE_0\right) &= m\left(AE_2|AE_1\right) \cdot m\left(AE_1|AE_0\right) \\ &= 10^2. \end{aligned}$$

Reiterando este proceso se tiene, en general, que una unidad entera de orden $k$ se obtiene yuxtaponiendo 10 unidades enteras de orden $k-1$ o yuxtaponiendo $10^k$ unidades enteras de orden 0. Si se representa por el segmento $AE_k$, se tiene por definición que:

$$m\left(AE_k|AE_{k-1}\right) = 10$$

y

$$\begin{aligned} m\left(AE_k|AE_0\right) &= m\left(AE_k|AE_{k-1}\right) \cdot m\left(AE_{k-1}|AE_0\right) \\ &= 10 \cdot 10^{k-1} \\ &= 10^k. \end{aligned}$$

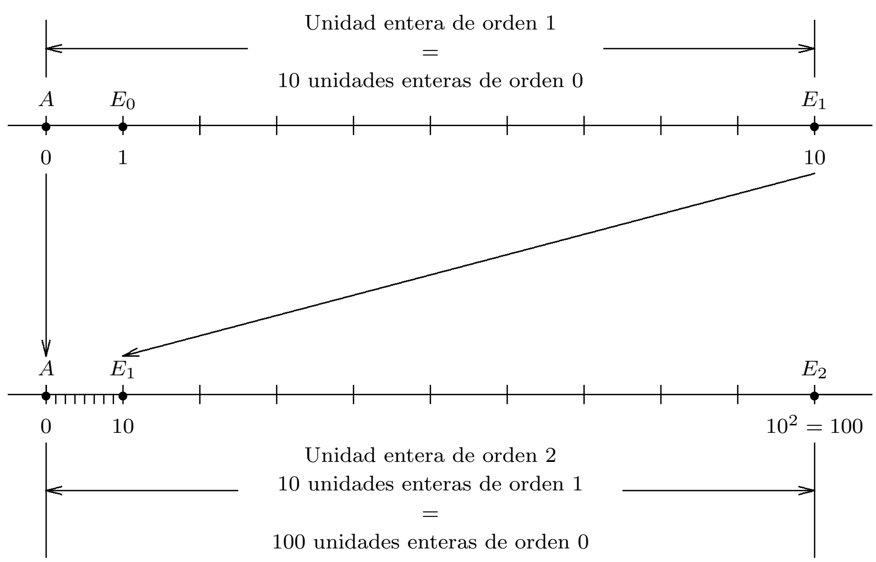


Figura 9.

#### 1.2.4.2. Unidades fraccionarias

**Unidad fraccionaria de orden 1.** Está dada por segmentos de recta que se obtienen al subdividir en 10 partes iguales la unidad entera de orden 0. Si se representa por $AF_1$ (Figura 10) se tiene por definición que:

$$m\,(AF_1|AE_0) = \tfrac{1}{10}$$

**Unidad fraccionaria de orden 2.** Está dada por segmentos de recta que se obtienen al subdividir en 10 partes iguales la unidad fraccionaria de orden 1, o lo que es lo mismo, de subdividir en 100 partes iguales una unidad entera de orden 0. Si se representa por $AF_2$ se tiene por definición que:

$$m\,(AF_2|AF_1) = \tfrac{1}{10}$$

y

$$m\,(AF_2|AE_0) = \tfrac{1}{10^2}.$$

Reiterando este proceso se tiene, en general, que una unidad fraccionaria de orden $k$ se obtiene de subdividir en 10 partes iguales una unidad fraccionaria de orden $k-1$, o lo que es lo mismo, de subdividir en $10^k$ partes iguales una unidad entera de orden 0. Si se representa por el segmento $AF_k$, se tiene por definición que:

$$m\,(AF_k|AF_{k-1}) = \tfrac{1}{10}$$

y

$$\begin{aligned} m\,(AF_k|AE_0) &= m\,(AF_k|AF_{k-1}) \cdot m\,(AF_{k-1}|AE_0) \\ &= \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{10^{k-1}} \\ &= \tfrac{1}{10^k}. \end{aligned}$$

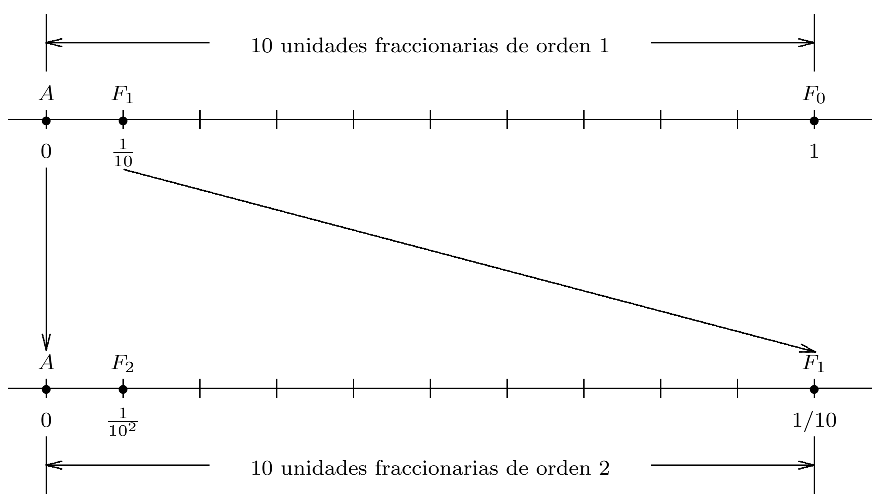



Figura 10.

Una medición respecto de un sistema dado, es un proceso de comparaciones sucesivas mediante el cual se trata de obtener una cantidad "*equivalente*" a la que se mide, a partir de unidades conocidas del sistema. Queremos mostrar cómo el numeral decimal de un número real no es otra cosa que el registro del proceso de medición de cierto segmento utilizando el sistema de medición decimal abstracto.

Sea $x$ un número real y $AP$ el segmento asociado con él en la recta numérica. Se trata de construir, con unidades de nuestro sistema abstracto, un segmento congruente con $AP$. La escogencia de unidades se hace en forma ordenada y en orden de magnitud decreciente, a partir de la unidad de orden mayor que puede acomodarse en $AP$ por lo menos una vez. Una medición particular puede conducir a un resultado del siguiente tipo: $AP$ mide "2 *unidades enteras de orden* 2, 1 *unidad entera de orden* 1, 6 *unidades enteras de orden* 0, 1 *unidad fraccionaria de orden* 1, 7 *unidades fraccionarias de orden* 2 *y* 5 *unidades fraccionarias de orden* 3". (Si se tratara de una longitud física podríamos decir que la longitud medida tiene 2 hectómetros, 1 decámetro, 6 metros, 1 decímetro, 7 centímetros y 5 milímetros). Esto quiere decir que al yuxtaponer, a partir del punto de referencia $A$, las unidades descritas anteriormente se obtiene un segmento congruente con el segmento $AP$, tal como se visualiza en la figura 11.

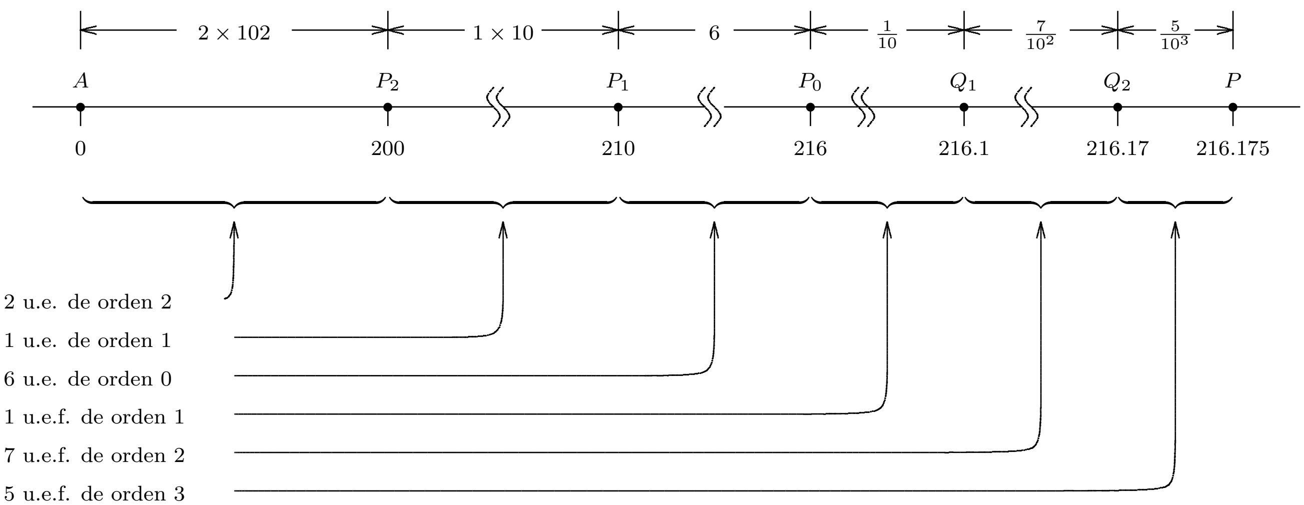



Figura 11.

Si indicamos la posición de las diferentes unidades utilizadas, tal como se indica en la figura, se puede escribir,

$$
\begin{aligned}
x &= m\,(AP) \\
&= m\,(AP_2) + m\,(P_2P_1) + m\,(P_1P_0) + m\,(P_0Q_1) + m\,(Q_1Q_2) + m\,(Q_2P) \\
&= 2 \times 10^2 + 1 \times 10 + 6 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{7}{10^2} + \tfrac{5}{10^3},
\end{aligned}
$$

que no es otra cosa que la expresión polinómica del numeral 216.175 y por lo tanto podemos escribir

$$x = m\,(AP) = 216.175.$$

Como puede apreciarse, la sucesión de dígitos que constituyen el numeral de $x$ permite reconstruir el proceso de medición, pues permite identificar el orden y el número de unidades utilizadas, sean enteras o fraccionarias, determinadas por la posición y el valor del dígito en el numeral. El punto decimal marca la transición en el uso de unidades enteras y unidades fraccionarias.

El caso que hemos considerado es muy particular pero las conclusiones que hemos extraído respecto del significado geométrico de los dígitos que constituyen el numeral decimal son perfectamente generalizables. Un caso más general se presentaría si el proceso de medición no pudiese terminar después de un número finito de pasos y hubiese que seguir utilizando indefinidamente unidades fraccionarias de orden mayor, es decir cada vez más pequenas. Así por ejemplo, volviendo a nuestro ejemplo bien podría ocurrir que al utilizar las 5 unidades fraccionarias de orden 3 no se tuviese aún la medida exacta de1 segmento $AP$ y hubiese que pasar a utilizar, por ejemplo, 3 unidades fraccionarias de orden 4, después 2 unidades fraccionarias de orden 5 y así sucesivamente. Esto equivaldría en nuestro modelo geométrico (Ver Figura 12) a determinar una sucesión de puntos $Q_k$, cada vez más próximos a $P$, a medida que $k$ crece. Específicamente $m\,(Q_kP) \to 0$ (se lee $m\,(Q_kP) \to 0$ tiende a cero) cuando $k \to \infty$ (se lee $k$ tiende a $\infty$).

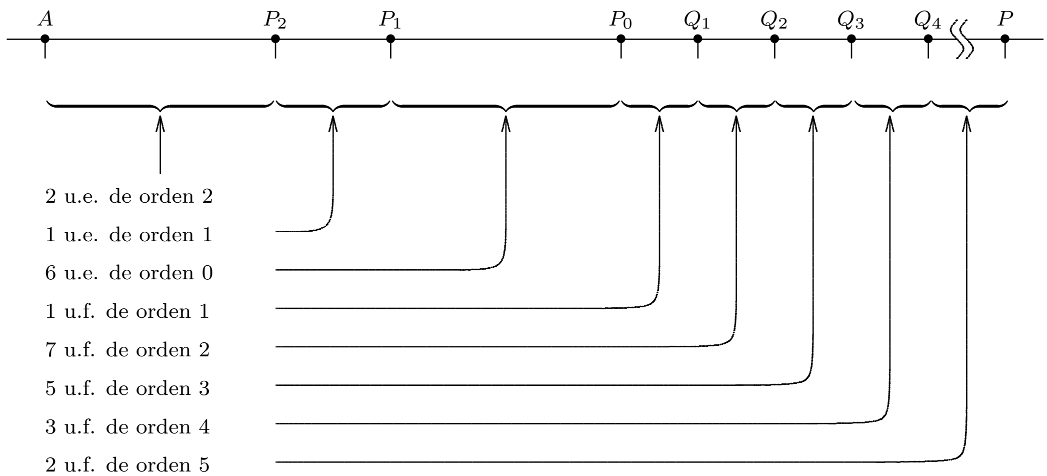



Figura 12.

Analíticamente se puede escribir en este caso

$$\begin{aligned} x &= m(AP) \\ &= m(AP_2) + m(P_2P_1) + m(P_1P_0) + m(P_0Q_1) + m(Q_1Q_2) + m(Q_2Q_3) + \cdots \\ &= 2 \times 10^2 + 1 \times 10 + 6 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{7}{10^2} + \tfrac{5}{10^3} + \tfrac{3}{10^4} + \tfrac{2}{10^5} + \cdots \end{aligned}$$

O sea que $x = 216.17532\ldots$

Los puntos suspensivos indican que el proceso de medición continúa indefinidamente de acuerdo con el método de comparación y que los resultados obtenidos se van agregando obteniendo valores cada vez más aproximados a la medida exacta.

Esta manera de interpretar numerales decimales como formas de representar una medición de un segmento en una recta numérica utilizando un sistema decimal abstracto de medición, permite también ubicar números reales en una recta numérica a partir de su representación decimal. Por ejemplo, si se quiere ubicar el punto $P$ que le corresponde al número $x = 31.52$ en una recta numérica, después de adoptar un patrón de medida, se yuxtaponen a partir el origen tres unidades enteras de orden 1, una unidad entera de orden 0, cinco unidades fraccionarias de orden 1 y dos unidades fraccionarias de orden 2. Se concluye, igualmente, que la ubicación de números representados por numerales decimales infinitos tendrá que ser muy aproximada.

### 1.2.5. Aproximación de números reales por racionales

Consideremos el número real $x$ representado por el numeral $527.165411\ldots$, que puede ser finito o infinito. A $x$ le corresponde un punto $P$ sobre la recta numérica de origen $A$. De acuerdo con la interpretación geométrica que dimos a los numerales, el dígito 5 con que empieza el numeral indica que la longitud del segmento $AP$ está entre 5 y 6 unidades de orden 2. Es decir que $x$ se puede acotar entre $5 \times 10^2 = 500$ y $6 \times 10^2 = 600$. Teniendo en cuenta que 5 unidades enteras de orden 2 son equivalentes a 50 unidades enteras de orden 1, el dígito 2 que sigue en el numeral indica que en el proceso de medición la longitud del segmento $AP$ está dada entre 52 y 53 unidades enteras de orden 1. Por lo tanto, $x$ se puede acotar entre $52 \times 10 = 520$ y $53 \times 10 = 530$. Este proceso de razonamiento se puede continuar hasta incluir los dígitos que representan unidades fraccionarias. Por ejemplo, al llegar al dígito 6 se puede argumentar que la longitud del segmento $AP$ está entre 52716 y 52717 unidades fraccionarias de orden 2, por lo que se puede acotar a $x$ entre $52716 \times \frac{1}{10^2} = 527.16$ y $52717 \times \frac{1}{10^2} = 527.17$. Se puede por lo tanto escribir:

$$
\begin{array}{cl}
500 < 527.16541\ldots < 600 & \text{(Usando unidades enteras de orden 2)} \\
520 < 527.16541\ldots < 530 & \text{(Usando unidades enteras de orden 1)} \\
527 < 527.16451\ldots < 528 & \text{(Usando unidades enteras de orden 0).} \\
527.1 < 527.16541\ldots < 527.2 & \text{(Usando unidades fraccionarias de orden 1).} \\
527.16 < 527.16541\ldots < 527.17 & \text{(Usando unidades fraccionarias de orden 2)}
\end{array}
$$

Las desigualdades anteriores permiten ver, que dado un número real cualquiera, es posible ir acotándolo entre parejas de números racionales cada vez más próximos a él, utilizando la interpretación geométrica del numeral decimal que lo representa. Respecto de estas aproximaciones se pueden hacer las siguientes observaciones: Cuando acotamos a $x$ utilizando unidades enteras de orden 2, quiere decir que aproximamos a $x$ tomando una unidad entera de este orden como medida del grado ó nivel de aproximación que queremos tener. Al hacer este primer acotamiento encontramos que $x$ está entre 500 y 600, cuya diferencia es $10^2$, o sea la medida de una unidad entera de orden 2. Esto quiere decir, en particular, que si utilizamos a 500 o a 600 como valor aproximado de $x$, el error que cometemos es menor que $10^2$. Es decir, en este caso:

$$|x - 500| < 10^2, \quad |x - 600| < 10^2.$$

Un análisis similar se puede realizar cuando acotamos a $x$ utilizando unidades enteras de orden 1 En este caso aproximamos a $x$ tomando una unidad entera de orden 1 como medida del grado de aproximación que queremos tener. Al hacer este segundo acotamiento encontramos que $x$ está entre 520 y 530 cuya diferencia es 10, o sea es la medida de una unidad entera de orden 1. Esto significa que si utilizamos a 520 o 530 cómo valor aproximando de $x$, el error que cometemos no es mayor que 10. Es decir, en este caso:

$$|x - 520| < 10, \quad |x - 530| < 10.$$

El análisis anterior también es válido cuando queremos acotar a $x$ utilizando unidades fraccionarias. Si tomamos, por ejemplo, como medida del grado de aproximación una unidad fraccionaria de orden 2, representadas en este caso por el dígito 6, encontramos que $x$ está entre 527.16 y 527.17, cuya diferencia es $\frac{1}{10^2}$, o sea la medida de una unidad fraccionaria de orden 2. Esto implica que si utilizamos 527.16 o 527.17 como valor aproximado de $x$, el error que cometemos es menor que 1102. Es decir, en este caso:

$$|x - 527.16| < \tfrac{1}{10^2}, \quad |x - 527.17| < \tfrac{1}{10^2}.$$

En el ejemplo que hemos venido considerando, las aproximaciones 500, 520, 527.16 se llaman *aproximaciones por defecto* pues son menores que $x$, y las aproximaciones 600, 300, 517.17, se llaman *aproximaciones por exceso*, pues son mayores que $x$.

Una pregunta surge naturalmente en este contexto. ¿Cuál de las dos aproximaciones es mejor? Es decir, ¿cuál de los dos valores es más cercano a $x$? Para saber si 500 está más cerca a $x$ que 600 es necesario conocer el valor del dígito siguiente a 5 que da el número de unidades de orden inmediatamente inferior utilizadas en el proceso de medición. Como dicho dígito es 2, $x$ estaría entre 520 y 530, esto quiere decir que $x$ está más cerca de 500 que de 600. Debe ser claro entonces, que si en lugar del dígito 2 hubiera un dígito mayor que 5, $x$ estaría más cerca de 600 que de 500. Si el dígito que siguiera a 5 fuese 5 se requiere mirar los dígitos siguientes y si todos los siguientes fueran 0, 500 y 600, serían equidistantes de $x$.

Es importante observar que si aproximamos a $x$ por 500 entonces se tiene la seguridad que el error de aproximación es a lo sumo la mitad de una unidad entera de orden 2. Es decir:

$$|x - 500| < \tfrac{10^2}{2}$$

En este caso se dice que 5 da el número de unidades enteras de orden 2 más próximo a $x$. Por lo tanto, cuando se toma $x = 500$ se dice que $x$ se ha redondeado al número más próximo de unidades enteras de orden 2 (o a las centenas). Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y extendiéndolas a los dígitos que siguen en el numeral de $x$, se puede escribir, si $x = 527.16541$:

530 redondea a $x$ al número más próximo de unidades enteras de orden 1 (se suele decir, a la décima más próxima). En este caso
$$|x - 530| \leq \tfrac{10}{2}.$$

527 redondea a $x$ al número más próximo de unidades enteras de orden 0 (se suele decir, al número entero más próximo). En este caso
$$|x - 527| \leq \tfrac{1}{2}.$$

527.2 redondea a $x$ al número más próximo de unidades fraccionarias de orden 1 (se suele decir a la décima más próxima). En este caso
$$|x - 527.2| \leq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{10}.$$

527.17 redondea a $x$ al número más próximo de unidades fraccionarias de orden 2 (se suele decir, a la centésima más próxima). En este caso,
$$|x - 527.17| \leq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{10^2}.$$

Etc.

Podemos resumir de manera general las observaciones anteriores diciendo que, siempre que se redondea un número real a la unidad entera o fraccionaria de orden $k$ más próxima, el error que se comete no es mayor que la mitad de la medida de dicha unidad. Así, si la unidad es entera de orden $k$, el error no es mayor que $\frac{10^k}{2}$, o si es fraccionaria del mismo orden, el error no es mayor que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^k}$.

### 1.2.6. Mediciones empíricas, cifras significativas y notación científica

En el trabajo científico y técnico las mediciones se suelen expresar mediante numerales decimales. En el proceso ideal de medición que hemos venido discutiendo siempre es posible disponer de unidades de medida tan pequenas como se quieran y los resultados de tales mediciones son exactas. En las mediciones empíricas esto no es posible y los resultados son siempre aproximados, pues aún los instrumentos de medición más finos sólo disponen de un número finito de unidades y justamente la menor (que a veces se le llama **la unidad de medida del instrumento**) define su **nivel de precisión**. Como consecuencia de lo anterior una medición empírica se representa con un numeral decimal finito, que expresa un resultado aproximado a partir del cual, dependiendo de la unidad de medida del instrumento y la forma de lectura, permite dar un acotamiento el resultado exacto de la medición que se realiza.

Cuando se realiza la lectura de una medición solo deben transcribirse los dígitos sobre los cuales se está razonablemente seguro. Con este criterio, *los dígitos requeridos para expresar el resultado de la medición en términos de las unidades más finas utilizadas en su lectura se suelen llamar* **cifras significativas**.

Los siguientes ejemplos ayudan a clarificar las ideas anteriores. Supongamos que se mide la longitud de una varilla con un metro cuyas divisiones más finas son los centímetros, obteniéndose la situación que se presenta en la Figura 13.

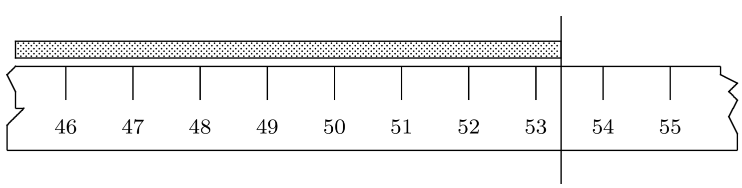



Figura 13.

La lectura podría ser 53.4 cm. Los dos primeros dígitos serían seguros, y el tercero razonablemente seguro, pues está afectado de cierta incertidumbre. Para otro lector, por ejemplo, la lectura podría ser 53.3 o 53.5. Si el dato 53.4 cm se da escuetamente se asume que se puede cometer un error en la medición no mayor que 0.1 cm y que, por lo tanto. la medición exacta está entre 53.3 y 53.5. Si el que hace la lectura juzga conveniente indicar un grado de incertidumbre diferente, debe hacerlo y bien podría expresar la medición como $53.4 \pm 0.2$ cm para indicar que el resultado exacto esta entre 53.2 y 53.6. En cualquier caso, el resultado tendría 3 cifras significativas pues la unidad de medida al fin utilizada en la lectura es el milímetro y al expresar la medición en esta unidad se expresaría como 534 mm. es decir, se utilizarían los tres dígitos.

Quien realiza la medición anterior también podría, en lugar de "interpolar" su lectura, redondearla al número de unidades próximas dado por el instrumento. De acuerdo con este método la lectura anterior seria 53 cm. En este caso el resultado tendría dos cifras significativas.

Cuando se utiliza este método, el error que se comete no es mayor que la mitad de la unidad de medida del instrumento. Este nivel de aproximación se subentiende cuando los datos empíricos se obtienen con dicho convenio. En el ejemplo que nos ocupa la presentación del numeral 53 como resultado de la medición lleva a asumir que el resultado exacto está entre 52.5 y 53.5.

El concepto de cifras significativa tiene implicaciones que deben ser tenidas en cuenta en la presentación de datos experimentales[5]. Así, por ejemplo, aunque matemáticamente $53.4 = 53.40$, no es lo mismo presentar un numeral que otro, el segundo resultado estar a indicando un nivel de precisión que no tiene la medición que hemos realizado. Se asumiría por los lectores que la medición se realizó con una incertidumbre de 0.01 cm (0.1 mm) que estamos lejos de haber obtenido. De igual manera si se quisiera expresar el resultado en milímetros habría que escribir 534 mm. y no 534.0 mm. Si se quisiera expresar en metros, habría que escribir 0.534 m y no 0.5340 m. En cualquier caso el numeral debe poder permitir reproducir con fidelidad el nivel de precisión real con que se hizo la medición.

Si para medir la misma varilla tuviéramos un metro cuyas divisiones más finas son los mm se podría tener una situación como la que se indica en la Figura 14.

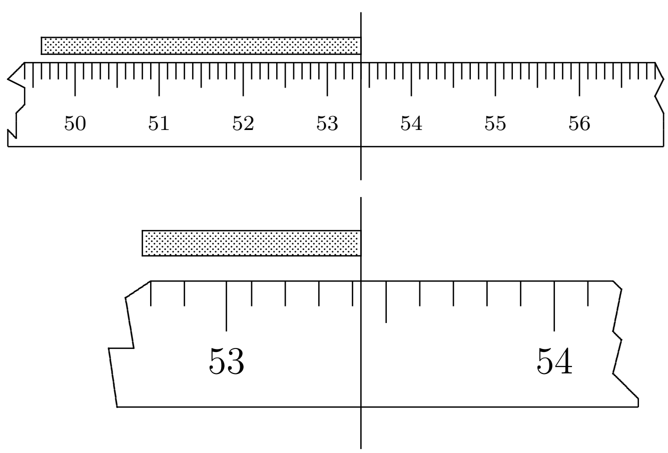



Figura 14.

La lectura podría ser 53.44 cm, numeral que tendría 4 cifras significativas. Si el resultado se da escuetamente se asume que el error que se comete en la medición no es mayor que 0.01 cm y que el resultado exacto está entre 53.43 y 53.45.

Si la lectura anterior se hace redondeando al número de unidades más próximas dado por el instrumento, el resultado sería 53.4 cm y tendría 3 cifras significativas. El error que se cometería en este caso no seria mayor que 0.05 y por lo tanto se debe reportar como $53.4 \pm 0.05$.

En el contexto de las mediciones empíricas suele utilizarse la llamada **notación científica**, que en las

[5] Este tema es abordado de manera más exhaustiva en los cursos introductorios de ciencia y en sus laboratorios respectivos.

calculadoras electrónicas se utiliza para aumentar su capacidad de operación. Un número está escrito en notación científica cuando se expresa en la forma $\alpha \times 10^n$ o $\alpha \times 10^{-n}$, $n$ un entero positivo y $\alpha$ un número mayor o igual que 1 y menor que 10 ($1 \leq \alpha < 10$). Cuando el número está asociado con una medición la notación científica facilita con frecuencia la determinación de su nivel de precisión. Así, por ejemplo, si la distancia entre dos ciudades se reporta como 451000 m, se entendería que la medición tiene un nivel de incertidumbre menor que 1 m. La presentación sería incorrecta si el nivel de incertidumbre es de 1000 m, es decir de un km. En este caso si el resultado se escribe en notación científica, como $4.51 \times 10$ m y las tres cifras de 4.51 se consideran significativas ello implicaría que el nivel de incertidumbre de la medición sería $0.01 \times 10^5 = 1000$ que está de acuerdo con el nivel de precisión real de la medición. Por otra parte si en realidad la medición fue hecha con un nivel de incertidumbre menor que 1 m la expresión correcta en notación científica sería $4.51000 \times 10^5$ m. La incertidumbre según esta forma de presentación sería $0.00001 \times 10^5$ m $= 1$ m que concuerda con la precisión real de la medición. **La notación científica** *se utiliza comúnmente para expresar cantidades físicas muy grandes o muy pequenas respecto de una unidad de medida determinada. Cuando se trata de resultados empíricos el coeficiente que aparece en la notación científica debe estar expresado en cifras significativas.*

### 1.2.7. Cálculo aproximado

*Debido al carácter aproximado de las mediciones físicas y a las características intrínsecas de las operaciones con decimales en el cálculo numérico, se presenta continuamente la necesidad de aproximar reales por medio de números racionales presentados por numerales decimales finitos.* En el siguiente ejemplo se presentan claramente ambos aspectos. Si se quiere calcular el área de un círculo real debemos utilizar la fórmula $A = 4\pi r^2$. En primer lugar es necesario medir $r$ dentro de un determinado nivel de precisión cuya medición en términos decimales será un numeral decimal con un número específico de cifras significativas. Pero para poder efectuar la multiplicación tendremos que usar una aproximación racional de $\pi$. Las calculadoras usan para todos sus cálculos una aproximación fija de $\pi$, pero es claro que ésta puede ajustarse según el número de cifras significativas de $r$. Finalmente la multiplicación que se realiza con el valor aproximado de $\pi$ conduce a un numeral decimal que tendrá más dígitos que $r$ y que debe ser ajustado para no dar la impresión falsa de que es un resultado con un nivel de precisión mayor que el que presenta $r$.

El problema que se plantea naturalmente en el cálculo numérico y en la presentación de datos empíricos es el de estimar los errores que se cometen al efectuar operaciones con números aproximados. Existen diferentes técnicas para estimar tales errores y las guías de laboratorio suelen traer algunos criterios que se presentan al estudiante de manera mecánica. En el caso de cálculos simples existe un método directo y muy intuitivo que resulta fácil de aplicar gracias a las calculadoras electrónicas. ***Este método consiste en efectuar los cálculos que se deben realizar combinando los errores, que pueden ser positivos o negativos, para obtener un valor máximo aproximado y un valor mínimo aproximado. El error cometido será la diferencia entre ambos valores***. Los siguientes ejemplos se dan para precisar el uso de esta técnica.

1. Supongamos que se quiere calcular el perímetro de un rectángulo y se tienen las siguientes mediciones de los lados: 21.2 cm y 15.3 cm. Por la forma de presentación de los datos se subentiende que el error que puede afectar las mediciones son a lo sumo de 0.1 cm. De acuerdo con esto, si denotamos al perímetro del rectángulo con $P$, se puede escribir:

   Máximo valor que puede tener $P = 2 \times 21.3 + 2 \times 15.4 = 73.4$ cm.

   Mínimo valor que puede tener $P = 2 \times 21.1. + 2 \times 15.2 = 72.6$ cm.

   Valor de $P$ de acuerdo con las mediciones obtenidas: $2 \times 21.2 + 2 \times 15.3 = 73.0$.

   Es claro entonces que al tomar $P = 73.0$ los errores más grandes positivos o negativos que se pueden cometer son respectivamente $73.4 - 73.0 = 0.4$ ó $72.6 - 73.0 = -0.4$. Tomando por lo tanto el error de mayor valor absoluto, el cálculo de perímetro se puede reportar como $P = 73.0 \pm 0.4$. En este caso se considera que el resultado tiene 3 cifras significativas

2. Supongamos ahora que se quiere calcular el área del rectángulo, anterior. Utilizaremos la letra $A$ para referirnos a dicha área. Siguiendo el procedimiento anterior para estimar el error se puede escribir:

   Valor máximo que puede tener $A = 21.3 \times 15.4 = 328.02$

   Valor mínimo que puede tener $A = 21.1 \times 15.2 = 320.72$

   Valor de $A$ de acuerdo con las mediciones obtenidas $= 21.2 \times 15.3 = 324.36$

   Al tomar $A = 324.36$ el error más grande positivo que se puede cometer es $328.02 - 324.36 = 3.66$ y el máximo error negativo que se puede cometer es $320.72 - 324.36 = -3.64$. Por comodidad se redondea el error a 4 lo que no afecta el resultado notablemente. Así, se puede reportar $A = 324 \pm 4$ cm$^2$, resultado que tiene tres cifras significativas. Observe que no tiene mucho sentido escribir $A = 324.36 \pm 4$ cm$^2$ pues el error que se comete es mayor que una centésima y que una décima y por lo tanto afecta solo unidades enteras

3. Supongamos que se sabe que $A = 352$ cm$^2$ y que uno de sus lados es igual a 21.2 cm. Se quiere calcular, a partir de estos datos el otro lado $L$. Puesto que se subentiende que el error que afecta a $A$ es $\pm 1$ cm, aplicando el procedimiento anterior se puede escribir:

   Valor máximo que puede tener $L = \frac{353}{21.1} = 16.8$

   Valor mínimo que puede tener $L = \frac{351}{21.3} = 16.4$

   Valor de $L$ de acuerdo con las mediciones obtenidas $= \frac{352}{21.2} = 16.6$

   El máximo error positivo que se puede cometer es $16.8 - 16.6 = 0.2$ y el máxima error negativo que se puede cometer es $16.4 - 16.6 = -0.2$. Tomando el error de mayor valor absoluto el cálculo de $L$ se puede reportar como $L = 16.6 \pm 0.2$ l resultado tiene tres cifras significativas.

### 1.2.8. Otros sistemas de medición

Como se dijo al comienzo de 1.2.4, existen muchos sistemas de medición. El que sé impone es el sistema decimal en donde los múltiplos y submúltiplos del patrón de medida están ligados entre sí por potencias de 10, y es el sistema que se ha estudiado en 1.2.4.

Otros sistemas de medición se pueden obtener estableciendo una relación diferente entre los múltiplos y submúltiplos del patrón de medida. En lugar de estar ligados entre sí por potencias de 10 se pueden ligar por potencias de 2, 3, 4, etc. obteniendo así sistemas de medición en base 2 (binario), base 3, base 4, etc., respectivamente. Veamos un poco más. de cerca el sistema de medición en base 2 o binario.

El proceso de medición con el sistema de base 2 es exactamente el mismo que con el sistema decimal, pero las unidades, enteras y fraccionarias, están ligadas por potencias de 2 en lugar de potencias de 10. En el sistema de medición binario una unidad entera de orden k se obtiene por yuxtaposición de 2 unidades enteras de orden $k-1$ o al yuxtaponer $2^k$ unidades enteras de orden 0. De manera análoga una unidad fraccionaria de orden $k$ se obtiene al subdividir en dos partes iguales una unidad fraccionaria de orden $k-1$, o lo que es lo mismo de subdividir en $2^k$ partes iguales una unidad entera de orden 0.

Debido a que 2 unidades enteras de orden $k$ conforman 1 unidad entera de orden $k+1$ y 2 unidades fraccionarías de orden $k$ conforman una unidad fraccionaria de orden $k-1$, en cualquier medición con este sistema sólo habrá 0 ó 1 unidad entera de orden $k$ y 0 ó 1 unidad fraccionaria de orden $k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Puesto que en este caso los numerales binarios pueden interpretarse, como en el caso de los numerales decimales, como registros de los procesos de medición con un sistema de medición binario abstracto, lo dicho anteriormente significa que en los numerales binarios sólo pueden aparecer el 0 y el 1 como "*dígito*". Es decir, son símbolos de la forma 10011.001, cuyo significado se define mediante la expresión polinómica

$$x = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{0}{2^2} + \tfrac{1}{2^3}.$$

Como en el caso de los numerales decimales, los numerales binarios pueden ser finitos o infinitos y estos a su vez pueden ser periódicos (representan números racionales) o no periódicos (representan números irracionales). Podemos concluir diciendo que un numeral binario es un símbolo de la forma

$$a_n \dots a_1 a_0 . b_0 b_1 b_2 b_3 \dots ,$$

en el cual los $a_i$ y los $b_j$ son ó 0 ó 1 y el número real que representa está definido mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} a_n \dots a_1 a_0 . b_0 b_1 b_2 b_3 \dots &= a_n \times 2^n + \cdots + a_1 \times 2 + a_0 \\ &\quad + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots , \end{aligned}$$

Queda la pregunta de cómo pasar de un numeral binario a un numeral decimal y viceversa.

El primer problema es fácil ya que, el caso del numeral binario finito se puede reconstruir la expresión polinómica del número (en potencias de 2). Así por ejemplo, si $x = 11011.011$ en binario, se puede escribir:

$$x = 2^4 + 2^3 + 2 + 1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} = 27.375 \text{ (en decimal).} \tag{1.3}$$

En el caso de un numeral binario infinito periódico, se procede de la misma forma que cuando se busca la expresión racional de un decimal infinito periódico (Ver Ejercicio 29, Unidad 1.1). Para hacer ésto con numerales binarios, observe que el punto en cualquier numeral binario se debe correr multiplicando por una potencia de 2. Por ejemplo, si $x = 111.\overline{01}$ en binario, entonces $2^{-2}x = 1.11\overline{01}$ y $2^2 x = 11101.\overline{01}$.

Escribamos ahora el numeral binario $111.\overline{01}$ en decimal. Por lo dicho antes se tiene:

$$2^2 x - x = 10110,$$

pero 10110 representa en binario el mismo entero que representa 22 en decimal. Así se tiene que:

$$x = \frac{22}{2^2 - 1} = \tfrac{22}{3} = 7.\overline{3}$$

En el caso de un irracional, es decir, un binario infinito no periódico, se puede emplear el método usado en (1.3) tomando aproximaciones mediante numerales binarios finitos, para obtener aproximaciones mediante decimales finitos del número dado.

Para pasar de un numeral decimal a uno binario se debe reconstruir el proceso de medición en forma algebraica. Es decir, se debe escribir el numeral decimal como suma de potencias de 2. Por ejemplo, si $x = 33.375$ en decimal, debemos encontrar la potencia más alta de 2 que es menor o igual a 33.375. En este caso es $2^5$ y por lo tanto

$$x = 2^5 + 1.375.$$

Repetimos el procedimiento para el residuo

$$x = 2^5 + 2^0 + 0.375,$$

y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} x &= 2^5 + 2^0 + \frac{1}{2^2} + 0.125 \\ &= 2^5 + 2^0 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} \\ &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 2^0 \\ &\quad + 0 \times \tfrac{1}{2} + 1 \times \tfrac{1}{2^2} + 1 \times \tfrac{1}{2^3}. \end{aligned}$$

Es decir que el numeral binario correspondiente es

$$x = 100001.011.$$

En este caso hemos obtenido un numeral binario finito, sin embargo es posible que aunque el numeral decimal sea finito, el numeral binario sea infinito. Esta misma técnica se puede emplear para numerales decimales infinitos, aunque el proceso es muy lento. Si el numeral decimal es periódico, en general, al pasarlo a binario el periodo se hace más grande.

En esta sección, hemos visto de cerca el sistema de medición binario. Este sistema es uno de los que utilizan los computadores para realizar internamente sus operaciones. Los otros sistemas de medición (base 3, 4, 5, etc.) se comportan de la misma forma, pero rara vez nos encontramos éstos.

### 1.2.9. Ejercicios

En los ejercicios 1 a 15 responda verdadero o falso justificando su respuesta.

1. Si medida de un segmento es independiente del patrón de medida que se escoja.
2. Siempre es posible encontrar un patrón de medida que se acomode un número entero de veces en un segmento de recta dado.
3. Dado un patrón de medida y un segmento de recta arbitrario, siempre es, posible encontrar un número entero de unidades fraccionarias que se acomoden en el segmento dado.
4. El conjunto de números racionales es suficiente para representar la totalidad de resultados posibles en un proceso de medición
5. La diagonal de un cuadrado es inconmensurable con respecto al lado.
6. La longitud de una circunferencia es conmensurable con respecto a su radio.
7. El valor absoluto dé un número real distinto de cero es un número real negativo.
8. No existe ningún número racional $\alpha$ tal que $|\alpha - \pi| < 10^{-6}$.
9. El numeral decimal de un número real es el registro del proceso de medición de un segmento, utilizando un sistema de medición abstracto.
10. Una unidad fraccionaria de orden $k-2$ equivale a unidades fraccionarias de orden $k$.
11. Una unidad entera de orden $k$ ($k \geq 2$) equivale a 100 unidades enteras de orden $k-2$.
12. En las mediciones empíricas los resultados son siempre aproximados.
13. El dato 53.4cm tiene dos cifras significativas.
14. El dato 152.2 Km indica qué el resultado exacto de la medición está dado entre 152.19. Km. y 152.21 Km.
15. Dado el número $x = 3671.18\overline{34}$ se tiene que 3671.1 redondea a $x$, a la décima más cercana (unidad fraccionaria de orden 1).
16. Dados dos segmentos $AB$ y $AC$ tales que $m\,(AC \mid AB) = r$ calcule $m\,(AB \mid AC)$.
17. Dados tres segmentos $AB$, $AC$ y $AD$ tales que $m\,(AC \mid AB) = r$ y $m\,(AD \mid AB) = s$, calcule $m\,(AC \mid AD)$ y $m\,(AD \mid AC)$.
18. Sobre una recta ideal, con un punto de referencia $A$ y un segmento $AB$ como patrón de medida, construya puntos $P$ tales que:

    (a) $m\,(AP \mid AB) = \dfrac{3}{4}$

    (b) $m\,(AP \mid AB) = \dfrac{10}{7}$

    (c) $m\,(AP \mid AB) = -\dfrac{2}{5}$

    (d) $m\,(AP \mid AB) = -\dfrac{3}{2}$

    (**Sugerencia**: Aplique el Teorema de Thales construyendo una recta auxiliar que pase por $A$).
19. Sobre una recta ideal, con un punto de referencia $A$ y un segmento $AB$ como patrón de medida, construya puntos $P$ tales que

    (a) $m\,(AP \mid AB) = \sqrt{3}$ (b) $m\,(AP \mid AB) = \sqrt{5}$

    (**Sugerencia**: Utilice el procedimiento empleado en el texto para $\sqrt{2}$).
20. Efectúe el siguiente cálculo:

    (a) $|4-9|$ (d) $3-|-3|$

    (b) $|-3|-|-4|$ (e) $\frac{-2}{|-5|}$

    (c) $|4|+|-9|$ (f) $|-3|\cdot|5|$

21. Calcule las distancias de $A$ a $B$, de $B$ a $C$, de $C$ a $B$ y de $A$ a $C'$ si $A$, $B$ y $C$ son tres puntos, en una recta numérica con coordenadas respectivas

    (a) $-6, -2, -4$
    (b) $3, 7, -5$
    (c) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$
    (d) $3.5, -7.23, -5.32$

22. Sobre una recta numérica represente el conjunto de puntos cuyas coordenadas $x$ satisfacen:

    (a) $|3 - x| = 1$
    (b) $|x| = 6$
    (c) $|x - 2| < \frac{1}{2}$
    (d) $\left|x + \frac{3}{2}\right| \leq 3$

23. Dados los números reales $\frac{1}{3}, \frac{22}{7}, \pi$ y $\sqrt{5}$, encuentre respectivamente números racionales que disten de cada uno de ellos menos de $10^{-3}, 10^{-5}$ y $10^{-7}$.

24. Dados los siguientes numerales decimales, redondee a la unidad fraccionaria de orden 3 más próxima:

    (a) $2.18531\overline{853}$
    (b) $103.215003$
    (c) $0.000239$
    (d) $35.3727542\ldots$

    Estime el error cometido en cada caso

25. Los siguientes numerales se han obtenido al redondear ciertos números. Senale cuál ha sido la unidad más próxima a la cual se ha redondeado, diga entre que valores se encuentran los valores originales y estime el error cometido.

    (a) $345.32$
    (b) $840$
    (c) $5.3001$
    (d) $13.45209$
    (e) $-0.002$
    (f) $-500.8$

26. De la expresión decimal de los siguientes racionales con un error menor de $10^{-3}$:

    (a) $\dfrac{4}{3}$
    (b) $\dfrac{213}{7}$
    (c) $\dfrac{15}{21}$
    (d) $\dfrac{31}{43}$

27. Si aproximamos $\frac{1}{6}$ mediante 0.16 y 0.17, estime el error que se comete en cada caso. ¿Cuál de estas aproximaciones es mejor?

28. Estime el error que se comete con una calculadora de 8 dígitos en pantalla cuando da los números $\pi$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $e$.

29. Calcule $\sqrt{2}$ con un error menor que $10^{-3}$ y $\sqrt{7}$ con un error menor que $10^{-4}$ (Use la calculadora).

30. Efectúe los siguientes cálculos sabiendo que $a = 25.3 \pm 0.3$, $b = 11.2 \pm 0.2$, $c = 15.8 \pm 0.1$.

    (a) $a + b + c$
    (b) $a \cdot b \cdot c$
    (c) $\dfrac{a \cdot b}{c}$
    (d) $\dfrac{a - c}{b - c}$
    (e) $\dfrac{a \cdot (b + c)}{c}$

    En cada caso dé la respuesta senalando el máximo y el mínimo error cometido.

31. Encuentre reglas para la multiplicación y adición de números reales expresados mediante numerales binarios. Efectúe los siguientes cálculos con numerales binarios:

    (a) $1011 + 11$
    (b) $1001 - 10$
    (c) $11 \times 11$
    (d) $1010 \times 111$

32. Encuentre el numeral correspondiente a los siguientes numerales decimales:

    (a) 673
    (b) 41.25
    (c) 11

33. Encuentre el numeral decimal correspondiente a los siguientes numerales binarios:

    (a) $1101$
    (b) $110.\overline{01}$
    (c) $111.11$
    (d) $1.\overline{01}$

34. Se sabe que un trozo de material de una balanza con precisión de gramos tiene un peso entre 400 y gramos. ¿Con cuántas cifras significativas se puede dar su peso?

35. Un corredor recorre cierta distancia en un tiempo que oscila entre 12 y 15 minutos. Si el tiempo que gasta se cronometra con un reloj que tiene precisión de décimas de segundo, ¿con cuántas cifras significativas (en décimas de segundo) se puede dar este tiempo?

36. Los siguientes numerales que representan diferentes mediciones físicas, están dados obedeciendo el concepto de cifras significativas: 250 Kg, 6.0 m, 25000 Km, 0.07 g, 7.75 cm, 0.4040 dm, 1300ton. Diga cuál es el nivel de incertidumbre de cada uno de ellos y expréselos en notación científica.

37. Exprese en notación científica los siguientes numerales: 0.00023, 284000, 0.0648, 0.08, $850 \times 10^{20}$, 407000.

38. Los siguientes numerales que representan mediciones físicas están dados en flotación científica: $3.200 \times 10^{-2}$ m, $1.002 \times 10^{-2}$ Kg, $8.032 \times 10^{-3}$ m$^3$, $4.0000 \times 10^{-2}$ dm, $1.0010 \times 10^{-1}$ cm, $5.002 \times 10^{-2}$ cm$^2$, $7.243 \times 10^{-1}$ ton, $2.840 \times 10^{-3}$ seg.

    Diga cuál es el nivel de precisión de cada uno de estos datos.

## 1.3. Los números reales como sistema matemático: Su estructura algebraica

### 1.3.1. Introducción

En las secciones anteriores hemos hecho una descripción de los números reales apoyándonos en el conocimiento intuitivo que el estudiante trae del bachillerato sobre los diferentes tipos de números. Hemos discutido, igualmente, los problemas inherentes a los procesos de medición que han jugado un papel determinante en el desarrollo del concepto de número real. En esta sección nuestro interés es hacer ver al estudiante, que algo más que un conjunto de entes abstractos aislados, los números reales constituyen un sistema matemático que está definido por un conjunto de operaciones que permite relacionarlos entre sí y en cuyo estudio se desarrolla la aritmética y el álgebra.

Nuestro propósito es:

i) Presentar al estudiante una caracterización de este sistema, ésto es, identificar un conjunto de propiedades básicas que lo definen, a partir de las cuales sea posible obtener las restantes propiedades del sistema mediante un razonamiento deductivo.

ii) Repasar algunas propiedades básicas de las operaciones entre números de utilidad en su manejo aritmético y algebraico.

iii) Ejemplificar en qué consiste el llamado método deductivo de las matemáticas.

#### 1.3.1.1. Componentes del sistema matemático de los números reales

En el estudio de los números reales, es importante distinguir dos aspectos fundamentales:

a. Los números reales se combinan mediante operaciones de suma y multiplicación y los resultados son números reales bien definidos. Estas operaciones básicas entre reales, con las propiedades formales o axiomas que ellos satisface, constituyen la **estructura algebraica** de los números reales.

b. Los números reales se comparan entre sí. Se habla de que un número es mayor, menor o igual que otro. En otras palabras existe un orden entre números reales que permite su comparación. Este orden se visualiza claramente en la representación geométrica de los números reales.

Estos dos aspectos, la **estructura algebraica** y el **orden** definen los aspectos fundamentales del sistema matemático de los números reales.

### 1.3.2. La estructura algebraica de los números reales

Está definida por la adición (+) y multiplicación (×) y los siguientes **axiomas** o **propiedades formales** que dichas operaciones satisfacen. En lo que sigue las letras $a$, $b$, $c$, $d$, etc, representan números reales arbitrarios. Cuando no hay lugar a confusión utilizaremos indistintamente " × " o " · " para indicar multiplicación.

0) **Propiedad uniforme**

   Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$ y $a \cdot c = b \cdot d$.

   Esta propiedad que se suele llamar **propiedad uniforme** e indica, simplemente, que el resultado de una suma o de una multiplicación es un número real único.

   Se expresa también esta propiedad diciendo que si dos igualdades se suman o multiplican miembro a miembro, se obtiene también una igualdad.

Hemos visto que un número puede ser representado por símbolos o numerales diferentes y que la igualdad $a = b$ indica que ambos símbolos se refieren al mismo ente numérico. En esta perspectiva se vé con mayor claridad la importancia de la propiedad uniforme, según la cual, los resultados de las operaciones entre reales son únicos y son independientes de la forma de representación de los números que intervienen en ellas. Así, el resultado de sumar $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ será el mismo de sumar $0,25+\frac{4}{6}$. Igual sucede con la multiplicación.

1) **Propiedad conmutativa**

| | | |
|---|---|---|
| Para la suma | : | $a+b=b+a$ |
| Para la multiplicación | : | $a\cdot b=b\cdot a$ |

Esta propiedad se expresa en el lenguaje ordinario diciendo que el "*orden de los sumandos no altera la suma*" y que el "*orden de los factores no altera el producto*". Puede pensar el estudiante que esta propiedad, por la familiaridad que tiene con ella, es una propiedad común a todo operación entre números. No es éste el caso como se puede ver con la división, ya que no es lo mismo, por ejemplo, dividir 10 por 2 $(10\div 2)$ que dividir 2 por 10 $(2\div 10)$.

2) **Propiedad Asociativa**

Los resultados de las operaciones se pueden combinar con otro números para obtener nuevos resultados. Rigurosamente hablando, la prelación en que se quieren efectuar las operaciones debe ser indicada sin ambigüedades. Usualmente esta prelación en las operaciones se ejecutan de adentro hacia afuera. Así, para calcular el resultado representado por la expresión siguiente, es necesario transformarla de la manera que se indica:

$$\begin{aligned}\left\{\left[\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)\times 3\right]+\tfrac{2}{4}\right\}+\tfrac{5}{3} &= \left[\left(\tfrac{5}{6}\times 3\right)\right]+\tfrac{5}{3}\\ &= \left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{2}{4}\right)+\tfrac{5}{3}\\ &= 3+\tfrac{5}{3}\\ &= \tfrac{14}{3},\end{aligned}$$

procedimiento de cálculo que es diferente, por ejemplo, al indicado a continuación:

$$\begin{aligned}\left\{\tfrac{1}{2}+\left[\left(\tfrac{1}{3}\times 3\right)+\tfrac{2}{4}\right]\right\}+\tfrac{5}{3} &= \left[\tfrac{1}{2}+\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\right]+\tfrac{5}{3}\\ &= \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\right)+\tfrac{5}{3}\\ &= 2+\tfrac{5}{3}\\ &= \tfrac{11}{3}.\end{aligned}$$

Teniendo la convención anterior, la propiedad asociativa se puede expresar simbólicamente de la siguiente manera:

| | | |
|---|---|---|
| Para la suma | : | $(a+b)+c=a+(b+c)\,,$ |
| Para la multiplicación | : | $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\,,$ |

que en el lenguaje ordinario se puede expresar diciendo que el resultado de una suma o multiplicación de varios números no depende de la manera como se asocian los sumandos o los factores.

Esta propiedad la que hace que expresiones como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+(-4)+3$ ó $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 1\times(-4)\times 3$ no sean ambíguas, a pesar de que se puede proceder a su cálculo asociando los números de diversas maneras.

La importancia de esta propiedad, que en el cálculo ordinario pasa desapercibida por nosotros, se puede ver con la división $(\div)$ que no es asociativa. La expresión $16\div 4\div 3\div 5$, a diferencia de las dos anteriores, sí es ambigua pues el resultado depende de la manera como se asocian los números. Por ejemplo

$$(16\div 4)\div(3\div 5)\neq 16\div(4\div 3)\div 5.$$

Una expresión como $8+5\times 7$ es en principio ambígua, pues no es claro cuál operación procede a cuál, es decir, si el 5 debe sumarse o multiplicarse primero. En la práctica, sinembargo, especialmente con el advenimiento de las máquinas de cálculo electrónico se han impuesto ciertas propiedades en la ejecucción de operaciones. Así, por ejemplo, se ha establecido la regla de que la multiplicación es precedente, lo cual elimina la ambigüedad de la expresión anterior. Es decir, $8 \div 5 \times 7 = 8 \div 35 = 43$. Este convenio hace que las expresiones del tipo $-1 + 8 \times 5 + \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{4} \times 7$ dejen de ser ambíguas. Algo semejante ocurre con la expresión $10 \div 4 \div 3 \div 5$ que se ejecuta de izquierda a derecha. Es decir,

$$16 \div 4 \div 3 \div 5 = 4 \div 3 \div 5 = \tfrac{4}{3} \div 5 = \tfrac{4}{15}.$$

3) **Propiedad de los elementos neutros**

   **Para la suma**: Existe un sólo número real que al sumarlo a cualquier número real no lo modifica (**elemento neutro de la suma**). Este elemento es el cero (0). Simbólicamente:

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad \text{para cualquier real } a.$$

   **Para la multiplicación**: Existe un sólo número que al multiplicar a cualquier número real no lo modifica (elemento neutro de la multiplicación). Este elemento neutro es el uno (1). Simbólicamente:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \text{para cualquier real } a.$$

4) **Propiedad de los inversos**

   **Para la suma**: Dado cualquier número real $a$ existe un sólo número que sumado con él es igual a 0. Este número que se representa con $-a$, se suele llamar **inverso aditivo u opuesto de** $a$.

   **Para la multiplicación**: Dado cualquier número real $a$, diferente de cero, existe sólo un número que multiplicado con él es igual a 1. Este número que se representa como $a^{-1}$ ó $\frac{1}{a}$, se suele llamar **inverso multiplicativo o recíproco de** $a$.

   El opuesto de 2 es $-2$ (porque sumado con 2 dá 0), mientras que su recíproco es $\frac{1}{2}$ (porque multiplicado por 2 dá 1).

   El opuesto de $-\frac{3}{2}$ es $\frac{3}{2}$ $\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0\right)$ y su recíproco $-\frac{2}{3}$ $\left(-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1\right)$.

   El opuesto de 0 es 0, puesto que 0 es el número que sumado con 0 dá 0 $(0+0=0)$. De esta manera $-0 = 0$. El 0 no posee recíproco. $0^{-1}$ ó $\frac{1}{0}$ no está definido.

   El opuesto de $\pi$ es $-\pi$ y su recíproco como $\frac{1}{\pi}$.

   Observe que al escribir $-a$ para denotar al opuesto de $a$ no quiere decir que $-a$ sea un número negativo. Lo será si $a$ es positivo, pero si $a$ es negativo, como en el caso de $-2$, $-a = -(-2) = 2$ es positivo. De manera idéntica, el inverso multiplicativo no es necesariamente una fracción. Si $a = \frac{1}{2}$ debe ser claro que $a^{-1} = \frac{1}{a} = 2$.

   **Resta y división entre reales**: Utilizando la notación de opuesto y reciproco es posible definir **resta y división** entre números reales, en términos de las operaciones de suma y multiplicación. Asi $a - b$ se puede definir como la suma de $a$ con el opuesto de $b$. Simbólicamente

$$a - b \equiv a + (-b).$$

   Se puede escribir, por lo tanto que:

$$\tfrac{1}{2} - \sqrt{2} = \tfrac{1}{2} + \left(-\sqrt{2}\right) \quad \text{y que} \quad 4 - \left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 4 + \tfrac{1}{2}.$$

   Por su parte, si $b \neq 0$, $a \div b$, se puede definir como el producto de $a$ por el recíproco de $b$ resultado que también puede representarse como la fracción $\frac{a}{b}$ entre números reales. Simbólicamente

$$a \div b \equiv a \cdot b^{-1} \equiv a\frac{1}{b} \quad (\equiv \text{ significa definición}).$$

Consecuentemente, se puede escribir que

$$\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \sqrt{2} \times \left(\sqrt{3}\right)^{-1} = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \tfrac{1}{2} \div \frac{1}{\pi} = \tfrac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1} = \tfrac{\pi}{2}.$$

La definición anterior generaliza el concepto de fracción racional. No es díficil ver que las operaciones de suma y multiplicación entre fracciones reales se pueden efectuar como si fuesen fracciones racionales. En partícular se puede demostrar que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

cumpliendo además las mismas propiedades formales.

5) **Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma**

Esta propiedad, que muestra que hay una coherencia operativa entre la multiplicación y la suma entre reales, se expresar de la siguiente manera:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot c, \quad \text{para } a, b, c \text{ números reales.}$$

O sea, que el producto de una suma por un número, es igual a la suma de los productos de dicho número por los diferentes sumandos. La aplicación de esta propiedad de derecha a izquierda de la igualdad (sentido contrario de la distribución) se suele denominar "*extraer factor común*". Así, por ejemplo, en la transformación

$$15 \times 110 = 15 \times (100 + 10) = 15 \times 100 + 15 \times 10 = 1500 + 150 = 1650.$$

Se utiliza la propiedad distributiva en forma directa, mientras que en la simplificación de la fracción real

$$\frac{a^2 + 2a}{a + 2} = \frac{a(a + 2)}{a + 2} = a, \quad \text{si } a + 2 \neq 0,$$

se aplica en sentido contrario, extrayendo $a$ como factor común.

### 1.3.3. Observaciones y ejemplos complementarios

Las propiedades que hemos enunciado anteriormente, expresan las características algebraicas esenciales de la suma y la multiplicación entre reales y caracterizan, por lo tanto, su estructura algebraica. Es decir, a partir de ellas, mediante razonamiento deductivo de carácter lógico, es posible construir demostrar todos los conceptos y propiedades que utilizamos en el manejo aritmético de los números reales y en general en el álgebra. Ellas están, por lo tanto, en la base de todos los procesos aritméticos y algebraicos que utilizamos, sólo que, por su familiaridad, tienden a pasar desapercibidas.

El poder identificar el papel que ellas juegan en nuestros cálculos aritméticos y algebraicos es importante, no sólo desde un punto de vista formal, sino que también puede conducir a agilizar y simplificar nuestros operaciones. Los ejemplos que se mencionan a continuación muestran algunas situaciones de cálculo, familiares al estudiante, en las cuales alguna de las propiedades formales mencionadas juega un papel importante.

i) Compruebe que si una persona en un primer período pierde el 30% de su peso y en un segundo período el 10%, el peso final de la persona será el mismo si se invierte el orden de los puntajes de reducción.

Si $w$ es el peso inicial de la persona al término de la primera reducción su peso $w \times 0,70$ y al término de la segunda reducción es $(w \times 0,70)0,90$. Combinando la propiedad asociativa con la conmutativa, se puede escribir

$$\begin{aligned} (w \times 0.70)0.90 &= w(0.70 \times 0.90) \\ &= w(0.90 \times 0.70) \\ &= (w \times 0.90)0.70. \end{aligned}$$

Pero la expresión $(w \times 0.90)0.70$ dá el peso final de la persona cuando pierde en el primer período el 10% de su peso y en el segundo el 30%.

ii) Es interesante observar que la propiedad distributiva, y en general las diferentes propiedades formales, pueden ser utilizadas para facilitar un cálculo mental en algunos casos específicos. Así la multiplicación $15 \times 110$ se puede expresar como $15 \times 100 + 15 \times 10$ que permiten un cálculo mental rápido de la multiplicación propuesta. Otro caso semejante puede ser $201 \times 35$, en el cual la expresión de la derecha es fácil de calcular mentalmente. en el caso $25 \times 17 \times 4$ si se intenta en el orden propuesto es una multiplicación más o menos larga, pero si se conmuta el orden y se asocia 25 con 4 no es difícil ver, mentalmente que el resultado es 1700. Y así muchos casos más.

iii) **Inversos y ecuaciones**. Un uso importante de los inversos operativos de la suma y multiplicación entre reales se puede apreciar en la solución de ecuaciones. Tomemos el caso de la ecuación de primer grado en una incógnita cuyo método de solución debe conocer el estudiante. Por ejemplo, queremos calcular los números $x$, para los cuales se cumple

$$\tfrac{1}{3}x + \sqrt{2} = 1 - \tfrac{1}{2}x.$$

Para resolver esta ecuación el estudiante procede agrupando en un lado de la ecuación los términos afectados por $x$ y en el otro los términos independientes o libres de $x$, para lo cual utiliza el principio formal de que un término que está sumando se puede pasar al otro lado de la igualdad cambiando su signo. Se tiene así la expresión

$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}x = \frac{5}{6}x = 1 - \sqrt{2}.$$

Despeja luego $x$, liberándolo de coeficientes numéricos, para lo cual utiliza el principio formal de que un coeficiente que esté multiplicando pasa al otro lado de la igualdad a dividir y si está dividiendo pasa a multiplicar. Obtiene, así, la expresión siguiente que dá la solución de la ecuación

$$x = \tfrac{6}{5}\left(1 - \sqrt{2}\right).$$

Estas reglas utilizadas para "*trasladar*" términos de un lado a otro de la ecuación son, en realidad, aplicaciones directas de la propiedad uniforme y de la existencia de inversos operativos, tal como se indica a continuación

$$\tfrac{1}{3}x + \sqrt{2} = 1 - \tfrac{1}{2}x.$$

Sumando a ambos lados de la igualdad $\frac{1}{2}x$, o sea el opuesto de $-\frac{1}{2}x$, por la propiedad uniforme, se obtiene la igualdad

$$\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}x\right) + \sqrt{2} = 1 + \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x\right).$$

Reiterando esta operación con $-\sqrt{2}$, o sea con el opuesto de $\sqrt{2}$, se obtiene la igualdad

$$\tfrac{5}{6}x = 1 - \sqrt{2}.$$

Finalmente, multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{6}{5}$, es decir por el recíproco de $\frac{5}{6}$, se obtiene la solución

$$x = \tfrac{6}{5}\left(1 - \sqrt{2}\right).$$

Este ejemplo se podría expresar en forma más general diciendo que gracias a la existencia de los inversos operativos, la ecuación de primer grado de la forma

$$ax + b = cx + d, \quad \text{con } a \neq c,$$

tiene siempre solución única en los reales, solución que está dada por

$$x = \frac{b - d}{c - a}.$$

En el capítulo sobre Algebra haremos un tratamiento más sistemático sobre la solución de ecuaciones.

### 1.3.4. Resumen

La siguiente tabla resume las propiedades que definen la estructura algebraica de los números reales.

| Para la suma | Para la multiplicación | Propiedad |
|---|---|---|
| $\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix} \quad a+c=b+d$ | $\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix} \quad a\cdot c=b\cdot d$ | Uniforme |
| $a+b=b+a$ | $a\cdot b=b\cdot a$ | Conmutativa |
| $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ | Asociativa |
| $a+0=0+a=a$ | $a\cdot 1=1\cdot a=a$ | Neutros operativos |
| $a+(-a)=-a+a=0$ | $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$ | Inversos operativos |
| $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ | | Distributiva de la multiplicación respecto de la suma |

### 1.3.5. Algunos teoremas sobre los números reales

Un propósito muy importante en esta sección es el de ilustrar el método deductivo, con base en el cual se organiza (aunque no necesariamente se produce) el conocimiento matemático. Se aspira a que el estudiante aprenda a distinguir cuándo un determinado resultado o teorema ha sido demostrado y cuándo no lo ha sido y a que amplíe su experiencia con diferentes tipos de demostración, especialmente el tipo directo, el método de contraejemplo, y el indirecto sobre los cuales se trato en la unidad 1.1.

Por otra parte, los resultados que se demuestran son importantes en sí mismos y han de servir para fundamentar mejor nuestro razonamiento algebraico.

**Teorema 1.3.1.** *Para cualquier número real $a$, $a\cdot 0=0\cdot a=0$.*

**Demostración.** En efecto, se puede escribir:

$$\begin{aligned} a\cdot 0+a\cdot 0 &= a(0+0) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= a\cdot 0 && \text{Propiedad del cero} \end{aligned}$$

Restando $a\cdot 0$ a ambos lados de la ecuación y utilizando la propiedad uniforme, se obtiene

$$a\cdot 0=0.$$

La igualdad $a\cdot 0=0\cdot a$ se sigue directamente de la propiedad conmutativa. ∎

**Observación 1.3.1.** *El teorema 1.3.1. es familiar al estudiante, y por ello mismo puede sorprenderle, o parecerle innecesario, que desde el punto de vista matemático requiera de una demostración. Curiosamente, frente a expresiones del tipo $\frac{0}{\sqrt{2}}$, por ejemplo, el estudiante no siempre presenta la misma seguridad. Solo hay que observar que $\frac{0}{\sqrt{2}}$ se puede escribir como una expresión del tipo $0\cdot a$ tomando $a$ como $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto,*

$$\frac{0}{\sqrt{2}}=0\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

*(Esta conclusión se puede obtener también aplicando directamente la definición de 0).*

**Teorema 1.3.2.** *Sean $a$ y $b$ números reales arbitrarios.*

i) $-(-a)=a$

ii) $(-a)b=a(-b)=-ab$

iii) $(-1)a = -a$

iv) $(-a)(-b) = ab$

v) $(-1)(-1) = 1$

De acuerdo con nuestras observaciones sobre el axioma de los inversos (pág. 44) este teorema no es el que el estudiante conoce como ley de los signos, aunque lo incluye como caso particular. En este sentido vale la pena subrayar que $a$ y $b$ son números reales arbitrarios positivos ó negativos.

**Demostración.**

i) Basta interpretar la propiedad del opuesto:

$$a + (-a) = -a + a = 0.$$

En este caso la igualdad diría que el número que hay que sumarle a "$-a$" (y que por lo tanto es su opuesto $-(-a)$) para obtener 0 es "$a$". Es decir $a$ es el opuesto de $-a$ y por lo tanto se puede escribir $-(-a) = a$.

ii) Se necesita demostrar que $(-a)b$ es el opuesto de $ab$, es decir que $(-a)b + ab = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} (-a)\cdot b + a\cdot b &= (-a + a)\cdot b && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 0\cdot b && \text{Propiedad del opuesto} \\ &= 0 && \text{Teorema 1.3.1.} \end{aligned}$$

La parte $a(-b) = -ab$ se demuestra de la misma forma. (Hágalo).

iii)

$$\begin{aligned} (-1)a &= -(1\cdot a) && \text{Teorema 1.3.2. (ii)} \\ &= -a \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= a(-(-b)) && \text{Teorema 1.3.2. (ii)} \\ &= ab && \text{Teorema 1.3.2. (i)} \end{aligned}$$

v)

$$(-1)(-1) = 1 \times 1 = 1 \quad \text{Teorema 1.3.2. (iv).} \ \blacksquare$$

En la demostración del teorema 1.3.1., se utilizan exclusivamente las propiedades distributiva, propiedad del cero y propiedad uniforme para alcanzar el resultado $a \cdot 0 = 0$. En la demostración del teorema 1.3.2., partes i) y ii), se utiliza además de algunas propiedades formales dadas para los números reales, el teorema 1.3.1., ya demostrado. En las partes iii), iv), v) las demostraciones se apoyan en los resultados parciales demostrados previamente.

En la demostración del resultado siguiente, se procede también por demostración directa.

**Teorema 1.3.3.** *$a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$.*

**Demostración.** Si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces $a \cdot b = 0$ según lo afirma el teorema 1.3.1. ya demostrado. Se requiere demostrar, solamente, que si $a \cdot b = 0$ es porque debe ser $a = 0$ ó $b = 0$.

Se puede suponer que $a \neq 0$, pues si no lo fuese estaríamos en el caso anterior. Ahora bien, si $a \neq 0$, entonces existe su inverso multiplicativo $a^{-1}$ y, por lo tanto, multiplicando ambos miembros de la igualdad $a \cdot b = 0$ por él se puede escribir

| | | |
|---|---|---|
| | $a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$ | Teorema 1.3.1. |
| | $(a^{-1}a)b = 0$ | Propiedad asociativa |
| | $1 \cdot b = 0$ | Propiedad del inverso multiplicativo |
| $\therefore$ | $b = 0$ | Propiedad del uno ∎ |

El teorema 1.3.3. tiene una aplicación importante en la solución de ciertas ecuaciones. Así, por ejemplo, cuando se plantea una ecuación de la forma

$$(x-1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0,$$

se pregunta por los valores de $x$ que hacen válida la igualdad. El resultado que acabamos de demostrar, dice que tales valores se encuentran igualando a cero los diferentes factores. Es decir, que

$$(x-1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0$$

si y sólo si $x - 1 = 0$ ó $x + \frac{1}{2} = 0$ ó $x - \sqrt{2} = 0$, lo cual nos permite concluir que las soluciones de la ecuación propuesta vienen dadas por $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Se puede expresar esta observación en forma más general diciendo que para resolver una ecuación de la forma

$$p_1(x) \times p_2(x) \times p_3(x) \times \cdots \times p_n(x) = 0,$$

sus soluciones se obtiene resolviendo separadamente las ecuaciones $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 0, \ldots, p_n(x) = 0$.

### 1.3.6. Potencias enteras

En el proceso de desarrollar deductivamente la aritmética, y el álgebra, a partir de las propiedades formales que caracterizan su estructura algebraica, se dá también un proceso constructivo con la definición de nuevos conceptos cuyas propiedades también son objeto de demostración. El símbolo siguiente introduce una operación muy importante en la matemática, la cual hemos de generalizar más adelante.

Sea $a$ un número real arbitrario y $n$ un entero no–negativo. Se define el significado de los símbolos $a^n$ y $a^{-n}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \text{ cuando } a \neq 0 \text{ (el simbolo } 0^0 \text{ no se define).} \\ a^n &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}, \text{ para } n > 0. \\ a^{-n} &= (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}, \text{ es decir, } a^{-n} \text{ es el recíproco de } a^n. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo:

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3\times3\times3\times3} = \tfrac{1}{81}.$$

Puesto que $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$, también se puede escribir que $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ se puede calcular de inmediato, conocido el resultado anterior pues se sabe que el recíproco de $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, es decir de $\frac{1}{81}$. Por lo tanto $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$.

Aplicando la definición de $a^{-n}$, se llega al mismo resultado de la siguiente manera:

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^4}.$$

Como $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$, se tiene

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{81}\right)} = 81.$$

Resulta útil observar los siguientes hechos que se desprenden directamente de las definiciones dadas. Los símbolos $a$, $b$ denotan números reales y $n$ es un entero positivo.

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n.$$

Puesto que por definición:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = a^n, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$

Puesto que por definición:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}^{n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Puesto que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{a^n}{b^n}\right)} = \left(\frac{b^n}{a^n}\right) = \left(\frac{a^{-n}}{b^{-n}}\right).$$

Observe, finalmente, que como todo número entero negativo es de la forma $-n$, con $n$ entero positivo, las expresiones anteriores definen el símbolo $a^n$, para cualquier entero $n$ y cualquier real $a$, excepto el caso $0^0$ que no tiene definición.

**Teorema 1.3.4.** *Sean $a$ y $b$ números reales y $m$ y $n$ enteros. Se tiene que:*

i) $a^m a^n = a^{m+n}$

ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

iii) $(ab)^n = a^n b^n$.

Es fundamental que el estudiante tenga una correcta interpretación de lo que afirman estas igualdades, pues sobre ellas se fundamenta todo el cálculo con potencias y su validez sigue igual para las potencias con exponentes racionales e irracionales.

**Demostración.**

i) $a^m a^n = a^{m+n}$.

Esta primera propiedad se puede expresar en lenguaje ordinario diciendo que el producto de dos potencias de igual base es igual a la potencia que tiene igual base y cuyo exponente es la suma de los dos exponentes de los factores. Así $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, $7^2 \cdot 7^{-5} \cdot 7^3 = 7^{2+(-5)+3} = 7^0 = 1$.

Para demostrar esta propiedad se consideran diferentes casos:

**Caso1:** $m = 0$ ó $n = 0$. Suponiendo que $m = 0$

$$a^m a^n = a^0 a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$$

El caso $n=0$ es exactamente igual.

**Caso 2:** $m$ y $n$ positivos.

$$\begin{aligned}
a^m a^n &= \overbrace{(a\times a\cdots\times a)}^{m}\overbrace{(a\times a\cdots\times a)}^{n} && \text{Definición del símbolo } a^n\\
&= \overbrace{(a\times a\cdots\times a)}^{m+n} = a^{m+n} && \text{Propiedad Asociativa y}\\
& && \text{Definición del símbolo } a^n
\end{aligned}$$

**Caso 3:** $m$ y $n$ negativos.

En este caso $m$ y $n$ son de la forma $m=-r$ y $n=-s$, siendo $r$ y $s$ enteros positivos. Se puede escribir

$$\begin{aligned}
a^m a^n = a^{-r}a^{-s} && = \frac{1}{a^r}\cdot\frac{1}{a^s} && \text{Definición del símbolo } a^n\\
= \frac{1}{a^r a^s} && = \frac{1}{a^{r+s}} && \text{Producto entre fracciones y caso 2}\\
= a^{-(r+s)} && = a^{(-r)+(-s)} && \text{Definición del símbolo } a^{-n} \text{ y representación de } m \text{ y } n\\
= a^{m+n}.
\end{aligned}$$

**Caso 4:** $m$ y $n$ signos diferentes.

Suponiendo que $m$ es positivo y $n$ es negativo de la forma $n=-r$ y que $m+n=m-r$ es positivo. ($m$ mayor que $r$). Se puede escribir

$$\begin{aligned}
a^m a^n = a^m a^{-r} &= \frac{a^m}{a^r} && \text{Definiciones}\\
&= \left(\frac{a^r}{a^r}\right)\cdot a^{m-r} = 1\times a^{m-r} && \text{Caso 2. Propiedad asociativa}\\
&= a^{m+(-r)} = a^{m+n}.
\end{aligned}$$

Si $m-r$ negativo ($r-m$ positivo). Entonces

$$\begin{aligned}
a^m a^n = a^m a^{-r} = \frac{a^m}{a^r} && = \frac{a^m}{a^m}\frac{1}{a^{r-m}} && \text{Caso 2. Propiedad Asociativa}\\
= \frac{1}{a^{r-m}} && = a^{-(r-m)} && \text{Definición símbolo } a^{-n}\\
= a^{m+(-r)} && = a^{m+n}
\end{aligned}$$

El caso $m$ negativo, $n$ positivo se resuelve de manera idéntica.

ii)

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Esta propiedad dice, en el lenguaje ordinario, que el resultado de elevar una potencia entera $a^m$ a un exponente entero $n$ es una potencia que tiene la misma base y cuyo exponente entero $n$ es una potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes $m$ y $n$. Así

$$\begin{aligned}
\left(3^4\right)^3 &= 3^{4\times 3} = 3^{12},\\
\left(3^4\right)^{-3} &= 3^{4\times(-3)} = 3^{-12} = 3^{(-4)\times 3} = \left(3^{-4}\right)^3.
\end{aligned}$$

Dejamos la demostración de esta propiedad como ejercicio.

iii)
$$(ab)^n = a^n b^n.$$

En el lenguaje ordinario esta propiedad expresa que el resultado de elevar una potencia entera un producto de número reales es igual al producto de las potencias que se obtienen de elevar cada factor a la misma potencia entera. Así:

$$\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)^5 = \tfrac{3^5\pi^5}{2}.$$

$$\left(3\pi^{-2}\right)^{-5} = \left(3^{-5}\right)\cdot\left(\pi^{-2}\right)^{-5} = 3^{-5}\pi^{(-2)\times(-5)} = 3^{-5}\pi^{10} = \tfrac{\pi^{10}}{3^5}.$$

Para la demostración de esta propiedad se consideran diferentes caso como en i).

**Caso 1:** $n = 0$. Ambos lados de la igualdad son iguales a 1.

**Caso2:** $n$ positivo

$$\begin{array}{rcll}
(ab)^n & = & \overbrace{(ab)\times(ab)\times\cdots\times(ab)}^{n} & \text{Definición del símbolo } a^n \\
& = & \overbrace{(a\times a\times\cdots\times a)}^{n}\overbrace{(b\times b\times\cdots\times b)}^{n} & \text{Propiedad asociativa y conmutativa} \\
& = & a^n b^n &
\end{array}$$

**Caso 3:** $n$ negativo. En este caso, $n$ será de la forma $n = -r$, con $r$ entero positivo Se puede escribir:

$$\begin{array}{rclcll}
(ab)^n & = & (ab)^{-r} & = & \dfrac{1}{(ab)^r} & \text{Definición del símbolo } a^n \\
& = & \dfrac{1}{a^r\cdot b^r} & & & \text{Caso 1} \\
& = & \dfrac{1}{a^r}\cdot\dfrac{1}{b^r} & = & a^{-r}b^{-r} & \text{Producto entre fracciones y definición del símbolo } a^{-n} \\
& = & a^n\cdot b^n \ \blacksquare & & &
\end{array}$$

Presentamos a continuación, algunos ejemplos en los cuales se combinan varias de las propiedades anteriores. En cada caso, la expresión dada debe simplificarse lo máximo posible y en la expresión final sólo deben aparecer exponentes positivos.

i)

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\left(4^{-3}\right)6+4+4\left(6^{-2}\right)}{4^{-2}\times 6^{-4}} & = & \frac{\left(2^2\right)^{-3}2\times3+2^2+2^2.(2\times3)^{-2}}{(2^2)^{-2}\times(2\times3)^{-4}} \\
& = & \frac{2^{-6}\cdot2\times3+2^2+2^2.2^{-2}\cdot3^{-2}}{2^{-4}\times2^{-4}\times3^{-4}} \\
& = & \frac{2^{-5}\times3+2^2+2^0\cdot3^{-2}}{2^{-8}\times3^{-4}} \\
& = & \left(2^{-5}\times3+2^2+3^{-2}\right)2^8\cdot3^4 \\
& = & 2^3\cdot3^5+2^{10}\cdot3^4+2^8\cdot3^2 \\
& = & 2^3\cdot3^2\left(3^3+2^7\cdot3^2+2^5\right).
\end{array}$$

ii)

$$\left(3^{2^4}\right)^2 + 9^{2^4} = 3^{2^4\times2} + \left(3^2\right)^{2^4} = 3^{2^5} + 3^{2^5} = 2\cdot3^{2^5}.$$

iii)

$$\begin{array}{rcl}
\frac{5^{-4}7+4+5^3\cdot7^{-2}}{5^{-5}7^{-3}} & = & \left(5^{-4}7+4+5^37^{-2}\right)5^5\cdot7^3 \\
& = & 5\times7^4+4\times5^5\cdot7^3+5^8\times7 \\
& = & 5\times7^4+4\times5^5\times7^3+5^8\times7.
\end{array}$$

### 1.3.7. Ejercicios

En los ejercicios 1 al 23 responda verdadero o falso y justifique su respuesta.

1. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$.
2. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0 \neq d$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b \cdot d}$.
3. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a-b)-c = a-(b-c)$.
4. La ecuación $ax+b = cx+d$ siempre tiene solución en $\mathbb{R}$.
5. La fracción real $\dfrac{0}{\sqrt{3}}$ no tiene sentido
6. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$, $c \neq 0$.
7. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \div (b+c) = (a \div c) + (a \div c)$.
8. Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot x = a$.
9. El recíproco de $2-a$, si existe, es $\frac{1}{2} - \dfrac{1}{a}$.
10. El número $\dfrac{3+x}{2-x}$ tiene recíproco para todo $x \in \mathbb{R}$.
11. El recíproco de todo número entero es un número entero.
12. El recíproco de todo número racional es un número racional.
13. El recíproco de todo número irracional es un número irracional.
14. Al efectuar el cálculo $\dfrac{3^{-1}}{\frac{1}{3^{-1}}}$ se obtiene $3^{-2}$.
15. La cuarta parte de la quinta parte de 20 es igual a la quinta parte de la cuarta parte de 20.
16. $2^n \cdot 2^m = 4^{n \cdot m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.
17. $(3^n)^m = 3^{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.
18. $3 \cdot (2)^n = 3 \cdot 2^n$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.
19. $2^n + 2^m = 2^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
20. $3^n + 3^n = 3^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
21. Si $n$ es un entero par, $(-a)^n = a^n$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
22. Si $n$ es un entero entonces $(-a)^n = -a^n$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
23. $\left(\frac{7}{17}\right)^{-5} = \frac{17^5}{7^5}$.
24. Calcule mentalmente los resultados de las siguientes operaciones y luego explicite, por escrito, el proceso seguido, indicando las propiedades formales utilizadas.

    $22 \times 125$, $33 \times 12$, $12 \times 17 \times 5$, $22 \times 15 + 3 \times 15$, $17 \times 18 + 3 \times 36$.
25. Si la suma fuese distribuida respecto de la multiplicación cuál sería el resultado de la siguiente operación:
$$3 + \left(\tfrac{2}{5} \times \tfrac{1}{4}\right).$$
26. Determine si las siguientes igualdades son válidas. Si una igualdad es válida, establezca qué propiedades de los números reales la justifican, si no lo es diga qué propiedad ha sido mal utilizada.
    (a) $2 + \left(\sqrt{5} - \frac{1}{3}\right) = 2 - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{5}\right)$
    (b) $(16 \div 7) \div \frac{2}{3} = 16 \div \left(7 \div \frac{2}{3}\right)$
    (c) $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}a + b$
    (d) $\frac{1 \cdot 5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5} + 2 = 2 + \frac{1 \cdot 5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5}$
    (e) $12 - \left(8 - \frac{1}{4}\right) = (12-8) - \frac{1}{4}$
    (f) $\left(\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right) - 2 = 2 - \frac{1}{\left(\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right)^{-1}}$
27. En cada caso, dé los inversos multiplicativos (recíproco) y aditivo (opuesto), si existen, de los números que se indican a continuación. Las letras $a$ y $b$ denotan números reales arbitrarios.

    $0$, $1$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-0.25$, $(0.25)^2$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$, $(1+a)^2$, $\dfrac{2+a}{1-b}$, $\frac{1}{2} - \dfrac{1}{a}$.
28. De las siguientes fracciones cuáles representan un número real.

    $\frac{6}{0}$, $\frac{0}{6}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{6^{-1}}{6^{-1}}$, $\frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)}$, $\frac{0}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$, $\frac{0}{0}$.
29. Diga cuáles de las siguientes propiedades son válidas para la resta en tres reales: la asociativa, la conmutativa, la distributiva de la multiplicación respecto de la resta. Justifique su respuesta.

30. Efectúe las operaciones indicadas (justifique cada paso).

    i) $(-2)\left[3(4-2)+6\right]+5\left[-2(-3+8)+9\right]$.

    ii) $\frac{3}{2}\left[16(-2+4)-30(\frac{7}{3}-\frac{9}{3})\right]+\frac{5}{\pi}\left[(4-8)6\pi\right.$ $\left.-(9\pi-4\pi)3\right]$

    iii) $(16\div 8)\div 2$.

    iv) $-6\left[\frac{3}{4}(28+24)-12\left(\frac{3}{3}-\frac{8}{3}\right)\right]\;-\;4\left[(7\right.$ $\left.-3)9-16\right]$.

    v) $\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{3}}$

    vi) $-\left(\frac{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right)}{3+\frac{1}{1+\frac{5}{3}}}\right)^{-1}$

31. Suponga que debe efectuar los cálculos que se indican utilizando una calculadora que no tiene incorporado el sistema de prelación usual entre operaciones. Introduciendo paréntesis indique la manera como debería ordenar estos cálculos y efectúe las operaciones utilizando "*paréntesis*" en la calculadora. Realice luego los mismos cálculos "*de seguido*" con la calculadora y compare los resultados. Deben ser iguales. Para facilitar la escritura transforme las "*barras*" de las fracciones por el símbolo $\div$

    (a) $\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\times 3+\frac{2}{4}$

    (b) $-1+8\times 5+\frac{1}{3}+2+\frac{3}{4}\times 7$

    (c) $120\div 4\div 6\div 5$

    (d) $\frac{\frac{3}{4}-2+8\times 5}{\frac{1}{2}+35\times 4\times 1{,}5-4}$

    (e) $\frac{\frac{1}{1+0{,}32}}{1+\frac{1}{1{,}17}}+1.25\times 0.68$

32. En los siguientes ejercicios simplifique las expresiones dadas utilizadando al máximo las propiedades de potencias. Dé las expresiones finales en términos de potencias enteras con exponentes positivos.

    (a) $2^3\cdot 2^{-4}$

    (b) $36\cdot 3^{-5}$

    (c) $b^2\cdot b^{-2}$, $b\neq 0$

    (d) $4^2\cdot 4^{-5}\cdot 4^6$

    (e) $5^2\cdot 5^{-4}\cdot 5^6$

    (f) $\frac{(-2)^4+(-4)^2}{(-1)^6}$

    (g) $\frac{(-2)^2+(-4)^4}{(-1)}$

    (h) $\frac{4^{-2}+2^{-4}}{8^{-1}}$

    (i) $8^{-23}\times\frac{3^2+2^{-3}}{64^{-1}}$

    (j) $\left(8^{-2}\right)^3$

    (k) $\left(3^{-5}\right)^4$

    (l) $\left(3^2 7^{-2}\right)^3$

    (m) $\dfrac{3^2 7^{-3}+3^{-6}7^2}{3\times 7^{-1}+3^{-7}7^4}$

    (n) $\dfrac{4\times 5^{-2}+3\times 5^{-5}+2\times 5^{-3}}{6\times 5^2+500\times 5^{-1}}$

    (o) ¿Cuál es la respuesta en los caso l. y $m$. si 3 se sustituye por $a$ y 7 se sustituye por $b$?

    (p) $\left(-2a^2bc^{-4}\right)\left(5a^{-1}b^3c^5\right)$

    (q) $\dfrac{3x^2y^3}{4x^3y^2}\cdot\dfrac{2xy^4}{6x^5}$

    (r) $\left(7x^2y+3x^{-1}y^2\right)^2$

    (s) $\dfrac{\left(2rs^2vp^{-1}\right)^3}{\left(5r^{-3}sv^2p\right)^{-2}}$

33. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones justificando los pasos:

    (a) $5x+4=23$

    (b) $4x-13=5x+8$

    (c) $(x+3)(x+2)=0$

    (d) $(3x-8)(6x+7)=0$

34. En un zoológico hay 500 animales y el 20% de éstos son aves. Se sabe que el 30 % de las aves son pericos.

    a. ¿Cuántos pericos hay en el zoológico?

    b. ¿Qué porcentaje de los animales del zoológico no son pericos?

    c. ¿Qué porcentaje de las aves del zoológico no son pericos?

35. Veinte litros de una solución contienen 20% de cierta sustancia química. ¿Qué cantidad de agua debe agregarse para que la solución restante contenga 15% de la sustancia química?

36. Haga los siguientes cálculos utilizando la notación científica:

    a. $2100000000\times 0{,}0000000033$.

    b. $840000000\times 0{,}00000021$.

    c. $\dfrac{81000000}{(0{,}0000002)^3}$.

d. $\dfrac{(300000)^4}{(8000000)^3}$.

e. $\dfrac{(160000)^3 \times (12100000)}{(0,00000011)^2}$.

37. Demuestre utilizando la definición de recíproco que $1^{-1} = 1$ (el recíproco de 1 es 1) y que $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

    Utilizando la definición de la resta $a - b$, las propiedades formales de la suma y la multiplicación y los resultados sobre números reales estudiados en esta unidad, demuestre que:

    i) $(a - b) + (b - c) = a - c$.
    ii) $-(a + b) = -a - b$.
    iii) $-(a - b) = -a + b$.
    iv) $a(b - c) = ab - ac$.

38. Siguiendo un procedimiento semejante al utilizado en esta unidad para demostrar $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, demuestre que $(a^m)^n = a^{mn}$ con $a$ real, $m$, $n$ enteros.

    Los ejercicios siguientes pueden ser utilizados para demostrar que las fracciones reales tienen las mismas propiedades que las fracciones racionales.

39. Utilizando la definición que se dá la fracción real $\frac{a}{b}$ demuestre las siguientes proposiciones:

    i) $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$, $b \neq 0$.
    ii) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$
    iii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.
    iv) $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.
    v) $\left(\dfrac{a}{b}\right) \div \left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ad}{bc}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.
    vi) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

40. En cada uno de los ejercicios siguientes efectúe las operaciones que se indican hasta obtener una fracción real simplificada. Identifique las fracciones racionales.

    i) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right)$
    ii) $-\frac{\sqrt{12}}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$
    iii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)$
    iv) $\frac{4}{10} + \frac{3}{6} + \frac{2\pi}{20}$
    v) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$
    vi) $\frac{11}{3} \times \frac{-4}{21} \times \frac{3\sqrt{7}}{44}$
    vii) $\frac{0.75}{2} - \frac{1}{3} + (0.5)^{-1}$
    viii) $(0.16 - 1)\left(\frac{1}{1-\sqrt{0.16}} + \frac{1}{1+\sqrt{0.16}}\right)$

## 1.4. Los números reales como sistema matemático: El orden

### 1.4.1. Los axiomas de orden

El orden, que es el otro elemento constitutivo del sistema matemático de los números reales, es inherente al concepto mismo de número real.

Cuando se dice que hay un orden en $\mathbb{R}$ se quiere decir que existe un criterio que permite comparar números reales y decidir, de dos números arbitrarios diferentes, cuál es "*el menor*" (o "*el mayor*").

Desde un punto de vista práctico, la comparación de las expresiones decimales de dos números reales permite concluir rápidamente cuál de los dos es mayor. Lo mismo sucede con la representación en forma de fracción (ver ejercicios).

En la sección 1.2.2. hemos visto cómo, mediante la representación geométrica, se introduce un orden natural en el conjunto de números reales. Recordemos que el cero en la recta numérica divide al conjunto de números reales en tres conjuntos disjuntos: *los reales positivos* (a la derecha del cero), *los reales negativos* (a la izquierda del cero) *y el conjunto cuyo único elemento es el cero.* Si un número real $x$ es positivo escribimos $x > 0$ y si es negativo, $x < 0$. (Figura 15).

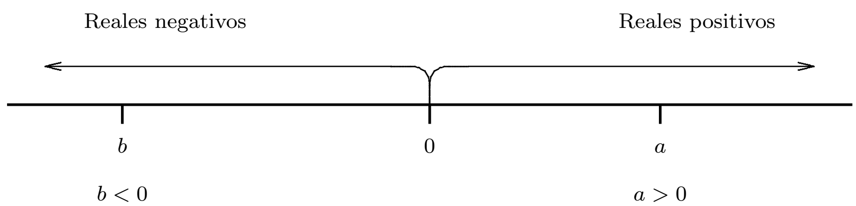



Figura 15.

Hemos definido el símbolo $<$ de la siguiente manera:

> si $x$ e $y$ son dos números reales, $x$ es menor que $y$ (ó $y$ es mayor que $x$), y escribimos $x < y$ (o $y > x$), si y solo si $y - x$ es positivo. Simbólicamente:
>
> $$x < y \Longleftrightarrow y - x > 0.$$

En esta unidad veremos que con un pequeno número de propiedades se puede caracterizar la relación de orden entre números reales, como en el caso de las operaciones de suma y multiplicación. Es decir, ***a partir de ellas, mediante razonamiento deductivo utilizando las propiedades y teoremas ya establecidas de las operaciones entre reales, se pueden deducir las propiedades del orden***.

Las propiedades formales son tres: ***la ley de tricotomía, la propiedad clausurativa de los números positivos y la propiedad del extremo superior*** (***o supremo***).

Presentamos inicialmente las dos primeras dejando para más adelante la presentación de la última.

La primera propiedad se refiere al hecho de que los números reales se clasifican en positivos, negativos y cero. Este hecho, usualmente conocido como la ley de tricotomía, se enuncia de la siguiente manera:

P1) **Propiedad de la tricotomía.** Dado un número real $a$ arbitrario, $a$ es positivo, $a$ es negativo o $a$ es cero.

Simbólicamente se escribe:

$$(\forall a \in \mathbb{R})(a > 0 \veebar a < 0 \veebar a = 0)$$

o equivalentemente

$$(\forall a \in \mathbb{R})(a > 0 \veebar -a > 0 \veebar a = 0),$$

que se deduce de la anterior usando la definición del símbolo $<$.

La segunda propiedad, con la que estamos familiarizados se expresa de la siguiente manera:

P2) **Propiedad clausurativa de los reales positivos respecto de la suma y la multiplicación**. Cuando sumamos o multiplicamos dos números positivos obtenemos un número positivo.

Simbólicamente se escribe así:

$$a > 0 \wedge b > 0 \Longrightarrow a + b > 0 \wedge a \cdot b > 0$$

En lo que sigue escribiremos $a \leq b$ para indicar que $a < b$ ó $a = b$. También usaremos la abreviación $a \leq c \leq b$ para indicar que $a \leq c$ y que $c \leq b$.

### 1.4.2. Intervalos

Utilizaremos la siguiente terminología para referirnos a los siguientes conjuntos de números reales que se agrupan bajo el nombre genérico de intervalo.

**Intervalos finitos cerrados.**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x \leq b\}$$

**Intervalos finitos abiertos.**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|a < x < b\}$$

**Intervalos finitos semiabierto o semicerrado**.

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|a \leq x < b\}$$

**Intervalos infinitos cerrados.**

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

**Intervalos infinitos abiertos.**

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

### 1.4.3. Algunos teoremas importantes relacionados con el orden

Antecedemos la presentación de algunos teoremas sobre el orden con una observación que consideramos importante. En matemáticas las palabras "*relación de orden*" tienen un significado muy preciso. El símbolo "$\leq$", cuyo significado hemos definido anteriormente, es, matemáticamente, una "*relación de orden*" en cuanto que permite establecer una conexión específica entre pares de números reales que tiene las siguientes características o propiedades[6]:

i. **Propiedad reflexiva**:

$$a \leq a$$

ii. **Propiedad antisimétrica**:

$$a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$$

[6]En este sentido es posible establecer muchos tipos de relaciones de orden entre diversos objetos matemáticos. Compruebe por ejemplo que "*inclusión*" ($\subset$) define una relación de orden entre conjuntos (ver ejercicios).

iii. **Propiedad transitiva**:
$$a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$$

Estas propiedades son intuitivamente obvias para el estudiante y pueden parecerle triviales, pero son muy importantes desde el punto de vista lógico y están presentes en muchas demostraciones matemáticas. Estas propiedades, en realidad, pueden demostrarse como un primer teorema del orden entre números reales que se deduce a partir de las dos propiedades formales que hemos enunciado. Omitiremos, sin embargo, esta demostración (Ver ejercicios).

**Teorema 1.4.5.** *Sean $a$, $b$, $c$ y $d$ números reales.*

i. *Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.*

   *(Dos desigualdades se pueden sumar término a término sin que cambie el sentido de la desigualdad).*

ii. *Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $ac \leq bc$.*

   *(Los dos miembros de una desigualdad pueden ser multiplicados por un número no negativo sin que cambie el sentido de la desigualdad).*

iii. *Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$.*

   *(Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un número no positivo el sentido de la desigualdad se invierte).*

iv. *Si $0 \leq a \leq b$ y $0 \leq c \leq d$ entonces $0 \leq ac \leq bd$*

v. *Si $a \leq b \leq 0$ y $c \leq d \leq 0$ entonces $ac \geq bd \geq 0$*

**Demostración.**

i. Por hipótesis se tiene que $b - a \geq 0$ y $d - c \geq 0$ y por la propiedad clausurativa de los números reales se concluye que $(b-a)+(d-c) = (b+d)-(a+c) \geq 0$ o, lo que es lo mismo, que $a+c \leq b+d$.

ii. Por hipótesis se tiene que $c \geq 0$ y $b - a \geq 0$ y por la propiedad clausurativa de los reales positivos se concluye que $c(b - a) = cb - ca \geq 0$ o, lo que es lo mismo, que $ac \leq bc$.

iii. Por hipótesis se tiene que $-c \geq 0$ y $b-a \geq 0$ y por la propiedad clausurativa de los reales positivos se concluye que $-c(b - a) = ac - bc \geq 0$ o, lo que es lo mismo, que $ac \geq bc$.

Las proposiciones iv. y v. que son consecuencias de la ii. y iii., las dejamos como ejercicio (Ver ejercicios). ∎

Conviene ilustrar aquí cómo el teorema 1.4.5. tiene aplicaciones a la solución de inecuaciones[7]. Supongamos que se quieren determinar los valores que puede tomar $x$ que hacen válida la siguiente desigualdad
$$\frac{x}{2} + 8 \leq \frac{x}{3} + 4.$$

En términos conjuntistas se quiere determinar el conjunto
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{2} + 8 \leq \frac{x}{3} + 4\right\}.$$

La estrategia para resolver este tipo de ecuación lineal es igual a la que se sigue para resolver una ecuación lineal y que consiste en primera instancia en trasladar todos los términos afectados por $x$ a un lado de la desigualdad y los términos independientes de $x$ en el otro lado. Luego se despeja $x$ liberándola de su coeficiente para obtener la solución final.

[7]Como en el caso de las ecuaciones un tratamiento sistemático sobre la solución de inecuaciones se hará en el capítulo sobre algebra

Las transformaciones anteriores se fundamentan en el teorema 1.4.5. que acabamos de demostrar y se pueden realizar de la siguiente forma: Por la parte i) del teorema 1.4.5. y la propiedad reflexiva del orden se puede primero agregar a ambos lados de la desigualdad $-\frac{x}{3}$ y luego $-8$ sin que se modifique el sentido de la desigualdad para obtener los siguientes resultados:

$$\begin{array}{rl}
\dfrac{x}{2}+8 \leq \dfrac{x}{3}+4 & \text{Sumando término a término} \\
-\dfrac{x}{3} \leq -\dfrac{x}{3} & \\
\hline
\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}+8 \leq 4 & \text{Sumando término a término} \\
-8 \leq -8 & \\
\hline
\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3} \leq 4-8 &
\end{array}$$

Se obtiene la desigualdad

$$\frac{x}{6} \leq -4.$$

Utilizando la parte ii. del teorema 1.4.5. se puede multiplicar ambos lados de la última desigualdad por 6 sin modificar el sentido de la misma, para obtener el siguiente resultado:

$$x \leq -24.$$

Esto quiere decir que todo número real $x$ no mayor que $-24$, satisface la desigualdad propuesta. En terminos conjuntistas la respuesta se puede escribir en la forma

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -24\} = (-\infty, -24].$$

Vale la pena observar que en la primera transformación se ha podido trasladar e término $\frac{x}{2}$ al lado derecho de la desigualdad y 4 al lado izquierdo para obtener:

$$8-4 \leq \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}x,$$

$$4 \leq -\frac{x}{6}.$$

En este caso, si en lugar de multiplicar por 6, multiplicamos por $-6$, el sentido de la desigualdad se invierte, de acuerdo con la parte iii) del teorema 1.4.5. para obtener

$$-24 \geq x$$

Que es, naturalmente, el mismo resultado anterior.

**Teorema 1.4.6.** *Sean $a$, $b$ números reales*

$$a \cdot b > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \text{ ó } (a < 0 \wedge b < 0).$$

El resultado consignado en este teorema es el que el estudiante conoce como la ley de los signos. Este dice que el producto $a \cdot b$ de los números $a$ y $b$ es positivo en el caso que $a$ y $b$ posean el mismo signo.

**Demostración.** Procedemos primero en la dirección $\Longleftarrow$. Se puede escribir

| | |
|---|---|
| Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$ | Segunda propiedad formal de . orden |
| Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $-a > 0$ y $-b > 0$. | Ley de tricotomía. |
| $\therefore (-a)(-b) = a \cdot b > 0$ | Teorema 1.3.2. y segunda propiedad formal de orden. |

Hemos demostrado que si $a$ y $b$ son del mismo signo entonces $a \cdot b > 0$. ∎

Demostramos ahora la proposición recíproca ($\Longrightarrow$). Sea $a \cdot b > 0$, y asumamos que $a > 0$. Se debe demostrar que $b > 0$.

| | |
|---|---|
| Si fuese $b \leq 0$, se tendría $-b \geq 0$ | Ley de tricotomía, |
| $\therefore a(-b) = -a \cdot b \geq 0$ | Teorema 1.3.2. y segunda propiedad formal de orden, |
| $\therefore a \cdot b \leq 0$ | Teorema 1.4.5.. |

Lo cual contradice la hipótesis sobre $a \cdot b$. Se concluye entonces que $b > 0$.

Asumamos ahora que $a < 0$. Procediendo como antes, demuestre como ejercicio que tiene que ser $b < 0$. No es díficil ver que la situación $a = 0$ no puede darse (¿porqué?). En conclusión, si $a \cdot b > 0$ entonces una de las dos situaciones se cumple $a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$, que es justamente lo que se quería demostrar. ∎

**Corolario 1.4.1.** *Si $a$ es número real diferente de $0$, entonces $a^2 > 0$, en particular se tiene que $1 > 0$. (El cuadrado de todo número diferente de $0$ es positivo).*

**Demostración.** Reemplazando $b$ por $a$ en el teorema 1.4.6., es obvio que ambos factores poseen el mismo signo. Por otro lado, como $1 = 1^2$ entonces $1 > 0$. ∎

**Corolario 1.4.2.** *$a$ y $a^{-1}$ son simultáneamente positivos o negativos.*

**Demostración.** El corolario es inmediato del teorema 1.4.6., pues $aa^{-1} = 1 > 0$. ∎

Este corolario se puede expresar también escribiendo

$$a > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{1}{a} > 0$$

El teorema 1.4.6. y sus corolarios tienen también implicaciones muy importantes en la solución de inecuaciones que ilustramos con dos casos sencillos.

Supongamos que se quieren determinar los valores de $x$ que hacen válida la siguiente desigualdad

$$x\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Es decir, se quiere determinar el conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0\right\}.$$

Lo primero que se puede observar es que la igualdad

$$x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

es válida para los casos $x = 0$ ó $x = -\frac{1}{2}$.

Consideremos ahora $x\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$. Aplicando el teorema 1.4.6. se puede escribir

$$x\left(x + \tfrac{1}{2}\right) > 0 \Longleftrightarrow \left(x > 0 \text{ y } x + \tfrac{1}{2} > 0\right) \text{ ó } \left(x < 0 \text{ y } x + \tfrac{1}{2} < 0\right)$$

Transformando cada uno de los términos a la derecha de la doble implicación se tiene

$$x > 0 \text{ y } \left(x + \tfrac{1}{2}\right) > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \text{ y } x > -\tfrac{1}{2} \underset{\uparrow}{\Longleftrightarrow} x > 0$$

Puesto que si $x$ es mayor que 0 ciertamente es mayor que $-\frac{1}{2}$ (Figura 16)

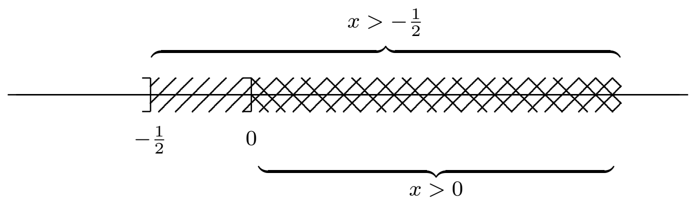



Figura 16.

$$x < 0 \text{ y } \left(x + \tfrac{1}{2}\right) < 0 \Longleftrightarrow x < 0 \text{ y } x < -\tfrac{1}{2} \underset{\uparrow}{\Longleftrightarrow} x < -\tfrac{1}{2}$$

Puesto que si $x$ es menor que $-\frac{1}{2}$ ciertamente es menor que 0 (Figura 17)

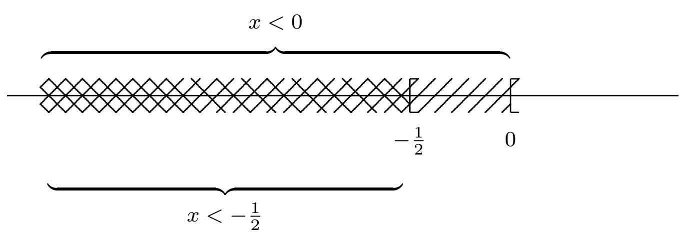



Figura 17.

Se puede concluir entonces, incluyendo los valores $x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$, que si $x \geq 0$ ó $x \leq -\frac{1}{2}$, la desigualdad propuesta es válida. En términos conjuntistas esto quiere decir que

$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{R} \mid x\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \geq 0\right\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\tfrac{1}{2}\right\} \\ &= [0, \infty) \cup \left(\infty, -\tfrac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Gráficamente esta solución se puede visualizar en la recta numérica así

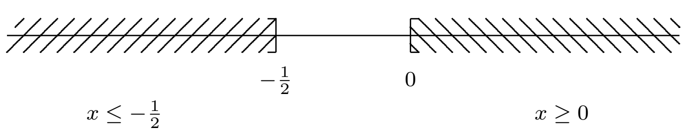



Figura 18.

Es importante observar que todo el proceso de transformaciones puede seguirse manteniendo un lenguaje conjuntista, que aunque más tedioso, en lo que a escritura se refiere, ayuda a dar claridad a todo el proceso.

$$\begin{aligned} &\left\{x \in \mathbb{R} \mid x\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \geq 0\right\} = \\ &\quad = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ y } x + \tfrac{1}{2} > 0\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ y } x + \tfrac{1}{2} < 0\right\} \\ &\qquad \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x\left(x + \tfrac{1}{2}\right) = 0\right\} \\ &\quad = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ y } x > -\tfrac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ y } x < -\tfrac{1}{2}\right\} \\ &\qquad \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ó } x + \tfrac{1}{2} = 0\right\} \end{aligned}$$

Transformando separadamente cada conjunto se tiene:

$$\begin{aligned} &\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ y } x > -\tfrac{1}{2}\right\} = \\ &\quad = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\tfrac{1}{2}\right\} \\ &\quad = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\ &\quad = (0, \infty) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ y } x < -\tfrac{1}{2}\right\} = \\
&\quad = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\tfrac{1}{2}\right\} \\
&\quad = \ \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\tfrac{1}{2}\right\} \\
&\quad = \ \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ó } x + \tfrac{1}{2} = 0\} = \left\{0, -\tfrac{1}{2}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ &\left\{x \in \mathbb{R} \mid x\left(x + \tfrac{1}{2}\right) \geq 0\right\} = \\
= \ &\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\tfrac{1}{2}\right\} \cup \left\{0, -\tfrac{1}{2}\right\} \\
= \ &\left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right] \cup [0, \infty).
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo puede ser la determinación de los valores de $x$ que hacen válida la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{x + \sqrt{2}} < 0.$$

Puesto que $x + \sqrt{2}$ debe ser distinto de 0 para que la expresión este bien definida, utilizando el corolario 1.4.2. se puede escribir

$$\frac{1}{x + \sqrt{2}} < 0 \Longleftrightarrow x + \sqrt{2} < 0.$$

Lo cual permite concluir de inmediato que los $x < -\sqrt{2}$ hacen válida la desigualdad propuesta.

Presentamos un último resultado relacionado con el orden de bastante utilidad en el manejo de números reales.

**Teorema 1.4.7.** *Sean $a$ y $c$ números reales.*

i) *Si $0 < c < 1$ y $a > 0$ entonces $ac < a$.*

   *(Si un número positivo $a$ se multiplica por un número $c$ positivo pero menor que 1, el producto $ac$ es menor que $a$).*

ii) *Si $c > 1$ y $a > 0$ entonces $ac > a$.*

   *(Si un número positivo $a$ se multiplica por un número $c$ positivo mayor que 1 el producto $ac$ es menor que $a$).*

**Corolario 1.4.3.**

– *Si $0 < c < 1$ entonces $c > c^2 > c^3 > \cdots$*

– *Si $c > 1$ entonces $c < c^2 < c^3 < \cdots$*

La demostración de este teorema con sus corolarios los dejamos como ejercicio al estudiante interesado.

### 1.4.4. Valor absoluto

En la sección 1.2.2. de la unidad 2 introdujimos el concepto de valor absoluto de un número basándonos en la noción de distancia en la recta numérica. En esta sección presentamos las propiedades más importantes del valor absoluto.

**Teorema 1.4.8.** *Sean $a$ y $b$ números reales y $\delta$ un número real positivo.*

i) $|a| \geq 0$.

ii) $|a| = 0$ *si y solo si* $a = 0$.

iii) $|a| = |-a|$.

iv) $-|a| \leq a \leq |a|$.

v) $|a| \leq \delta$ *si y solo si* $-\delta \leq a \leq \delta$ *si y sólo sí* $a \in [-\delta, \delta]$.

vi) $|a| \geq \delta$ *si y solo si* $a \leq -\delta \vee a \geq \delta$ *si y sólo sí* $a \in (-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)$.

vii) $|ab| = |a| |b|$.

viii) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

ix) $||a| - |b|| < |a \pm b|$.

Demostramos a continuación un par de las proposiciones anteriores dejando algunas de las restantes como ejercicio para el estudiante.

**Demostración.** Los casos i), ii), iii), y iv) son inmediatos a partir de la definición del valor absoluto.

En términos intuitivos la proposición v) es clara, pues si $|a|$ da la distancia al origen y $|a| \leq \delta$ esto puede ocurrir si y sólo sí $a$ pertenece al intervalo $[-\delta, \delta]$ centrado en el origen, lo cual a su vez es equivalente a decir que $-\delta \leq a \leq \delta$ (Ver figura 19).

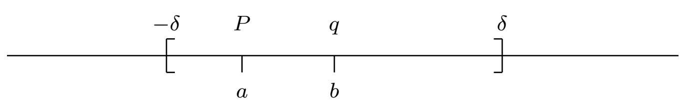



Figura 19.

**Primer criterio:** El punto $P$ pertenece al intervalo si y sólo si su distancia $|m(P, 0)| = |a|$ al origen es menor o igual que $\delta$. Es decir $|a| \leq \delta$.

**Segundo criterio:** El punto $P$ pertenece al intervalo $[-\delta, \delta]$ si y sólo si $-\delta \leq a \leq \delta$.

Una demostración analítica de esta proposición puede ser la siguiente:

$\Longrightarrow$) Sea $|a| \leq \delta$.

| | |
|---|---|
| Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ | Por definición de valor absoluto |
| $\therefore 0 \leq a \leq \delta$ | Por hipótesis |

Puesto que $-\delta \leq 0$ se tiene que $-\delta \leq a \leq \delta$.

| | |
|---|---|
| Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$ | Por definición de valor absoluto |
| $\therefore\ 0 \leq -a \leq \delta$ | Por hipótesis |

Y se puede escribir como en el caso anterior que

$$-\delta \leq -a \leq \delta.$$
$$\therefore\ \delta \geq a \geq -\delta. \qquad \text{Multiplicando por } -1.$$

Es decir, que en cualquier caso, sea positivo o negativo, se tiene que

$$|a| \leq \delta \Longrightarrow -\delta \leq a \leq \delta.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $-\delta \leq a \leq \delta$.

Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y por lo tanto $|a| \leq \delta$.

Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$. Pero de la hipótesis, multiplicando por $-1$, se concluye que $\delta \geq -a$ y por lo tanto $\delta \geq |a|$.

En conclusión, en cualquier caso, sea $a$ positivo o negativo se tiene que

$$-\delta \leq a \leq \delta \Longrightarrow |a| \leq \delta.$$

La validez de la proposición vi) se puede deducir de la siguiente manera.

Si $|a| \geq \delta$, quiere decir que la distancia de $a$ al origen es mayor o igual a $\delta$. Se concluye de inmediato que esto ocurre si y solo si $a$ está en alguno de los intervalos $(-\infty, -\delta]$ ó $[\delta, \infty)$. Es decir que $a \geq \delta$ ó $a \leq -\delta$.

Las proposiciones vi) , vii), ix), se dejan como ejercicio (ver ejercicio de esta unidad). ∎

Observamos finalmente que las proposiciones v) y vi) son de mucha utilidad en la solución de las inecuaciones del tipo $|x - a| \leq b$ ó $|x - a| \geq b$ que se presentan con relativa frecuencia. Supongamos que se quieren determinar el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq \frac{1}{2}\right\}$. Transformando la condición se puede escribir por la proposición v) en el teorema 1.4.8..

$$\begin{array}{rcl} |x-1| \leq \frac{1}{2} & \Longleftrightarrow & -\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ & \Longleftrightarrow & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

Se puede escribir por lo tanto que

$$\begin{array}{rcl} \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq \frac{1}{2}\right\} & = & \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\} \\ & = & \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \end{array}$$

Si el problema que se plantea es la solución $|x - 1| \geq \frac{1}{2}$, aplicando la proposición vi), se puede escribir que:

$$\begin{array}{rcl} |x-1| \geq \frac{1}{2} & \Longleftrightarrow & x - 1 \leq -\frac{1}{2} \vee x - 1 \geq \frac{1}{2} \\ & \Longleftrightarrow & x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq \frac{3}{2}, \end{array}$$

o que es lo mismo:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \geq \frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$$

### 1.4.5. Propiedad del extremo superior

En lo que sigue presentaremos la propiedad del superior que viene a complementar la caracterización matemática del "*orden*" en el sistema matemático de los números reales.

#### 1.4.5.1. Cotas superiores e inferiores

Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales y $c$ un número real, que puede ser o no elemento de $A$. Se dice que:

i) $c$ **es una cota superior de** $A$ si $c$ es mayor o igual que cualquier elemento de $A$.

   Simbólicamente:

   $$c \text{ es cota superior de } A, \text{ si y sólo si } \forall x \in A,\ x \leq c.$$

ii) $c$ **es una cota inferior de** $A$ si $c$ es menor o igual que cualquier elemento de $A$.

   Simbólicamente:

   $$c \text{ es cota inferior de } A, \text{ si y sólo si } \forall x \in A,\ c \leq x.$$

Si $A$ posee una cota superior se dice que $A$ **es acotado superiormente**.

Si $A$ posee una cota inferior se dice que $A$ **es acotado inferiormente**.

Se dice que $A$ **es acotado** cuando lo es superiormente e inferiormente.

El siguiente dibujo ayuda a visualizar las definiciones anteriores (Ver Figuras 20,21,22).

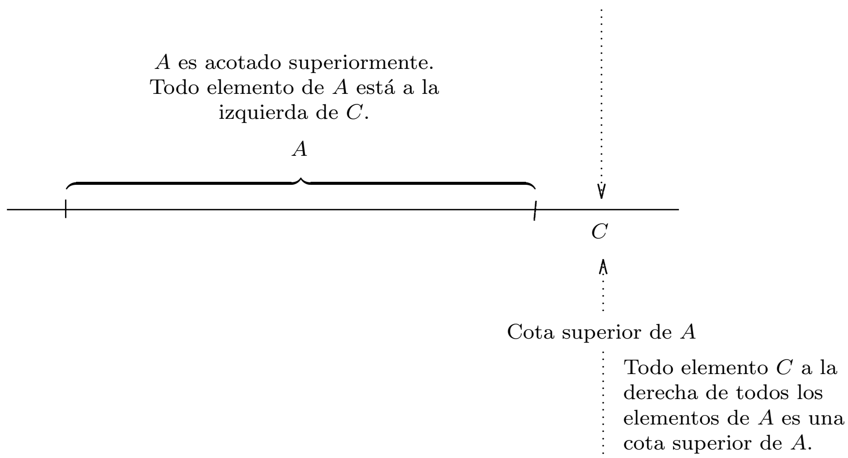



Figura 20.

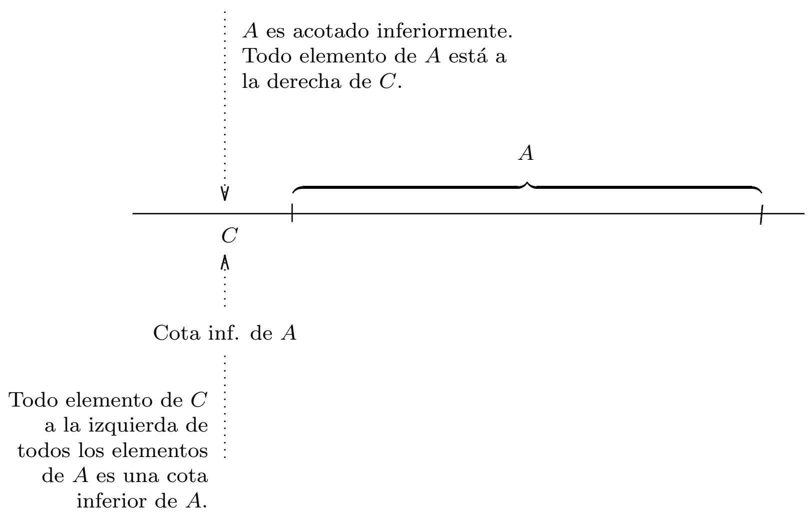



Figura 21.

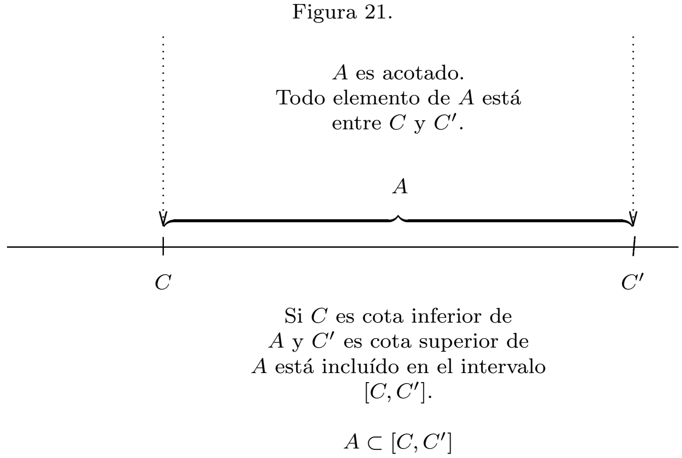



Figura 22.

- $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente, pero lo es inferiormente. Los números $0$, $-1$, $-\frac{1}{2}$, y en general cualquier número negativo es cota inferior de $\mathbb{N}$.

- $\mathbb{Z}$ no es acotado superior, ni inferiormente.

- Si $a$ y $b$ son números reales $[a,b)$ es un conjunto acotado. Observe que $b$ es cota superior del conjunto, al igual que cualquier número mayor que $b$, pero que ningún número menor que $b$ es cota superior para este conjunto. De manera similar se puede ver que $a$ es cota inferior al igual que cualquier número menor que $a$, pero ningún número mayor que $a$ es cota inferior para este conjunto.
- El conjunto $[a,\infty)$ es acotado inferiormente, pero no superiormente $(-\infty,a]$ es el conjunto de sus cotas inferiores.
- El conjunto $\left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ es acotado. Puesto que $2\geq\frac{1}{n}$, para cualquier $n$, 2 es cota superior del conjunto; también lo será 1. Como todos los elementos del conjunto son positivos, cualquier número negativo es cota inferior, también lo será 0.

La noción de cota superior e inferior, están presentes en el lenguaje ordinario. Es común oir frases tales como: cuando fuimos a Bogotá viajamos entre 60 y 80 km/h; el dólar no subirá este ano más arriba de 200 pesos dollar; el pH de la solución está entre 3.5 y 4.0; en las cuales no es difícil identificar tales nociones.

#### 1.4.5.2. Cotas superiores mínima (extremo superior) y cota inferior máxima (extremo inferior).

Sea $A$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $M$ un elemento de $\mathbb{R}$, que puede ser o no elemento $A$. Se dice que $M$ **es la cota superior mínima o extremo superior de** $A$ si y sólo sí:

i) $M$ es cota superior de $A$.

ii) $M$ es es la menor de las superiores de $A$ esto es, si dada una cota superior $c$ de $A$ entonces $M\leq c$.

Si $M$ pertenece a $A$ $(M\in A)$ se dice que $M$ **es su elemento máximo**.

Similarmente, si $m$ es un elemento de $\mathbb{R}$, se dice que es la cota inferior máxima o extremo inferior de $A$ si y sólo sí:

i) $m$ es cota inferior de $A$.

ii) $m$ es la mayor de las cotas inferiores. Esto es, si $c$ es cota inferior de $A$ entonces $m\geq c$.

Si $M$ pertenece a $A$ $(M\in A)$ se dice que $M$ **es su elemento mínimo**.

Al extremo superior y al extremo inferior de un conjunto $A$ también los llamaremos **supremo** e **ínfimo** de $A$ y los notaremos por $\sup A$ e $\inf A$, respectivamente.

Volviendo sobre los ejemplos anteriores podemos decir que:

- Puesto que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente no tiene sentido hablar de su supremo. En cuanto al ínfimo, es claro que es el 1 ($\inf\mathbb{N}=1$), pues es la mayor de sus cotas inferiores. En este caso el 1 es también el mínimo del conjunto.
- $\mathbb{Z}$ no tiene supremo ni ínfimo.
- En el caso del intervalo $[a,b)$ , $a$ es su mayor cota inferior y es consecuentemente el ínfimo del conjunto ($\inf[a,b)=a$). Puesto que $a\in[a,b)$ es también el mínimo. $b$ es por su parte, la menor de las cotas superiores del conjunto y es por lo tanto el supremo del conjunto ($\sup[a,b)=b$), sin embargo $b\notin[a,b)$ y consecuentemente $[a,b)$ no tiene máximo.

  En general, para cualquier intervalo $I$ del tipo $(a,b)$, $[a,b]$, $(a,b]$ ó $[a,b)$ se puede escribir que $\sup I=b$ e $\inf I=a$ y serán máximos o mínimos del intervalo según que pertenezcan o no a él.

– Para el intervalo $[a, \infty)$, $a$ es su ínfimo y elemento mínimo, mientras que no tiene elemento supremo. En general para un intervalo $I$ de la forma $(a, \infty)$ ó $[a, \infty)$ se puede escribir que $\inf I = a$.

– El conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ es acotado inferiormente y no es difícil ver que 0 es la mayor de sus cotas inferiores pero 0 no es elemento del conjunto. Es decir 0 es el ínfimo ($\inf A = 0$) pero no es elemento mínimo del conjunto. Por lo tanto $A$ no tiene elemento mínimo. En cuanto al 1, siguiendo las definiciones dadas, se puede concluir que es tanto el supremo como el elemento máximo del conjunto ($\sup A = 1$). La siguiente figura ayuda a visualizar esta afirmación.

$$A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, ...\right\}$$

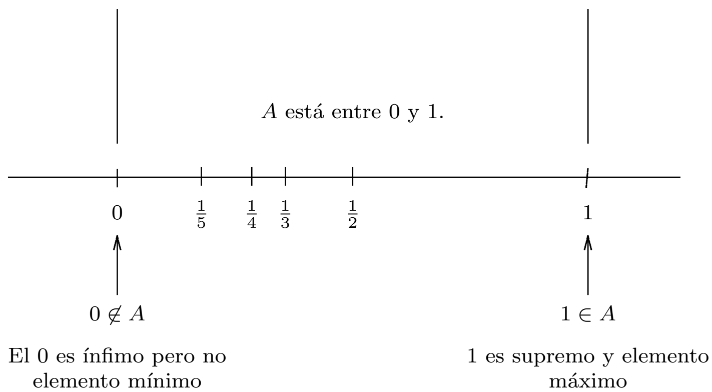



Figura 23.

Es importante observar que en nuestra definición hemos hablado de los supremos e ínfimos, máximos y mínimos en un sentido único (el supremo de un conjunto, el ínfimo de un conjunto). Este carácter único se desprende de las propiedades que los definen.

La otra observación, fundamental para entender en todo su sentido la propiedad que presentaremos más adelante, es que en nuestra definición de supremo o ínfimo no hemos dicho en qué condiciones existen estos números, sólo hemos establecido los requisitos que debe llenar un número para ser el supremo o el ínfimo de un conjunto determinado.

Esta afirmación se hace más clara si observamos que las definiciones anteriores se pueden hacer relativas a un conjunto de números en particular. por ejemplo, podríamos hablar de conjuntos de naturales acotados en $\mathbb{N}$, de conjuntos de racionales acotados en $\mathbb{Q}$, etc. Así, por ejemplo, tiene sentido considerar el siguiente conjunto

$$A = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid \frac{m}{n} < \sqrt{2}\right\} = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}.$$

Este conjunto, bien que se considere en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$ es acotado superiormente. En $\mathbb{R}$ no es difícil ver que $\sqrt{2}$ es la menor de sus cotas superiores; pero, puesto que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, podemos concluir que, aunque $A$ es acotado en $\mathbb{Q}$, no posee en $\mathbb{Q}$ un extremo superior. Es decir que aunque lo parezca no es ni inmediato, ni obvio que un conjunto de números acotados tengan que tener un extremo superior. La proposición que enunciamos a continuación afirma, a manera de axioma, que ésta es la situación en $\mathbb{R}$ para todo conjunto acotado superiormente de números reales, lo cual, como ilustra el ejemplo, no es válido cuando nos restringimos a los números racionales.

#### 1.4.5.3. Propiedad del extremo superior

> ***Todo conjunto de números reales acotado superiormente posee en $\mathbb{R}$ extremo superior (propiedad del supremo),***

o lo que es equivalente.

***Todo conjunto de números reales acotado inferiormente posee en $\mathbb{R}$ extremo inferior (propiedad del ínfimo).***

Tal como mencionamos anteriormente, esta propiedad, conjuntamente con las propiedades formales 1 y 2 caracterizan matemáticamente la relación de orden entre los números reales. Es decir todas las propiedades relativas al orden entre números reales se pueden deducir a partir de estas 3 propiedades formales o axiomas del orden.

Demostramos a continuación que la propiedad del supremo implica la propiedad del ínfimo dejando la implicación recíproca al estudiante interesado como un ejercicio.

#### 1.4.5.4. Propiedad del supremo $\Longrightarrow$ Propiedad del ínfimo

Sea $A$ un conjunto de números acotados inferiormente. Demostremos que $\inf(A)$ existe.

Sea $B$ el conjunto de las cotas inferiores de $A$. Por hipótesis $B \neq \emptyset$.

Observemos que por la definición de $B$ los elementos del conjunto $A$ estarán en la recta numérica a la derecha de los elementos de $B$ y recíprocamente, los elementos de $B$ estarán a la izquierda de los elementos de $A$. La clave para entender el proceso de demostración es visualizar que el supremo de $B$ tiene que ser el ínfimo de $A$.

Demostremos pues que el $\inf A = \sup B$. Puesto que suponemos que la propiedad del supremo se cumple, $\sup B$ existe y es, por definición, la menor de las cotas superiores de $B$. Como todo elemento de $A$ es cota superior de $B$, entonces para cualquier elemento $a$ de $A$, $\sup B \leq a$. Es decir $\sup B$ es cota inferior de $A$. Demostremos que es la mayor. Si no lo fuese existiría $c$ cota inferior de $A$, es decir elemento de $B$ tal que $\sup B < c$. Pero ésto contradice el hecho de que $\sup B$ es cota superior de $B$ y por lo tanto $\sup B \geq b$, para cualquier $b \in B$.

#### 1.4.5.5. Algunas consecuencias matemáticas de la propiedad del supremo

La propiedad del supremo tiene una influencia fundamental en la caracterización matemática de los números reales y, como habremos de ver, en ella radica realmente la diferencia matemática entre el sistema de los números racionales y el sistema más general de los números reales.

El estudiante conoce sin duda, implícitamente, algunas de las propiedades matemáticas de los reales determinadas por esta propiedad. En lo que sigue enunciaremos algunas de ellas pero sin entrar a demostrar como se pueden deducir a partir de la propiedad del supremo.

**Propiedad arquimediana de los números reales.** Esta propiedad es intuitivamente obvia y va implícita en el modelo geométrico de los número reales. Se enuncia diciendo: Si $a$ y $b$ son dos números reales positivos existe un número entero $n$ positivo tal que $na > b$.

Puesto que

$$na = \overbrace{a + a + a + \cdots + a}^{n},$$

en términos analíticos la propiedad arquimediana se puede interpretar diciendo que al sumar consecutivamente un número real positivo arbitrario $a$ consigo mismo su suma llega a superar cualquier otro número real $b$ positivo por grande que él sea.

En términos geométricos, ya la hemos utilizado, y se puede interpretar de la siguiente manera. Si convenimos en tomar $b > a$ e identificamos $b$ y $a$ en la longitud de los segmentos $AP_2$ y $AP_1$, respectivamente, tal como se indica en la figura, la propiedad arquimediana diría, que yuxtaponiendo segmentos de igual medida a $AP_1$, a lo largo del segmento, eventualmente se tiene un segmento de mayor longitud que $AP_2$.

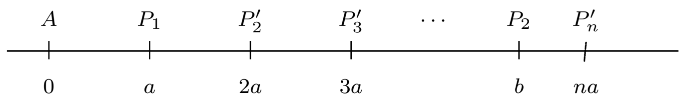


Figura 24.

Es interesante observar que a partir de esta propiedad es posible deducir la siguiente proposición:

> ***Dado cualquier número real positivo*** $a$ ***es posible encontrar un número entero*** $n$***, y por tanto infinitos, tal que***
> $$0 < \frac{1}{n} < a.$$

**Densidad de los números racionales en los reales.** Los conjuntos numéricos están llenos de sorpresas y en especial en relación con el orden, que desafían nuestra intuición. Ya hemos presentado algunas de ellas como por ejemplo la enumerabilidad de los racionales y la no enumerabilidad de los irracionales.

Una característica de mucha utilidad es la que se refiere a la "*densidad*" de los números racionales y reales en general. mientras que los números naturales y enteros son "*separados*", y se puede hablar de enteros consecutivos entre los cuales no hay otro entero ésto no es posible cuando hablamos de los racionales y de los reales. En efecto si $\alpha$ y $\beta$ son números reales tales que $\alpha < \beta$ siempre será posible encontrar otro número real entre ellos y por lo tanto ¡infinitos! Basta observar que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ es un número real y que $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Este mismo argumento es válido si $\alpha$ y $\beta$ son racionales. En este caso $\frac{\alpha+\beta}{2}$ será también racional. Por esta razón se dice que los números reales y los números racionales son densos en sí mismos. Pero lo que es aún más sorprendente y útil es que el conjunto de los números racionales es denso en el conjunto de los números reales en el siguiente sentido:

> ***entre dos números reales cualesquiera sean ellos racionales o irracionales siempre se podrá encontrar un número racional.***

Esta propiedad se puede comprender fácilmente, si observamos como ya lo hicimos al describir las bases del sistema de numeración decimal, que si se conoce el numeral decimal de un número real cualquiera es posible encontrar números racionales menores o mayores que él tan próximos a él como se quiera, por ejemplo, si

$$a_n \ldots a_1 a_2 a_0.b_1 b_2 b_3 \ldots$$

es la expreción decimal de $a$, los números

$$\alpha_k = a_n \ldots a_1 a_2.b_1 b_2 b_3 \ldots b_k$$

y

$$\beta_k = a_n \ldots a_1 a_2.b_1 b_2 b_3 \ldots b_k + \frac{1}{10^k}$$

son números racionales tales que

$$\alpha_k \leq a \leq \beta_k,$$

$$|\beta_k - \alpha_k| \leq \frac{1}{10^k}, \quad |a - \alpha_k| \leq \frac{1}{10^k}, \quad |\beta_k - a| \leq \frac{1}{10^k}.$$

Pero esta observación, de gran utilidad práctica, provee una demostración que depende de la forma de representación decimal de los reales pero la propiedad de densidad de los racionales en los reales es inherente al sistema matemático de los reales y no depende de su forma de representación. Dicha propiedad es en efecto una consecuencia directa de la propiedad arquimediana y por la tanto de la propiedad formal del supremo. Damos la demostración para el estudiante interesado.

Sean $x$ e $y$ dos números reales diferentes. Se puede asumir que ambos son positivos y que $x < y$. Demostremos que existe un número racional entre ellos. Puesto que $y-x > 0$, por la propiedad arquimediana sabemos que se puede encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} \leq y - x$. Aplicando de nuevo la propiedad arquimediana, al sumar $\frac{1}{n}$ consigo mismo un número suficiente de veces se tiene que la suma eventualmente es mayor que $x$. Existe, por lo tanto, un número $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \times \frac{1}{n} < x < (m+1) \times \frac{1}{n}.$$

Se puede escribir por lo tanto que:

$$x < (m+1)\,\frac{1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$

Es decir que el número racional $\frac{m+1}{n}$ está entre $x$ e $y$.

El hecho de que el conjunto de los números racionales sea denso en el conjunto de los reales permite concluir que en general cualquier número real se puede considerar como el supremo (o ínfimo) de un conjunto de números racionales. En particular se puede escribir que, si $\alpha$ es cualquier número real, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \,|\, \frac{m}{n} < \alpha\right\} \\ \alpha &= \inf\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \,|\alpha < \frac{m}{n}\right\} \end{aligned}$$

Esto significa que el supremo (o ínfimo) de ciertos conjuntos de números reales se puede calcular considerando solamente números racionales.

**La existencia de raíces $n$–ésimas.** El estudiante está acostumbrado a hablar de raíz cuadrada, $\sqrt{a}$, raíz cúbica, $\sqrt[3]{a}$, de un número positivo $a$ como el número que elevado al cuadrado ó al cubo, según el caso, reproduce el número inicial $a$. Es decir, por definición $(\sqrt{a})^2 = a$, $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. De igual manera se puede extender esta definición para cualquier número natural $n$. Se puede definir, por ejemplo, una raíz $n$–ésima de un número real $a$ (y es denotada como $\sqrt[n]{a}$) como el número que elevado a la potencia $n$–ésima da $a$. Es decir, $(\sqrt[n]{a})^n = a$. ¿Pero quién garantiza que tal número existe? Esta situación es semejante a la que observamos al dar la definición de *supremo* e *ínfimo*. Una cosa es decir que un *tigre* es un *leon de dos cabezas* y otra cosa es comprobar que en realidad existen *leones de dos cabezas*. Así, por ejemplo, si nos restringimos a considerar solamente números racionales es claro que $\frac{1}{8}$ tiene raíz cúbica en los racionales y que $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, pero puesto que $\sqrt[3]{3}$ es irracional, 3 no tiene raíz cúbica en $\mathbb{Q}$. La propiedad del supremo en los reales garantiza que un número positivo real cualquiera tenga por lo menos una raíz $n$-ésima en $\mathbb{R}$ y justamente porque el conjunto de los números racionales no cumple dicha propiedad se explica que no siempre la raíz $n$–ésima de un número racional positivo sea un número racional. El siguiente teorema establece la consecuencia algebraica fundamental de los números reales que depende directamente de la propiedad del supremo. Lo damos sin demostración.

**Teorema 1.4.9.** *Sea $a$ un número real no negativo y $n$ un entero positivo. Existe una raíz $n$–ésima* positiva *única de $a$, que denotaremos $\sqrt[n]{a}$. Es decir, existe un número real* positivo *$\sqrt[n]{a}$ único tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Más aún:*

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= \sup\left\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n \leq a\right\} = \sup\left\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^n \leq a\right\} \\ &= \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n \geq a\right\} = \inf\left\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^n \geq a\right\}. \end{aligned}$$

*($\mathbb{R}^+$: reales positivos, $\mathbb{Q}^+$: racionales positivos).*

*Los términos de la derecha permiten calcular la expresión de $\sqrt[n]{a}$.*

Obsérvese que la primera parte del teorema podría expresarse diciendo que en $\mathbb{R}$, la ecuación $x^n - a = 0$, donde $a$ es real positivo siempre tiene solución en los números reales.

Es conveniente también puntualizar que el teorema habla de raíces positivas de números positivos. No es difícil ver que $-\sqrt[n]{a}$, cuando $n$ es par, es también una raíz $n$–ésima de $a$, pues por ser $n$ de la forma $n = 2k$, $k$ natural, se puede escribir

$$\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\left(-\sqrt[n]{a}\right)^2\right)^k = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^2\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Por lo anterior se suele hablar de *raíz negativa* y *raíz positiva*, cuando $n$ es par, pero el símbolo $\sqrt[n]{a}$ se reserva exclusivamente para la *raíz positiva* o *raíz principal*. Como veremos en la unidad 1.5, $\sqrt[n]{a}$ puede representar un número negativo cuando $a$ es negativo y $n$ es impar, por ejemplo $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Ilustramos, para terminar esta sección, la afirmación al final del teorema 1.4.9. sobre la forma de calcular la expresión decimal de $\sqrt[n]{a}$. Consideremos el caso de $\sqrt{2}$. Por el teorema 1.4.9. se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \mid \left(\frac{m}{n}\right)^n \leq 2\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \mid \left(\frac{m}{n}\right)^n \geq 2\right\}.\end{aligned}$$

De acuerdo con estas desigualdades se puede escribir que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ puesto que $1^2 \leq 2 \leq 2^2$.

Se consideran los números racionales $1.1, 1.2, 1.3, 1.4$, etc., hasta que el cuadrado de uno de ellos supere a 2. Se tiene

$$1.4 \leq \sqrt{2} \leq 1.5 \quad \text{puesto que } 1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2.$$

Se repite el procedimiento anteriores con $1.41, 1.42$, etc. y se observa que

$$1.41^2 = 1.988 < 2 < 2.0164 = 1.42^2.$$

Se concluye por tanto que $\sqrt{2}$ debe estar entre 1.41 y 1.42. Así sucesivamente para obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}1.41 \leq \sqrt{2} \leq 1.42,& \\ 1.414 \leq \sqrt{2} \leq 1.415,& \qquad \text{puesto que } (1.414)^2 < 2 < (1.415)^2, \\ 1.4142 \leq \sqrt{2} \leq 1.4143,& \qquad \text{puesto que } (1.4142)^2 < 2 < (1.4143)^2.\end{aligned}$$

La expresión decimal con cuatro cifras significativas decimales es 1.4142.

### 1.4.6. Sistemas matemáticos y sub–sistemas de los reales

En esta y la unidad anterior hemos venido estudiando los números reales como sistema matemático[8]. Cuando se quiere destacar que nos referimos a los reales como sistema se suele escribir $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$. Un aspecto fundamental que hemos querido destacar es que las propiedades de este sistema se pueden deducir mediante razonamiento lógico a partir de un conjunto pequeno de propiedades básicas que se dan sin demostración y que hemos llamado *propiedades formales* o *axiomas* (asociativa, conmutatíva, neutros, inversos, distributiva, tricotomía, clausuratíva en los números positivos, propiedad del supremo). En este sentido se dice que *las propiedades anteriores caracterizan matemáticamente el sistema de los números reales*, lo que significa que cualquier sistema de objetos matemáticos que posea las mismas propiedades, se comportará para efectos matemáticos de manera idéntica a los números reales y no se podría, por lo tanto, distinguir matemáticamente uno de otro sistema.

El sistema de los números reales no es el único sistema matemático que se puede mencionar y en particular es útil observar que tanto los números naturales, como los enteros, como los racionales se pueden considerar en sí mismos como sistemas matemáticos dotados de los mismos elementos básicos: una estructura

[8]Un sistema matemático es un conjunto de elementos dotado de una o varias operaciones binarias. Se dice que en un conjunto no vacio ha sido definida una operación binaria cuando existe una *regla* o *ley de correspondencia* que permite asignar a cada par de elementos $a, b$ del conjunto un elemento $c$ bien definido, y sólo uno del mismo conjunto. Si la operación binaria se denota con el símbolo $*$ se puede escribir, para simbolizar la correspondencia anterior: $a * b = c$ (Ver Ejercicios 49 y 50).

algebraica constituída en cada caso por operaciones de suma y multiplicación y una relación de orden, sólo que en este caso las propiedades formales o axiomas varían.

En lo que sigue trataremos de identificar a grandes rasgos las principales diferencias que existen entre estos sistemas destacando a la vez algunas propiedades de importancia.

#### 1.4.6.1. Subsistema de los Números Racionales $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$

¿Cuáles son las diferencias fundamentales entre el sistema de los números racionales y los números reales y, por lo tanto, cuáles son las propiedades básicas del sistema de los reales que no son válidas en el caso de los racionales?

Si se repasa la estructura algebraica no es difícil comprobar que las operaciones de suma y multiplicación cumplen entre racionales las mismas pro piedades formales que entre reales, y por lo tanto todos los Teoremas que se puedan demostrar con base en estas propiedades son válidos en ambos sistemas.

La diferencia fundamental está en el orden, y particularmente en la propiedad del supremo que no se cumple en el sistema de los números racionales como ya tuvimos oportunidad de ilustrar cuando les presentamos esta propiedad entre reales. La consecuencia fundamental de esta diferencia se refleja en la imposibilidad de encontrar siempre una solución en $\mathbb{Q}$ para el siguiente problema:

> ***Dado un número*** $a$ ***positivo encontrar un número*** $\alpha$ ***racional tal que*** $\alpha^n = a$.

Es decir la obtención de la raíz $n$-ésima de un número no siempre tiene sentido en el sistema de los números racionales.

Vale la pena destacar aquí la propiedad de densidad de los racionales no sólo en $\mathbb{Q}$ (entre dos racionales existe siempre un racional y por lo tanto infinitos) sino también en $\mathbb{R}$ (entre dos reales existe siempre un racional y por lo tanto infinitos) y que se traduce en la importante propiedad que hemos expresado anteriormente de la siguiente manera:

> ***Cualquier número real puede considerarse como el supremo o el ínfimo de números racionales***.

#### 1.4.6.2. El Subsistema de los Números Enteros $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$

El sistema de los enteros presenta diferencias fundamentales con el sistema de los racionales y los reales.

En la parte algebraica, relativas a las operaciones de suma y multiplicación se pueden hacer las siguientes observaciones:

En lo que respecta a la operación de suma, la suma entre enteros cumple las mismas propiedades formales que la suma entre racionales y reales y consecuentemente todos los Teoremas que involucren sólo sumas y que se demuestren en tales sistemas serán también validos en el sistema de los enteros.

En lo que respecta a la multiplicación no se cumple la propiedad del inverso (recíproco) pues dado un entero $n$, $n^{-1} = \frac{1}{n}$ no es en general un entero. Esto quiere decir en particular que en el sistema de los enteros la división no siempre conduce a un entero y que consecuentemente no siempre es posible resolver una ecuación tan simple como la lineal ($ax + b = 0$, con $a \neq 0$).

Al considerar las propiedades del orden en $\mathbb{Z}$ sorprendentemente se cumplen las tres propiedades formales que hemos asociado con el orden en los reales. Pero es obvio que el ordenamiento en los reales es bien distinto en los enteros pues se trata de un conjunto de puntos aislados. En realidad el orden en los enteros posee una propiedad formal distinta a la que hemos expresado respecto de los números reales, que establece la diferencia anotada, y a partir de la cual se puede deducir la propiedad del supremo para el sistema de los enteros.

Esta propiedad se llama "**del buen ordenamiento de los enteros**".

**Propiedad del buen ordenamiento de los Enteros**

> ***Todo conjunto de enteros no vacío acotado inferiormente posee un primer elemento.***

Es bien fácil comprobar que el orden en los racionales o en los reales no poseen esta propiedad. Basta considerar el "conjunto de los números racionales mayores que 1", que simbólicamente se puede expresar como $(1, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Es claro que este conjunto es acotado inferiormente y no posee un primer elemento. Si $\alpha$ a fuese ese primer elemento entonces $\frac{1+\alpha}{2}$ es también un número racional y $1 < \frac{1+\alpha}{2} < \alpha$, lo cual contradice el supuesto de que $\alpha$ era el primer racional mayor que 1.

No debe ser difícil para el estudiante repetir la argumentación en el sistema de los números reales para demostrar que $(1, \infty)$ no tiene tampoco un primer elemento en este sistema.

La fuerza e importancia del Principio del buen ordenamiento de los enteros se pone en evidencia en la siguiente demostración del **Principio de inducción** que provee uno de los métodos de demostración constructiva más importantes de la matemática.

**Teorema 1.4.10. (Principio de la Inducción Matemática)** *Sea una sucesión de proposiciones*

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Si se cumple que:*

1. $P_1$ *es verdadera*

2. $P_{k+1}$ *es verdadera siempre que* $P_k$ *lo es.*

*Entonces la proposición* $P_n$ *es verdadera para cualquier* $n$*.*

**Demostración.** Suponga que existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que $P_m$ es falsa. Esto es, el conjunto $S = \{j \mid P_j \text{ es falsa}\}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ no vacío, acotado inferiormente. Posee por lo tanto un primer elemento $p$. Puesto que $P_1$ es verdadera $p > 1$. Puesto que $p$ es el primer elemento de $S$, $P_p$ es falsa y consecuentemente $P_{p-1}$ tiene que ser verdadera.

Utilizando la condición 2 tendríamos que sí $P_{p-1}$ es verdadera entonces $P_{(p-1)+1}$, o sea la proposición $P_p$, tiene que ser verdadera lo cual constituye una contradicción. Ello nos lleva a concluir que no puede existir $m \in \mathbb{N}$, tal que la proposición $P_m$ es falsa. ∎

Demostremos por inducción a manera de ejemplo, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

(La suma de los $n$ primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$)

Empecemos por interpretar el ejercicio en términos del Teorema anterior denotando la proposición: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ como $P_n$. El ejercicio se reduce ahora a probar que para cualquier $n$ la proposición $P_n$ es verdadera.

Comprobemos que $P_1$ es verdadera.

Puesto que $P_1$ se expresa como $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, es obvio que $P_1$ es verdadera.

Demostremos ahora que si $P_k$ es verdadera entonces $P_{k+1}$ también lo será. Si

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

entonces agregando en ambos lados de la igualdad $k+1$ se deduce que:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

lo cual termina la demostración.

### 1.4.7. Sumas y Sucesiones de números

#### 1.4.7.1. El símbolo $\sum$ (El símbolo sumatoria)

Con mucha frecuencia se hace necesario manejar expresiones donde una operación dada se reitera un número considerable de veces. Puede ocurrir que exista una ley de formación para los términos que aparecen en tales expresiones o que simplemente se dé como conocida una enumeración de los términos. En estos casos es posible introducir abreviaciones en la notación que hacen más fácil el manejo algebraico de tales expresiones.

El símbolo $\sum$ es usado universalmente para abreviar expresiones donde se reitera la operación "+".

Así, por ejemplo, una suma de $n$ números

$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$$

puede escribirse en forma compacta, usando el símbolo $\sum$, así:

$$\sum_{i=1}^{n} c_n.$$

En la anterior expresión, la letra $i$ se le llama **índice de la sumatoria**. Otros ejemplos que ilustran el manejo del símbolo $\sum$, son:

$$1+2+3+4+\cdots+18=\sum_{i=1}^{18} i$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3}$$

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12=\sum_{i=1}^{12}(-1)^{i+1}\, i$$

$$5-6+7-8+9-10+11-12+\cdots+99-100=\sum_{i=5}^{100}(-1)^{i+1}\, i$$

Emplearemos las siguientes propiedades de la notación $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r a_i = r \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+s}^{n+s} a_{i-s} \tag{1.7}$$

La propiedad (1.4) establece que el índice de una sumatoria puede ser cambiado. La propiedad (1.5) es una consecuencia de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma de números y la propiedad (1.6) es una extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. La propiedad (1.7) establece que el índice de la sumatoria se puede trasladar. Así por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} i^4 = 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = \sum_{j=1}^{n} j^4$$

Otras alternativas para escribir la anterior suma, usando el símbolo $\sum$ y las propiedades (1.5) y (1.7) son

$$1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^4$$

$$1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = \sum_{t=3}^{7} (t-2)^4$$

Ejemplos que ilustran las propiedades (1.5) y (1.6) son

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} b_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} r a_i &= r a_1 + r a_2 + r a_3 + r a_4 + r a_5 + r a_6 \\
&= r\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \\
&= r \sum_{i=1}^{6} a_i
\end{aligned}$$

#### 1.4.7.2. Sucesiones numéricas

Una sucesión numérica es una "lista" de números ordenada mediante una numeración especifica de sus elementos.

Escribiremos:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

para referirnos en general a una sucesión numérica. El número simbolizado por $a_k$ se llama término $k$–ésimo de la sucesión.

Una sucesión se llama finita si el número de términos es finito e infinita si el número de términos es infinito. Cuando no haya peligro de confusión, o el carácter de la sucesión no importe, hablaremos simplemente de "sucesiones".

Los siguientes son ejemplos de sucesiones numéricas:

i) $1, 3, 5, 7, 9.$

ii) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

iii) $3.01, 3.01011, 3.010110111, \ldots$

iv) $1, 10^3, 10^6, 10^9$

v) $2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots$

En las sucesiones ii), iii) y iv) los puntos suspensivos indican que los términos continúan indefinidamente. Es decir, estas son infinitas. Las sucesiones i) y iv) son finitas.

No sobra observar que la sucesión i) tiene una ley de formación dada por la expresión $2k - 1$, pues al reemplazar $k$ por 1, 2, 3, 4 y 5 sucesivamente, se obtienen sus términos. Observe que $k$ está indicando la posición del término dentro de la sucesión. La expresión $2k + 1$ también permite generar todos los términos de la sucesión dada, pero en este caso se debe tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4 y por lo tanto la posición de cada término en la sucesión estará dada por $k + 1$.

La sucesión ii) tiene una ley de formación evidente y por ejemplo podemos ver rápidamente que su décimo término es 0.

La ley de formación de la sucesión iv) está dada por la expresión $10^{3n}$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. La ley de formación de la sucesión v) está dada por la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

Independientemente del gran uso teórico que tiene el concepto de sucesión en matemáticas, las sucesiones de números se utilizan en la práctica para registrar los cambios de cantidades cuyos estados numéricos varían discretamente o describir las tendencias de cambio en cantidades que varían en forma continua. Por ejemplo, los valores en pesos de las exportaciones mensuales del país durante varios anos, constituyen una sucesión que permite estudiar el comportamiento de sus exportaciones; para analizar las condiciones físico–químicas de una bahía, los biólogos marinos determinan en el tiempo, sucesiones de registros sobre temperatura, salinidad, oxigeno disuelto, etc, en puntos estratégicos de la bahía; las variaciones de población de un país se representan mediante sucesiones de números que dan los estimativos de población por ano. En general una sucesión puede considerarse como un modelo matemático que permite representar y estudiar de manera general las variaciones de tales cantidades.

#### 1.4.7.3. Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión numérica cuyos términos consecutivos difieren siempre en la misma cantidad $d$ que llamaremos diferencia común. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una progresión aritmética, por definición debe cumplirse que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_k - a_{k-1} = d.$$

Consecuentemente cualquier término de una progresión aritmética se puede expresar utilizando únicamente el primer término de la progresión, $a_1$, la diferencia común $d$ y la posición del término en la sucesión:

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \ldots$$

O sea que también se puede definir progresión aritmética como una sucesión de la forma

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots,$$

cuya ley de formación está dada por la expresión

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1)d \tag{1.8}$$

Una propiedad útil en el manejo de progresiones aritméticas es que, con excepción del primero y último (cuando existe último), cualquier término resulta ser la semisuma del término que le antecede con el término que le sigue. En efecto:

$$\frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = \frac{a_k + d + a_k - d}{2} = a_k.$$

Un cálculo que se presenta con frecuencia es el de la suma de los $n$ primeros términos de una progresión aritmética. Deducimos a continuación la fórmula que permite efectuar dicho cálculo.

**Teorema 1.4.11.** *Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética con diferencia común $d$, entonces la suma $S_n$ de sus primeros $n$ términos está dada por la expresión*

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{1.9}$$

**Demostración.** Se reduce a demostrar la primera igualdad. La segunda se concluye de inmediato a partir de la primera puesto que $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Para demostrar la primera igualdad realizamos las transformaciones siguientes expresando al frente su justificación.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) \quad \left\{ \text{Por definición de } S_n \text{ y por fórmula (1.8)} \right.$$

$$= na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + d\sum_{k=0}^{n-1} k \quad \left\{ \text{Aplicando propiedades de la sumatoria, la última de las cuales es el cambio de índice.} \right.$$

$$= na_1 + d\sum_{k=1}^{n-1} k = na_1 + \frac{d(n-1)n}{2} \quad \left\{ \text{El primer término en la sumatoria anterior es 0 y se aplica la fórmula para calcular la suma de los } n \text{ primeros números naturales,} \right.$$

$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad \left\{ \text{Sacando } \tfrac{n}{2} \text{ como factor común.} \right. \blacksquare$$

**Ejemplo 1.4.1.** *Los términos sexto y séptimo de una progresión aritmética son 2.7 y 5.2. Encuentre el primer término de la sucesión y la suma de sus primeros 10 términos.*

*Por definición de progresión aritmética sabemos que la diferencia de dos términos consecutivos da la diferencia común $d$. Se tiene, por lo tanto, que $d = 5.2 - 2.7 = 2.5$.*

*De otro lado, aplicando la fórmula (1.8), se puede escribir:*

$$\begin{aligned} 2.7 &= a_1 + 5 \times 2.5 \\ \therefore \quad a_1 &= 2.7 - 5 \times 2.5 = -9.8 \end{aligned}$$

*La suma de los 10 primeros términos está dada por la expresión (1.9) con $n = 10$, así*

$$\begin{aligned} S_{10} &= \tfrac{10}{2}\left[2 \times (-9.8) + 9 \times (2.5)\right] \\ &= 5\left[-19.6 + 22.5\right] \\ &= 14.5 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.4.2.** *Una Universidad cuando alcanza una población de* 5.000 *estudiantes decide controlar su crecimiento admitiendo un número de estudiantes tal que el incremento neto en la matrícula total sea de* 500 *estudiantes. Si se sigue este modelo de crecimiento*

i) *Cuál será la población estudiantil en quinto ano de aplicar la política,*

ii) *Cuál es el número promedio de estudiantes por ano durante este lapso,*

iii) *En qué ano de aplicar la política la Universidad duplicará su población,*

iv) *Si se establece que por cada 100 alumnos debe haber un profesor de tiempo completo, cuál es la sucesión que permite describir el crecimiento de la población profesoral.*

*En el primer ano de aplicada la política la población estudiantil será* 5.500. *En el segundo ano será* $5.500 + 500$. *En el tercero será* $6.000 + 500$. *Es decir, el crecimiento de 'la población estudiantil se puede describir por una progresión aritmética cuyo primer término* $a_1$ *es* 5.500, *la diferencia común* $d = 500$ *y, por lo tanto, su término genérico* $a_k$ *estará dado por la expresión*

$$a_k = 5.500 + (k-1)500.$$

*El término* $a_k$ *dará la población estudiantil en el ano* $k$ *de aplicada la política.*

*De acuerdo con lo anterior en el ano quinto de aplicada la política la población estudiantil estará dada por* $a_5$ *. Se tiene, por tanto, que:*

$$a_5 = 5.500 + 4 \times 500 = 7.500.$$

*Para calcular el número promedio de estudiantes por ano, durante este periodo se debe sumar el número de estudiantes en cada uno de los cinco anos y dividir por* 5. *Consecuentemente, aplicando la fórmula* (1.9)*, se puede escribir*

$$\begin{array}{l}\textit{Promedio de estudiantes en}\\ \textit{el período de cinco anos}\end{array} = \frac{S_5}{5} = \frac{\frac{5}{2}(5.500 + 7.500)}{5} = 6.500$$

*Para calcular el ano en el cual la población estudiantil se duplica basta resolver para* $k$ *la siguiente ecuación:*

$$\begin{aligned} 10.000 &= 5.500 + (k-1) \times 500 \\ \therefore \quad k - 1 &= \frac{10.000 - 5.500}{500} = 9 \\ k &= 10 \end{aligned}$$

*Para calcular la sucesión que describe el crecimiento de la población profesoral, basta observar que si* $a_k = 5.500 + (k-1)500$ *es la población estudiantil en el periodo* $k$ *entonces el numero de profesores* $b_k$ *en dicho periodo estará dado por la expresión*

$$b_k = \frac{a_k}{100} = 55 + (k-1)5$$

*Expresión que permite generar la sucesión pedida que resulta ser una progresión aritmética con primer término* $b_1 = 55$ *y diferencia común* 5. *La sucesión queda:*

$$55, 60, 65, 70, \ldots \ \textit{etc.}$$

#### 1.4.7.4. Progresiones Geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión numérica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tal que la razón $q = \dfrac{a_k}{a_{k-1}}$ entre dos términos consecutivos, que llamaremos **razón**, de la progresión es siempre igual.
De acuerdo con la definición anterior son validas las siguientes igualdades

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = q,$$

lo cual permite calcular cualquier término de la progresión en términos de la razón y del primer término de la progresión. Se tiene, por lo tanto que:

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, \ldots, a_k = a_1 q^{k-1}, \ldots$$

O sea que también se puede definir progresión geométrica como una sucesión de la forma

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots,$$

cuya ley de formación está dada por la expresión

$$a_k = a_{k-1} q = a_1 q^{k-1}. \tag{1.10}$$

Otra propiedad útil en el manejo de las progresiones geométricas de términos positivos es que con la excepción del primero y el último (cuando existe último), cualquier término resulta ser el promedio geométrico del término que le antecede y del término que le sigue. Es decir $a_k = \sqrt{a_{k-1} a_{k+1}}$. En efecto

$$\sqrt{a_{k-1} a_{k+1}} = \sqrt{a_1 q^{k-2} a_1 q^k} = \sqrt{a_1^2 q^{2(k-1)}} = a_1 q^{k-1} = a_k$$

Observe que si la progresión no es de términos positivos la expresión anterior quedará

$$\sqrt{a_{k-1} a_{k+1}} = \left| a_1 q^{k-1} \right| = |a_k|$$

Si todos los términos son negativos, $q$ debe ser positivo y se tiene que

$$a_k = -\sqrt{a_{k-1} a_{k+1}}.$$

Deducimos a continuación la fórmula que permite calcular la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica.

**Teorema 1.4.12.** *Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión geométrica con razón común $q \neq 1$. Entonces la suma $S_n$ de sus primeros $n$ términos está dada por la expresión*

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \tag{1.11}$$

**Demostración.** Realizamos las transformaciones siguientes que llevan directamente al resultado que se quiere obtener justificando al frente cada transformación:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} \qquad \Big\{ \text{Por definición de } S_n \text{ y por fórmula (1.10).}$$

$$S_n q = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^k \qquad \Big\{ \text{Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por } q.$$

$$S_n(1 - q) = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_1 q^k = a_1 - a_1 q^n \qquad \Big\{ \text{Restando término a término los dos anteriores y simplificando términos.}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \qquad \Big\{ \text{Despejando } S_n.$$

**Ejemplo 1.4.3.** *Encuentre el primero y séptimo términos de la progresión geométrica cuyos segundo y tercer términos son* 2 *y* $\sqrt{2}$. *Calcule la suma de los* 10 *primeros términos.*

*De la definición de progresión geométrica se tiene que la razón común $q$ está dada por la razón de dos términos consecutivos. Es decir,*

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

*Consecuentemente,* $\frac{a_2}{a_1} = q$, *lo que permite despejar* $a_1$ *para obtener*

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = -\frac{2 \times 2}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

*Utilizando la fórmula* (1.10) *se puede calcular el séptimo término* $a_7$. *Se tiene*

$$a_7 = a_1 q^6 = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = -\frac{(\sqrt{2})^5}{2^4} = -\frac{\sqrt{2}}{2^2}.$$

*Finalmente, utilizando la fórmula* (1.11) *se puede calcular* $S_{10}$. *Se tiene*

$$\begin{aligned} S_{10} &= -\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\right)}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= -\frac{2^3}{\sqrt{2}} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^5}\right)}{\left(2 + \sqrt{2}\right)} = -\frac{2^3}{2^5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(2^5 - 1\right)}{\left(2 + \sqrt{2}\right)} = -\frac{31}{2^2 \cdot \sqrt{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.4.4.** *Un grupo humano crece al* 2% *anual. Si en un momento dado la población es de* 100.000, *dé la sucesión que describe el crecimiento anual de este grupo. Cuál será la población del grupo al cabo de los* 5 *anos y cuánto tiempo le tomará al grupo duplicar su población.*

*Si denotamos con* $a_1$ *la población inicial,* $a_2$ *será la población al cabo de un primer ano,* $a_3$ *la población al cabo del segundo ano, etc., por lo cual se puede escribir que*

$$\begin{aligned} a_1 &= 10^5, \\ a_2 &= a_1 \cdot 1.02 = 10^5 \cdot 1.02, \\ a_3 &= a_2 \cdot 1.02 = 10^5 \cdot 1.02^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

*Es decir, que la sucesión que describe la población del grupo por anos, es una progresión geométrica con razón común* $q = 1.02$ *y un primer término* $a_1 = 10^5$. *Consecuentemente, el término genérico* $a_k$ *de la progresión está definido por la expresión*

$$a_k = 10^5 \times 1.02^{k-1}$$

*y representa la población del grupo al cabo del ano* $k - 1$.

*De acuerdo con lo anterior la población del grupo al cabo de los* 5 *anos es la siguiente*

$$a_6 = 10^5 \times 1.02^5) = 110408.$$

*Puesto que la población al cabo del ano* $k$ *está dada por el término* $a_{k+1}$, *para calcular el ano* $k$ *en el cual se duplica la población habrá que resol ver* $k$ *de la siguiente ecuación:*

$$\begin{aligned} & a_{k+1} = 200.000 = 10^5 \times 1.02^k \\ \therefore \quad & 1.02^k = 2 \\ \therefore \quad & k = \frac{\log 2}{\log 1.02} = 35 \end{aligned}$$

### 1.4.7.5. Sumas de un número infinito de términos: Series Numéricas

Una situación que se presenta con relación a una sucesión numérica infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es el cálculo de la suma que se obtiene por adición sucesiva de sus términos. De hecho en este capitulo, en la Unidad 1.1. introdujimos expresiones tales como

$$\frac{1}{6} = 0.\overline{16} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots,$$

donde los puntos suspensivos se interpretaban diciendo que la suma de términos continuaba indefinidamente.

Esta es sin duda una manera muy vaga de definir el significado de esta "operación de suma" de infinitos términos. Es importante entender que la suma entre números, a que estamos acostumbrados en la vida ordinaria, y a la cual hicimos referencia al definir la estructura algebraica de los números reales, es una operación que sólo permite realizar sumas finitas. Por lo tanto, cuando se habla de sumas con infinitos términos es necesario darle un sentido matemático preciso.

En matemáticas una expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(o suma de infinitos términos) se llama **serie infinita** o simplemente **serie**. El significado de estas sumas está referido al comportamiento de las **sumas parciales**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

de los $n$ primeros términos. Se tiene así,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Para facilitar nuestras explicaciones introducimos la siguiente terminología.

Diremos que ***las sumas parciales*** $S_n$ ***tienden a un número o convergen a*** $S$, y escribiremos $S_n \to S$, ***cuando*** $n \to \infty$, si $S_n$ toma valores cada vez más próximos a $S$ (pudiendo ser iguales a $S$) cuando el número de términos $n$ crece sin limite. Esto es equivalente a decir también que $|S_n - S|$ toma valores cada vez más próximos a 0 cuando $n$ crece ($|S_n - S| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Se dice que ***la suma de*** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***existe y es igual a*** $S$, o bien que ***la serie*** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***converge al número*** $S$, si las sumas parciales $S_n$ tienden a $S$ cuando $n$ crece indefinidamente. Simbólicamente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S &\Leftrightarrow S_n \to S, \text{ cuando } n \to \infty \\ &\Leftrightarrow |S_n - S| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Las series numéricas no siempre son convergentes. En otras palabras, la operación de sumar infinitos términos no siempre conduce a un número real.

**Ejemplo 1.4.5.**

i) *La serie* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$, *cuando* $c_i = 1$ *no es convergente, puesto que* $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = n$ *y cuando* $n \to \infty$, $S_n = n \to \infty$. *Es decir,* $S_n$ *no tiende a ningún número real.*

ii) *La serie* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ *no es convergente. En efecto,* $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, $S_4 = 0$, $S_5 = 1$, *etc.*

*Es decir* $S_n$ *es* $0$ *ó* $1$, *dependiendo de* $n$, *y por lo tanto* $S_n$, *no se aproxima en el sentido de nuestra definición, ni a* $0$ *ni a* $1$. *Es claro que* $|S_n - 0| \not\to 0$ *cuando* $n \to \infty$, *y tampoco* $|S_n - 1| \not\to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

iii) *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *tal que* $c_k = k$ *hasta* $k = 10$ *y* $c_k = 0$ *para* $k \geq 11$ *es convergente pues se reduce a una suma finita, en este caso, a partir de* $n = 10$, *todas las sumas parciales son iguales a* $S_{10}$, *cuyo valor es*

$$S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55.$$

*Consecuentemente se puede decir que* $S_n \to 55$ *cuando* $n \to \infty$.

iv) *Consideremos el caso general de una progresión geométrica con razón común* $q \neq 1$ *y primer término* $a$. *La progresión tendrá la forma* $a, aq, aq^2, \ldots$

*Determinemos en qué casos la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ *es convergente. Miremos el comportamiento de las sumas parciales. Por la fórmula* (1.11) *se puede escribir:*

$$S_n = \frac{a\,(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

*Si* $|q| < 1$, *por ser un número en valor absoluto menor que* $1$, $q^n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *y por lo tanto todo el término* $\frac{aq^n}{1-q} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Es decir,*

$$S_n \to \frac{a}{1 - q}$$

*cuando* $n \to \infty$. *Esto se comprueba observando también que*

$$\left| S_n - \frac{a}{1 - q} \right| = \left| \frac{aq^n}{1 - q} \right|$$

*tiende a* $0$ *cuando* $n \to \infty$.

*En conclusión:*

$$\text{Si } |q| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1 - q} \tag{1.12}$$

*De otro lado, si* $|q| > 1$ *no es difícil ver que* $\frac{aq^n}{1-q}$ *crece en valor absoluto sin límites y por lo tanto las sumas parciales no pueden converger a ningún número.*

Un resultado que vale la pena destacar como un teorema y que garantiza que los números decimales considerados en la Unidad 1.1. definan verdaderamente números reales es el siguiente.

**Teorema 1.4.13.** *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie de términos positivos tal que sus sumas parciales son acotadas. Entonces la serie es convergente.*

No daremos la demostración de este Teorema. Indicaremos simplemente que por ser $a_k$ positivo las sumas parciales van creciendo, o por lo menos no disminuyen cuando $n$ crece, pero por ser acotadas siempre permanecen menor que un determinado número $M$. Se tiene por lo tanto

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots S_n < M.$$

Por el Principio del Extremo Superior, existe un número $S$ que es el extremo superior del conjunto $\{S_1, S_2, \ldots\}$. Se puede demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Es decir que el extremo superior $S$ de las sumas parciales es el valor al cual converge la serie.

Hemos visto, que en general la parte decimal de un número real es de la forma $0.b_1, b_2, b_3, \ldots$ y que el número real que este numeral define está dado por la siguiente igualdad:

$$0.b_1, b_2, b_3, \ldots = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots$$

Puesto que los $b_i$ son números entre 0 y 9 se puede escribir que:

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$$

Pero el término de la derecha de esta desigualdad se puede considerar como una progresión geométrica con primer término $\frac{9}{10}$ y razón $\frac{1}{10}$, por lo cual es convergente. En efecto:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Por lo tanto, la serie $\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots$ es convergente y define un número real único.

**Ejemplo 1.4.6.** *El numeral* $1.\overline{32}$ *define el número real asociado con la serie*

$$1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots$$

*Se pueden hacer las siguientes transformaciones para calcular el número al cual converge la serie.*

$$1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{10}\left(3 + \frac{2}{10}\right) + \frac{1}{10^3}\left(3 + \frac{2}{10}\right) + \frac{1}{10^4}\left(3 + \frac{2}{10}\right) + \cdots$$

*En este caso, si omitimos el* $1$*, podemos considerar la parte restante como una progresión geométrica con primer término* $\frac{1}{10}\left(3 + \frac{2}{10}\right)$ *y razón* $q = \frac{1}{10}$*. Aplicando la fórmula* (1.12)*, se tendrá:*

$$\frac{1}{10}\left(3 + \frac{2}{10}\right) + \frac{1}{10^3}\left(3 + \frac{2}{10}\right) + \frac{1}{10^4}\left(3 + \frac{2}{10}\right) + \cdots = \frac{\frac{1}{10}\left(3 + \frac{2}{10}\right)}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{32}{9}.$$

*Se puede escribir finalmente que*

$$1.\overline{32} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots = \frac{131}{99}$$

### 1.4.8. Ejercicios

En los ejercicios 1 a 21 responda verdadero o falso justificando su respuesta.

1. Para $x \in \mathbb{R}$, $2 < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x^{-1} < \frac{1}{2}$.
2. Para $x, y \in \mathbb{R}$, $2 < x < 3 \wedge 0 < y < 5 \Rightarrow 0 < xy < 15$.
3. Para $x, y \in \mathbb{R}$, $-4 < x < 2 \wedge 1 < y < 5 \Rightarrow$

$-4 < xy < 10$.

4. Para $x, y \in \mathbb{R}$, $-4 < x < 2 \wedge 1 < y < 5 \Rightarrow -3 < x + y < 7$.

5. Para $x, y \in \mathbb{R}$, $-4 < x < 2 \wedge 1 < y < 5 \Rightarrow -5 < x - y < -3$.

6. Para $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$.

7. Para $x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

8. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $ab > 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b > 0$.

9. Para $x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| = |2 - x|$.

10. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $-x$ es un número real negativo.

11. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$.

12. $|8 + 7| = |8| + |7|$.

13. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| = |a| + |b|$.

14. Para $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1$.

15. $-24$ es una cota superior del conjunto $A = [-300, -25)$.

16. Una cota inferior del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : -5/3 < x < 1\}$ es $-7/8$.

17. Si $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ entonces $\sup A = 0$ e $\inf A = 1$.

18. El máximo del conjunto $A = [-3, 15)$ es 15.

19. La sucesión $1, 1.2, 1.22, 1.222, \ldots$ es una progresión geométrica.

20. $\displaystyle\sum_{k=2}^{16} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = 3$

21. $\frac{1}{3} = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{10^j}$

22. En cada caso, ordene de menor a mayor, el conjunto de números que se dan. Explique los criterios que utiliza para efectuar la comparación.

    (a) $1,4\overline{14}$, $\sqrt{21}$, $\frac{2}{3}$, $1,414$.

    (b) $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5,\overline{8}}{6,1}$.

    (c) $2,3 \times 10^{-4}$, $230 \times 10^{-6}$, $\left(2,3 \times 10^{-4}\right)^2$, $0,001$.

    (d) $-\frac{11}{17}$, $-\frac{13}{9}$, $-1$.

23. Efectúe los siguientes cálculos entre intervalos teniendo en cuenta que $a < c < b < d$:

    (a) $[a, b) \cap (c, d] =$

    (b) $[a, b) \cup (c, d] =$

    (c) $[a, b) - (c, d] =$

24. Repase las demostraciones que se realizan en esta unidad y diga cuándo son directas y cuando indirectas. ¿Hay alguna demostración por el método de contraejemplo?

25. Complete la demostración del Teorema 1.4.5.

26. Complete la demostración que se sugiere en el Teorema 1.4.6.: Si $ab > 0$ y $a < 0$ entonces $b < 0$.

27. Demuestre el Teorema 1.4.7.

28. Exprese en lenguaje ordinario las proposiciones del Teorema 1.4.8.

29. Termine la demostración del Teorema 1.4.8.

30. Demuestre los siguientes hechos referentes al orden entre los números reales:

    (a) La suma de dos números negativos es un número negativo.

    (b) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

    (c) Si $a \leq b$, $b \leq c$ y $a = c$ entonces $a = b$.

    (d) Si $a$ y $b$ son números reales cualesquiera, se tiene $a^2 + b^2 \geq 0$.

    (e) No existe ningún número real $a$ tal que $x \leq a$, para todo real $x$.

    (f) Si $x$ tiene la propiedad de que $0 \leq x < h$, para cualquier $h$ positivo, entonces $x = 0$.

31. Demuestre que no existe ningún número real $x$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

32. Determine los valores que puede tomar $x$ para que las siguientes desigualdades sean válidas. En los casos (a), (c), (e) siga las instrucciones de las inecuaciones utilizando el lenguaje conjuntista.

    (a) $5x + 47 \leq 2x - 7$.

    (b) $6x - 5 \geq 3x - 1$.

    (c) $(2x + 3)(5x - 1) \geq 0$.

    (d) $(x + 5)(x - 3) \leq 0$.

(e) $\dfrac{1}{(x+\pi)\left(x-\sqrt{3}\right)} \geq 0.$

(f) $\dfrac{x-5}{x-2} > 0.$

33. Escriba en término de intervalos los conjuntos que se definen a continuación y represéntelos en la recta numérica.

 (a) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < a\}$
 (b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\}$
 (c) $\{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq b\}$
 (d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-a| > b\}$

34. Probar las siguientes propiedades de valor absoluto:

 (a) $\left|x^2\right| = x^2$
 (b) $|x| = \sqrt{x^2}$
 (c) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, si $y \neq 0$.

35. Encuentre los valores que puede toma $x$ para que las siguientes desigualdades e igualdades sea válidas:

 (a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 3$
 (b) $|x-3| \geq \frac{1}{3}$
 (c) $|x+10| \geq 5$
 (d) $|x - 0,3| < 0,1$
 (e) $\left|2x + \sqrt{2}\right| = 4$
 (f) $\left|\frac{1}{3}x\,(x-1)\right| = 0$
 (g) $\left|\dfrac{x}{3} + 1\right| = -1$
 (h) $|2x\,(x-1)| = 1$

36. Diga cuales de las siguientes afirmaciones son **verdaderas** y cuáles son **falsas** justificando su respuesta:

 (a) $x < 5$ implica $|x| < 5$
 (b) $|x-5| < 2$ implica $3 < x < 7$
 (c) $|1+3x| \leq 1$ implica $x \geq -\frac{2}{3}$
 (d) No existe ningún número real $x$ tal que $|x-1| = |x-2|$

37. Sea el conjunto $A = (1, 50) \cup [100, \infty)$ en $\mathbb{R}$

 (a) ¿Es 70 cota inferior de $A$?, ¿Es cota superior?
 (b) Describa el conjunto de las cotas inferiores de $A$.
 (c) Describa el conjunto de las cotas superiores de $A$.
 (d) Encuentre $c$ en $\mathbb{R}$, tal que para cualquier $x$ en $A$, $|x| \leq c$.

38. Dé un ejemplo de un conjunto $A$ de números acotados tal que uno de sus elementos sea cota superior pero que ninguno de ellos sea cota inferior.

39. Diga si el conjunto $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ es acotado en $\mathbb{R}$.

40. Dé un ejemplo de un conjunto $A$ tal que para cualquier $x$ en $A$, $|x| \leq \frac{1}{2}$.

41. * Demuestre que un conjunto $A$ es acotado si y sólo si existe $M$ real tal que para cualquier $x$ en $A$, $|x| \leq M$.

42. (a) Determine en $\mathbb{R}$, si existen, el supremo, íinfimo, máximo y mínimo de cada uno de los siguientes conjuntos:
 i. $\mathbb{Q}$
 ii. $\emptyset$
 iii. $(0, 1]$
 iv. $[0, 1]$
 v. $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$
 vi. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$
 vii. $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

 (b) Determine en $\mathbb{Q}$, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes conjuntos:
 i. $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$
 ii. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$
 iii. $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$
 iv. $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$

43. De ejemplo de conjuntos en $\mathbb{R}$ tales que

 (a) Poseen supremo pero no poseen máximo.
 (b) Poseen ínfimo pero no poseen mínimo.

44. Demuestre que la propiedad del extremo inferior implica la propiedad del extremo superior. (Imite la demostración dada en esta unidad de la implicación recíproca).

45. (a) Demuestre que si $\alpha$ y $\beta$ son números reales arbitrarios tales que $\alpha < \beta$ entonces $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

*(b) Si $\alpha$ es un número real arbitrario probar que existe un entero $n$ tal que $n \leq \alpha < n+1$.

*(c) Si $\alpha$ y $\beta$ son números reales arbitrarios tales que $\alpha < \beta$, demuestre que existe un número racional $r$ tal que $\alpha < r < \beta$.

*(d) Si $\alpha$ y $\beta$ son números reales arbitrarios tales que $\alpha < \beta$, demuestre que existe un número irracional $z$ tal que $\alpha < z < \beta$.

46. Calcular la expresión decimal de los siguientes números con tres cifras decimales, usando el procedimiento planteado en la unidad:

(a) $\sqrt{3}$  (c) $\sqrt[3]{2}$  (e) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  (d) $\sqrt{5}$

Compare sus resultados con la calculadora.

47. Con el mismo procedimiento del ejercicio 46, calcule $\sqrt{1}$ y concluya que $1 = 0,\overline{9}$.

48. Explique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

(a) La resta define una operación binaria entre naturales.

(b) La resta define una operación binaria entre enteros.

(c) La división define una operación binaria entre enteros.

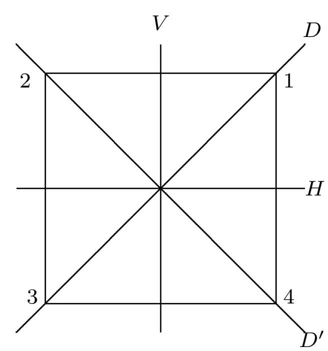
(d) La división define una operación binaria entre números reales no nulos.

(e) La expresión $n * m = n^m$ define una operación binaria entre naturales.

49. Operaciones binarias pueden definirse sobre los más variados objetos. Considere un cuadrado como se indica en la figura y considere los siguientes objetos abstractos llamados *simetrías* y *rotaciones* del cuadrado, así:

| | | |
|---|---|---|
| $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_0$ | : | Rotaciones de 90°, 180°, 270°, 360° en el sentido de las agujas del reloj. Así, por ejemplo $R$ convierte 1 en 2, 2 en 3, 4 en 1. |
| $H$ | : | Simetría respecto del eje horizontal (reflexión) convierte 1 en 4, 4 en 1, 2 en 3, 3 en 2. |
| $V$ | : | Simetría respecto del eje vertical. |
| $D$ | : | Simetría respecto del eje diagonal $D$. |
| $D'$ | : | Simetría respecto del eje diagonal $D'$. |

Sea $S$ el conjunto de las simetrías del cuadrado y defina de la manera que juzgue más natural una operación binaria $T$ entre ellas. ¿Qué propiedades tendría esta operación? Construya una tabla de operación de $T$.




50. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ y defina las siguientes operaciones binarias de la manera que se indica:

| | | |
|---|---|---|
| Suma (+) | : | $a + b = r$, |
| Multiplicación (×) | : | $a \times b = s$, $a, b, r, s \in \mathbb{Z}_4$, |

donde $r, s$ son los restos que resultan de dividir por cuatro a $a+b$ y $ab$, respectivamente. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 3$ entonces $2 + 3 = 1$ puesto que

$$\begin{array}{r|l} 2+3=5 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array};$$

$r = 1$.

$2 \times 3 = 2$ puesto que

$$\begin{array}{r|l} 2\times 3=6 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array};$$

$s = 2$. Llene la siguientes tablas efectuando todas las operaciones posibles, dos a dos, de elementos de $\mathbb{Z}_4$.

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

| $\times$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

(a) Diga cuáles de las propiedades formales estudiadas para la adición y multiplicación de números reales se satisfacen y cuáles no en esta estructura algebraica. Justifique su respuesta.

(b) Repase los resultados que hemos demostrado en la sección 1.3.6. Observe que el resultado 3 no se tiene en esta estructura algebraica. Explique porqué.

(c) ¿Se podría definir un orden entre los elementos de $\mathbb{Z}_4$ compatible con la operación de $+$ y $\times$?

51. Dé ejemplos de:

(a) Conjuntos de números racionales que tengan un primer elemento.

(b) Conjuntos de números reales que no tengan un primer o último elemento.

52. Demuestre que la propiedad del buen ordenamiento de los enteros implica que los enteros cumplen la propiedad del sup.

53. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones.

(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
(suma de los $n$ primeros números impares).

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(suma de los cuadrados de los $n$ primeros números naturales).

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
(suma de los cubos de los $n$ primeros números naturales).

54. Calcule cada una de las siguientes sumas.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-7)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(k-1)(k-3)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(-3)^{k-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+5)$

55. Exprese las siguientes sumas mediante el símbolo de sumatoria.

(a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19}$

(b) $1 + 5 + 9 + 13 + 17$

(c) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$

(d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

56. Al igual que se definió el símbolo $\sum$ para simplificar la escritura de sumas, se define el símbolo $\prod$ para simplificar productos:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

Compruebe las siguientes propiedades para el producto $\prod$.

(a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{n} a_j$

(b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$

(c) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}$

(d) $\displaystyle\prod_{i=k}^{n} a_i = \prod_{i=k+s}^{n+s} a_{i-s}$

57. Efectúe los siguientes productos.

(a) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$

(b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{3}(3i-2)$

(c) $\prod_{i=1}^{5} 3$

58. Encuentre el término general de las siguientes sucesiones.

    (a) $4, 7, 10, 13, 16$

    (b) $0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots$

    (c) $7, 4, 1, -2, -5, -8, \ldots$

    (d) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \ldots$

    (e) $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$

59. En las siguientes sucesiones se dá el término $n$–ésimo. Escriba los cinco primeros términos de cada una de ellas.

    (a) $a_n = \dfrac{3}{5n-2}$

    (b) $a_n = 1 + (-1)^n$

    (c) $a_n$ es el cuadrado del $n$–ésimo número primo.

    (d) $a_n$ es el número de enteros positivos menores que $n$.

    (e) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n(n+1)}$

60. El número de bacterias que hay en cierto cultivo se duplica cada día. Si el número inicial de bacterias es 50, ¿cuantas hay al cabo de un día?, ¿de dos días?, ¿de tres días? Encuentre una fórmula para el número de bacterias después de $n$ días.

61. Encuentre los términos quinto, décimo y enésimo de las siguientes progresiones aritméticas:

    (a) $2, 6, 10, 14, \ldots$

    (b) $-7, -3.9, -0.8, 2.3, \ldots$

    (c) $16, 13, 10, 7, \ldots$

    (d) $-8, -3, 2, 7, \ldots$

62. Encuentre el décimo segundo término de la progresión aritmética cuyos dos primeros términos son 9.1 y 7.5.

63. Los términos sexto y séptimo de una progresión aritmética son 2.7 y 5.2. Encuentre el primer término.

64. ¿Cuántos enteros entre 32 y 395 son divisibles por 6? Encuentre la suma de ellos.

65. Un hombre desea construir una escalera con nueve peldanos que disminuyen uniformemente desde 24 pulgadas en la base hasta 18 pulgadas en la parte superior. Determine la longitud de los siete peldanos intermedios.

66. Un cultivo de bacterias se incrementan 20% cada hora. Si el cultivo original tenía 10.000 bacterias, encuentre una fórmula para determinar el número de bacterias después de $t$ horas. ¿Cuántas bacterias habrá después de 10 horas?

67. Encuentre el quinto, octavo y $n$–ésimo términos de las siguientes progresiones geométricas.

    (a) $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

    (b) $4, -6, 9, -13, 5, \ldots$

    (c) $162, -54, 18, -6, \ldots$

    (d) $1, \sqrt{3}, 3, \sqrt{27}, \ldots$

68. Encuentre el séptimo término de la progresión geométrica cuyos segundo y tercer términos son 2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.

69. En condiciones especiales, una sociedad que crece sin control de su población duplicará el número de sus habitantes cada 25 anos.

    (a) Si se denota con $N_0$ el número de habitantes en un momento dado, ¿cuál será el número de habitantes $N_k$ después de $k$ cuartos de siglo?

    (b) Si $N_0 = 10^6$ habitantes, ¿cuántos habitantes habrá a los 150 anos?

    (c) Calcule el número promedio de habitantes durante estos 150 anos.

70. Se deja caer una pelota de hule desde una altura de 10 metros. Si la pelota rebota la mitad de la distancia cada caída, calcule la distancia total que recorre la pelota antes de detenerse.

71. Encuentre cada una de las siguientes sumas.

    (a) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{4} + 3\right)$

    (b) $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

    (c) $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

    (d) $\sum_{k=1}^{9} \left(-\sqrt{5}\right)^k$

72. Encuentre las sumas de las series geométricas siguientes.

    (a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

    (b) $1.5 + 0.015 + 0.00015 + \cdots$

    (c) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$

    (d) $\sqrt{2} - 2 + \sqrt{8} - 4 + \cdots$

73. Encuentre la fracción de enteros que corresponde a cada uno de los la fracción entre enteros que siguientes números racionales.

    (a) $0.23$

    (b) $2.4\overline{17}$

    (c) $10.\overline{55}$

    (d) $0.\overline{9}$

    (e) $0.\overline{98}$

    (f) $123.61\overline{83}$

## 1.5. Exponenciación y logaritmación

### 1.5.1. Radicales

En la sección 1.4.5. de la Unidad anterior hemos establecido que dado cualquier número no–negativo $a$ y un número real arbitrario $n$, existe un número positivo $\alpha$ y sólo uno tal que

$$\alpha^n = a.$$

Este número lo denotamos con el símbolo $\sqrt[n]{a}$. No es difíl ver que el número $-\sqrt[n]{a}$, cuando $n$ es par, es también una raíz $n$–ésima de $a$. Esto es $(-\sqrt[n]{a})^n = a$. Este hecho lleva a que usualmente hablemos de la "raíz negativa" y de la "raíz positiva", *cuando n es par, pero el símbolo* $\sqrt[n]{a}$ *se reserva exclusivamente para la raíz positiva o principal.*

Debe ser claro que si $n$ es impar y $a$ es positivo, sólo podrá existir una raíz $n$–ésima que en este caso tiene que ser positiva.

Cuando $a$ es negativo cabe preguntarse por la existencia de raíces $n$–ésimas. Si $n$ es par, es decir $n = 2k$ ($k$ natural), no debe existir ningún $\alpha$ real tal que $\alpha^n = a$, puesto que $\alpha^n = \left(\alpha^k\right)^2$ es positivo. Es decir, la raíz no existe como número real.

Si $n$ es impar y $a$ es negativo, es posible hablar de raíz $n$–ésima de $a$. En este caso existe sólo una raíz $n$–ésima real y es negativa. Este hecho es familiar para el alumno, pues es bien conocido, por ejemplo, que $\sqrt[3]{-8} = -2$. Puesto que $-2 = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8}$, la existencia de la raíz $n$–ésima de un número negativo y la forma de obtenerla cuando $n$ es impar se puede reducir a la existencia y obtención de la raíz de un número arbitrario.

En efecto, cuando $a$ es un número real negativo y $n$ es impar se define, generalizando el ejemplo anterior,

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}.$$

Observe que $-a$ es positivo y por lo tanto $\sqrt[n]{-a}$ existe y es positivo. Consecuentemente, $-\sqrt[n]{-a}$ es un número real negativo bien definido. Se puede demostrar también, en forma general, que en este caso $-\sqrt[n]{-a}$ cumple la definición de raíz $n$–ésima de $a$. Es decir, $\left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = a$ (Ver ejercicios).

Las observaciones anteriores se pueden resumir de la siguiente manera:

1. El símbolo $\sqrt[n]{a}$, no necesariamente representa un número real, pero cuando lo hace está definido por la siguiente relación básica
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$
2. El símbolo $\sqrt[n]{a}$ define un número real solamente en los siguientes casos:
   (a) Cuando $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
   En este caso $\sqrt[n]{a}$ denota la raíz positiva (Teorema 1.4.9.. Unidad 1.4). Cuando $n$ es par, $-\sqrt[n]{a}$ es también raíz $n$–ésima de $a$. Se le llama la raíz negativa.
   (b) Cuando $a < 0$ y $n$ impar.
   En este caso $\sqrt[n]{a}$ denota la única raíz $n$–ésima que existe, que es negativa, y se define $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Así por ejemplo:

$$\sqrt[4]{16} = 2, \text{ pues } 2 \geq 0 \text{ y } 2^4 = 16.$$

Por ser 4 un número par, 16 posee también raíz cuarta negativa. Se escribe $-\sqrt[4]{16} = -2$.

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ pues } 5 \geq 0 \text{ y } 5^3 = 125,$$
$$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{-(-125)} = -\sqrt[3]{125} = -5,$$
$$\sqrt[4]{-16} \text{ no representa un número real.}$$

Un hecho importante que puede prevenir errores es el siguiente. Si bien $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, cuando la raíz $n$–ésima existe, no necesariamente se tiene que $\sqrt[n]{a^n} = a$. Por ejemplo, si $a = -3$ y $n = 2$ entonces $\sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[2]{9} = 3$; esto es, $\sqrt[2]{(-3)^2} \neq -3$.

En general se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.14.**

i) *Si $n$ es par, entonces* $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$.

ii) *Si $n$ es impar, entonces* $\sqrt[n]{a^n} = a$.

**Demostración.**

i) Como $n$ es par, $a^n \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Por definición:

(I) Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a^n} = a = |a|$ ¿por qué?

(II) Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a^n} = -a = |a|$ ¿por qué?

ii) Como $n$ es impar, $a^n \geq 0$ si $a \geq 0$ y $a^n < 0$ si $a < 0$. Por lo tanto,

(I) Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a^n} = a$.

(II) Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a^n} = -\sqrt[n]{-a^n} = -\sqrt[n]{(-a)^n} = -(-a) = a$ ¿por qué? ∎

Las siguientes constituyen propiedades básicas de los radicales que pueden obtenerse de manera más o menos directa de su definición, y son válidas en los casos en que se pueda garantizar la existencia de las raíces involucradas.

**Teorema 1.5.15.**

i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

ii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

iii) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

**Demostración.** Para demostrar la relación i) basta observar que:

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n && \text{Propiedad de las potencias con exponentes enteros.} \\
&= ab && \text{Por definición de raíz } n\text{–ésima, cuando éstas existen.}
\end{aligned}
$$

Es decir, que $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ cumple la definición de raíz $n$–ésima, y por la unicidad de la raíz se desprende que debe ser igual a $\sqrt[n]{ab}$, que es la manera usual de denotar a la raíz $n$–ésima de $ab$.

De manera semejante se demuestra la relación ii). Se tiene

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n &= \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} && \text{Propiedad de las potencias con exponente entero.} \\
&= \frac{a}{b} && \text{Propiedad de la raíz } n\text{–ésima.}
\end{aligned}
$$

Dejamos la relación iii) como un ejercicio al estudiante (Ver ejercicios). ∎

**Ejemplo 1.5.7.** *Ilustramos la simplificación de algunas expresiones utilizando propiedades de los radicales.*

1.
$$\begin{aligned} 5\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{80} &= 5\sqrt{4\cdot 5}-\sqrt{9\cdot 5}+2\sqrt{16\cdot 5} \\ &= 5\sqrt{4}\sqrt{5}-\sqrt{9}\sqrt{5}+2\sqrt{16}\sqrt{5} \\ &= 10\sqrt{5}-3\sqrt{5}+8\sqrt{5} \\ &= 15\sqrt{5} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{\left(3a^{-2}b\right)^4}{\left(2ab^{-2}\right)^3}} &= \frac{\sqrt[3]{\left(3a^{-2}b\right)^4}}{\sqrt[3]{\left(2ab^{-2}\right)^3}} \\ &= \frac{\left(3a^{-2}b\right)\sqrt[3]{3a^{-2}b}}{2ab^{-2}} \\ &= \tfrac{3}{2}a^{-3}b^3\sqrt[3]{3a^{-2}b} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \sqrt{9a^3}+\sqrt{25a^5}-\sqrt{a} &= 3a\sqrt{a}+5a^2\sqrt{a}-\sqrt{a} \\ &= \left(3a+5a^2-1\right)\sqrt{a} \end{aligned}$$

4. *Aunque* $\sqrt{(-4)(-16)}=\sqrt{64}=8$*, no se puede escribir*

$$\sqrt{(-4)(-16)}=\sqrt{-4}\sqrt{-16}$$

*ya que* $\sqrt{-4}$ *y* $\sqrt{-16}$ *no representan números reales.*

### 1.5.2. Exponentes racionales

En la sección anterior hemos definido las condiciones en las cuales el símbolo $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido como número real. A partir de esta sección utilizaremos también el símbolo $a^{1/n}$ para referirnos a la raíz $\sqrt[n]{a}$ cuando existe. Aunque el significado de la expresión $a^{1/n}$ está definido por $\sqrt[n]{a}$, tiene sentido referirnos a ella como potencia con exponente fraccionario de la forma $1/n$ pues satisface las propiedades básicas de las potencias con exponente entero. En efecto, se desprende directamente de su definición y del Teorema 1.5.15. las siguientes propiedades:

1. $\left(a^{1/n}\right)^n=a$
2. $\left(a^n\right)^{1/n}=\begin{cases} |a|, & \text{si } n \text{ es par,} \\ a & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$
3. $(ab)^{1/n}=a^{1/n}b^{1/n}$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}=\dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$
5. $a^{1/mn}=\left(a^{1/m}\right)^{1/n}$

La definición anterior permite extender la definición de potencias con exponente entero a potencias con exponente fraccionario de la siguiente manera.

**Definición 1.5.1.** *Sean $m$ y $n$ enteros con $n > 0$. Sea $a$ un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ esté bien definido. Se tiene*

$$\begin{aligned} a^{m/n} &\equiv \left(\sqrt[n]{a}\right)^m && \text{Definición} \\ &= \left(a^{1/n}\right)^m \\ &= \begin{cases} \underbrace{a^{1/n} \times \cdots \times a^{1/n}}_{m\ veces} & si\ m > 0 \\ \underbrace{\dfrac{1}{a^{1/n}} \times \cdots \times \dfrac{1}{a^{1/n}}}_{m\ veces} & si\ m < 0. \end{cases} && \text{Definición de potencia entera} \end{aligned}$$

Ya que $-\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n}$, por definición $a^{-(m/n)} = a^{-m/n}$.

Esta definición tiene una implicación inconveniente pues cuando $a$ es negativo la buena definición de $a^{m/n}$ va a depender de la fracción $\frac{m}{n}$, $n$ debe ser impar y no necesariamente se cumple que $a^{m/n} = a^{km/kn}$ para $k$ entero, (como debería ser), a pesar de que $\frac{m}{n}$ y $\frac{km}{kn}$ representan un al mismo número racional. En efecto, $(-27)^{1/3}$ está bien definido pues

$$(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3,$$

pero es claro que $(-27)^{2/6}$ no existe como número real y por lo tanto no cumple que

$$(-27)^{1/3} = (-27)^{2/6}.$$

Se puede demostrar, sin embargo, que $a^{m/n} = a^{km/kn}$ cuando ambos lados de la igualdad tienen sentido. Algunos autores obvian esta 'incomodidad" hablando de potencias de la forma $a^{m/n}$ sólo para valores positivos de $a$.

Es importante entender, por último, respecto de esta definición, y aunque no lo demostremos, que cuando $\frac{m}{n} = k \in \mathbb{Z}$ entonces la definición que hemos dado de potencia con exponente fraccionario coincide con la definición de potencia con exponente entero y por lo tanto $a^{m/n} = a^k$. Es decir, la definición que hemos dado no es más que una extensión de la definición de potencia con exponente entero, aunque con restricciones en el caso de bases negativas.

Las potencias con exponente racional obedecen las mismas propiedades formales que las potencias con exponente entero.

**Teorema 1.5.16.**

i) $\left(a^{m/n}\right)^n = a^m$

ii) $a^{-(m/n)} = \dfrac{1}{a^{m/n}}$

iii) $a^{m/n} \cdot a^{r/s} = a^{m/n+r/s}$

iv) $\left(a^{m/n}\right)^{r/s} = a^{mr/ns}$

v) $a^{m/n} \cdot b^{m/n} = (ab)^{m/n}$

*Las propiedades se cumplen siempre que ambos lados de la igualdad representen un número real.*

**Demostración.** Damos la demostración de algunas de las propiedades anteriores dejando las restantes como ejercicio.

i)
$$\begin{aligned}
\left(a^{m/n}\right)^n &= \left[\left(a^{1/n}\right)^m\right]^n && \text{Definición de la potencia } a^{m/n}.\\
&= \left(a^{1/n}\right)^{mn} && \text{Prop. potencias con exponente entero.}\\
&= \left(a^{1/n}\right)^{nm} && \text{Prop. conmutativa.}\\
&= \left[\left(a^{1/n}\right)^n\right]^m && \text{Prop. potencias con exponente entero.}\\
&= a^m && \text{Definición de } a^{1/n}.
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
a^{-(m/n)} &= a^{-m/n} && \text{Por definición.}\\
&= \left(a^{1/n}\right)^{-m} && \text{Definición de la potencia } a^{m/n}.\\
&= \frac{1}{\left(a^{1/n}\right)^m} && \text{Definición potencia con exponente entero negativo.}\\
&= \frac{1}{\left(a^{m/n}\right)} && \text{Definición de la potencia } a^{m/n}.
\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}
a^{m/n}\cdot a^{r/s} &= a^{ms/ns}\cdot a^{rn/ns} && \text{Ver observación 1.5.2. al final de la demostración.}\\
&= \left(a^{1/ns}\right)^{ms}\cdot\left(a^{1/ns}\right)^{rn} && \text{Definición de la potencia } a^{m/n}.\\
&= \left(a^{1/ns}\right)^{ms+rn} && \text{Prop. potencias con exponente entero.}\\
&= a^{m/n+r/s} && \text{Prop. de las fracciones. } \blacksquare
\end{aligned}$$

**Observación 1.5.2.** *Es importante entender que debido a la observación que hicimos sobre la definición del símbolo $a^{m/n}$, al hacen la transformación*

$$a^{m/n}\cdot a^{r/s} = a^{ms/ns}\cdot a^{rn/ns},$$

*debemos estar seguros que tanto $a^{ms/ns}$ como $a^{rn/ns}$ representen números reales. Este es en efecto el caso. Si $a > 0$ no hay ningún problema. Si $a < 0$, la buena definición de $a^{m/n}$ y $a^{r/s}$ implica que tanto $n$ como $s$ son impares y por lo tanto $ns$ también lo será, lo que garantiza la buena definición de $a^{ms/ns}$ y $a^{rn/ns}$.*

**Ejemplo 1.5.8.** *Simplifiquemos las siguientes expresiones.*

i) $\dfrac{2(\sqrt[3]{3})^4}{2^{-1}\times 3^2} = \dfrac{2\times 3^{3/4}}{2^{-1}\times 3^2} = 2\times 2\times 3^{4/3}\times 3^{-2} = 2^2\times 3^{4/3-2} = 2^2 3^{-2/3}$

ii) $\sqrt{3^2\sqrt{81}} = \left(3^2\left(3^4\right)^{1/2}\right)^{1/2} = \left(3^2\right)^{1/2}\left(3^2\right)^{1/2} = 3\times 3 = 3^2$

iii) $\dfrac{(a^{-4}b)^{-1/2}}{(a^2b^3)^{-1/3}} = (a^{-4}b)^{-1/2}(a^2b^3)^{1/3} = a^2b^{-1/2}a^{2/3}b = a^{2+2/3}b^{1-1/2} = a^{8/3}b^{1/2}$

iv) $\left(\dfrac{3^{-2/3}\cdot 11^{5/6}}{3^{3/4}\cdot 11^{7/2}}\right)^{12} = \dfrac{3^{-8}\cdot 11^{10}}{3^9\cdot 11^{42}} = 3^{-8}\cdot 3^{-9}\cdot 11^{10}\cdot 11^{42} = 3^{-17}\cdot 11^{52}$

### 1.5.3. Exponentes reales

En la definición del símbolo $a^x$ hemos seguido un proceso de extensiones sucesivas que han permitido pasar de potencias con exponente entero (Unidad 1.3) a potencias con exponente racional (sección 1.5.2 de esta Unidad) pero simultáneamente a medida que se ampliaba el conjunto de números que podían servir de exponente, se restringía el conjunto de números que podían servir de base. Así, para el caso de exponentes enteros cualquier número real puede servir de base, excepto por el caso $0^0$ que no está definido, pero para el caso de exponentes racionales los números reales negativos no pueden servir de base para cualquier exponente racional.

En esta sección se plantea, sin demostración, que es posible dar una definición de potencia con exponente real y base positiva que conserva las mismas propiedades formales de las potencias con exponente racional y que a su vez, viene a constituir una extensión de la definición de potencia con exponente racional.

**Teorema 1.5.17.** *Sea $a$ un número real positivo y $x$ un número real arbitrario. Existe un número real positivo $a^x$, que llamaremos potencia de base $a$ y exponente $x$, que cumple las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^x &= a^x b^x \end{aligned} \tag{1.13}$$

Cuando $x$ es un racional, $a^x$ coincide con el valor dado por la definición que aparece en la sección 1.5.2.

Por definición

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Es importante mantener presente que las propiedades (1.13), que satisfacen las potencias con exponente real, son las mismas que satisfacen las potencias con exponente racional o entero. Así, quien esté familiarizado con el manejo de estas últimas, lo estará también con el manejo de las potencias con exponente real. Ilustramos esta afirmación con la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned} \frac{a^{\sqrt{2}/2}}{b^{2\pi}} \cdot \frac{b^{-\pi/3}}{b^{2\sqrt{2}/3}} &= a^{\sqrt{2}/2} \cdot b^{-2\pi} \cdot b^{-\pi/3} \cdot a^{-2\sqrt{2}/3} \\ &= a^{\sqrt{2}/2 - 2\sqrt{2}/3} \cdot b^{-2\pi-\pi/3} \\ &= a^{-\sqrt{2}/6} \cdot b^{-7\pi/3} \end{aligned}$$

¿Cómo se puede interpretar el símbolo $a^x$, cuando $x$ es un número real arbitrario y $a > 0$?. Puesto que $a^x$ viene a ser una extensión de la definición de potencia con exponente racional , si $x = \frac{m}{n}$, $a^x$ puede interpretarse en el sentido de la definición dada en la sección anterior. Cuando $x$ es irracional, analizaremos dos ejemplos particulares, que esperamos ayuden al estudiante a formarse una visión operativa del significado de $a^x$.

Consideremos el caso $3^{\sqrt{2}}$. El significado de esta potencia, es decir la manera como se llega a calcular e identificar el número real representado por $3^{\sqrt{2}}$ se puede entender a partir de las sucesiones de potencias

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \ldots \quad \text{ó} \quad 3^2, 3^{1.5}, 3^{1.42}, \ldots,$$

que son potencias bien definidas y de significado conocido pues sus exponentes son racionales. La ley de formación de estas sucesiones está determinada por la ley de formación de sus exponentes, la cual está definida a su vez por la expresión decimal de $\sqrt{2}$. (Es fácil comprobar con una calculadora de mano de 10 dígitos en pantalla que $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$).

El número $3^{\sqrt{2}}$ se puede definir de las dos maneras siguientes:

$$3^{\sqrt{2}} = \sup\left\{3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \ldots\right\}$$

ó

$$3^{\sqrt{2}} = \inf\left\{3^2, 3^{1.5}, 3^{1.42}, 3^{1.415}, \ldots\right\}.$$

Si calculamos $3^{\sqrt{2}}$, con el auxilio de una calculadora de mano, algunas de las potencias anteriores se observa rápidamente que la sucesión $3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, \ldots$ es creciente y que la sucesión $3^2, 3^{1.5}, 3^{1.42}, \ldots$ es decreciente. Se puede observar también, aunque éste ya no es un hecho tan inmediato, que cualquier potencia en la primera sucesión es menor que cualquier potencia en la segunda sucesión. De esta manera, la definición propuesta se puede reinterpretar en términos muy intuitivos diciendo el número real que representado por $3^{\sqrt{2}}$ es el número al cual se van aproximando las sucesiones anteriores, a medida que los exponentes de las potencias se aproximan a $\sqrt{2}$. La primera sucesión se aproxima en forma ascendente y la segunda se aproxima en forma descendente. $3^{\sqrt{2}}$ viene a ser el único número o punto de separación entre las potencias de ambas sucesiones Se puede escribir, por lo tanto, que

$$3^1 < 3^{1.4} < 3^{1.41} < \cdots < 3^{\sqrt{2}} < \cdots < 3^{1.415} < 3^{1.41} < 3^{1.5} < 3^2.$$

Si obtenemos las expresiones decimales de algunas de las potencias que conforman las sucesiones anteriores, empezando por $3^{1.4}$ y $3^{1.5}$ e incrementando de a dos dígitos en el exponente para acelerar el proceso de aproximación, podemos visualizar mejor la manera como las dos sucesiones de potencias aproximan a $3^{\sqrt{2}}$ y la manera como va surgiendo la expresión decimal de $3^{\sqrt{2}}$ en este proceso. Se puede escribir:

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\ \ 4.6 \leq 4.6555367 \cong 3^{1.41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.5} \cong 5.1961521 \leq 5.2\\
&\text{ii)}\ \ 4.7 \leq 4.7276950 \cong 3^{1.414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.415} \cong 4.7328918 \leq 4.8\\
&\text{iii)}\ \ 4.728 \leq 4.7287850 \cong 3^{1.41421} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.41422} \cong 4.7288378 \leq 4.729\\
&\text{iv)}\ \ 4.728804 \leq 4.72880406 \cong 3^{1.4142135} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.4142136} \cong 4.72880458 \leq 4.728805
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Estas desigualdades permiten ver que tan próximas están las potencias que constituyen las dos sucesiones a $3^{\sqrt{2}}$ y qué tan rápida es su aproximación cuando los exponentes se aproximan a $\sqrt{2}$. Se puede escribir, en efecto que:

$$\left.\begin{array}{l}
3^{\sqrt{2}} - 3^{1.4} < 3^{1.5} - 3^{1.4} < 5.2 - 4.6 = 0.6\\
3^{1.5} - 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.5} - 3^{1.4} < 5.2 - 4.6 = 0.6
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
3^{\sqrt{2}} - 3^{1.414} < 3^{1.415} - 3^{1.414} < 4.8 - 4.7 = 0.1\\
3^{1.415} - 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.415} - 3^{1.414} < 4.8 - 4.7 = 0.1
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
3^{\sqrt{2}} - 3^{1.41421} < 3^{1.41422} - 3^{1.41421} < 4.729 - 4.728 = 0.001\\
3^{1.41422} - 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.41422} - 3^{1.41421} < 4.729 - 4.728 = 0.001
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
3^{\sqrt{2}} - 3^{1.4142135} < 3^{1.4142136} - 3^{1.4142135} < 4.728805 - 4.728804 = 0.000001\\
3^{1.4142136} - 3^{\sqrt{2}} < 3^{1.4142136} - 3^{1.4142135} < 4.728805 - 4.728804 = 0.000001
\end{array}\right\}$$

Lo anterior quiere decir, en particular que si se aproxima a $3^{\sqrt{2}}$ por $3^{1.414}$ (por defecto} o por $3^{1.415}$ (por exceso), el error que se comete es menor que 0.1; pero si se aproxima por $3^{1.41421}$ (por defecto) o por $3^{1.41422}$ (por exceso) el error que se comete es menor que 0.001 y así sucesivamente.

Las desigualdades (1.14) dan información sobre la manera de obtener la expresión decimal de $3^{\sqrt{2}}$, de la siguiente manera:

- La desigualdad i) permite concluir que 4 es posiblemente el primer dígito de la expresión decimal $3^{\sqrt{2}}$.
- La desigualdad ii) permite concluir que 4.7 son necesariamente los dos primeros dígitos de la expresión decimal de $3^{\sqrt{2}}$.

– La desigualdad iii) indica que los cuatro primeros dígitos de la expresión decimal de $3^{\sqrt{2}}$ están dados por 4.728.

– La desigualdad iv) indica, por ultimo, que los siete primeros dígitos de la expresión decimal de $3^{\sqrt{2}}$ están dados por 4.728804.

Se puede comprobar estos resultados comparándolos con la expresión decimal 4.728804388 de $3^{\sqrt{2}}$ que da una calculadora de mano de 10 dígitos en pantalla.

Consideremos un segundo ejemplo: $0.5^{\sqrt{2}}$. Procediendo de manera similar al caso anterior podemos considerar las sucesiones

$$0.5^1, 0.5^{1.4}, 0.5^{1.41}, \ldots \quad \text{y} \quad 0.5^2, 0.5^{1.5}, 0.5^{1.42}, \ldots$$

En este caso, debido a que $0.5 < 1$, la primera sucesión es decreciente y la segunda creciente, pero como en el ejemplo anterior $0.5^{\sqrt{2}}$ se puede interpretar como el número real al cual se van aproximando las potencias de ambas sucesiones a medida que sus exponentes se aproximan a $\sqrt{2}$. La primera se aproxima en forma descendente y la segunda en forma ascendente. Se puede escribir:

$$0.5 > 0.5^{1.4} > 0.5^{1.41} > 0.5^{1.414} > \cdots > 0.5^{\sqrt{2}} > \cdots > 0.5^{1.415} > 0.5^{1.42} > 0.5^{1.5} > 0.5^2.$$

En este caso la definición matemática de $0.5^{\sqrt{2}}$ se podría dar de las dos maneras siguientes:

$$\begin{aligned} 0.5^{\sqrt{2}} &= \inf\left\{0.5^1, 0.5^{1.4}, 0.5^{1.41}, \ldots\right\} \\ 0.5^{\sqrt{2}} &= \sup\left\{0.5^2, 0.5^{1.5}, 0.5^{1.42}, \ldots\right\} \end{aligned}$$

De manera similar al ejemplo anterior se pueden establecer las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & 0.4 \geq 0.3789291 \cong 0.5^{1.4} > 0.5^{\sqrt{2}} > 0.5^{1.5} \cong 0.3585533 \geq 0.3 \\ \text{ii)} & 0.376 \geq 0.3752697 \cong 0.5^{1.414} > 0.5^{\sqrt{2}} > 0.5^{1.415} \cong 0.3750097 \geq 0.375 \\ \text{iii)} & 0.37522 \geq 0.3752151 \cong 0.5^{1.41421} > 0.5^{\sqrt{2}} > 0.5^{1.41422} \cong 0.3752125 \geq 0.37521 \\ \text{iv)} & 0.375215 \geq 0.3752142 \cong 0.5^{1.4142135} > 0.5^{\sqrt{2}} > 0.5^{1.4142136} \cong 0.3752141 \geq 0.375214 \end{array} \tag{1.15}$$

Desigualdades que en este caso permiten estimar también el grado de aproximación de las diferentes potencias a $0.5^{\sqrt{2}}$. Se puede afirmar, por ejemplo, que si se aproxima a $0.5^{\sqrt{2}}$ por $0.5^{1.414}$ (por exceso) o por $0.5^{1.415}$ (por defecto) el error que se comete es menor que $0376 - 0.375 = 0.001$.

También se puede observar la formación paulatina de la expresión decimal de $0.5^{\sqrt{2}}$. Así, por ejemplo, al mirar la desigualdad iv) se puede concluir que los 6 primeros dígitos de su expresión decimal están dados por 0.375214.

Esta definición operativa por aproximación se puede generalizar en realidad a cualquier potencia $a^x$ con exponente real. El entender estos procesos aproximativos es importante para saber cómo seleccionar el numero de dígitos en el exponente, y a veces en la base de acuerdo con el nivel de precisión que deseamos tener en nuestros cálculos (ver Ejercicio 9).

El siguiente Teorema que damos sin demostración describe una propiedad muy importante de las potencias reales y en cierta medida puede considerarse una extensión del Teorema 1.4.7. de la Unidad 1.4.

**Teorema 1.5.18.** *Sean $a, b, x, y$ números reales.*

i) *$a > 1$, $x < y$ si y sólo si $a^x < a^y$.*

ii) *$0 < a < 1$, $x < y$ si y sólo si $a^x > a^y$.*

iii) *$0 < a < b$, $a^x < a^y$ si y sólo si $x > 0$, $a^x > b^x$ si y sólo si $x < 0$.*

Lo anterior se puede interpretar en lenguaje ordinario diciendo, que cuando $a > 1$, el valor de la potencia crece a medida que los valores del exponente $x$ crecen, pero si $0 < a < 1$ los valores de la potencia decrecen cuando los valores del exponente $x$ crecen.

De otro lado, si el exponente $x$ es positivo y fijo y varían los valores de la base, los valores de la potencia crecen cuando crecen los valores de la base. Pero si $x$ es negativo, los valores de la potencia decrecen al crecer los valores de la base.

Los siguientes casos particulares, que el estudiante puede comprobar con su calculadora ilustran las variaciones mencionadas.

– Para el caso i) $a > 1$; $a = 3.5$.

$$3.5^{-3/4}, 3.5^{-1/2}, 3.5^{1/4}, 3.5^{1/2}, 3.5^{2}, 3.5^{3}, 3.5^{10}.$$

  Calculando en su orden las potencias anteriores, y redondeando se tiene

$$0.39 < 0.53 < 1.9 < 1.36 < 12.5 < 42.9 < 275854.7,$$

  lo cual permite observar que las potencias anteriores aumentan de izquierda a derecha al aumentar el exponente manteniendo fija la base mayor que 1.

– Para el caso ii) $a < 1$; $a = 0.4$.

$$0.4^{-3}, 0.4^{-1/2}, 0.4^{1/2}, 0.4^{3/4}, 0.4^{\sqrt{2}}, 0.4^{3}, 0.4^{10},$$

  Calculando en su orden las potencias anteriores y redondeando se tiene

$$15.62 > 1.58 > 0.6325 > 0.5030 > 0.2737 > 0.0640 > 0.0001,$$

  lo cual permite observar que las potencias anteriores decrecen de izquierda a derecha al aumentar el exponente manteniendo fija la base positiva pero menor que 1.

– Para el caso iii) $0 < a < b$; $a = 0.1$, $b = 0.2$.

$$\left.\begin{array}{l} 0.1^{1/2} \cong 0.3162 < 0.4472 \cong 0.2^{1/2} \\ 0.1^{3} \cong 0.001 < 0.008 \cong 0.2^{3} \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 0.1^{1/2} \cong 0.3162 < 0.4472 \cong 0.2^{1/2} \\ 0.1^{3} \cong 0.001 < 0.008 \cong 0.2^{3} \\ 0.1^{5} \cong 0.0058 < 0.0273 \cong 0.2^{5} \\ 0.1^{-3} \cong 1.000 > 1.25 \cong 0.2^{-3} \\ 0.1^{-1/2} \cong 3.1623 > 2.2361 \cong 0.2^{-1/2} \end{array}$$

Las tres primeras desigualdades dejan ver que cuando $x > 0$, las potencias $a^x$ y $b^x$ conservan el sentido de la desigualdad entre $a$ y $b$ ($a^x < b^x$ si $a < b$). Las tres últimas permiten ver que este sentido se invierte cuando $x < 0$ ($a^x > b^x$ si $a < b$).

Podría preguntarse el estudiante cuál puede ser el interés e importancia de extender el concepto de potencia con exponente entero, cuyo significado intuitivo es más o menos claro y que en términos generales puede interpretarse como una flotación abreviada de la multiplicación, al concepto de potencia con exponente real cuyo significado aparece bastante abstracto y elusivo. En términos generales podría decirse que las razones son las mismas que llevaron a los matemáticos a construir sucesivamente modelos de sistemas numéricos más amplios a partir del concepto primitivo de número natural. De un lado necesidades inherentes al desarrollo formal del cálculo matemático y de otro e íntimamente unidas con aquellas necesidades del mundo físico. El siguiente ejemplo ayuda a ilustrar este punto de vista.

Supongamos que la población de un país crece al 2% anual. En una fecha determinada la población es de $P_0$ habitantes. Se quiere calcular la población de dicho país al cabo de un número de anos determinado. Si llamamos $P_k$ la población del país al cabo del ano $k$, se puede escribir

$$\begin{array}{ll} P_1 = P_0 + P_0 \cdot 0.02 = P_0 \cdot 1.02 & \text{Población al cabo del } 1^{\underline{\text{er}}} \text{ ano} \\ P_2 = P_1 + P_1 \cdot 0.02 = P_1 \cdot 1.02 = P_0 \cdot 1.02^2 & \text{Población al cabo del } 2^{\underline{\text{o}}} \text{ ano} \\ P_3 = P_2 + P_2 \cdot 0.02 = P_2 \cdot 1.02 = P_0 \cdot 1.02^3 & \text{Población al cabo del } 3^{\underline{\text{er}}} \text{ ano} \end{array}$$

Siguiendo esta ley de formación se tiene que la población del país al cabo del ano $k$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$P_k = P_{k-1} + P_{k-1} \cdot 0.02 = P_k \cdot 1.02 = P_0 \cdot 1.02^k,$$

fórmula que en realidad se puede demostrar formalmente por Inducción Matemática.

Aunque de gran utilidad la fórmula que hemos deducido sólo puede aplicarse para un número entero de anos. Si el crecimiento de la población se considera un proceso continuo tiene sentido preguntarse por la población del país al cabo de cualquier período de tiempo que vendría a expresarse por un número real $t$. La definición de potencias con exponente real viene a dar la salida a este problema de cálculo. Si el modelo de crecimiento se considera el mismo en todos los períodos la fórmula anterior puede transformarse en $P_t = P_0 \cdot 1.02^t$ , donde $t$ es cualquier número real positivo que se interpreta como tiempo, medido en anos, transcurrido desde la fecha en que la población del país era $P_0$ y $P_t$ representa la población del país al término de dicho período.

### 1.5.4. Logaritmos

El Teorema 1.5.18. y los ejemplos con que hemos tratado de ilustrar su significado permite sacar conclusiones sobre el comportamiento de $a^x$ cuando $x$ varía.

— Cuando $a > 1$ y $x$ crece $a^x$ también crece, llegando a tomar valores tan grandes como se quiera si los $x$ se toman suficientemente grandes. Se suele decir "$a^x$ tiende a infinito cuando $x$ tiende a infinito". Cuando $x$ decrece tomando valores negativos, $a^x$ decrece y sus valores se aproximan al valor 0. Se dice entonces que "$a^x$ tiende a 0 cuando $x$ tiende a infinito negativo".

— Algo similar ocurre cuando $0 < a < 1$, pero el sentido de la variación de $a^x$ es diferente. En este caso, cuando $x$ toma valores cada vez más grandes y positivos, $a^x$ decrece tomando valores positivos que se van aproximando a 0 y cuando $x$ decrece, tomando valores negativos cada vez menores y sin límite inferior, a crece tomando valores positivos arbitrariamente grandes. Se dice entonces que "$a^x$ tiende a 0 cuando $x$ tiende a infinito" y que "$a^x$ tiende a infinito cuando $x$ tiende a infinito negativo".

— El hecho fundamental, que se puede demostrar matemáticamente, es que al variar $x$ en $\mathbb{R}$, $a^x$ recorre todos los números reales positivos, de suerte que dado un número positivo mayor o menor que 1, la ley de correspondencia que a cada número real $x$ asigna el número positivo $a^x$ define una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y el conjunto de los reales positivos $\mathbb{R}^+$. Se puede afirmar, por lo tanto, recíprocamente que todo número real positivo $b$ se puede expresar en la forma $b = a^y$ siendo $y$ un número real único.

Las observaciones anteriores permiten dar la siguiente definición.

**Definición 1.5.2. (de logarítmo)** *Sean $a$ y $b$ números reales positivo con $a \neq 1$. De acuerdo con las observaciones anteriores, existe un número real $y$ (y sólo uno) tal que $a^y = b$. Este número se llama "logaritmo en base $a$ de $b$", y se denota con el símbolo $\log_a b$. Se puede reescribir, por lo tanto, la igualdad anterior como*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Es decir que el "logaritmo de un número en una base dada, es el exponente al cual hay que elevar la base para reproducir el número".

Cuando $a = 10$ se habla de logaritmos vulgares o decimales. Cuando $a = e$ los logaritmos se llaman naturales y se escribe $\ln b$ en lugar de $\log_e b$.

**Ejemplo 1.5.9.**

$\log_a 1 = 0,$ *pues obviamente* $a^0 = 1$ *para cualquier base* $a$, $a \neq 1$.
$\log_{0.5} 0.25 = 2,$ *pues* $0.5^2 = 0.25$.
$\log_3 \frac{1}{27} = -3,$ *pues* $3^{-3} = \frac{1}{27}$.
$\log_{10} 10^2 = 2,$ *pues* $10^2 = 10^2$.
$\log_a a^k = k,$ *pues obviamente* $a^k = a^k$, *para cualquier base* $a$, $a \neq 1$.

Expresamos en forma de Teorema las propiedades básicas de los logaritmos.

**Teorema 1.5.19.** *Sean* $a$, $x$, $y$ *números reales no negativos, con* $a \neq 1$.

i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

ii) $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$

iii) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

iv) $\log_a x^y = y \log_a x$. *En este caso* $y$ *puede ser cualquier número real.*

**Demostración.** Las demostraciones de las propiedades anteriores se reducen a una aplicación directa de la definición de logaritmo.

i)
$$\begin{aligned} a^{\log_a x + \log_a y} &= a^{\log_a x} a^{\log_a y} && \text{Propiedades de las potencias.} \\ &= xy && \text{Definición de logaritmo.} \end{aligned}$$

Puesto que el logaritmo de $xy$ es único y por definición es el número al cual hay que elevar la base $a$ para obtener $xy$. Se ha demostrado que este número es $\log_a x + \log_a y$. Por lo tanto,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

ii)
$$\begin{aligned} a^{\log_a \frac{1}{x}} &= \frac{1}{x} = \frac{1}{a^{\log_a x}} && \text{Aplicación sucesiva de la definición de logaritmo.} \\ &= a^{-\log_a x} && \text{Propiedad de los exponentes.} \\ \therefore \log_a \frac{1}{x} &= -\log_a x && \text{Unicidad del logaritmo de } \tfrac{1}{x} \text{ o correspondencia biunívoca entre potencias y logaritmos.} \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} a^{\log_a \frac{x}{y}} &= \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} && \text{Aplicación sucesiva de la definición de logaritmo.} \\ &= a^{\log_a x - \log_a y} && \text{Propiedad de las potencias reales.} \\ \therefore \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y && \text{Unicidad del logaritmo de } y. \end{aligned}$$

iv)

$$
\begin{aligned}
a^{\log_a x^y} &= x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y && \text{Aplicación sucesiva de la definición de logaritmo.}\\
&= a^{y \log_a x} && \text{Propiedad de las potencias reales.}\\
\therefore \log_a x^y &= y \log_a x && \text{Unicidad del logaritmo de } x^y.
\end{aligned}
$$

Los siguientes ejemplos permiten ilustrar el uso de las reglas anteriores.

1. Calcule $\log_{10} \frac{225}{16}$ expresándolo inicialmente en términos de los factores primos de los números involucrados y utilizando finalmente una calculadora dando el resultado final redondeado a milésimas.

$$
\begin{aligned}
\log_{10} \frac{225}{16} &= \log_{10} \frac{5^2 3^2}{2^4} = \log_{10} 5^2 3^2 - \log_{10} 2^4 && \text{Propiedad iii)}\\
&= \log_{10} 5^2 + \log_{10} 3^2 - \log_{10} 2^4 && \text{Propiedad i)}\\
&= 2 \log_{10} 5 + 2 \log_{10} 3 - 4 \log_{10} 2 && \text{Propiedad iv)}\\
&= 1.1480625 && \text{Leyendo de la calculadora}\\
&= 1.148 && \text{Redondeando a milésimas}
\end{aligned}
$$

2. Calcular $\ln \sqrt[3]{5^2\sqrt{56}}$ con un error no mayor de $10^{-4}$ empezando por expresar el logaritmo pedido en términos de los logaritmos de los factores primos de los números involucrados.

$$
\begin{aligned}
\ln \sqrt[3]{5^2\sqrt{56}} &= \ln \left(5^2 \left(56\right)^{1/2}\right)^{1/3} && \text{Expresando radicales en forma de potencias y factorizando.}\\
&= \tfrac{1}{3} \ln \left(5^2 \left(7 \cdot 2^3\right)^{1/2}\right) && \text{Propiedad iv)}\\
&= \tfrac{1}{3} \ln 5^2 + \tfrac{1}{3} \ln \left(7 \cdot 2^3\right)^{1/2} && \text{Propiedad i)}\\
&= \tfrac{1}{3} \ln 5^2 + \tfrac{1}{6} \ln 7 + \tfrac{3}{6} \ln 2 && \text{Propiedades i y iv)}\\
&= 1.7438505 && \text{Leyendo de la calculadora}\\
&= 1.7439 && \text{Redondeando a la diezmilésimas}
\end{aligned}
$$

3. Escriba la expresión $2 \log_a \dfrac{y^3}{x} - 3 \log_a y + \frac{1}{2} \log_a x^4 y^2$ como un sólo logaritmo.

$$
\begin{aligned}
&2 \log_a \frac{y^3}{x} - 3 \log_a y + \tfrac{1}{2} \log_a x^4 y^2 =\\
&= \log_a \left(\frac{y^3}{x}\right)^2 - \log_a y^3 + \log_a \left(x^4 y^2\right)^{1/2} && \text{Propiedad iv)}\\
&= \log \frac{\left(\frac{y^3}{x}\right)^2 \left(x^4 y^2\right)^{1/2}}{y^3} && \text{Propiedades i) y ii)}
\end{aligned}
$$

#### 1.5.4.1. Logaritmación como operación inversa de la exponenciación

Al hablar de la suma y la resta o de la multiplicación y la división entre reales se..dice que son operaciones inversas. El significado de operación inversa se puede explicar de la siguiente manera.

- **Para la suma y la resta**.

  Si $a$ es un número real y le sumo otro número real $b$ obtengo $a + b$. Si $a$ este número le resto $b$ obtengo $(a + b) - b = a$, es decir vuelvo a obtener el número inicial $a$. Este proceso se puede repetir empezando por restar $b$ de $a$, para obtener $a-b$ y sumar luego $b$ para obtener $(a-b)+b=a$. Es decir, **la resta es operación inversa de la suma** y recíprocamente, **la suma es operación inversa de la resta**, en el sentido de que la una "deshace" lo que hace la otra. Esta interpretación se hace precisamente mediante la siguiente expresión analítica:

$$\begin{aligned}(a+b)-b &= a,\\ (a-b)+b &= a.\end{aligned}$$

Análisis semejante es válido para las operaciones de multipliación y división cuando se realiza entre reales diferentes de 0. Se puede escribir:

$$\begin{aligned}(a\times b)\div b &= a,\\ (a\div b)\times b &= a.\end{aligned}$$

- Este concepto de operación inversa se puede aplicar también a la radicación respecto de la potencia-ciación de números positivos a un exponente entero entero positivo dado. Si $a>0$, y lo elevamos a la potencia $n$ para extraer luego raíz $n$–ésima, obtenemos el número $a$ inicial. Lo mismo ocurre si empezamos extrayendo raíz $n$–ésimay luego elevando a la potencia $n$–ésima. Estas definiciones se pueden sintetizar simbólicamnente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}\sqrt[n]{a^n}=a, & \\ & a>0\\ (\sqrt[n]{a})^n=a, & \end{array}$$

- Si consideramos la exponenciación (elevar a un exponente arbitrario $x$ una base dada $a$, en este caso no–negativa) y la logaritmación (calcular el logarítmo de un número $x$ en una base $a$), como operaciones sobre un número $x$, se puede observar que se trata de operaciones inversas, en el sentido dado anteriormente, de que una operación "deshace" lo que hace la otra. Se puede escribir:

$$\begin{array}{rl}\log_a a^x=x & \text{Propiedad iv). Teorema 1.5.19.}\\ a^{\log_a x}=x & \text{Definición de logarítmo}\end{array}$$

#### 1.5.4.2. Cambio de base

El siguiente teorema expresa la manera de como el logarítmo de un número se puede transformar de una base a otra.

**Teorema 1.5.20.** *Sean $a$ y $b$ dos números reales positivos y $x$ un número real arbitrario. Entonces*

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$$

**Demostración.** Por la defnición de logarítmo se puede escribir

$$x=b^{\log_b x}.$$

Tomando logaritmos en base $a$ a ambos lados de la igualdad anterior, se tiene

$$\log_a x=\log_a\left(b^{\log_b x}\right)=\log_b x\cdot\log_a b$$
$$\therefore \log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$$

**Ejemplo 1.5.10.**

1. $\log_7 \sqrt[3]{4}$ *se puede expresar en términos de logaritmos en base* 10 *de la siguiente manera:*

$$\log_7 \sqrt[3]{4} = \frac{\log_{10} \sqrt[3]{4}}{\log_{10} 7}$$

   *La expresión de la derecha se puede evaluar con calculadora.*

   *Calculando dicho resultado con aproximación a las milésimas tendremos:*

$$\log_7 \sqrt[3]{4} = \frac{\log_{10} \sqrt[3]{4}}{\log_{10} 7} = \frac{\frac{1}{3}\log_{10} 4}{\log_{10} 7} \approx 0.237.$$

2. *Calculemos el logaritmo anterior utilizando logaritmos naturales, que también aparecen incorporados en las calculadoras científicas, y comparemos resultados.*

$$\log_7 \sqrt[3]{4} = \frac{\ln \sqrt[3]{4}}{\ln 7} = \frac{\frac{1}{3}\ln 4}{\ln 7} \approx 0.237.$$

#### 1.5.4.3. Forma de variación de los logaritmos

Utilizando la definición de logaritmo y las propiedades que hemos establecido daremos un teorema para logaritmos semejante al Teorema 1.5.18.. En éste aparecen logaritmos con base mayor que 1 que son los más utilizados.

**Teorema 1.5.21.** *Si* $a, x, y$ *son números reales positivos y* $a > 1$*, entonces*

$$\log_a x < \log_a y \text{ si y sólo si } x < y.$$

**Demostración.** Por definición de logaritmo se tiene

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{y} \quad y = a^{\log_a y}$$

Utilizando el Teorema 1.5.15., se puede escribir

$$a^{\log_a x} < a^{\log_a y} \text{ si y sólo si } \log_a x < \log_a y,$$
$$\therefore x < y \text{ si y sólo si } \log_a x < \log_a y. \blacksquare$$

Se puede observar que la demostración anterior se apoya en el Teorema 1.5.18. y sí el asunto se analiza más de cerca se llega a concluir que ambos Teoremas son equivalentes y que la clave de su conexión está en el hecho de que "exponenciación" y "logaritmación" son operaciones inversas. Para efectos prácticos esto quiere decir que el comportamiento de $\log_a x$ al variar $x$ se puede deducir del comportamiento de $a^y$ al variar $y$.

Consideremos el caso $a > 1$. Cuando $x$ crece también $\log_a x$ crece, y no es difícil convencerse (ver ejemplo numérico) con la ayuda de una calculadora de mano que $\log_a x$ puede alcanzar valores tan grandes como se quiera incrementando adecuadamente los valores de $x$.

¿Qué se puede decir de $\log_a x$ cuando $x$ se aproxima a 0? Puesto que $a^{\log_a x} = x$, para que $x$ tienda a 0 es necesario que el exponente de $a$ tome valores negativos cada vez menores y sin límite. Se dice en este caso que cuando $x$ se aproxima ó tiende a 0, $\log_a x$ tiende a infinito negativo.

Los siguientes valores numéricos para logaritmos de base 10 ayudan a visualizar el significado de este Teorema.

$$\log 4 \cdot 10^{-10}, \log 4 \cdot 10^{-3}, \log 4, \log 4000, \log 4 \cdot 10^{10}.$$

Calculando en su orden con ayuda de calculadora y redondeando a la unidad fraccionaria más cercana de orden 4 se tienen los siguientes resultados:

$$-9.3979 < -2.3979 < 0.6021 < 3.6021 < 10.6021.$$

Que permite concluir que los logaritmos anteriores se ordenan de menor a. mayor de izquierda a derecha a medida que el número $x$, al cual se calcula su logaritmo, crece.

#### 1.5.4.4. Aplicaciones a la solución de ecuaciones

En los siguientes ejemplos ilustramos la aplicación de las propiedades de logaritmos y potencias a la solución de ecuaciones.

1. Calcular los valores de $x$, para los cuales $2^{-x} = 8$.

   Utilizando logaritmos decimales se puede escribir

$$\log 2^{-x} = \log 8$$
$$\therefore -x \log 2 = \log 8$$
$$\therefore x = -\frac{\log 8}{\log 2} = -3$$

   Este último cálculo se puede efectuar con la calculadora, o también mediante el siguiente razonamiento.

$$x = -\frac{\log 8}{\log 2} = -x = -\frac{\log 2^3}{\log 2} = x = -\frac{3\log 2}{\log 2} = -3.$$

   Utilizando logaritmos en base 2 se puede escribir también:

$$\log_2 2^{-x} = \log_2 8$$
$$\therefore -x = 3$$
$$\therefore x = -3$$

2. Resolver para $x$

$$4^{2x+3} = 5^{x-2}.$$

   Utilizando logaritmos decimales, se tiene

$$(2x+3)\log 4 = (x-2)\log 5$$
$$2x\log 4 + 3\log 4 = x\log 5 - 2\log 5$$
$$x\left(\log 4^2 - \log 5\right) = \log 5^{-2} + \log 4^{-3}$$
$$x\log\frac{16}{5} = \log 5^{-2}4^{-3}$$
$$x = \frac{\log 5^{-2}4^{-3}}{\log \frac{16}{5}}$$

3. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(5x+1) = 2 + \log(2x-3)$$

$$\log(5x+1) - 2 = \log(2x-3)$$
$$\log\frac{5x+1}{2x-3} = 2$$
$$\frac{5x+1}{2x-3} = 10^2 = 100$$
$$5x+1 = 200x - 300$$
$$195x = 301$$
$$x = \frac{301}{195}$$

#### 1.5.4.5. Cálculo numérico con potencias y logaritmos

Hacemos, por último, algunas observaciones sobre el cálculo numérico con logaritmos y potencias.

Al tratar en la practica con mediciones físicas o números aproximados involucrando cálculos con potencias y logaritmos, los resultados obtenidos estarán también sujetos a errores. Aplicando los Teoremas 1.5.18. y 1.5.21. es posible estimar tales errores.

Supongamos que queremos calcular $N = \log x$, donde $x = 3.51 \pm 0.01$. Puesto que el logaritmo en base 10 crece, al crecer $x$ se tiene que el verdadero valor de $N$ puede oscilar entre $\log 3.50$ y $\log 3.52$. Haciendo cálculos se tiene:

$$0.544068 \cong \log 3.50 \leq N \leq \log 3.52 \cong 0.546543$$

Se puede observar que $\log 3.52 - \log 3.50 \cong 0.002475 \approx 0.0025$. Esto implica que la Incertidumbre, o posible error a que está sujeto este cálculo, sólo empieza a afectar en las milésimas. Se puede observar también que $\log 3.51 \cong 0.545307$ es prácticamente el punto medio del intervalo $[\log 3.50, \log 3.52]$. Tiene sentido práctico por lo tanto tomar como valor de $N$ este valor medio y como incertidumbre del cálculo la diferencia positiva con los extremos del intervalo, que puede aproximarse por exceso a 0.0013. Este posible error a que está sujeto el cálculo implica que el valor numérico de $N$ no debe tener más de 3 o en el mejor de los casos 4 cifras decimales. Se podría escribir, por lo tanto, que

$$N = \log (3.51 \pm 0.01) = 0.5453 \pm 0.0013$$

O también perdiendo un poco de precisión, que:

$$N = \log (3.51 \pm 0.01) = 0.545 \pm 0.002$$

Es interesante observar que en términos absolutos el posible error a que está sujeto el cálculo de $N$ es menor que el posible error de $x$ y que en términos relativos ambos errores son prácticamente iguales. Es decir que la operación "logaritmo" no incrementa o propaga el error.

Consideremos ahora el caso de la expresión $y = a^x$, donde tanto $x$ como $a$ están sujetos a errores o aproximaciones. Supongamos, por ejemplo, que $a = 3.40 \pm 0.01$ y $x = 2.2 \pm 0.1$.

Por las propiedades de las potencias con exponente real, consignadas en el Teorema 1.5.18. se puede afirmar que el valor exacto de $y$ está entre $3.39^{2.1}$ y $3.41^{2.3}$. Haciendo cálculos se tiene:

$$12.9843 \cong 3.39^{2.1} \leq y \leq 3.41^{2.3} \cong 16.8001$$

Se puede proceder como en el ejemplo anterior, para calcular tanto el valor asignado $y$ (promedio de valores extremos) como el error posible a que está sujeto el cálculo (diferencia con valores extremos). Para determinar el número de cifras que debe tener $N$ debe observarse que $3.41^{2.3} - 3.39^{2.1} \cong 3.8158 \cong 4$. O sea que el posible error de cálculo afecta las unidades enteras y, por lo tanto, no tiene sentido expresar a $N$ con fracción decimal. Se puede escribir, consecuentemente

$$y = (3.40 \pm 0.01)^{2.2 \pm 0.1} = 15 \pm 2$$

Como se puede ver el error que afecta el cálculo de $y$ es bastante grande, Incluso en términos relativos, si se compara con los errores que afectan la base $a$ y al exponente $x$. Es decir errores pequenos en éstos tienen un impacto fuerte en el error que afecta a $y$.

### 1.5.5. Ejercicios

1. Responda Verdadero o Falso, justificando su respuesta.

   a) Si $x^2 = 4$ entonces $x = 2$, $x \in \mathbb{R}$

   b) Si $x^3 = -8$ entonces $x = -2$, $x \in \mathbb{R}$

   c) Si $x^n = a$ entonces $x = \sqrt[n]{a}$, $x \in \mathbb{R}$

   d) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$

e) $\left(a^{n}\right)^{1/n}=a,\ a\in\mathbb{R}$

f) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b,\ a,b\in\mathbb{R}$

g) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b,\ a,b\in\mathbb{R}$

h) Para cualquier par de números reales $a$ y $b$ se tiene que $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

i) Para cualquier par de números reales $a$ y $b$ se tiene que $(ab)^{1/2}=a^{1/2}b^{1/2}$

j) $(16)^{3/2}=(16)^{6/4}$

k) $(-64)^{1/3}=(-64)^{2/6}$

l) $\left(a^{x}+a^{-x}\right)^2=a^{2x}+a^{-2x},\ a>0,\ x\in\mathbb{R}$

m) $2^{\sqrt{3}}=\sup\left\{2^1,2^{1.7},2^{1.73},2^{1.732},\ldots\right\}$

n) $\log_2\sqrt[5]{8}=-\log_4 2+\log_8 4=\frac{23}{30}$

o) $\dfrac{1}{2^x}>1\Rightarrow 2^x<1,\ x\in\mathbb{R}$

p) $\dfrac{1}{\log_2 x}>0\Rightarrow\log_2 x<1,\ x\in\mathbb{R}^+$

q) $\log_2(x+1)>0\Rightarrow x>0$

r) $\log_{1/2}(x+1)>0\Rightarrow x>0$

s) $\dfrac{\log_3 5}{\log_2 5}=\log_2 3$

t) $\log_2 3\cdot\log_3 5=\log_2 5$

u) $\log(a-b)=\log a-\log b,\ a>0,\ b>0$

v) $\dfrac{\log a}{\log b}=\log a-\log b,\ a>0,\ b>0$

w) $\left(2^2\right)^3=2^{2^3}$

2. Simplificar utilizando al máximo propiedades de los radicales y determinar, cuando se aplique, los signos que puede asumir $a$ y $b$ conjuntamente para que las expresiones involucradas tengan sentido.

a) $\sqrt[3]{-27}\sqrt[4]{250}$

b) $\sqrt[5]{625}\sqrt[3]{(0.5)^6}$

c) $\sqrt{3ab^3c}\sqrt{2a^2bc^4}\sqrt{6a^3b^4c}$

d) $\sqrt{11664}$ (Empiece descomponiendo en factores primos).

e) $\sqrt[8]{\sqrt[6]{\left(a^{44}b^{10}\right)^2}}$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{6a^{10}b^6}}{12a^{18}b^3}$

3. Demuestre

i) La proposición iii) del Teorema 1.5.15..

ii) Las proposiciones iv) y v) del Teorema 1.5.16..

iii) Que para $a$ negativo, $-\sqrt[n]{-a}$ es raíz $n$–ésima de $a$.

4. Compruebe con una calculadora en forma directa las propiedades:

$$\sqrt[5]{0.5\times 0.2}=\sqrt[5]{0.5}\sqrt[5]{0.2},$$
$$\sqrt[5]{\frac{0.5}{0.2}}=\frac{\sqrt[5]{0.5}}{\sqrt[5]{0.2}}.$$

5. Simplifique las expresiones utilizando al máximo las propiedades de los exponentes

i) $\left(-27a^6\right)^{2/3}$

ii) $\left(a^{-3}b^9c^{-6}\right)^{-2/3}$

iii) $(0.000016)^{3/2}$

iv) $\left(\left(0.5^{4/6}e^{2/3}0.3^{4/6}e^{4/3}\right)^{1/2}\right)^3$

v) $\left(\dfrac{\left(a^{-8}b^2\right)^{-1/4}}{\left(a^4b^6\right)^{-1/6}}\right)^2$

vi) $\left(\dfrac{a^{1/2}}{b^2}\right)^4\left(\dfrac{b^{-1/6}}{a^{2/6}}\right)^6$

6. Utilice notación científica para realizar las operaciones que se indican.

i) $\dfrac{\sqrt{81000000}}{(0.000002)^3}\times\dfrac{(300000)^4}{(8000000)^{2/3}}$

ii) $\dfrac{\sqrt[10]{(0.00243)^4(20000)^3}}{\left(800000^2\right)^{3/2}}$

7. En el siguiente ejercicio simplifique la expresión utilizando al máximo las propiedades de las potencias y efectúe finalmente la operación con una calculadora. Separadamente realice las operaciones con la calculadora sin efectuar simplificación preliminar. Hay diferencias en los resultados? Si las hay cómo se explica las diferencias en los resultados?

$$\left(\frac{0.5^{1/2}}{0.3^{2/3}}\right)^4\left(\frac{1}{0.3^{1/3}0.5^{2/3}}\right)^3$$

8. Repase el contenido del Teorema 1.5.14. tomando $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=\sqrt[3]{2}$, exprese las propiedades de las potencias con exponente real. Utilizando calculadora compruebe que las propiedades se cumplen.

9. Simplificar utilizando al máximo las propiedades las potencias

$$\left(3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}a^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{\sqrt{2}}}a^{\frac{3}{\sqrt{4}}}\right)^{\sqrt{2}}$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^{\pi/2}\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\pi/2}+\left(\sqrt{3}\right)^{-\pi/2}\right)$$
$$\sqrt{5^{2\pi}\sqrt{4^{4\sqrt{2}}}}$$
$$\frac{8^{(\pi+1)}}{4^{\pi+2}}$$

10. Determine el menor número de dígitos que es necesario utilizar en los numerales decimales de la base y del exponente de las siguientes potencias, que permiten calcular su valor con un error menor de $10^{-3}$. Explique el método que se sigue para llegar a la respuesta y en cada caso compruebe que el error esté dentro de los limites esperados

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\pi},\left(\frac{4}{3}\right)^{3\sqrt{2}},\pi^{\sqrt{2}},\sqrt{3}^{\sqrt{2}},\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$$

(Sugerencia: Repase el método que aparece en esta Unidad para calcular $3^{\sqrt{2}}$ y $0.5^{\sqrt{2}}$)

11. Compruebe haciendo uso de calculadora que

$$\begin{array}{rcl} e^{1.4} & < & e^{1.5} < e^{1.6} \\ e^{-1.4} & > & e^{-1.5} > e^{-1.6} \end{array}$$

¿Qué teorema de los estudiados en esta Unidad permite prever esta situación? Explique por qué.

12. a) Compruebe la validez del Teorema 1.5.20. para los logaritmos en base natural observando cómo crece el logaritmo natural de $x$ a medida que $x$ crece, en los siguientes casos:

$$\ln 4\times 10^{-10}, \ln 4\times 10^{-3},$$
$$\ln 4, \ln 4000, \ln 4\times 10^{10}$$

(Utilice la calculadora redondeando a las milésimas).

b) ¿Qué logaritmos crecen más rápidamente, los naturales o los decimales?

13. Haciendo uso de la calculadora calcule los siguientes logaritmos.

$$\log_{0.5} 4\times 10^{-10}, \log_{0.5} 4\times 10^{-3},$$
$$\log_{0.5} 4, \log_{0.5} 4000, \log_{0.5} 4\times 10^{10}$$

Redondee los resultados anteriores a centésimas y ordénelos de menor a mayor. Compare con el ejercicio y saque conclusiones.

14. Si $0 < a < 1$ y $x < y$, qué símbolo de desigualdad hay que poner en el cajón de la expresión siguiente para convertirla en una proposición verdadera. (¡Explique!)

$$\log_a x \ \boxed{\phantom{xx}}\ \log_a y$$

15. Calcule las expresiones dadas en las condiciones que se indican:

i) $\log_5 \frac{1}{25}, \log 1000, \log_7 \sqrt[3]{7}, \log_e e^{-10}$, sin calculadora.

ii) $\log\frac{7}{3}, \log\frac{2}{\sqrt{3}}, \log_6 63, \log_7 0.08$, con aproximación a las milésimas.

iii) $4^{\log_{49} 7}, 16^{\log_8 2}, 4^{\log_2 16}$, sin calculadora.

iv) $\log_7 \sqrt{5}$, con calculadora.

16. Antes del advenimiento de las calculadoras los logaritmos eran bastante utilizados para agilizar el cálculo de expresiones del siguiente tipo

$$\frac{0.0048^{10}}{\sqrt{0.29}}.$$

Si llamamos $N$ a este número se tiene que

$$\log N = 10\log 0.0048 - \tfrac{1}{2}\log 0.29,$$

utilizando tablas se calculaba los logaritmos y luego tomando antilogaritmos se obtenía el valor aproximado de $N$. En los casos que siguen realice el cálculo de la expresión que se indica siguiendo el método esbozado anteriormente pero utilizando calculadora en lugar de tablas. Realice luego, sin uso de logaritmos el mismo cálculo con ayuda de su calculadora y compare respuestas.

i) $\dfrac{0.0048^{10}}{\sqrt{0.29}}$

ii) $\sqrt[5]{\dfrac{0.025}{8.50}}$

iii) $\dfrac{(2.73)\,(78.5)}{621}$

17. Antes de que se popularizaran las calculadoras el uso de logaritmos suponía utilización de tablas, que se referían a los logaritmos decimales o a los logaritmos naturales. En el caso de los logaritmos decimales una tabla de logaritmos de 1 al 10 permite calcular el logaritmo decimal de cualquier número. En este contexto se introducen los conceptos de características y mantisa. ¿Podría explicar por qué esto es posible?

**Sugerencia**: Observe que todo número por pequeno o grande que sea se puede expresar en notación científica.

18. Resuelva las siguientes ecuaciones.

 i) $\log_2(x-5) = 4$
 ii) $\log_6(2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$
 iii) $\log x + \log \dfrac{x+1}{x} = 2$
 iv) $\log(\log x) = 2$
 v) $3^{4-x} = 5$
 vi) $4^{2x+3} = 5^{x-2}$
 vii) $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$
 viii) $\log\left(x^2+4\right) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)$

19. Resuelva las siguientes inecuaciones.

 i) $3^{x+4} \leq 3^{1-3x}$
 ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3x}$
 iii) $3^{4-x} > 5$
 iv) $\log\left(x+\frac{1}{3}\right) \leq \log(1-2x)$
 v) $\log x + \log(x-3) \geq 0$
 vi) $\log\left(2x-\frac{1}{2}\right) > 2$
 vii) $\dfrac{4}{\log_{1/2}(2x+3)} > 2$

20. Exprese en términos de $\log a$, $\log b$ y $\log c$ el logaritmo dado.

 i) $\log \dfrac{a^3b^2}{5}$
 ii) $\log \dfrac{\sqrt{ab^6}}{\sqrt[3]{c^2}}$
 iii) $\log \sqrt[3]{a^2b\sqrt{c}}$

21. Escriba la expresión dada como un solo logaritmo.

 i) $2\log_a x + \frac{1}{3}\log_a(x-2) - 5\log_a(2x+3)$
 ii) $2\log_a \dfrac{y^3}{x} - 3\log_a y + \frac{1}{2}\log_a x^4y^2$
 iii) $\log_2 \dfrac{y^3}{x} - 3\log_4 y + \frac{1}{2}\log_8 x^4y^2$

22. Los químicos usan un número denotado pH para describir cuantitativamente la acidez o la basicidad de ciertas soluciones. Por definición

$$\mathtt{pH} = -\log\left[\mathtt{H}^+\right],$$

donde $\mathtt{H}^+$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro.

Aproxime el pH de las siguientes soluciones dados sus correspondientes $\mathtt{H}^+$.

 (a) Vinagre: $[\mathtt{H}^+] = 6.3 \times 10^{-3}$
 (b) Zanahorias: $[\mathtt{H}^+] = 1.0 \times 10^{-5}$
 (c) Agua de mar: $[\mathtt{H}^+] = 5.0 \times 10^{-9}$

Estime el error a que está sujeto el cálculo del pH y dar el resultado en cifras significativas.

23. En cada una de las sustancias que se indican, calcule, con ayuda de calculadora, la concentración de iones hidrógeno $\mathtt{H}^+$. Dé su respuesta en notación científica estimando el error a que está sujeto el cálculo de la concentración de iones hidrógeno.

Sustancia A: $-\mathtt{pH} = 3.50$,

Sustancia B: $\mathtt{pH} = 7.21$.

24. Una solución es considerada ácida si $[\mathtt{H}^+] > 10^{-7}$ o básica si $[\mathtt{H}^+] < 10^{-7}$ ¿Cuáles son las desigualdades correspondientes en relación al pH?

25. La intensidad del sonido que percibe el oído humano tiene diferentes niveles. Una fórmula para hallar el nivel de intensidad a que corresponde a intensidad de sonido $I$ es

$$\alpha = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ decibeles,}$$

donde $I_0$ es un valor especial de $I$ que corresponde al sonido más débil que puede ser detectado por el oído bajo ciertas condiciones. Si $I = 285.000$ veces más grande que $I_0$, ¿qué valor tiene $\alpha$?

26. Dada la expresión $N = N_0a^x$, en la cual, $N_0 = 50 \pm 1$, $a = 1.02 \pm 0.005$ y $x = 2.5 \pm 0.1$, estime el error a que puede estar sujeto el cálculo de $N$.

27. Si la población $P$ de un país crece al 1.5% anual siguiendo el modelo $P = P_0a^t$, donde $P_0$ es la población al inicio de un periodo determinado y $t$ es el tiempo medido en anos en dicho periodo. Calcule:

 (a) la constante $a$;
 (b) el tiempo que le toma a la sociedad duplicar su población;
 (c) si $P_0 = 500.000$, ¿cuál es la población de la sociedad al cabo de 2.5 anos?

28. Si \$1.000 se invierten al 12% anual y se acumulan los intereses mensualmente, ¿cual es el capital después de 1 mes?, ¿cuál después de 6 meses?, ¿cuál después de 1 ano?

29. ¿Cuántos anos tardara una inversión de \$1.000 en triplicarse si el interés se acumula anualmente al 5%?

## 1.6. Números complejos

### 1.6.1. Introducción

En las unidades anteriores se ha estudiado el sistema matemático de los números reales. Se ha visto que los números reales resultan adecuados para muchos problemas matemáticos y prácticos, pero existe una limitación en el sistema cuando se trata de dar solución a algunas ecuaciones. Por ejemplo, sabemos que la ecuación $x^2+5=0$ no tiene solución real debido a que el cuadrado de todo número real es no negativo. En muchos problemas necesitamos de un sistema en el cual las ecuaciones de este tipo tengan soluciones. En esta unidad presentaremos el sistema de los números complejos, del cual el sistema de los números reales es un subsistema, y no tiene la limitación mencionada.

Es importante observar que limitaciones semejantes son las que conducen desde el punto de vista matemático a la construcción de los racionales y negativos a partir de los naturales.

Debido a que el nuevo sistema servirá para resolver ecuaciones, en éste deberemos definir operaciones como la adición y multiplicación entre reales, que seguiremos notando $+$ y $\cdot$, con las mismas propiedades formales.

Veamos cuál es la esencia en la construcción del sistema de los números complejos, que denotaremos con el símbolo $\mathbb{C}$. Queremos que las ecuaciones de la forma $x^2 = a$, con $a < 0$ tengan solución en $\mathbb{C}$, en particular cuando $a = -1$. Es decir que debe haber algún elemento en $\mathbb{C}$ que denotaremos $i$, tal que $i^2 = -1$. Como queremos además que $\mathbb{R}$ esté contenido en $\mathbb{C}$ y que $\mathbb{C}$ sea cerrado bajo la multiplicación entonces, para todo $b$ en $\mathbb{R}$, $bi$ debe estar en $\mathbb{C}$. Además deberá ser cerrado bajo la adición, luego para todo $a \in \mathbb{R}$, $a+bi$ deberá estar en $\mathbb{C}$. De esta manera $\mathbb{C}$ deberá contener todos los elementos de la forma $a+bi$, con $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$.

Por ultimo, si deseamos que la multiplicación y adición en $\mathbb{C}$ tengan las mismas propiedades formales que en $\mathbb{R}$ (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc.) los elementos de $\mathbb{C}$ deberán sumarse y multiplicarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(bi+di)\\
&= (a+c)+(b+d)i\\
(a+i)(c+di) &= (a+bi)c+(a+bi)di\\
&= ac+bic+adi+bidi\\
&= ac+bci+adi+bdi^2\\
&= (ac-bd)+(bc+ad)i
\end{aligned}$$

Resumiendo, las siguientes reglas para la adición y multiplicación se deben tener en $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i
\end{aligned} \tag{1.16}$$

La discusión anterior nos da la clave para definir la estructura de los números complejos, como lo haremos en la siguiente sección.

### 1.6.2. El Sistema de los números complejos

Comenzamos definiendo los elementos de $\mathbb{C}$ como símbolos de la forma $a+bi$ donde $a$ y $b$ son números reales. En terminología conjuntista $\mathbb{C}$ se escribe así:

$$\mathbb{C} = \left\{a+bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}.$$

A los elementos de $\mathbb{C}$ los llamaremos números complejos. Al número $a$, en el símbolo $a+bi$, lo llamaremos parte real del complejo y al número $b$ parte imaginaria del complejo.

Para simplificar la escritura de algunos números complejos utilizamos la convención $a + (-b)i = a - bi$.

Diremos que dos números complejos son iguales si sus partes reales e imaginarias respectivas son iguales. Simbólicamente

$$a + bi = c + di \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \text{ y } b = d$$

Para conformar el sistema de los números complejos, dotamos al conjunto $\mathbb{C}$ de las operaciones de adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ definidos por (1.16).

El conjunto de números reales se puede ver como un subconjunto de los números complejos utilizando la siguiente identificación

$$a + 0i \equiv a.$$

Estas identificaciones hacen compatible las operaciones entre los sistemas $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ en el siguiente sentido:

Si $a + 0i \equiv a$ y $b + 0i \equiv b$, entonces

$$(a + 0i) + (b + 0i) \equiv a + b \quad \text{ y } \quad (a + 0i)\,(b + 0i) \equiv ab.$$

En efecto

$$\begin{aligned} (a + 0 \cdot i) + (b + 0 \cdot i) &= (a + b) + 0 \cdot i && \text{Definición suma de complejos} \\ &\equiv a + b && \text{Por la identificación} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (a + 0 \cdot i) \cdot (b + 0 \cdot i) &= (ab) + 0 \cdot i && \text{Definición producto de complejos.} \\ &\equiv a.b && \text{Por la identificación.} \end{aligned}$$

la estructura algebraica de los números complejos es la misma que la de los números reales. Es decir, que la adición y multiplicación de los números complejos son conmutativas y asociativas, que la multiplicación distribuye a la adición, que hay elementos neutros para ambas operaciones y que todos los números complejos tienen recíproco y opuesto.

Sin embargo, el sistema de números complejos no tiene un orden que sea compatible con las dos operaciones, como lo tiene el sistema de números reales. Si lo fuera, se tendría que $i^2 > 0$ (el cuadrado de todo número real es positivo, hecho que se deduce de las propiedades de orden), es decir $-1 > 0$, lo que es una contradicción.

Veamos ahora algunas de las propiedades de la multiplicación y la adición de complejos. Dejamos el resto de ellas como ejercicio.

El elemento neutro para la adición es 0 y para la multiplicación es 1. En efecto:

$$\begin{aligned} (a + bi) + 0 &= (a + bi) + (0 + 0i) && \text{Por la identificación} \\ &= a + bi && \text{Por la definición de la adición} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot 1 &= (a + bi) \cdot (1 + 0 \cdot i) && \text{Por la identificación.} \\ &= (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (b \cdot 1 + a \cdot 0)\, i && \text{Por definici6n de la multiplicación.} \\ &= a + bi. \end{aligned}$$

El estudiante también puede comprobar que el inverso aditivo $-(a + bi)$, del complejo $a + bi$, es $-a - bi$, Por lo tanto la resta de números complejos se puede definir así:

$$(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-\,(c + di))$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned}
(4+3i)-(5+2i) &= (4+3i)+(-(5+2i)) \\
&= (4+3i)+(-5+(-2)\,i) \\
&= (4-5)+(3-2)\,i \\
&= -1+i.
\end{aligned}$$

Por último, con las definiciones que hemos dado, veamos que $i^2=-1$:

$$\begin{aligned}
i^2 &= (0+1\cdot i)^2 \\
&= (0+1\cdot i)\,(0+1\cdot i) \\
&= (0\cdot 0-(1\cdot 1))+(0\cdot 1+1\cdot 0)\,i \\
&= -1+0\cdot i \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Para ejemplificar los cálculos en el sistema $(\mathbb{C},+,\cdot)$ de los números complejos, efectuemos las siguientes operaciones:

1. $(5+2i)+(3-4i)$,
2. $(2+1\cdot i)^2$,
3. $6\,(5+2i)$,
4. $(4+3i)\cdot 5i$

1. $(5+2i)+(3-4i)=(5+3)+(2-4)\,i=8-2i$
2. $(2+1\cdot i)^2=2^2+2\cdot 2\cdot i+(i)^2=4+4i-1=3+4i$
3. $6\,(5+2i)=6\cdot 5+6\cdot 2i=30+12i$
4. $(4+3i)\cdot 5i=4\cdot 5i+3i\cdot 5i=20i+15i^2=-15+20i$

Para comprobar la existencia del inverso multiplicativo introduciremos en la siguiente sección el concepto de conjugado de un número complejo. Aunque este concepto no es estrictamente necesario para tal efecto, facilitará los cálculos de inversos y cocientes.

### 1.6.3. Conjugados y recíprocos

Dado un número complejo $a+bi$, definimos su conjugado $\overline{a+bi}$ como el número complejo $a-bi$. Simbólicamente:

$$\overline{a+bi}=a-bi.$$

El conjugado de un número complejo nos servirá para calcular inversos, ya que el producto de un número complejo por su conjugado es un número real. En efecto:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{a+bi}\right)(a+bi) &= (a-bi).(a+bi) \\
&= (a^2+b^2)+0\cdot i \\
&= a^2+b^2
\end{aligned}$$

De aquí que, si $a+bi\neq 0$ (es decir $a\neq 0$ ó $b\neq 0$) entonces

$$\frac{1}{a^2+b^2}\left(\overline{a+bi}\right)(a+bi)=1$$

Por consiguiente el recíproco de $a+bi$, si $a+bi \neq 0$, que denotamos $(a+bi)^{-1}$ ó $\dfrac{1}{(a+bi)}$, vendrá dado por

$$\frac{1}{a+bi} = \left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)(a-bi) \tag{1.17}$$

Conociendo el inverso de un número complejo distinto de cero, podemos definir el cociente de números complejos:

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)(c+di)^{-1}, \quad c+di \neq 0. \tag{1.18}$$

Explícitamente

$$\begin{aligned}
\frac{a+bi}{c+di} &= (a+bi)(c+di)^{-1} \\
&= (a+bi)\frac{1}{c^2+d^2}(c-di) \\
&= (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.
\end{aligned}$$

Veamos los siguientes ejemplos.

Si queremos calcular $\dfrac{1}{4+7i}$, basta aplicar la fórmula general para inversos (1.17) así:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4+7i} &= \frac{1}{4^2+7^2}(4-7i) \\
&= \tfrac{1}{65}(4-7i) \\
&= \tfrac{4}{65} - \tfrac{7}{65}i.
\end{aligned}$$

Por otro lado, también podemos efectuar el cálculo así:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4+7i} &= \frac{1}{4+7i}\cdot\frac{4-7i}{4-7i} && \text{Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado.} \\
&= \frac{4-7i}{(4+7i)(4-7i)} \\
&= \frac{4-7i}{4^2+7^2} && \text{Propiedad del conjugado.} \\
&= \tfrac{4}{65} - \tfrac{7}{65}i.
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $\dfrac{7-i}{3+5i}$. Por definición de cociente entre complejos (1.18) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{7-i}{3+5i} &= (7-2i)(3+5i)^{-1} \\
&= (7-2i)\frac{1}{3^2+5^2}(3-5i) \\
&= (7-2i)\left(\tfrac{3}{34} - \tfrac{5}{34}i\right) \\
&= \tfrac{11}{34} - \tfrac{41}{34}i.
\end{aligned}$$

El estudiante puede hacer el mismo cálculo multiplicando numerador y denominador por el conjugado de $3+5i$.

Por último senalamos algunas propiedades del conjugado que consignamos en el siguiente teorema. Para simplificar la notación de los números complejos escribiremos $z$ en lugar de $a+bi$.

**Teorema 1.6.22.** *Si $z$ y $w$ son números complejos entonces*

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

d) $\overline{z} = z$ *si y solo si $z$ es un número real.*

**Demostración.** Vamos a demostrar la parte d). El resto lo dejamos como ejercicio.

Sea $z = a + bi$ y supongamos que $z = \overline{z}$, es decir, $a + bi = a - bi$. Sumando a ambos lados de la igualdad el opuesto de $a - bi$ obtenemos $2bi = 0$. Por lo tanto $b = 0$ y $z = a$ que es un número real.

La otra implicación es evidente ya que si $z$ es real,

$$z = a + 0i = a - 0i = \overline{z}. \qquad \blacksquare$$

Hemos construido un sistema $(\mathbb{C},+,\cdot)$ con las mismas propiedades formales que el sistema $(\mathbb{R},+,\cdot)$ pero que no tiene la limitación del último. Es decir que en $(\mathbb{C},+,\cdot)$ podemos encontrar soluciones a todas las ecuaciones de la forma $x^n = a$ como lo veremos en la Unidad 3.2.

### 1.6.4. Representación geométrica de los números complejos

Ya hemos visto que los números reales se pueden representar por medio de puntos en la recta. También es posible tener una representación análoga para los números complejos sólo que en lugar de una recta utilizaremos un plano con un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

Observemos ante todo que todo número complejo $a + bi$ determina un par ordenado de números reales $(a, b)$ y recíprocamente, recordemos también, que a todo punto $P$ del plano coordenado le corresponde un par ordenado de números reales y viceversa. En consecuencia, a todo número complejo $a + bi$ le podemos asignar el punto $P(a, b)$ con coordenadas $(a, b)$ del plano coordenado y viceversa. Para subrayar esta asignación llamamos **plano complejo** al plano coordenado, en lugar de plano $xy$, el eje $x$ lo llamaremos **eje real** y al eje $y$ **eje imaginario** (Ver Figura 24).

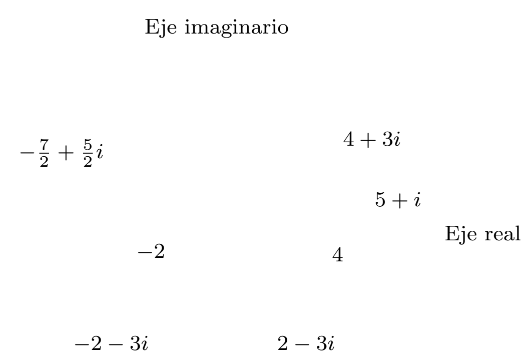



Figura 24.

En esta representación geométrica de los números complejos, las operaciones de adición y sustracción tienen una interpretación sencilla. Si dos números complejos $z_1$ y $z_2$ los representamos mediante flechas que unen el origen con el punto $z_1$ y $z_2$, respectivamente, entonces la suma $z_1 + z_2$ está determinada por la ley del paralelogramo. Es decir, la flecha que une el origen con $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo determinado por 0, $z_1$ y $z_2$. De la misma manera la flecha de $z_1$ a $z_2$ es paralela y de igual longitud que la flecha que une a 0 con $z_2 - z_1$. La flecha en el sentido opuesto se relaciona de la misma forma con $z_2 - z_1$.

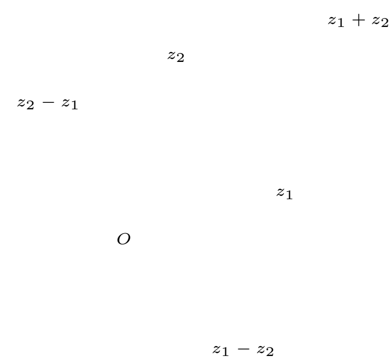



Figura 25.

Recordemos que en la Unidad 1.4 definimos el concepto de valor absoluto $|a|$ de un número real $a$ y observamos que geométricamente, la longitud del segmento $AP$, donde $A$ es el punto de referencia y $P$ el punto con coordenada $a$ en la recta numérica. Generalizamos este concepto a los números complejos definiendo el módulo $|z|$ de un número complejo $z$.

De acuerdo con la interpretación que le dimos a los complejos para ver geométricamente la adición y la sustracción, esto lo podemos hacer así:

$$\text{Módulo de } z = \text{longitud de la flecha de } 0 \text{ a } z$$

Si $z = a + bi$, la longitud de la flecha de 0 a $z$ la podemos calcular usando el Teorema de Pitágoras (Ver Figura 26). Así se tiene que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

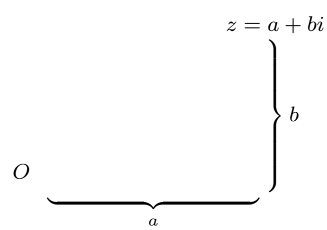



Figura 26.

Veamos ahora que si calculamos el módulo $|a|$ de un número real $a$ (visto como número complejo) éste coincide con el valor absoluto. En efecto, por la identificación que hemos hecho, $a = a + 0 \cdot i$, entonces

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} && \text{Definición de módulo} \\ &= \sqrt{a^2} \\ &= |a| && \text{Teorema 13, Unidad 1.5} \end{aligned}$$

Ahora veamos algunos ejemplos. Calculemos los módulos de $6 + 2i$, $3i$ y 5.

$$\begin{aligned} |6 + 2i| &= \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \\ |3i| &= \sqrt{0 + 3^2} = \sqrt{9} = 3, \\ |5| &= |5 + 0 \cdot i| = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Al igual que el valor absoluto, el módulo tiene propiedades importantes que consignamos en el siguiente Teorema.

**Teorema 1.6.23.** *Si $z$ y $w$ son números complejos, entonces*

a) $|z| \geq 0$

b) $|z-w| = |w-z|$

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

d) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

e) $|z+w| \leq |z| + |w|$

f) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

**Demostración.** Vamos a demostrar la parte f). El resto lo dejamos como ejercicio.
Sea $z = a + bi$, entonces

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= \left(a^2+b^2\right) \\ &= \left(a^2+b^2\right) + (ab-ab)i \\ &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \\ &= |z|^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Para terminar, veamos los siguientes ejemplos de representación geométrica. Representemos geométricamente el conjunto de los $z$ que hacen válida la igualdad $|z-2i| = |z-2|$. La solución la podemos interpretar como todos los puntos en el plano complejo que equidistan de $2i$ y de $2$, serán todos los puntos que están sobre la mediatriz del segmento que une a $2i$ con $2$ (Figura 27).

$z$

$2i$

$2$

Figura 27.

Representemos ahora el conjunto de los $z$ que hacen válida la desigualdad $|z| < 3$. Es decir, debemos representar todos los puntos del plano complejo cuya distancia al origen es menor que 3. Así, obtenemos un círculo con centro en 0 y radio 3, sin incluir los puntos del borde (Figura 28).

3

Figura 28.

En la Unidad 3.2 veremos otra forma de escribir los números complejos, que nos permitirá interpretar geométricamente la multiplicación de los números complejos.

### 1.6.5. Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10 responda verdadero o falso justificando su respuesta.

1. La suma de dos números complejos no siempre es un número complejo.
2. La multiplicación de dos números complejos no siempre es un número complejo.
3. El conjugado de un número complejo es el opuesto de éste.
4. El conjugado de un número complejo es el recíproco de éste.
5. Para todo número complejo $z$ y todo número real $a$, $\overline{az} = a\overline{z}$.
6. Para todo número complejo $z$ y todo entero positivo $n$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
7. Para todo número complejo $z$, $\overline{\overline{z}} = z$.
8. Para todo número complejo $z$, $|z^n| = |z|^n$.
9. El recíproco de un número complejo $z = a+bi$ es $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}i$.
10. El módulo del recíproco de un número complejo es el recíproco de su módulo.
11. Efectúe las siguientes operaciones entre números complejos.
    (a) $(5+2i)+(7-i)$
    (b) $(7+2i)+(-8-5i)$
    (c) $-(3+3i)-(-5-7i)$
    (d) $(a+bi)+(a-bi)$
    (e) $(a+bi)-(a-bi)$
12. Efectúe las siguientes operaciones entre números complejos.
    (a) $(4+3i)(-3+i)$
    (b) $(3-6i)(2+i)$
    (c) $6i(13+5i)$
    (d) $(3+2i)^2$
    (e) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)^3$
    (f) $i^{23}$
13. Encuentre los valores de $x$ e $y$ para que las siguientes igualdades sean validas.
    (a) $5x+6i=-8+2yi$
    (b) $7-4yi=9x+3i$
    (c) $i(2x-4y)=4x+2+3yi$
    (d) $2(x+y)+(3x-4y)i = (x-2)+(2y-5)i$
14. Demuestre que la adición y multiplicación de números complejos son conmutativas y asociativas, que la multiplicación distribuye la adición.
15. Efectúe los siguientes cálculos entre números complejos.

(a) $\dfrac{1}{3+2i}$

(b) $\dfrac{7}{6-6i}$

(c) $\dfrac{1}{(1+i)^3}$

(d) $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$

(e) $\left(\dfrac{1}{5i}\right)^3$

16. Efectúe los siguientes cálculos entre números complejos.

(a) $\dfrac{6+4i}{1-5i}$

(b) $\dfrac{4+3i}{-1+2i}$

(c) $\dfrac{10+9i}{-3i}$

(d) $\dfrac{2-3i}{1+i}+\dfrac{7+4i}{3+5i}$

(e) $\dfrac{1}{10-i}+5i$

17. Calcule el módulo de los siguientes números complejos.

(a) $4+2i$

(b) $(1+i)^2$

(c) $8i$

(d) $1-i$

(e) $5+8i$

(f) $-15i$

(g) $-6-7i$

(h) $i^7$

(i) $7$

18. Represente geométricamente los siguientes complejos.

(a) $3-4i$

(b) $3-5i$

(c) $-(3-6i)$

(d) $-5-3i$

(e) $-2+6i$

(f) $(-3i)(2-i)$

(g) $4(1+2i)$

(h) $4+2i$

(i) $1+i$

19. Encontrar todos los números complejos que satisfacen cada una de las siguientes igualdades.

(a) $5z+3i=2iz+4$

(b) $2iz-6=9i+2$

(c) $(z-2i)^2=(z+3i)^2$

(d) $z(z+4i)=(z+1)(z-3i)$

20. Compruebe las siguientes afirmaciones:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ es una raíz cuadrada de $i$.

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)i$ es una raíz sexta de $-1$.

(c) $1, -\frac{1}{2}, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, -\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ son raíces cúbicas de 1.

21. Demuestre los teoremas 16 Y 18 de esta Unidad.

22. Represente geométricamente el conjunto de los $z$ que hacen válidas las siguientes igualdades:

(a) $|z|=3$

(b) $|z-3|=|z+2|$

(c) $|2z+4i|=1$

(d) $z=\overline{z}$

(e) $\overline{z}=-z$

23. Represente geométricamente el conjunto de los z que hacen válida las siguientes desigualdades:

(a) $|z|\le 5$

(b) $|z|>2$

(c) $|z-1|<1$

(d) $|z-6i|>4$

(e) $|2z+3|\le 2$