Notas de Cálculo Avanzado I y II

Richard G. Wilson
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Marzo del 2005

Contenido

Capítulo 1

La construcción de los Números Reales

Nuestro objetivo en este capitulo es una definición formal del conjunto de los números reales, empezando con el conjunto de los enteros.

1.1 Los Números Enteros

Se denota por $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

con las operaciones binarias $(+)$ y $(\cdot)$, que representan la adición y la multiplicación, respectivamente. En lo que sigue, si $m, n \in \mathbb{Z}$, escribiremos mn en vez de $m \cdot n$.

El conjunto $\mathbb{Z}$ es un *grupo* bajo la operación de adición, lo que significa que

1) Si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $m + n \in \mathbb{Z}$,

2) Existe una *identidad*, $\imath \in \mathbb{Z}$ tal que $\imath + n = n$ para cada $n \in \mathbb{Z} \quad (\imath = 0)$,

3) Para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un elemento $-n \in \mathbb{Z}$ tal que $n + (-n) = \imath$ (el elemento $-n$ se llama el *inverso aditivo* de n), y

4) La operación de adición es asociativa, es decir, $k + (m+n) = (k+m) + n$.

Pregunta: ¿Es $\mathbb{Z}$ un grupo bajo la operación de multiplicación?

Asumiremos que los enteros ya estan definidos. (En el curso de La Teoría de Conjuntos se definirá formalmente el conjunto de los enteros.)

El conjunto P de los elementos positivos de $\mathbb{Z}$ se define por:

$$P_Z = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

y en base a esta definición de los positivos se puede definir un *orden*, $<$ en $\mathbb{Z}$ por

$$m < n \Leftrightarrow n - m = n + (-m) \in P_Z.$$

Formalmente, un *orden* (no estricto) $\leq$ en un conjunto X es una relación en X (es decir, un subconjunto de $X \times X$) que satisface las siguientes condiciones:
1) ($x \leq y$ y $y \leq z$) $\Rightarrow x \leq z$ (transitividad),
2) Para cada x, $x \leq x$ (reflexividad),
3) Para cada $x, y \in X, (x \leq y \quad \text{y} \quad y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisimetría).

A partir de un orden no estricto se puede definir un *orden estricto* $<$, como sigue:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \quad \text{pero} \quad a \neq b.$$

Un orden estricto es transitivo (pero no reflexivo ni antisimétrico).

Un orden $\leq$ en X es un *orden total* (o un *orden lineal*) si para cada $a, b \in X$, tenemos $a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a$. El orden en $\mathbb{Z}$ es un orden total.

1.2 Los números racionales

Se define formalmente el conjunto $\mathbb{Q}$ por

$$\mathbb{Q} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad n \neq 0\}$$

donde se identifican las parejas ordenadas (m, n) y (p, q) si $mq = np$. En notación matemática, escribimos $(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow mq = np$ y entonces se puede escribir

$$\mathbb{Q} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad n \neq 0\} / \sim$$

lo que en palabras significa que $\mathbb{Q}$ consiste en un cierto subconjunto de las parejas ordenadas de $\mathbb{Z}$ con la identificación $\sim$.

Cuando escribimos un número racional, normalmente usamos la notación $\dfrac{p}{q}$ en vez de (p, q). Así es que la identificación de (m, n) con (p, q) si $mq = np$ es simplemente la identificación de dos quebrados iguales.
Por ejemplo:

Se identifica $(2, 3)$ con $(4, 6)$ pues $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ y obviamente $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$.

El conjunto $\mathbb{Q}$ tiene dos operaciones, las de adición y multiplicación, denotadas por $+$ y $\cdot$ las cuales se definen por:

$$(m, n) + (p, q) = (mq + np, nq)$$

y

$$(m, n) \cdot (p, q) = (mp, nq).$$

Tarea: Verificar que estas definiciones coinciden con las operaciones de adición y multiplicación de los quebrados.

Se define el subconjunto de positivos P_Q de $\mathbb{Q}$ por:

$$P_Q = \{(m,n) : mn \in P_Z\},$$

y un orden en $\mathbb{Q}$ por

$$(m,n) < (p,q) \Leftrightarrow (p,q) + (-m,n) \in P_Q.$$

Lema 1.2.1. *Entre cualquier par de racionales distintos, hay otro número racional; es decir, si* $(m,n),(p,q) \in \mathbb{Q}$ *y* $(m,n) < (p,q)$*, entonces existe* $(r,s) \in \mathbb{Q}$ *tal que* $(m,n) < (r,s) < (p,q)$*.*

Demostración: Sea $(r,s) = (m,2n) + (p,2q)$; demostraremos que (r,s) es el número racional deseado. Para demostrar que $(m,n) < (r,s)$, debemos probar que $(r,s) - (m,n) = (r,s) + (-m,n) \in P_Q$.

Tenemos que

$$(m,2n) + (p,2q) = (2qm + 2np, 4nq) \sim (qm + np, 2nq).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (m,2n) + (p,2q) + (-m,n) &= (qm+np,2nq) + (-m,n) \\ &= (qmn + n^2p + 2(-m)nq, 2n^2q) \\ &= (n^2p - qmn, 2n^2q) \sim (np - qm, 2nq) \end{aligned}$$

y debemos demostrar que este número racional es un elemento de P_Q.

Pero $(m,n) < (p,q)$ y por lo tanto $(p,q) + (-m,n) \in P_Q$. Es decir, $(pn - qm, qn) \in P_Q$, lo cual por definición quiere decir que $(pn - qm)qn \in P_Z$.
Por lo tanto, $(pn - qm)2nq \in P_Z$, lo cual implica que $(pn - qm, 2qn) \in P_Q$, es decir, $(m,n) < (r,s)$.

Un argumento semejante demuestra que $(r,s) < (p,q)$, así terminamos la demostración. $\square$

Tarea: Demostrar que $(r,s) < (p,q)$.

Corolario 1.2.2. *Entre dos números racionales distintos hay un número infinito de números racionales.*

Demostración: Tarea.

1.3 Cotas

Definición 1.3.1. *Se dice que $A \subseteq \mathbb{Q}$ es* acotado superiormente *(respectivamente,* acotado inferiormente*) si existe $(p,q) \in \mathbb{Q}$ tal que $(a,b) \leq (p,q)$ (respectivamente $(p,q) \leq (a,b)$) para cada $(a,b) \in A$.*
Un subconjunto de $\mathbb{Q}$ es acotado *si es acotado superior e inferiormente.*
Si $(p,q) \geq (a,b)$ para cada $(a,b) \in A$, entonces se dice que (p,q) es una cota superior *de A.*
Si $(p,q) \leq (a,b)$ para cada $(a,b) \in A$, entonces se dice que (p,q) es una cota inferior *de A.*

Definición 1.3.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ un subconjunto acotado superiormente; se dice que (p,q) es el* supremo *de A (escrito sup(A)) si*
a) (p,q) es una cota superior de A, y
b) Si (r,s) es una cota superior de A entonces $(p,q) \leq (r,s)$.

En otras palabras, el supremo de A (si existe) es la cota superior más pequeña. Si $p = \sup(A) \in A$, decimos que p es el elemento *máximo* de A.

Definición 1.3.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ un subconjunto acotado inferiormente; se dice que (p,q) es el* ínfimo *de A (escrito inf(A)) si*
a) (p,q) es una cota inferior de A, y
b) Si (r,s) es una cota inferior de A entonces $(p,q) \geq (r,s)$.

En otras palabras, el ínfimo de A (si existe) es la cota inferior más grande. Si $p = \inf(A) \in A$, decimos que p es el elemento *mínimo* de A.

Ejemplo 1.3.4. *0 es el supremo (en $\mathbb{Q}$) de los conjuntos $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ y $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$; 0 es el elemento máximo de $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$, pero $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ no tiene elemento máximo.*

En lo sucesivo usaremos p, q, r, s, etc. para denotar números racionales.

Ahora vamos a demostrar que existen subconjuntos acotados superiormente en $\mathbb{Q}$ que no tienen supremos. Primero necesitamos un lema.

Lema 1.3.5. *Si $r \in \mathbb{Q}$ y $r^2 < 2$, entonces existe $s \in \mathbb{Q}$, $s > r$ y $s^2 < 2$.*

Demostración: Si $r^2 < 2$, entonces $\dfrac{(2-r^2)}{10}$ es racional y positivo. Ponemos $s = r + \dfrac{(2-r^2)}{10}$; claramente $s \in \mathbb{Q}$ y demostraremos que $s^2 < 2$.
Un simple cálculo algebraico produce:

$$2 - s^2 = 2 - \left(r + \frac{(2-r^2)}{10}\right)^2 = (2-r^2)\left(1 - \frac{r}{5} - \frac{(2-r^2)}{100}\right)$$

y puesto que $r^2 < 2$ y r debe tener un valor entre -2 y 2, vemos que ambos términos a la derecha son positivos, así hemos demostrado que $2 - s^2 > 0$. $\square$

Lema 1.3.6. *El conjunto $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.*

Demostración: Por el lema 1.3.5 si A tuviera supremo, digamos $a \in \mathbb{Q}$, entonces necesariamente $a^2 = 2$. Demostraremos que esto es imposible.
Supongamos que tal a existe, digamos $a = \dfrac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y no tienen factores comunes. Tenemos $\dfrac{p}{q}^2 = \dfrac{p^2}{q^2} = 2$ y por lo tanto $p^2 = 2q^2$. Esto implica que p^2 es par. Pero si p^2 es par, p debe ser par también, pues el cuadrado de cualquier impar es impar. Si p es par, se puede escribir en la forma $p = 2r$ y por lo tanto, $(2r)^2 = 2q^2$. Pero esto implica que $4r^2 = 2q^2$, es decir $q^2 = 2r^2$. Esto en su turno demuestra que q es par, una contradicción, pues asumimos que p y q no tienen factores comunes. $\square$

1.4 Cortaduras de Dedekind

Ahora, vamos a usar los números racionales para construir los números reales. Estos van a tener la propiedad de que cada subconjunto acotado superiormente tiene un supremo.

Definición 1.4.1. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ es una cortadura de Dedekind si*
ı) $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{Q}$,
ıı) A no tiene elemento máximo, y
ııı) Si $q \in A$ y $p < q$, entonces $p \in A$.

Ejemplo 1.4.2. *$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ es una cortadura de Dedekind.*

Lema 1.4.3. *Si A es una cortadura de Dedekind y $q \notin A$, entonces q es una cota superior de A.*

Demostración: Tarea.

Lema 1.4.4. *Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$ es una cortadura de Dedekind.*

Demostración: Tarea.

Lema 1.4.5. *Si A y B son cortaduras de Dedekind, entonces $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.*

Demostración: Si $A \not\subseteq B$, entonces podemos escoger $p \in A \setminus B$. Por el lema 1.4.3, p es una cota superior de B. Por lo tanto, $q \in B \Rightarrow q < p \Rightarrow q \in A$, así hemos demostrano que $B \subseteq A$. □

Corolario 1.4.6. *$A \subsetneq B$ si y sólo si existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p \in B \setminus A$.*

Demostración:
La implicación $\Rightarrow$ es obvia.
Inversamente, si $p \in B \setminus A$, entonces $B \not\subseteq A$ y el resultado se sigue del lema 1.4.5. □

1.5 Operaciones con cortaduras

Supongamos que A y B son cortaduras, entonces:
Definiciones:

1) Se define la suma de A y B por

$$A + B = \{p + q : p \in A, q \in B\}.$$

2) $-A = \{q \in \mathbb{Q} : -q$ es una cota superior pero no el supremo de $A\}$.

3) Una cortadura A es *positiva* si $0 \in A$.
A es *no negativa* si A es positiva o $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$.

4) Si A, B son no negativas, se define

$$AB = \{r \in \mathbb{Q} : r \text{ es negativa} \quad \text{o} \quad r = pq \quad \text{donde}\, p, q \geq 0 \quad \text{y } p \in A, q \in B\}.$$

Se puede verificar directamente que para cualquier par de cortaduras A, B, $A + B = B + A$ y si A y B son no negativas, $AB = BA$.
Ahora nuestro objetivo es demostrar que $A + B$ y AB son cortaduras.

Lema 1.5.1. *Si A_i es una cortadura para cada $i \in I$, entonces $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ es una cortadura o es igual a $\mathbb{Q}$.*

Demostración: Tarea.

Lema 1.5.2. *Si A es una cortadura y $b \in \mathbb{Q}$, entonces*
a) $A + b = \{a + b : a \in A\}$ es una cortadura, y
b) Si A es no negativa y $b > 0$, entonces $Ab = \{ab : a \in A\}$ es una cortadura.

Demostración:
a) Debemos demostrar que $A + b$ cumple con las tres propiedades de una cortadura.
$\imath$) Puesto que $A \neq \emptyset$, tenemos $A + b \neq \emptyset$. Puesto que $A \neq \mathbb{Q}$, tenemos $q \in \mathbb{Q} \setminus A$ y por lo tanto, $q + b \in \mathbb{Q} \setminus (A + b)$.

ii) Supongamos que $q = \sup(A+b) \in A+b$; entonces $q = r+b$ para algún $r \in A$. Por eso, para cada $a \in A$, $a+b \leq r+b$, lo cual implica que $a \leq r$ para cada $a \in A$. Por lo tanto, $r = \sup(A) \in A$, lo que contradice que A es una cortadura.

iii) Si $q \in A+b$ y $p < q$, entonces $q = a+b$ para algún $a \in A$.
Pero $p < q$ implica que $q = p+r$ donde r es positivo ($r \in P_Q$).
Por eso,

$$p = q - r = a + b - r = (a-r) + b.$$

Puesto que A es una cortadura, $a \in A$ y $a - r < a$, tenemos que $a - r \in A$, lo cual implica que $(a-r) + b \in A + b$.

b) Debemos demostrar que Ab cumple con las tres propiedades de una cortadura.

i) Tarea.

ii) Asumimos que $b > 0$ y que $q = \sup(Ab) \in Ab$; entonces $q = rb$ para algún $r \in A$. Por eso, para cada $a \in A, ab \leq rb$, y puesto que $b > 0$, esto implica que $a \leq r$ para cada $a \in A$. Por lo tanto, $r = \sup(A) \in A$, lo que contradice que A es una cortadura.

iii) Puesto que $0 \in A$, si $p \leq 0$, entonces $p \in A$ y por lo tanto si $q \leq 0$, $q = (\frac{q}{b})b \in Ab$. Si $q \in Ab$ y $0 < p < q$, entonces $q = ab$ para algún $a \in A$.

Pero $p < q$ implica que $q = pr$ donde $r > 1$. Por eso, $p = \frac{q}{r} = \frac{ab}{r} = (\frac{a}{r})b$.
Puesto que A es una cortadura, $a \in A$ y $\frac{a}{r} < a$, tenemos que $\frac{a}{r} \in A$, lo cual implica que $p = (\frac{a}{r})b \in Ab$. $\square$

Teorema 1.5.3. *Si A y B son cortaduras, también lo es $A+B$.*

Demostración: El conjunto $A + B = \bigcup\{A + b : b \in B\}$ y ahora se sigue de los lemas 1.5.1,1.5.2 a), que $A+B$ es una cortadura o es $\mathbb{Q}$.
Para demostrar que $A + B \neq \mathbb{Q}$, sean q_A una cota superior de A y q_B una cota superior de B; puesto que A y B son cortaduras, $q_A \notin A$ y $q_B \notin B$. Si $q_A + q_B \in A + B$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $q_A + q_B = a + b$. Pero esto implica que $q_A - a = b - q_B$, lo cual es una contradicción pues $q_A - a$ es positiva, mientras $b - q_B$ no lo es. Por lo tanto, $q_A + q_B \notin A + B$, así hemos demostrado que $A + B \neq \mathbb{Q}$. $\square$

Teorema 1.5.4. *Si A y B son cortaduras no negativas, entonces AB es una cortadura.*

Demostración: Supongamos que $x \in AB$; entonces $x \leq 0$ o $x = ab$ para algún $0 < a \in A$ y $0 < b \in B$. Si $x \leq 0$, entonces $x = \left(\frac{x}{b}\right) b$ y puesto que $\frac{x}{b} \leq 0$, $\frac{x}{b} \in A$, lo cual implica que $x \in Ab$.
Por otro lado, si $x = ab$, entonces $x \in Ab$ también. Por lo tanto,

$$AB = \bigcup\{Ab : b \in B, b \geq 0\}.$$

Por los lemas 1.5.1,1.5.2 b), AB es una cortadura o es igual a $\mathbb{Q}$. Para ver que $AB \neq \mathbb{Q}$, escojemos cotas superiores q_A y q_B de A y B respectivamente; notemos que A y B son cortaduras no negativas y por lo tanto $q_A \notin A$ y $q_B \notin B$ y además, $q_A, q_B \geq 0$. Si $q_A q_B \in AB$, deben existir racionales no negativos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $q_A q_B = ab$. Pero $a < q_A$, $b < q_B$ y $\frac{q_A}{a} = \frac{b}{q_B}$,lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 1.5.5. *Si A es una cortadura positiva, se define*

$$A^{-1} = \{x : x \text{ es negativa}\} \cup \left\{\frac{1}{p} : p > \sup(A)\right\}.$$

Lema 1.5.6. *Si A es una cortadura positiva, entonces A^{-1} es una cortadura.*

Demostración: Otra vez, tenemos que demostrar que A^{-1} cumple con las tres propiedades de una cortadura.

$\imath$) Si $x < 0$, entonces $x \in A^{-1}$; por lo tanto $A^{-1} \neq \emptyset$. Puesto que A es positiva, $0 \in A$, pero 0 no es el supremo de A. Si $0 < x \in A$, entonces $\frac{1}{x} \notin A^{-1}$, así hemos demostrado que $A^{-1} \neq \mathbb{Q}$.

$\imath\imath$) Tarea.

$\imath\imath\imath$) Si $q \leq 0$, entonces $q \in A^{-1}$. Ahora supongamos que $p \in A^{-1}$ y $0 < q < p$. Entonces, por definición, $\frac{1}{p}$ es un cota superior pero no el supremo de A.
Pero $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ y por lo tanto $\frac{1}{q}$ es una cota superior y no el supremo de A. Entonces $q \in A^{-1}$. $\square$

Definición 1.5.7. *El conjunto de cortaduras de Dedekind de $\mathbb{Q}$ se denota por $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.5.8. *Las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ son conmutativas, asociativas y distributivas con respecto a cortaduras no negativas.*

Demostración: Dejamos como tarea demostrar que las operaciones son conmutativas y asociativas y demostraremos que si A, B y C son cortaduras no negativas entonces $A(B + C) = AB + AC$.
Pero $A(B + C)$ consiste en todos los números racionales negativos junto con todos los racionales de la forma $r(s + t) = rs + rt$ donde $r, s, t \geq 0$.
Puesto que $rs + rt \in AB + AC$, hemos demostrado que $A(B + C) \supseteq AB + AC$.

Para la inclusión inversa, primero notemos que por la definición de cortaduras no negativas, $A(B + C)$ contiene todos los números racionales negativos.
Supongamos ahora que $pr + qs \in AB + AC$, donde $p, q \in A$, $r \in B$, $s \in C$ y $p, q, r, s \geq 0$.

Tenemos $p \leq q$ o $q \leq p$ y por lo tanto, $pr+qs \leq qr+qs = q(r+s) \in A(B+C)$ o $pr+qs \leq pr+ps = p(r+s) \in A(B+C)$. En ambos casos, puesto que $A(B+C)$ es una cortadura, $pr+qs \in A(B+C)$ y por lo tanto, $AB+AC \subseteq A(B+C)$. $\square$

Definición 1.5.9. *Sean* $0_R = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ *(la cortadura cero) y* $1_R = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$ *(la cortadura 1).*

Proposición 1.5.10. *Para cada cortadura* A*,* $A+0_R = A$ *y para cada cortadura no negativa* B*,* $B0_R = 0_R$ *y* $B1_R = B$*.*

Demostración:
Por definición, $A + 0_R = \{p + q \in \mathbb{Q} : p \in A, q < 0\}$. Puesto que A no tiene supremo, si $r \in A$, existe $s \in A$ con $s > r$. Entonces $r = s + (r - s) \in A + 0_R$ puesto que $r - s < 0$, así que $A \subseteq A + 0_R$.
Para la inclusión inversa, supongamos que $r \in A + 0_R$; entonces $r = p + q$ donde $p \in A$ y $q < 0$. Puesto que A es una cortadura y $p + q < p$, se sigue que $r = p + q \in A$, así hemos demostrado que $A + 0_R \subseteq A$, es decir $A + 0_R = A$.

Dejamos las otras dos igualdades como tarea. $\square$

Tarea: Demostrar que si A es una cortadura positiva y $0 < p < 1$, entonces existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s \notin A$ ni s es el supremo de A pero $sp \in A$.

Proposición 1.5.11. *Si* A *es una cortadura positiva, entonces* $AA^{-1} = 1_R$*.*

Demostración: Puesto que $0 \in A$, se sigue que $0 \in AA^{-1}$ y por lo tanto, AA^{-1} y 1_R contienen todos los números racionales no positivos. Supongamos que $pq \in AA^{-1}$ donde $p \in A$, $q \in A^{-1}$ y $p, q > 0$. Por la definición de A^{-1}, puesto que $q \in A^{-1}$, $\frac{1}{q}$ es una cota superior y no el supremo de A y por lo tanto, $\frac{1}{q} > p > 0$, es decir $\frac{1}{q} > q > 0$. Entonces $pq < p(\frac{1}{p}) = 1$ y se sigue que $pq \in 1_R$, así hemos demostrado que $AA^{-1} \subseteq 1_R$.

Para la inclusión inversa, supongamos que $p \in 1_R$ y $p > 0$. Por la tarea anterior, existe $0 < s \in \mathbb{Q}$ tal que $s \notin A$ ni s es el supremo de A pero $sp \in A$. Entonces por la definición de A^{-1}, $\frac{1}{s} \in A^{-1}$ y por lo tanto, $(sp)(\frac{1}{s}) = p \in AA^{-1}$, así hemos demostrado que $1_R \subseteq AA^{-1}$. $\square$

Definiciones 1.5.12. *Si* A *es una cortadura negativa y* B *es no negativa se define* $AB = -[(-A)B]$*; si ambas son negativas se define* $AB = (-A)(-B)$*.*

Las propiedades desarrolladas en los lemas y proposiciones anteriores se extienden a cortaduras negativas. Omitimos las demostraciones.
Así hemos demostrado que el conjunto $\mathbb{R}$ de cortaduras tiene dos operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ que satisfacen:

1) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\;a + (b + c) = (a + b) + c\;$ y $\;a(bc) = (ab)c$ (asociatividad)
2) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $\;a + b = b + a\;$ y $\;ab = ba\;$ (conmutatividad).
3) Existe una identidad 0_R para $(+)$ tal que $\;a + 0_R = a\;$ para cada $a \in \mathbb{R}$.
4) Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $\;a + (-a) = 0_R$.
5) Existe un elemento $1_R \in \mathbb{R}$ tal que $\;a1_R = a\;$ para cada $a \in \mathbb{R}$.
6)Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0_R\}$ existe un elemento a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1_R$.
7) Para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\;a(b + c) = ab + ac\;$ (distributividad).
8) $\subseteq$ es un *orden total* en $\mathbb{R}$, es decir, para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $\;a \subseteq b\;$ o $\;b \subseteq a$. Si $a \subseteq b$, se escribirá $a \leq b$.

Definición 1.5.13. *Una cortadura se llama racional si es de la forma*

$$\{r \in \mathbb{Q} : r < q\} \text{ para algún } q \in \mathbb{Q}$$

.

Teorema 1.5.14. *Las cortaduras racionales son de orden denso en $\mathbb{R}$, es decir, si A y B son cortaduras y $A \subsetneq B$, entonces existe una cortadura racional C tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración: Puesto que $A \subsetneq B$, existe $p \in B \setminus A$. Entonces $p \in B$ y p es una cota superior de A. Se sigue que $A \subsetneq \{x \in \mathbb{Q} : x < p\} \subsetneq B$. □

Una de las propiedades de $\mathbb{R}$ más importantes para el desarrollo de Análisis Matemático (es decir, la teoría del Cálculo integral y diferencial) es la siguiente:

Teorema 1.5.15. *Supongamos que S y T son subconjuntos no vacios de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} = S \cup T$ y cada elemento de T es una cota superior de S (es decir, cada elemento de T contiene cada elemento de S), entonces S tiene un elemento máximo o T tiene un elemento mínimo.*

Demostración: Sea $P = \bigcup S \equiv \bigcup\{A : A \in S\}$; entonces es fácil verificar que P es una cortadura o $P = \mathbb{Q}$ (Tarea). Puesto que $T \neq \emptyset$, existe $q \in T$ y por lo tanto, $q \notin A$ para cada cortadura $A \in S$. Entonces $q \notin P$, demostrando que P es una cortadura, y es el supremo de S en el conjunto ordenado $\mathbb{R}$ con el orden $\subseteq$. Afirmamos también que P es el ínfimo de T. Para ver que P es una cota inferior de T, notemos que si $B \in T$, entonces $B \supseteq A$ para cada $A \in S$ y por lo tanto $B \supseteq \bigcup\{A : A \in S\} = P$. Finalmente, si existiera una cota inferior C de T tal que $P \subsetneq C$, por el teorema 1.5.14, podríamos encontrar $q \in C \setminus P$. Entonces la cortadura $\{x \in \mathbb{Q} : x < q\} \notin S \cup T$ puesto que $\sup(S) = P$ y C es una cota inferior de T, contradiciendo el hecho de que $S \cup T = \mathbb{R}$. Por lo tanto hemos demostrado que $P = \sup(S) = \inf(T)$ y otra vez, puesto que $S \cup T = \mathbb{R}$, debemos tener $P \in S\;$ o $\;P \in T$. □

Corolario 1.5.16. ***(El Principio del Supremo)*** *Si $P \subseteq \mathbb{R}$ es no vacio y acotado superiormente, entonces P tiene supremo.*

Demostración: Sean $T = \{A : A \text{ es una cota superior de } P\}$ y $S = \mathbb{R} \setminus T$. Claramente, $T \neq \emptyset$ y $S \neq \emptyset$ puesto que si $A \in P$, entonces $A + (-1_R) \notin T$, lo cual implica que $A + (-1_R) \in S$. Además, si $B \in S$, entonces B no es una cota superior de P, es decir, existe $A \in P$ tal que $B \subseteq A$. Pero todos los elementos de T contienen a P y por lo tanto todos los elementos de T contienen a todos los elementos de S. Así es que S y T satisfacen a las hipótesis del teorema 1.5.15 y debe existir un elemento $U = \sup(S) = \inf(T)$. Solo falta demostrar que $U = \sup(P)$. Con este fin, notamos que puesto que $U = \inf(T)$, U es una cota superior de P. Si existiera otra cota superior V de P con $V \subsetneq U$, tendríamos $V \in T$, lo que contradice el hecho de que $U = \inf(T)$. Por lo tanto $U = \sup(P)$. $\square$

Capítulo 2

Sucesiones

Una *sucesión* en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Con frecuencia, el término sucesión refiere al rango de la función f. Se denota el elemento $f(n) \in X$ por f_n. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (a veces simplemente $\{f_n\}$) una sucesión. El elemento $f(n)$ se llama el *n-ésimo término* de la sucesión; así es que $f(1)$ es el primer término, $f(2)$ el segundo término, etc.

Ejemplo 2.0.17. *La sucesión* $\left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ *representa la función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Cuando todos los términos de una sucesión con la excepción de un número finito de ellos cumplen con una propiedad P (es decir, todos los términos a partir del n-ésimo tienen P para algún $n \in \mathbb{N}$) se dice que la sucesión tiene P *finalmente*. Si un número infinito de términos de la sucesión tienen P, se dice que la sucesión tiene P *frecuentemente*.

Ejemplo 2.0.18. *La sucesión* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ *es frecuentemente positiva y frecuentemente negativa pero no es ni finalmente positiva ni finalmente negativa. Por otro lado, la sucesión* $\{3, 2, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ *es finalmente igual a* 1 *y finalmente positiva.*

El concepto de convergencia es uno de los más importantes en análisis matemático. Informalmente, una sucesión converge a un número real x si los términos de la sucesión se acercan más y más a x (sin necesariamente llegar a ser igual a x), es decir, las distancias entre los términos de la sucesión y x decrecen a 0 (sin necesariamente llegar a 0). Por ejemplo, los términos de la sucesión del ejemplo 2.0.17, se acercan más y más a 1 sin llegar a 1. El primer término (igual a 2) de esta sucesión está a una distancia 1 de 1, el segundo término (igual a 1.5) está a una distancia $\dfrac{1}{2}$ de 1 etc.

Definición 2.0.19. *Una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ (escribimos $\{x_n\} \to x$) si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \epsilon$. El número x se llama el límite de la sucesión y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$. Una sucesión que converge se llama una sucesión* convergente.

Intentaremos interpretar esta definición: Notemos primero que $|x_n - x|$ es precisamente la distancia (en $\mathbb{R}$) entre x y x_n. Por eso, $\{x_n\} \to x$ quiere decir que dado cualquier número positivo ϵ podemos encontrar un cierto punto (término) en la sucesión de tal manera que pasando ese punto todos los demás están a una distancia menor que ϵ de x. Es decir, dado cualquier $\epsilon > 0$, la sucesión está finalmente dentro de una distancia ϵ de x.

Ejemplo 2.0.20. *Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge a 0.*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$; debemos encontrar un término en la sucesión tal que él y todos los términos sucesivos están dentro de ϵ de 0. Empleamos la propiedad Arquimedeana de los enteros: Dado cualquier número real r, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$. Así es que, puesto que $\epsilon > 0$, $\dfrac{1}{\epsilon}$ es un número real y podemos encontrar un entero $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$. Entonces, si $n > n_0$, tenemos $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$, es decir, a partir del n_0-ésimo término, todos los términos están dentro de ϵ de 0. Esto termina la demostración. $\square$

Para demostrar que una sucesión converge debemos tener un candidato para el límite y a veces tenemos que estimar ese límite antes de efectuar la demostración formal.

Ejemplo 2.0.21. *Encontrar el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{n}{(2n+1)}\right\}$.*

No está dado el límite y debemos estimarlo. Usando división sintética, tenemos

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}.$$

y notamos ahora que si n es muy grande, la segunda expresión a la derecha es muy pequeña. Eso nos conduce a creer que el límite de la sucesión debe ser $\dfrac{1}{2}$. Ahora lo demostraremos.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$; calculemos la distancia entre el n-ésimo término de la sucesión y $\dfrac{1}{2}$:

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4n+2}.$$

Notamos ahora que si $4n+2 > \dfrac{1}{\epsilon}$, tenemos $\dfrac{1}{(4n+2)} < \epsilon$ y por lo tanto,

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon.$$

Así que si escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{(\frac{1}{\epsilon} - 2)}{4}$, entonces para cada $n \geq n_0$ tendremos $\left| \dfrac{n}{(2n+1)} - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{1}{(4n+2)} \leq \dfrac{1}{(4n_0+2)} < \epsilon$, demostrando que la sucesión converge a $\dfrac{1}{2}$. $\square$

Tarea. Estimar el límite de las siguientes sucesiones y después demostrar que la sucesión converge a ese límite:

a) $\left\{ \dfrac{1}{2^n} \right\}$,

b) $\left\{ \dfrac{(2n+1)}{(3n-2)} \right\}$,

c) $\left\{ 6 - \dfrac{2}{n^2} \right\}$

Definición 2.0.22. *Una sucesión que no converge se llama divergente.*

Si negamos la definición de convergencia, obtenemos lo siguiente: Una sucesión $\{x_n\}$ diverge si para cada número real r existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $|x_n - r| > \epsilon$.

Ejemplo 2.0.23. *La sucesión $\{n\}$ diverge.*

Demostración: Supongamos que $\{n\} \to r$. Por la propiedad Arquimedeana de los enteros, existe $m_0 \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 > r$. Entonces dado $\epsilon = 1$ y cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, si $n \geq \max\{m_0 + 1, n_0\}$ se sigue que $n - r > \epsilon$.

Definición 2.0.24. *Una sucesión f en $\mathbb{R}$ es acotada si su rango es acotado, es decir si el conjunto $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.0.25. *La sucesión $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$ es acotada, mientras la sucesión $\{n\}$ no lo es.*

Teorema 2.0.26. *Una sucesión convergente es acotada.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\} \to x$ y escogamos $\epsilon = 1$.
Entonces por ser convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $|x_n - x| < 1$, es decir, $x_n \in (x-1, x+1)$. Sea $m = \min\{x-1, x_1, \ldots x_{n_0}\}$ y
$M = \max\{x+1, x_1, \ldots, x_{n_0}\}$. Entonces $x_n \in [m, M]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 2.0.27. *Si* $\{x_n\} \to x \neq 0$*, entonces existe* $r > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $n \geq n_0$*,* $r < |x_n|$*.*

Demostración: Tarea $\left(pon \quad r = \left|\frac{x}{2}\right| > 0\right)$.

Tarea. Formular y demostrar un teorema análogo al Teorema 2.0.27 para límites negativos.

2.1 Operaciones con sucesiones

Una propiedad de los números reales, muy importante en lo sucesivo es la siguiente:
La desigualdad triangular: Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

La desigualdad triangular se demuestra considerando todos los casos:
a) $a, b \geq 0$,
b) $a \geq 0$ y $b < 0$,
c) $b \geq 0$ y $a < 0$
d) $a, b < 0$.
(Tarea).

Teorema 2.1.1. *Si* $\{a_n\} \to a$ *y* $\{b_n\} \to b$ *entonces* $\{a_n + b_n\} \to a + b$*.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$; puesto que $\{a_n\} \to a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$, $|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ y puesto que $\{b_n\} \to b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_2$, $|b - b_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, si $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ambas desigualdades se cumplen simultaneamente y tenemos:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\{a_n + b_n\} \to a + b$. □

Vale notar que si usamos ϵ en vez de $\frac{\epsilon}{2}$ en la demostración del teorema 2.1.1, (es decir, $|a - a_n| < \epsilon$ y $|b - b_n| < \epsilon$) hubieramos obtenido finalmente $|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\epsilon$. No obstante, esta desigualdad también vale para demostrar convergencia de la sucesión $\{a_n + b_n\}$, pues dado $\eta > 0$, podemos encontrar un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, $|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\eta$ y dado $\epsilon > 0$ encontramos n_0 que corresponde a $\eta = \dfrac{\epsilon}{2}$

Esta discusión demuestra que $x_n \to x$ si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < K\epsilon$ para cada $n \geq n_0$ y algún constante fijo K.

Teorema 2.1.2. *Si* $\{a_n\} \to a$ *y* $\{b_n\} \to b$, *entonces* $\{a_n b_n\} \to ab$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$; puesto que $\{a_n\} \to a$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$, $|a - a_n| < \epsilon$ y puesto que $\{b_n\} \to b$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_2$, $|b - b_n| < \epsilon$.
Entonces

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||(b_n - b)| + |b||(a_n - a)|. \end{aligned}$$

Puesto que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, por el teorema 2.0.26, el conjunto $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Sea L una cota superior de $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ y $M = \max\{L, |b|\} < \infty$. Entonces si $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tenemos

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n||(b_n - b)| + |b||(a_n - a)| < M\epsilon + M\epsilon = 2M\epsilon.$$

Pero $2M$ es una constante fija y por la discusión de arriba, esto basta para demostrar convergencia de la sucesión $\{a_n b_n\}$. □

Tarea. Reescribir la demostración anterior para obtener $|a_n b_n - ab| < \epsilon$. para cada $n \geq n_0$.

Teorema 2.1.3. *Si* $\{x_n\} \to x$ *y* $x, x_n \neq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\left\{\frac{1}{x_n}\right\} \to \frac{1}{x}$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$; por el teorema 2.0.27, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ tal que $|x_n| > r$ para cada $n \geq n_0$. Puesto que $\{x_n\} \to x$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_n| < \epsilon r|x|$ para cada $n \geq n_2$. Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces si $n \geq n_0$, tenemos

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{|x - x_n|}{|x||x_n|}\right| < \frac{\epsilon r|x|}{|x||x_n|} < \epsilon.$$

□

Tarea. Demostrar que
(a) si $\{x_n\} \to x$ entonces $\{|x_n|\} \to |x|$
(b) si $\{|x_n|\} \to 0$ entonces $\{x_n\} \to 0$.

Definición 2.1.4. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *es creciente (respectivamente, decreciente) si* $x_n \leq x_{n+1}$ *(respectivamente,* $x_n \geq x_{n+1}$*) para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Una sucesión es monótona si es decreciente o creciente.*

Teorema 2.1.5. *Una sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*

Demostración: Puesto que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotada, tiene un supremo, digamos x. Demostraremos que $\{x_n\} \to x$. Sea $\epsilon > 0$; puesto que x es el supremo de A, $x - \epsilon$ no es una cota superior de A y por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} > x - \epsilon$. Entonces, si $n \geq n_0$, $x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x$, es decir, $|x - x_n| < \epsilon$. □

2.2 Subsucesiones

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $\{\jmath_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos (es decir, $\jmath_{n+1} > \jmath_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Si se define $z_n = x_{\jmath_n}$ se obtiene una sucesión $\{z_n\}$ y la llamamos una *subsucesión* de $\{x_n\}$.

Ejemplo 2.2.1. *Si* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *y* $\jmath_n = 2n$ *entonces* $\{x_n\}$ *es la sucesión*

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\},$$

$\{\jmath_n\}$ *es la sucesión*

$$\{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}$$

y la subsucesión $\{z_n\}$ *así determinada consiste en los términos pares de la sucesión* $\{x_n\}$

$$\{x_2, x_4, x_6, x_8 \dots, x_{2n}, \dots\}$$

es decir,

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\}.$$

Tarea Demostrar (por inducción) que si $\{\jmath_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos entonces $\jmath_n \geq n$. (Usaremos este resultado frecuentemente en lo que sigue.)

Teorema 2.2.2. *Si* $\{x_n\} \to x$ *entonces cualquier subsucesión de* $\{x_n\}$ *también converge a* x.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$; puesto que $\{x_n\} \to x$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $|x - x_n| < \epsilon$. Si $\{\jmath_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos y $z_n = x_{\jmath_n}$, entonces $\jmath_{n_0} \geq n_0$ y por lo tanto, si $n \geq n_0$, tenemos $|z_n - x| = |x_{\jmath_n} - x| < \epsilon$ pues $\jmath_n > \jmath_{n_0} \geq n_0$. □

No podemos demostrar el siguiente teorema en este momento. Más tarde veremos la demostración usando el concepto de compacidad.

Teorema 2.2.3. *Una sucesión acotada posee una subsucesión convergente.*

Ejemplo 2.2.4. *La sucesión acotada (pero no convergente)*

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \dots\right\}$$

posee las subsucesiones $\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ \dots\}$ *y* $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\right\}$ *(entre muchas otras).*

Definición 2.2.5. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *es de Cauchy si dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $m, n \geq n_0$*,* $|x_m - x_n| < \epsilon$*.*

Teorema 2.2.6. *Una sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración: Sea $\epsilon = 1$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0, \quad |x_m - x_n| < 1$, en particular $|x_n - x_{n_0}| < \epsilon$, lo cual implica que $|x_n| < |x_{n_0}| + 1$ para cada $n \geq n_0$. Sea $L = \max\{|x_1|,\ |x_2|,\ |x_3|,\ \dots,\ |x_{n_0}|\}$, entonces $|x_n| \leq L$ para cada $n \leq n_0$ y $|x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$ para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, $|x_n| \leq L + 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 2.2.7. *Una sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\} \to x$ y sea $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0, \quad |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces si $m, n \geq n_0$, tenemos

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x - x_n)| \leq |x_m - x| + |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

es decir, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. □

Teorema 2.2.8. *Una sucesión de Cauchy es convergente.*

Demostración: Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y sea $\epsilon > 0$. Por el teorema 2.2.6, $\{x_n\}$ es una sucesión acotada y por el teorema 2.2.3, posee una subsucesión convergente, digamos $\{z_n\} \to x$ donde $z_n = x_{\jmath_n}$ para alguna sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\{\jmath_n\}$. Por ser $\{x_n\}$ de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_1, \quad |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$ y por convergencia $\{x_{\jmath_n}\}$ a x, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $\jmath_n \geq n_2$, entonces $|x - x_{\jmath_n}| < \frac{\epsilon}{2}$. Si ponemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces si $n \geq n_0 \geq n_1$ tenemos $\jmath_n \geq n_0 \geq n_2$ y por lo tanto $|x - x_n| \leq |x - x_{\jmath_n} + x_{\jmath_n} - x_n| \leq |x - x_{\jmath_n}| + |x_{\jmath_n} - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, así concluimos la demostración de que $\{x_n\} \to x$. □

Definición 2.2.9. *Un punto $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}$ si para cada $\epsilon > 0$, $\{x_n\}$ esta frecuentemente dentro de una distancia ϵ de x.*

Tarea. Demostrar que los siguientes son equivalentes:
a) x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$,
b) Para cada $\epsilon > 0$, un número infinito de términos de la sucesión estan en el intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$,
c) Para cada $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$ y $|x - x_m| < \epsilon$.

Tarea. Demostrar que el límite de una sucesión convergente es un punto de acumulación de la sucesión, y admás es el único punto de acumulación.

Teorema 2.2.10. *Si x es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ entonces existe una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ que converge a x.*

Demostración: Puesto que x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$, por c) de la tarea anterior, dado $m = 1$ y $\epsilon = 1$, existe $\jmath_1 \in \mathbb{N}$, $\jmath > m = 1$ tal que $|x - x_{\jmath_1}| < 1$. Ahora, aplicando c) otra vez con $m = \jmath_1$ y $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $\jmath_2 > m = \jmath_1$ tal que $|x - x_{\jmath_2}| < \frac{1}{2}$. Procediendo así con repetidas aplicaciones de c), obtenemos una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\{\jmath_n\}$ tal que $|x - x_{\jmath_n}| < \frac{1}{n}$. Demostraremos que si se define $z_n = x_{\jmath_n}$, entonces $\{z_n\} \to x$. Con este fin, sea $\epsilon > 0$; por la propiedad Arquimedeana de los enteros, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{\epsilon}$, es decir, $\frac{1}{n} < \epsilon$. Entonces si $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$ y por lo tanto $|z_n - x| = |x_{\jmath_n} - x| < \frac{1}{n} < \epsilon$, lo que termina la demostración de convergencia. $\square$

Definición 2.2.11. *El punto de acumulación mayor (respectivamente menor) de una sucesión acotada se llama el límite superior (respectivamente, el límite inferior) de $\{x_n\}$ y se escribe $\overline{\lim}(x_n)$ o limsup(x_n), (respectivamente $\underline{\lim}(x_n)$ o liminf(x_n)).*

Tarea. Demostrar que si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente entonces:

$$\lim inf\{x_n\} = \lim sup\{x_n\}.$$

Capítulo 3

Series

El símbolo $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ denota la suma finita

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Sea $\{a_n\}$ una sucesión; la sucesión $\{s_n\}$ donde $s_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ se llama la *serie* de los elementos a_n y frecuentemente se escribe $\sum a_n$. Los términos s_n se llaman las *sumas parciales* de la serie. Nota que

$$\{s_n\} = \left\{ \sum_{m=1}^{n} a_m \right\} = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots\}.$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ converge, su límite S se llama la *suma de la serie*, se dice que la serie *converge* a S y se escribe el límite de la sucesión $\{s_n\}$, $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Como en el caso de sucesiones, una serie que no converge se llama *divergente*.

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series y $k \in \mathbb{R}$, entonces $\sum k a_n$ denota la serie $ka_1 + ka_2 + ka_3 + \cdots + ka_n + \dots$ y $\sum (a_n + b_n)$ representa la serie $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)+\dots$. Usando los reoremas 2.2.8 y 2.1.2, es fácil demostrar que si $\sum a_n$ converge a a y $\sum b_n$ converge a b entonces $\sum k a_n$ converge a ka y $\sum (a_n + b_n)$ converge a $a + b$ (Tarea).

Puesto que una sucesión converge si y sólo si es de Cauchy, tenemos la siguiente caracterización de convergencia de series.

Lema 3.0.12. *Una serie $\sum a_n$ con sumas parciales $\{s_n\}$ converge si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m \geq n_0$,* $\left| \sum\limits_{k=m+1}^{k=n} a_k \right| < \epsilon.$

Demostración: La serie $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, $|s_n - s_m| < \epsilon \Leftrightarrow$ para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$, $\left| \sum\limits_{k=m+1}^{k=n} a_k \right| < \epsilon.$ $\square$

Ejemplo 3.0.13. *Sea* $r \in \mathbb{R}$ *y* $a \neq 0$*, entonces la serie dada por* $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ *donde* $a_m = ar^{m-1}$ *y* $a, r \neq 0$ *se llama una serie geométrica.*

Tarea. Demostrar que la sucesión $\{r^n\} \to 0$ si $|r| < 1$ y diverge si $r > 1$.

Proposición 3.0.14. *Una serie geométrica* $\sum ar^{n-1}$ *converge si y sólo si* $|r| < 1$*.*

Demostración: Si $r = 1$, entonces $s_n = a + a + a + \cdots + a$ (n veces) $= na$ y puesto que $a \neq 0$, la serie diverge. Si $r < 1$, entonces notamos que

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

y por lo tanto

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Si restamos la segunda expresión de la primera, obtenemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

es decir, si $r \neq 1$,

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Ahora, si $|r| < 1$, por la tarea anterior, la sucesión $\{1 - r^n\}$ converge a 1 y por lo tanto $\{s_n\} \to \dfrac{a}{(1 - r)}$. □

Tarea. Demostrar que la serie $\sum ar^n$ diverge si $r > 1$.

Lema 3.0.15. *Si* $\sum a_n$ *converge entonces* $\{a_n\} \to 0$*.*

Demostración: Si $\{s_n\}$ converge, digamos a S, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - S| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para cada $n \geq n_0$. En particular, si $n \geq n_0 + 1$,

$$\begin{aligned} a_n = s_n - s_{n-1} &= (s_n - S) + (S - s_{n-1}) \leq |s_n - S| + |s_{n-1} - S| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

así hemos demostrado que $\{a_n\} \to 0$. □

El inverso del lema 3.0.15 es falso, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.0.16. *La serie* $\sum \dfrac{1}{n}$ *es divergente.*

Demostración:
Tenemos:

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= n\left(\frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Es decir, $s_{2n} - s_n \geq \dfrac{1}{2}$, lo que demuestra que la sucesión $\{s_n\}$ no es de Cauchy, y por lo tanto no converge. □

Encontrar la suma de una serie puede ser difícil y muchas veces los métodos usados para efectuar el cálculo son *sui generis*.

Ejemplo 3.0.17. *Consideremos la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Notemos que $\dfrac{1}{(n(n+1))} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$ *y por lo tanto,*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto $\{s_n\} = \left\{1 - \dfrac{1}{(n+1)}\right\} \to 1.$

Con un truco obtuvimos la suma de esta serie de una manera muy fácil, pero en contraste, es muy difícil encontrar la suma de la serie muy semejante, $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Ahora vamos a desarrollar criterios para comprobar la convergencia de una serie. Empezamos con uno de los más sencillos.

Una serie de la forma $\sum(-1)^{n+1}a_n$ donde $a_n > 0$ se llama una *serie alternante*.

Teorema 3.0.18. *Una serie alternante* $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *converge si* $\{a_n\}$ *es decreciente y converge a* 0.

Demostración: Calculemos la suma parcial s_{2n}; tenemos

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

y puesto que $a_1 > a_2,\ a_3 > a_4$, etc. se sigue que s_{2n} es una suma de términos positivos, así hemos demostrado que la sucesión $\{s_{2n}\}$ es una sucesión creciente. Por otro lado,

$$s_{2n} = (a_1 - a_{2n}) - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}).$$

Cada paréntesis a la derecha es positiva y por lo tanto, para cada n, $s_{2n} \leq a_1 - a_{2n} \leq a_1$. Así es que $\{s_{2n}\}$ es una sucesión acotada. Por lo tanto, por el teorema 2.1.5, la sucesión $\{s_{2n}\}$ converge, digamos $\{s_{2n}\} \to a$.

Tarea. En forma semejante demostrar que $\{s_{2n-1}\}$ es convergente.

Pero, $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$ y por el teorema 2.1.1 del Capitulo 2, tenemos $\lim(s_{2n-1}) = \lim(s_{2n}) - \lim(a_{2n}) = a + 0 = a$. Es decir, las sucesiones $\{s_{2n}\}$ y $\{s_{2n-1}\}$ convergen al mismo número.

Tarea. Demostrar que $\{s_n\} \to a$. $\square$

Teorema 3.0.19. *(El criterio de Comparación). Si $\sum x_n$ es convergente y si $0 \leq z_n \leq x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum z_n$ converge también.*

Demostración: Supongamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S$ y sea $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Entonces $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \leq s_n \leq S$ y por lo tanto $\{t_n\}$ es una sucesión creciente y acotada. Por el teorema 2.1.5, $\{t_n\}$ converge. $\square$

Tarea. Demostrar que si $0 \leq x_n \leq z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\sum x_n$ es divergente, entonces $\sum z_n$ también lo es.

Tarea. Usar el criterio de comparación para demostrar que la serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. (Pero, cálcular la suma es muy difícil).

Tarea. Demostrar que si $\{s_n\}$ es una sucesión creciente y una subsucesión de $\{s_n\}$ converge, entonces $\{s_n\}$ es convergente.

Teorema 3.0.20. *(El criterio de Condensación). Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de términos positivos, entonces $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ converge.*

Demostración: Puesto que $\{a_n\}$ es decreciente, si sumamos 2^j términos a partir del término a_{2^j}, tenemos,

$$\begin{aligned} 2^m a_{2^{m+1}} &\leq a_{2^m} + a_{2^m+1} + a_{2^m+2} + \cdots + a_{2^{m+1}-1} \\ &= \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} a_j \leq 2^m a_{2^m}. \end{aligned}$$

La suma parcial de los primeros $2^{n+1} - 1$ términos se puede agrupar de la siguiente manera:

$$s_{2^{n+1}-1} = a_1 + \sum_{j=2^1}^{2^2-1} a_j + \sum_{j=2^2}^{2^3-1} a_j + \cdots \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} a_j,$$

y por lo tanto, si sustituimos la primera expresión, para valores de m entre 1 y n, en la segunda obtenemos,

$$a_1 + 2a_{2^2} + 4a_{2^3} + \cdots \leq s_{2^{n+1}-1} \leq a_1 + 2a_{2^1} + 4a_{2^2} + \ldots,$$

es decir,

$$a_1 + \frac{1}{2}\sum_{2}^{n+1} 2^k a_{2^k} \leq s_{2^{n+1}-1} \leq a_1 + \sum_{1}^{n} 2^k a_{2^k}.$$

Ahora, si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\{s_n\}$ es acotado, lo cual implica que la subsucesion $\{s_{2^{n+1}-1}\}$ también lo es, digamos $s_{2^{n+1}-1} \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces, $a_1 + \frac{1}{2}\sum_{2}^{n+1} 2^k a_{2^k} \leq M$ y puesto que $\left\{a_1 + \frac{1}{2}\sum_{2}^{n+1} 2^k a_{2^k}\right\}$ es una sucesión creciente, debe converger (teorema 2.1.5). Por lo tanto $\left\{\sum_{2}^{n+1} 2^k a_{2^k}\right\}$ converge también.

Inversamente, si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge entonces la sucesion $\left\{\sum_{1}^{n} 2^k a_{2^k}\right\}$ es acotada y por lo tanto la sucesión $\{s_{2^{n+1}-1}\}$ también lo es. De la tarea, se sigue que $\{s_n\}$ es convergente, es decir, $\sum a_n$ converge. $\square$

Ejemplo 3.0.21. *La serie* $\sum \frac{1}{n^p}$ *converge si y sólo si* $p > 1$.

Demostración:
Ya vimos que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Si $p < 1$ aplica el criterio de comparación (Tarea). Supongamos que $p > 1$, entonces por el criterio de condensación, $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ converge. Pero

$$\begin{aligned} 2^n\left(\frac{1}{(2^n)^p}\right) &= \frac{1}{2^{np-n}} = \frac{1}{2^{n(p-1)}} \\ &= \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si la serie geométrica $\sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ converge. Pero por la proposición 3.0.14, esta serie geométrica converge si y sólo si la razón r entre términos consecutivos tiene valor absoluto menor que 1, es decir, si $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, lo cual sucede si y sólo si $p > 1$.

3.1 Convergencia absoluta

Se dice que una serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si $\sum |a_n|$ converge. Por supuesto, una serie de términos no negativos es convergente si y sólo si es absolutamente convergente. Una serie convergente pero no absolutamente convergente se llama *condicionalmente convergente*.

Ejemplo 3.1.1. *La serie* $\frac{(-1)^n}{n}$ *es condicionalmente convergente.*

Demostración: La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente por el teorema 3.0.17; por otro lado $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ es divergente por el resultado del ejemplo 3.0.16.

□

Teorema 3.1.2. *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración: Sea $\sum a_n$ una serie absolutamente convergente y $\{s_n\}$ la sucesión de sus sumas parciales. La serie $\sum |a_n|$ es convergente y por lo tanto, la sucesión $\{t_n\}$ de sus sumas parciales es de Cauchy. Lo que quiere decir, es que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq n_0$, entonces $|t_n - t_m| = \sum_{k=m+1}^{k=n} |a_k| < \epsilon$.
Pero, por la desigualdad triangular (aplicada varias veces), si $n > m \geq n_0$,

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{k=n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{k=n} |a_k| < \epsilon$$

lo que demuestra que $\{s_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto converge. □

Hay varios criterios para determinar si una serie es convergente.

Teorema 3.1.3. *(El criterio de Kummer). Sea $\sum a_n$ una serie.*

(i) Si existe una sucesión $\{c_n\}$ de números positivos y una constante $c > 0$ tal que

$$0 < c \leq c_n - c_{n+1}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $a_n > 0$ y existe una sucesión $\{c_n\}$ de números positivos tal que $\sum \frac{1}{b_n}$ diverge y

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum a_n$ diverge.

Demostración:
(i) Supongamos que tales c_n y c existen. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} c|a_1| &\leq c_1|a_1| - c_2|a_2|, \\ c|a_2| &\leq c_2|a_2| - c_3|a_3|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c|a_n| &\leq c_n|a_n| - c_{n+1}|a_{n+1}|. \end{aligned}$$

Si sumamos ambos lados de esta desigualdad obtenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} c|a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} c_k|a_k| - \sum_{k=2}^{n+1} c_k|a_k|.$$

Todos menos dos de los términos a la derecha se cancelan y tenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} c|a_k| \leq b_1|a_1| - c_{n+1}|a_{n+1}| \leq c_1|a_1|,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \frac{c_1|a_1|}{c},$$

Así hemos demostrado que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum |a_n|$ está acotada y puesto que esta sucesión es creciente, debe converger, es decir, $\sum |a_n|$ es convergente.

(ii) Si la sucesión $\{c_n\}$ existe, entonces tenemos

$$\begin{aligned} c_1a_1 &\leq c_2a_2, \\ c_2a_2 &\leq c_3a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ c_{n-1}a_{n-1} &\leq c_na_n. \end{aligned}$$

Combinando todas estas desigualdades, vemos que

$$c_1a_1 \leq c_2a_2 \leq c_3a_3 \leq \cdots \leq a_nc_n,$$

es decir,

$$\frac{c_1a_1}{c_n} \leq a_n.$$

Pero sabemos que la serie $\sum \dfrac{1}{c_n}$ es divergente, por lo tanto, también lo es la serie $\sum \dfrac{c_1a_1}{c_n}$. Ahora se sigue de la prueba de la comparación que $\sum a_n$ es divergente. □

La prueba de Kummer es muy difícil de aplicar, pues casi nunca es obvio cual debe ser la elección de la sucesión $\{c_n\}$. No obstante, hay unos casos especiales:

Corolario 3.1.4. *(El criterio de la razón de Cauchy). Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos distintos de 0 y supongamos que* $\lim\left\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right\}$ *existe y es igual a* r*. Si* $r<1$ *entonces la serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente y si para cada* $n\in\mathbb{N}$*,* $a_n>0$ *y* $r>1$*, la serie diverge. Si* $r=1$*, no se puede concluir nada.*

Demostración: Supongamos primero que $r<1$; entonces dado $\epsilon=\dfrac{(1-r)}{2}$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para cada $n\geq n_0$, $\left|\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|-r\right|<\epsilon$. Esto implica que si $n\geq n_0$, entonces $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1-\epsilon$, es decir $1-1\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|>\epsilon>0$ para cada $n\geq n_0$. Ahora el criterio de Kummer con $c_n=1$ para cada $n\geq n_0$ implica que $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ es absolutamente convergente. Pero $\sum|a_n|=\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}|a_n|+\sum\limits_{n=1}^{n_0-1}|a_n|$ y por lo tanto $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Ahora supongamos que $a_n>0$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $r>1$; entonces, dado $\epsilon=r-1$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para cada $n\geq n_0$, $\left|\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|-r\right|<\epsilon$, es decir, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$. Pero entonces, para cada $n\geq n_0$, $\quad 1-1\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n)}\right)\leq 0$ y del criterio de Kummer con $c_n=1$ se sigue que $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}a_n$ es divergente, y por lo tanto $\sum a_n$ es divergente también.

Finalmente, notamos que las series $\sum\dfrac{1}{n}$ y $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ tienen $\lim\left\{\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}=1$, pero el primero diverge y la segunda converge. □

Teorema 3.1.5. *(El criterio de la raiz). Sea* $\sum a_n$ *una serie y suponga que* $\lim\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ *existe y es igual a* r*. La serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente si* $r<1$ *y diverge si* $r>1$*. (Si* $r=1$*, no se puede concluir nada.)*

Demostración: Si $r<1$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$, entonces $\sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{(1+r)}{2}=s<1$ es decir, $|a_n|<s^n$. Pero, por la proposición 3.0.14, $\sum s^n$ converge y entonces por el corolario 3.1.4, $\sum|a_n|$ converge también.

Por otro lado, si $\sum a_n$ converge, entonces por el lema 3.0.15, $\lim\{a_n\}=0$ y por lo tanto, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n|<1$, lo cual implica que $\sqrt[n]{|a_n|}<1$ para cada $n\geq n_0$. Por lo tanto $\lim\{\sqrt[n]{|a_n|}\}\leq 1$ (si existe). Así hemos demostrado que si $\lim\{\sqrt[n]{|a_n|}\}>1$, $\sum a_n$ no converge. □

Tanto el corolario 3.1.4 como el teorema 3.1.5 tienen generalizaciones involucrando limsup y liminf. No vamos a ver las demostraciones de estos resultados, pero para completez, los enunciamos a continuación.

Teorema 3.1.6. *Sea $\sum a_n$ una serie de términos distintos de cero.*
(i) Si

$$\overline{\lim}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} < 1,$$

entonces la serie es absolutamente convergente.
(ii) Si

$$\underline{\lim}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} > 1,$$

entonces la serie es divergente.
(iii) Si

$$\underline{\lim}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} < 1 < \overline{\lim}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\},$$

entonces el criterio es inconcluso.

Teorema 3.1.7. *Sean $\sum a_n$ una serie y $r = \overline{\lim}\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$.*
(i) Si $r < 1$ la serie converge absolutamente,
(ii) Si $r > 1$ la serie diverge, y
(iii) Si $r = 1$ el criterio es inconcluso.

Tareas

Determinar si las siguientes series son convergentes.

(a) $\sum \frac{1}{n!}$,

(b) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) La serie $\sum a_n$ donde $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ y $a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{3}$,

(d) $\sum \frac{1}{2n(2n+1)}$,

(e) $\sum \frac{n!}{10^n}$,

(f) $\sum \frac{n^2}{2^n}$,

(g) $\sum \frac{2^n}{n!}$.

(h) $\sum \frac{1}{(n\log_2(n))}$.

Capítulo 4

La topología de la recta real

En este capitulo investigaremos las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$, es decir, propiedades relacionadas con los conceptos de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.
Recordemos que (informalmente) un intervalo es *abierto* si no contiene sus puntos extremos y es *cerrado* si los contiene.
La definición de conjuntos abiertos y cerrados es una generalización de la idea de un intervalo abierto y un intervalo cerrado.

Definición 4.0.8. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si para cada punto $x \in A$ podemos encontrar un intervalo abierto que contiene a x y que está contenido en A. En términos matemáticos formales, A es abierto si para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq A$. Un conjunto A es cerrado si $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto.*

NOTA: Hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son ni abiertos ni cerrados (ver la siguiente tarea).

Tarea. Demostrar que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

Tarea. Demostrar que un intervalo abierto es abierto y un intervalo cerrado es cerrado.

Ejemplo 4.0.9. $(-\infty, x) \cup (x, \infty)$ *es abierto para cada $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto el conjunto unitario $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 4.0.10. *La unión de conjuntos abiertos es abierto y la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto. Tanto $\mathbb{R}$ como $\emptyset$ son abiertos.*

Demostración: Supongamos que $I \neq \emptyset$ y $A_i \subseteq \mathbb{R}$ es abierto para cada $i \in I$. Se requiere demostrar que $A = \bigcup\{A_i : i \in I\}$ es abierto. Con este fin, supongamos que $x \in A$; entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$. Puesto que A_j es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq A_j$. Pero entonces $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq A$, así hemos demostrado que A es abierto.

Ahora supongamos que F es un conjunto finito no vacio y A_k es abierto para cada $k \in F$. Se requiere demostrar que $A = \bigcap\{A_i : i \in F\}$ es abierto. Con este fin, supongamos que $x \in A$; puesto que $x \in A_k$ para cada $k \in F$, se sigue que para cada $k \in F$, existe $\epsilon_k > 0$ tal que $(x - \epsilon_k, x + \epsilon_k) \subseteq A_k$.

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_k : k \in F\}$; puesto que F es un conjunto finito, $\epsilon > 0$ y $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A_k$ para cada $k \in F$, es decir, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A$, así hemos demostrado que A es abierto.

Finalmente debemos demostrar que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos. Pero si $x \in \mathbb{R}$, entonces el intervalo $(x - 1, x + 1) \subseteq \mathbb{R}$, esto implica que $\mathbb{R}$ es abierto. El conjunto vacío $\emptyset$ cumple con la definición de un conjunto abierto pues no hay $x \in \emptyset$. □

Una colección de subconjuntos de un conjunto X que satisfacen las condiciones descritas en el teorema 4.0.10 se llama *una topología para* X. Así es que los conjuntos abiertos forman una topología para $\mathbb{R}$.

Corolario 4.0.11. *La unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado y la intersección de conjuntos cerrados es cerrado. Tanto* $\mathbb{R}$ *como* $\emptyset$ *son cerrados.*

Demostración: Tarea (Recuerda que si $\{A_j : j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces $X \setminus \bigcup\{A_j : j \in J\} = \bigcap\{X \setminus A_j : j \in J\}$ y $X \setminus \bigcap\{A_j : j \in J\} = \bigcup\{X \setminus A_j : j \in J\}$.)

Tarea. Demostrar que cualquier conjunto finito es cerrado.

Definición 4.0.12. *Si* $A \subseteq \mathbb{R}$, *entonces se define el* interior *de* A, *escrito int*(A), *por*

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup\{U : U \quad \textit{es abierto y} \quad U \subseteq A\}.$$

Es decir, el interior de A *es la union de todos los subconjuntos abiertos de* A. *Claramente int*$(A) \subseteq A$.

Ejemplo 4.0.13. *El interior del intervalo cerrado* $[0, 1]$ *es el intervalo abierto* $(0, 1)$.
Nota que $1 \notin \operatorname{int}([0, 1])$ *pues no existe ningún* $\epsilon > 0$ *tal que* $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \subseteq [0, 1]$. *(Se puede aplicar el mismo argumento a* 0.*)*

Lema 4.0.14. *El interior de un conjunto es un conjunto abierto.*

Demostración: Por definición, el interior es una unión de conjuntos abiertos. Por el teorema 4.0.10, éste es abierto. □

Como consecuencia inmediata, tenemos que $\operatorname{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande que está contenido en A.

Definición 4.0.15. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$; se define la cerradura o clausura de A, escrito $cl(A)$ como*

$$cl(A) = \bigcap \{C : C \quad es\ cerrado\ y \quad A \subseteq C\}.$$

Es decir, la cerradura de un conjunto A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. Claramente, $cl(A) \supseteq A$.

Lema 4.0.16. *La cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado.*

Demostración: Por definición, la cerradura es la intersección de conjuntos cerrados. Por el corolario 4.0.11, éste es cerrado. □

Como consecuencia inmediata, tenemos que $\mathrm{cl}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto A.

En el siguiente teorema se describen varias propiedades de la cerradura.

Teorema 4.0.17. *a) A es cerrado si y sólo si $A = \mathrm{cl}(A)$,*
b) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$,
c) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$,
d) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$,
e) $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$.

Demostración:
a) El conjunto $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado, y por lo tanto, si $A = \mathrm{cl}(A)$, entonces A es cerrado. Inversamente, si A es cerrado, entonces A es claramente el cerrado más pequeño que contiene a A, por lo tanto $A = \mathrm{cl}(A)$.

b) Tenemos $A \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}(B)$ y este último conjunto es cerrado. Puesto que $\mathrm{cl}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A, tenemos $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$.

c) Por la parte a), si un conjunto B es cerrado, $B = \mathrm{cl}(B)$. El conjunto $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado, por lo tanto si sustituimos $B = \mathrm{cl}(A)$ obtenemos el resultado requerido.

d) Puesto que $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y $B \subseteq \mathrm{cl}(B)$, tenemos que $A \cup B \subseteq \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$, lo cual, siendo una unión finita de cerrados es cerrado. Por lo tanto, puesto que $\mathrm{cl}(A \cup B)$ es el cerrado más pequeño que contiene a $A \cup B$, tenemos

$$cl(A \cup B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B).$$

Para demostrar la contención inversa, notemos que $A \subseteq A \cup B$ y por lo tanto, de b) arriba, $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$ e igualmente $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$. Por lo tanto

$$\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B).$$

e) Tenemos $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y $B \subseteq \mathrm{cl}(B)$; por lo tanto, $A \cap B \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ y este último conjunto es cerrado. Puesto que $\mathrm{cl}(A \cap B)$ es el cerrado más pequeño que contiene a $A \cap B$ tenemos $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$. □

Notemos que en general, no tenemos igualdad en e) pues si $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$ entonces $\mathrm{cl}(A \cap B) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ pero $\mathrm{cl}(A) = [0,1]$ y $\mathrm{cl}(B) = [1,2]$ y por lo tanto $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) = \{1\}$.

El interior tiene propiedades análogas:

Teorema 4.0.18. *a) A es abierto si y sólo si $A = \mathrm{int}(A)$,*
b) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$,
c) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$,
d) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$,
e) $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.

Tarea. Demostrar el teorema 4.0.18.

Vamos a necesitar otra caracterización de la cerradura de un conjunto, pero primero hacemos las siguientes definiciones:

Definición 4.0.19. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in A$; se dice que A es una vecindad de x si $x \in \mathrm{int}(A)$.*

Ejemplo 4.0.20. *El intervalo cerrado $[0,1]$ es una vecindad de cada $x \in (0,1)$, pero no es una vecindad de 0 ni de 1.*

Tarea. Demostrar que si $x \neq y$, entonces existen vecindades ajenas de x y y respectivamente.

Teorema 4.0.21. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si para cada sucesión $f : \mathbb{N} \to A$ y cada punto de acumulación x de la sucesión f, tenemos $x \in A$. (Es decir, un conjunto A es cerrado si y sólo si contiene todos los puntos de acumulación - si los hay - de todas las sucesiones en A.)*

Demostración: Supongamos primero que A es cerrado y sea $\{x_n\}$ una sucesión en A con punto de acumulación x. Demostraremos que $x \in A$. Supongamos que no; entonces $x \in \mathbb{R} \setminus A$ y este último conjunto es abierto. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Pero, por ser x un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$, la sucesión $\{x_n\}$ está frecuentemente en $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, lo cual es una contradicción, pues $x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Inversamente, supongamos que A no es cerrado, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ no es abierto y por lo tanto, existe $x \in \mathbb{R} \setminus A$ tal que para cada $\delta > 0$, $\quad (x - \delta, x + \delta) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus A$, es decir, $(x - \delta, x + \delta) \cap A \neq \emptyset$. En particular, $A \cap (x - 1, x + 1) \neq \emptyset$ y podemos escoger $x_1 \in A \cap (x - 1, x + 1)$; también, $A \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \neq \emptyset$ y escogemos $x_2 \in A \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$. Procediendo así, obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in A$ y $|x - x_n| < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos que $\{x_n\} \to x$ y por lo tanto, $x \notin A$ es punto de acumulación de una sucesión en A. Con este fin, sea $\epsilon > 0$ y escogamos $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$; si $n \geq n_0$, entonces $|x - x_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ y la demostración está concluida. □

Por el teorema 2.2.10, un punto x es punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}$ si y sólo si existe una subsucesión convergente a x. Este resultado nos permite deducir el siguiente corolario.

Corolario 4.0.22. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si cada sucesión en A que tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión que converge en A.*

Demostración: Supongamos que cada sucesión $\{x_n\}$ en A con punto de acumulación en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión que converge en A. El límite de tal subsucesión es punto de acumulación de $\{x_n\}$ y por el teorema 4.0.21, A es cerrado.

Inversamente, Si A es cerrado y $\{x_n\}$ es una sucesión en A con punto de acumulación x. Por el teorema 2.2.10, existe una subsucesión convergente a x. □

4.1 Compacidad

Uno de los conceptos más importantes en todas las ramas de análisis matemático es él de compacidad.

Definición 4.1.1. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si cualquier sucesión $\{x_n\}$ en A tiene un punto de acumulación en A.*

En muchos aspectos conjuntos compactos se comportan como conjuntos finitos.

Tarea. Demostrar que cualquier conjunto finito es compacto.

Proposición 4.1.2. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si cada sucesión en A tiene una subsucesión convergente (a un punto de A).*

Demostración: Tarea.

El teorema 4.0.21 nos permite deducir el siguiente resultado inmediatemente.

Teorema 4.1.3. *Un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ es cerrado.*

Teorema 4.1.4. *Un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ es acotado.*

Demostración: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado, digamos superiormente; demostraremos que A no es compacto. Puesto que 1 no es cota superior de A, podemos escojer $a_1 \in A$ tal que $a_1 > 1$. Puesto que 2 no son cotas superiores de A podemos escojer $a_2 \in A$ tal que $a_2 > 2$. Inductivamente escojemos $a_n \in A$ tal que $a_n > n$. Demostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ no tiene punto de acumulación. Supongamos al contrario que a es un punto de acumulación de $\{a_n\}$; por la propiedad Arquimedeana de los números reales, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > a+1$. Entonces, si $n \geq n_0$, $|a_n - a| \geq |n-a| \geq |n_0 - a| > 1$, así hemos demostrado que $\{a_n\}$ no está frecuentemente en el intervalo $(a-1, a+1)$. $\square$

Tarea. Demostrar que si A no es acotado inferiormente, entonces A no es compacto.

Resulta que ser acotado y cerrado caracteriza a los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Este teorema es el más importante en esta sección, pero primero necesitamos un lema.

Lema 4.1.5. *Un subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto.*

Demostración: Supongamos que C es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $A \subseteq C$ es cerrado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en A. Puesto que $\{x_n\}$ es una sucesión en el conjunto compacto C, $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación x en C. Por ser cerrado A, se sigue del teorema 4.0.21 que $x \in A$, y por lo tanto A es compacto. $\square$

Teorema 4.1.6. *(Teorema de Heine-Borel) Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración: Ya hemos demostrado la necesidad en los teoremas 4.1.3 y 4.1.4. Inversamente supongamos que A es cerrado y acotado. Entonces existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $A \subseteq [a,b]$ y por el lema 4.1.5, basta demostrar que $[a,b]$ es compacto. Con este fin, supongamos que $f = \{x_n\}$ es una sucesión en $[a,b]$; demostraremos que la sucesión tiene un punto de acumulación en $[a,b]$. Si el rango de f es finito, entonces un número infinito de términos de la sucesión tienen el mismo valor, digamos x, y claramente x es punto de acumulación de la sucesión y $x \in [a,b]$. Ahora supongamos que el rango de f es infinito, es decir hay un número infinito de diferentes términos de la sucesión $\{x_n\}$.

Dividimos el intervalo $I_0 = [a,b]$ en dos subintervalos iguales, cada uno de longitud $\dfrac{(b-a)}{2}$,

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Puesto que hay un número infinito de diferentes términos de la sucesión $\{x_n\}$, uno de estos intervalos contiene un número infinito de términos distintos de la sucesión $\{x_n\}$, digamos

$$I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right].$$

En su turno, dividimos I_1 en dos subintervalos iguales, cada uno de longitud $\dfrac{(a-b)}{4}$, uno de los cuales, digamos I_2, contiene un número infinito de términos distintos de la sucesión $\{x_n\}$.

Procediendo así, obtenemos una familia $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subintervalos cerrados de $[a,b]$ de tal manera que

(i) $I_{n+1} \subseteq I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y

(ii) Cada intervalo I_n contiene un número infinito de términos distintos de la sucesión $\{x_n\}$, y

(iii) La longitud de I_n es $\dfrac{(b-a)}{2^n}$.

Supongamos que $I_n = [a_n, b_n]$, donde, claramente $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente (por b) y por lo tanto tiene supremo, digamos x. Igualmente, el conjunto $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado inferiormente (por a) y por lo tanto tiene ínfimo, digamos y. Puesto que $a_n \leq x \leq y \leq b_n$, se sigue que $[x,y] \subseteq I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, la longitud del intervalo $[x,y]$ es menor o igual a la longitud de todos los intervalos I_n, es decir es menor que $\dfrac{(b-a)}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $\left\{\dfrac{(b-a)}{2^n}\right\} \to 0$, por lo tanto la longitud del intervalo $[x,y]$ es 0, es decir $x = y$.

Demostraremos que x es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$. Sea $\epsilon > 0$ y consideramos el intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. Puesto que $\left\{\dfrac{(b-a)}{2^n}\right\} \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\{\dfrac{(b-a)}{2^n}\right\} < \epsilon$ y por lo tanto, $x \in I_n \subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Pero hay un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ en I_n y por lo tanto en $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ también. Así hemos demostrado que x es punto de acumulación de $\{x_n\}$ en $[a,b]$. $\square$

Ahora vamos a caracterizar los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ de otra manera. Primero necesitamos una definición.

Definición 4.1.7. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$; se dice que x es un punto de acumulación del conjunto A si cada vecindad de x contiene puntos de A distintos de x. El conjunto de puntos de acumulación de A se llama el conjunto derivado de A y se escribe A^d. Un punto de A que no es punto de acumulación de A se llama un punto aislado de A.*

Tarea. Demostrar que si x es un punto de acumulación de A y $A \subseteq B$, entonces x es punto de acumulación de B también, es decir, si $A \subseteq B$, entonces $A^d \subseteq B^d$.

Tarea. Determinar los conjuntos $\mathbb{Q}^d$ y $\mathbb{N}^d$.

Tarea. Demostrar que si $s = \inf(A)$, entonces $s = \inf(\mathrm{cl}(A))$.

Tarea. Demostrar que si A es abierto, entonces $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A) \setminus A) = \emptyset$.

Tarea. Demostrar que $x \in \mathrm{cl}(A)$ si y sólo si cada vecindad de x intersecta a A.

Lema 4.1.8. *Para cualquier* $A \subseteq \mathbb{R}$*, tenemos* $\mathrm{cl}(A) = A \cup A^d$.

Demostración: Puesto que $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$, para demostrar que $A \cup A^d \subseteq \mathrm{cl}(A)$ solo tenemos que probar que $A^d \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Con este fin, supongamos que $x \notin \mathrm{cl}(A)$; entonces existe un subconjunto cerrado $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \subseteq C$ pero $x \notin C$. Se sigue que $\mathbb{R} \setminus C$ es un conjunto abierto que contiene a x (es decir, $\mathbb{R} \setminus C$ es una vecindad de x) pero no intersecta a A. Por lo tanto, x no es un punto de acumulación de A.

Inversamente, debemos demostrar que $\mathrm{cl}(A) \subseteq A \cup A^d$. Basta demostrar que si $x \in \mathrm{cl}(A)$ pero $x \notin A$, entonces $x \in A^d$. Pero si $x \notin A^d$, entonces existe una vecindad V de x que no contiene puntos de A diferentes de x y puesto que $x \notin A$, $V \cap A = \emptyset$. Entonces $X \setminus V$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ que contiene a A pero no a x. Se sigue que $x \notin \mathrm{cl}(A)$. □

Corolario 4.1.9. *Un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *es cerrado si y sólo si* $A^d \subseteq A$.

Demostración: Si A es cerrado, entonces, por el teorema 4.0.17 a), $A = \mathrm{cl}(A) = A \cup A^d$ y por lo tanto $A^d \subseteq A$.

Inversamente, si $A^d \subseteq A$, entonces $\mathrm{cl}(A) = A \cup A^d = A$ y se sigue otra vez del teorema 4.0.17 a) que A es cerrado. □

Lema 4.1.10. *Cada conjunto infinito contiene un subconjunto numerablemente infinito, es decir, un subconjunto en correspondencia biunívoca con* $\mathbb{N}$.

Demostración: Sea A un conjunto infinito y escogamos $x_1 \in A$. Puesto que A es infinito, $A \setminus \{x_1\}$ es infinito y podemos escoger $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Al haber escogido $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$, puesto que A es infinito, $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es infinito y podemos escoger $x_{n+1} \in A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, etc. Al proceder así, construimos el subconjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ cuyos elementos están en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$. □

Teorema 4.1.11. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si cada subconjunto infinito de* A *tiene un punto de acumulación en* A.

Demostración: Supongamos que A es compacto y D es un subconjunto infinito de A. Por el lema anterior, existe un subconjunto numerablemente infinito $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$. Puesto que A es compacto, la sucesión $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación $x \in A$. Si V es una vecindad de x, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq V$ y $\{x_n\}$ esta frecuentemente en $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ y por lo tanto, frecuentemente en V. Pero esto implica que un número infinito de los términos de la sucesión $\{x_n\}$ están en V y puesto que los x_n son todos distintos, V contiene a puntos de D distintos de x, es decir, $x \in A$ es un punto de acumulación de D.

Inversamente, supongamos que A tiene la propiedad de que cada subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A. Demostraremos que A es compacto. Con este fin, sea $f = \{x_n\}$ una sucesión en A. Si el rango de f es finito, entonces un número infinito de los términos tienen el mismo valor, digamos $\{n : x_n = r\}$ es infinito y claramente, r es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$. Por otro lado, si el rango de f, $R(f)$ es infinito, entonces ponemos $z_1 = x_1$. Puesto que $R(f)$ es infinito, existe $x_{m_2} \in R(f)$ tal que m_2 es el entero más pequeño tal que $x_{m_2} \neq x_1$ y ponemos $z_2 = x_{m_2}$. Al haber definido distintos $\{z_1 = x_1, z_2 = x_{m_2}, \ldots, z_n = x_{m_n}\} \subseteq R(f)$, puesto que $R(f)$ es infinito, existe $m_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $m_{n+1} > \max\{1, m_2, \ldots, m_n\}$ y $x_{m_{n+1}} \notin \{z_1 = x_1, z_2 = x_{m_2}, \ldots, z_n = x_{m_n}\}$. Al continuar este proceso construimos una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ con la propiedad de que todos los términos z_n son distintos. Ahora consideremos el *conjunto* $C = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$; C es infinito y por lo tanto, por hipótesis, tiene un punto de acumulación $x \in A$. Es decir, hay un número infinito de z_n's en cada vecindad de x. Pero esto implica que la *sucesión* $\{z_n\}$ es frecuentemente en cada vecindad de x, es decir, x es un punto de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ y por lo tanto de la sucesión $\{x_n\}$. Así es que A es compacto. $\square$

Hay otra caracterización de compacidad que nos será útil en lo sucesivo. Necesitamos unas definiciones.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$; una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llama una *cubierta* de A si $A \subseteq \cup\mathcal{F}$.

Una cubierta $\mathcal{F}$ se llama *abierta* si los elementos de $\mathcal{F}$ (que son subconjuntos de $\mathbb{R}$) son conjuntos abiertos.

Una cubierta $\mathcal{G}$ es una *subcubierta* de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, es decir, si todo elemento de $\mathcal{G}$ es también un elemento de $\mathcal{F}$.

Ahora podemos dar la nueva caracterización de compacidad - muchos textos usan ésta como la *definición* de compacidad - omitimos la demostración.

Teorema 4.1.12. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si cada cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita (es decir, una subcubierta que tiene un número finito de elementos).*

4.2 Conexidad

Otro concepto topológico muy importante es él de conexidad.

Primero se requiere "relativizar" la idea de un conjunto abierto.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$; se dice que $U \subseteq A$ es *abierto en* A o *abierto relativo* a A, si $U = A \cap V$ donde V es abierto en $\mathbb{R}$.

Tarea Sea τ_A la colección de todos los conjuntos abiertos relativos a A, es decir $\tau_A = \{U : U = A \cap V$ tal que V es abierto en $\mathbb{R}\}$. Demostrar que τ_A está cerrado bajo uniones e intersecciones finitas y que $\emptyset, A \in \tau_A$.

Definición 4.2.1. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si no es la unión de dos subconjuntos relativamente abiertos, mutuamente ajenos y no vacios.*
Un conjunto es disconexo *si no es conexo.*

Ejemplo 4.2.2. *El conjunto $A = [0,1] \cup [4,5)$ no es conexo.*

Demostración: Notemos primero que $[0,1]$ es relativamente abierto en A pues $[0,1] = A \cap (-2,3)$ (por ejemplo) y $(-2,3)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Igualmente, $[4,5)$ es relativamente abierto en A pues $[4,5) = A \cap (3,6)$ y $(3,6)$ es abierto en $\mathbb{R}$.
Por lo tanto, A es la unión de dos conjuntos relativamente abiertos y mutuamente ajenos y no vacios $[0,1]$ y $[4,5)$. $\square$

A continuación veremos que los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son precisamente los intervalos.

Teorema 4.2.3. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración: Supongamos primero que A no es un intervalo. Entonces existen $a < b < c$ tales que $a, c \in A, \quad b \notin A$.
Puesto que $b \notin A$, se sigue que A es la unión de los dos conjuntos ajenos y relativamente abiertos, $[A \cap (\infty, b)] \cup [A \cap (b, \infty)]$.
Además, puesto que $a \in A \cap (\infty, b)$ y $c \in A \cap (b, \infty)$, estos conjuntos no son vacios. Se sigue que A es disconexo.

Inversamente, supongamos que A es un intervalo, digamos $A = [a,b]$ y que A no es conexo. Entonces existen conjuntos mutuamente ajenos, no vacios y relativamente abiertos S, T tales que $S \cup T = A$; asumimos que $b \in T$. Puesto que S y T son relativamente abiertos, existen U, V abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $U \cap A = S$ y $V \cap A = T$. El conjunto S está acotado superiormente (por b) y por lo tanto tiene supremo; sea $s = \sup(S)$, obviamente, $a \leq s \leq b$, y por lo tanto $s \in A$. Notemos que $s \neq a$ (¿Por qué?)
Hay dos posibilidades,
i) $s \in S$
ii) $s \in T$.

i) Si $s \in S$, entonces $s < b$ y puesto que U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq U$ y sin pérdida de generalidad asumimos que $\epsilon < b - s$, es decir, $s + \epsilon < b$; por lo tanto $[s, s + \epsilon) \subseteq A \cap U = S$. Entonces $s + \dfrac{\epsilon}{2} \in S$ lo cual contradice que s es el supremo de S.

ii) Si $s \in T$, puesto que V es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq V$ y otra vez sin pérdida de generalidad asumimos que $\epsilon < s - a$, es decir, $a < s - \epsilon$; por lo tanto $(s - \epsilon, s] \subseteq A \cap V = T$. Entonces $s - \dfrac{\epsilon}{2}$ es una cota superior de S, lo cual contradice que s es el supremo de S.

$\square$

Tarea. Probar que $s \neq a$ en la demostración anterior.

El concepto de conexidad será de gran utilidad en la demostración de algunos teoremas relacionados con funciones continuas y la integral de Riemann.

Capítulo 5

Funciones continuas

En este capitulo investigaremos el concepto de continuidad de una función
$f : A \to B$, donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica consiste de una sola pieza, no tiene huecos ni saltos. Por supuesto esta definición no nos sirve (no hemos definido las palabras "hueco, salto y pieza") y tenemos que buscar una definición formal y rigurosa.

La idea tras el concepto de continuidad de una función f en un punto x_0 es la siguiente:

Si x es cualquier punto en el dominio de f "cerca" de x_0 entonces $f(x)$ está cerca de $f(x_0)$.

Otra vez tenemos un problema, pues no hemos definido la palabra "cerca". La solución es extender el concepto de límite de una sucesión (la cual es una función) a funciones generales, para después definir continuidad.

La idea fundamental de límite de una sucesión $f = \{x_n\}$ es:
Podemos hacer que $f(n) = x_n$ está dentro de ϵ de x si hacemos n suficientemente grande.

La idea de límite de una función f en x_0 es muy semejante:
Podemos hacer que $f(x)$ está dentro de ϵ de un número L si hacemos x suficientemente cerca de (pero no igual a) x_0.

Definición 5.0.4. *Sea $f : A \to B$ una función con dominio A y codominio B ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) y $x_0 \in A^d$. Se dice que el límite de f en x_0 es L si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Escribimos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.*

Es decir, $f(x)$ y L yacen dentro de ϵ si x y x_0 yacen dentro de δ, uno del otro.

Es importante notar lo siguiente:
El valor del límite en x_0 no depende del valor de $f(x_0)$, de hecho es perfectamente posible que $x_0 \notin A$ y por lo tanto $f(x_0)$ no está definido. Lo que importa es el comportamiento de f cerca de x_0 y por eso, es preciso que en el entorno de x_0 existan otros puntos de A, es decir, x_0 debe ser un punto de acumulación de A. En la mayoría de los ejemplos y aplicaciones, A será un intervalo (abierto o cerrado) o todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto A^d será un intervalo cerrado o todo $\mathbb{R}$. (Recuerde que si $A = (a,b)$ o $[a,b]$) entonces $A^d = [a,b]$.) Otro punto importante es que son los valores pequeños de ϵ que son determinantes en el cálculo del límite - obviamente si ϵ es grande será relativamente más fácil encontrar el valor de δ. Por eso, sin perder generalidad, podemos asumir que $\epsilon < 1$.

Ejemplo 5.0.5. *Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$; calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$.*

Cuando x se acerca a 0, obviamente $3x$ también se acerca a 0 y eso nos hace pensar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 1 = 1$. Nota que $f(0)$ no está definida pues 0 no está en el dominio de f. Ahora probamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Sea $\epsilon > 0$; queremos encontrar un valor de δ para que $|f(x) - 1| < \epsilon$ si $|x - 0| < \delta$. Pero claramante, $|(3x + 1) - 1| = |3x| = 3|x|$ y por lo tanto si $|x| < \frac{\epsilon}{3}$, entonces $|f(x) - 1| = 3|x| < \epsilon$. Por eso, tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, y así concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 5.0.6. *Sea la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & si \quad x \neq 1 \\ 0 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

Encontrar $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Cuando x se acerca a 1, $1 - 2x$ se acerca a -1 y eso nos hace pensar que el $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$ **(a pesar de que $f(1) = 0$)** *Ahora lo probamos.*

Sea $\epsilon > 0$; si $x \neq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - (-1)| &= |f(x) + 1| = |1 - 2x + 1| = |2 - 2x| \\ &= 2|1 - x| \end{aligned}$$

Por lo tanto si hacemos $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$, tendremos $|f(x) - (-1)| = 2|1 - x| < \epsilon$. Por eso, eligimos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ y entonces, si $0 < |x - 1| < \delta$, sucede que

$$|f(x) - (-1)| < \epsilon.$$

$\square$

En los ejemplos anteriores, las funciones bajo estudio fueron lineales y la elección de δ resulto ser un simple múltiplo de ϵ. No siempre es tan fácil.

Ejemplo 5.0.7. *Si la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está dada por* $f(x) = x^2$ *entonces* $\lim_{x\to a} f(x) = a^2$ *para cada* $a \in \mathbb{R}$.

Demostración: *Sea* $\epsilon > 0$ *y sin perder generalidad, asumimos que* $\epsilon < 1$*; se requiere obtener* $\delta > 0$ *para que si* $0 < |x - a| < \delta$*, entonces* $|f(x) - a^2| < \epsilon$*. Pero*

$$|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)|.$$

Si x *está dentro de* ϵ *de* a*, entonces* $||x| - |a|| < 1$ *y por lo tanto*

$$|x + a| < |x| + |a| < 1 + |a| + |a| = 2|a| + 1$$

Por lo tanto, si $|x - a| < \epsilon$ *se sigue que*

$$|f(x) - a^2| = |(x - a)(x + a)| < |x - 1|(2|a| + 1)$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta = \dfrac{\epsilon}{(2|a| + 1)}$*, si* $0 < |x - a| < \delta$*, sucede que*

$$|f(x) - a^2| < \epsilon$$

$\square$

Nota importante: *En todos los ejemplos previos, el valor de* δ *depende del valor de* ϵ*. Esto es muy natural, si queremos que* $|f(x) - f(x_0)| < 1$ *(digamos), tendremos que elegir un cierto valor de* δ*, pero si queremos que* $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{1}{1000}$ *es natural pensar que el valor de* δ *va a ser mucho más pequeño. Es decir, el valor de* δ *siempre va a ser dependiente del valor de* ϵ *(a menos que la función* f *sea constante - TAREA).*
No obstante, hay una diferencia importante entre el ejemplo 5.0.5 y 5.0.7. En el ejemplo 5.0.5, el valor de δ *hubiera sido el mismo al calcular el límite en cualquier punto del dominio de* f*:*

Tarea. *Calcular* $\lim_{x\to 0.5}(3x + 1)$ *y* $\lim_{x\to 1}(3x + 1)$ *y verificar que la elección de* $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ *funciona en ambos casos.*

No obstante, en el ejemplo 5.0.7, el valor de δ *que elegimos* **si** *depende del punto* a *en donde estamos calculando el límite. Regresaremos a este punto más tarde.*

Después de definir el concepto de límite, es fácil ver como definir continuidad de una función f en un punto a. Para que la gráfica de f no tenga huecos o saltos, es preciso que el valor de f en el punto a sea igual al límite en ese punto. Es decir:

Definición 5.0.8. *Una función $f : A \to B$ es continua en $a \in A \cap A^d$ si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Nota: Para que $f(a)$ esté definido se requiere que $a \in A$ y para que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ esté definido, se requiere que $x \in A^d$. De ahí el requisito de que $a \in A \cap A^d$.

Definición 5.0.9. *Una función $f : A \to B$ es continua si es continua en cada $a \in A$.*

Proposición 5.0.10. *Una función $f : A \to B$ es continua en $a \in A \cap A^d$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

Demostración: Esta es una consecuencia inmediata de la definición de límite. (Nota que ya no tenemos que exigir que $0 < |x - a|$ pues si $x = a$ entonces automáticamente $f(x) = f(a)$ y por lo tanto $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$.) $\square$

Es importante poder definir discontinuidad de una función en un punto a:

Una función $f : A \to B$ es *discontinua en* $a \in A \cap A^d$ si existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$ pero $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.

Teorema 5.0.11. *Una función $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in [c, d]$ si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}$ en $[c, d]$ que converge a a, tenemos $\{f(x_n)\} \to f(a)$.*

Demostración: Supongamos que f es continua en a y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $[c, d]$ convergente a a. Sea $\epsilon > 0$; puesto que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. También, puesto que $\{x_n\} \to a$, dado este $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\quad |x_n - a| < \delta$. Entonces, si $n \geq n_0$, tenemos $|x_n - a| < \delta$ y en consecuencia, $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$; es decir, $\{f(x_n)\} \to f(a)$. $\triangle$

Inversamente, supongamos que f no es continua en a. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x \in [c, d]$ tal que $|x - a| < \delta$ pero $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.

En particular, existe $x_1 \in [c, d]$ tal que $|x_1 - a| < 1$ pero $|f(x_1) - f(a)| \geq \epsilon$.

En particular, existe $x_2 \in [c, d]$ tal que $|x_2 - a| < \dfrac{1}{2}$ pero $|f(x_2) - f(a)| \geq \epsilon$.

$\vdots$

En particular, existe $x_k \in [c, d]$ tal que $|x_k - a| < \dfrac{1}{n}$ pero $|f(x_k) - f(a)| \geq \epsilon$.

Así construimos una sucesión $\{x_n\}$ en $[c, d]$ tal que $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ pero $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora es claro que $\{x_n\} \to a$ (¿Por qué?) pero $\{f(x_n)\} \not\to f(a)$ pues la sucesión $\{f(x_n)\}$ no está finalmente en el intervalo $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$. $\square$

Ahora vamos a dar una caracterización de continuidad en términos de vecindades.

Teorema 5.0.12. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$ si y sólo si $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a en A para cada vecindad V de $f(a)$ en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Supongamos que f es continua en a y sea V una vecindad de $f(a)$. Entonces $f(a) \in \operatorname{int}(V)$ y por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \subseteq V$. Por ser continua f en a, dado este ϵ, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x-a| < \delta$, $|f(x)-f(a)| : \epsilon$, es decir, $f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \subseteq V$. Por lo tanto, si $x \in U = (a-\delta, a+\delta) \cap A$, $f(x) \in V$, es decir

$$a \in U \cap A \subseteq f^{-1}[V].$$

Sólo falta notar que $U \cap A$ es una vecindad de a en A. △

Inversamente, supongamos que $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a en A para cada vecindad V de $f(a)$ en $\mathbb{R}$ y dado $\epsilon > 0$. El intervalo $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ es una vecindad de $f(a)$ y por lo tanto $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a en A, es decir, existe U abierto en $\mathbb{R}$ tal que $a \in U \cap A \subseteq f^{-1}[V]$. Entonces por ser U abierto en $\mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subseteq U$ y por lo tanto, si $x \in A$ y $|x-a| < \delta$, tenemos $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, es decir, f es continua en a. □

Corolario 5.0.13. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si $f^{-1}[V]$ es abierto en A para cada subconjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}$.*

Demostración: Tarea.

5.1 Propiedades de funciones continuas

Lema 5.1.1. *a) Si f es continua en a entonces existe una vecindad $V = (a-\delta, a+\delta)$ de a en la cual f es acotada.*

b) Si f es continua en a y $f(a) \neq 0$ entonces existe una vecindad $V = (a-\delta, a+\delta)$ de a y $s > 0$ tal que $|f(x)| > s$ para cada $x \in V$.

Demostración:

a) Tarea.
b) Supongamos que $f(a) = r > 0$; puesto que f es continua en a, dado $\epsilon = \dfrac{r}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon = \dfrac{r}{2}$, es decir, $f(x) \in \left(f(a) - \dfrac{r}{2}, f(a) + \dfrac{r}{2}\right)$. Entonces si $x \in (a-\delta, a+\delta)$, tenemos $-\dfrac{r}{2} < f(x) - f(a) < \dfrac{r}{2}$ y por lo tanto $\dfrac{r}{2} < f(x) < \dfrac{3r}{2}$ y la demostración queda

concluida con $s = \frac{r}{2} > 0$. La demostración en el caso de que $f(a) = r < 0$ es semejante (Tarea). $\square$

Teorema 5.1.2. *Sean $f, g : A \to B$ y $a \in A \cap A^d$. Si f, g son continuas en a entonces*

(i) $f + g$ es continua en a

(ii) fg es continua en a

(iii) Si $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Demostración:

(i) Tarea.

(ii) Sea $\epsilon > 0$. Supongamos que $f(a) = r$ y $g(a) = s$. Entonces aplicando el lema 5.0.12a), existe $\delta_1 > 0$ tal que g es acotado en $V_1 = (a-\delta_1, a+\delta_1)$, digamos $|g(x)| < M_1$ para cada $x \in V_1$. Además, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - f(a)| < \dfrac{\epsilon}{(M_1 + f(a))}$ y $\delta_3 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_3$, entonces $|g(x) - g(a)| < \dfrac{\epsilon}{(M_1 + f(a))}$.

Ahora, sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Entonces si $|x - a| < \delta$, tenemos

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\
&= |f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)| \\
&\leq |g(x)(f(x) - f(a))| + |f(a)(g(x) - g(a))| \\
&= |g(x)||(f(x) - f(a))| + |f(a)||(g(x) - g(a)| \\
&\leq \frac{M_1\epsilon}{(M_1 + f(a))} + \frac{f(a)\epsilon}{(M_1 + f(a))} = \epsilon
\end{aligned}$$

(iii) Tarea.

5.2 Continuidad Uniforme

Como mencionamos después del ejemplo 5.0.7, en general la elección de δ en la definición de continuidad en un punto a depende no solo de ϵ pero también de a mismo. Dado ϵ, cuando existe un solo $\delta > 0$ que sirve para todos los x en el dominio A de f, se dice que f es *uniformemente continua* en A.
Formalmente,

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que solo depende de ϵ) tal que si $x, y \in A$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

En la mayoría de los casos, A será un intervalo o $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5.2.1. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x - 3$ es uniformemente continua en su dominio $\mathbb{R}$.*
Demostración: *Es fácil verificar que dado $\epsilon > 0$, si ponemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ (es decir, δ depende solamente de ϵ), entonces si $|x - y| < \delta$, tenemos*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$\square$

Ejemplo 5.2.2. *La función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0, 1]$.*

Demostración: *Verificar que si $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ (es decir, δ depende solamente de ϵ), $x, a \in [0, 1]$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|x^2 - a^2| < \epsilon$.*

Ejemplo 5.2.3. *La función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.*

Demostración: *Tarea (2 puntos) (Como vimos en el ejemplo 5.0.7, dado $\epsilon > 0$ es necesario escoger δ no mayor que (aproximadamente) $\dfrac{\epsilon}{(2|a| + 1)}$. Entonces para números reales a más y más grande debemos escoger δ más y más pequeño.)*

Teorema 5.2.4. *Una función continua en $[c, d]$ es uniformemente continua en $[c, d]$.*

Demostración:, Supongamos que f es continua en el intervalo compacto $[c, d]$. Si f no es uniformemente continua, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen $x, y \in [c, d]$ tal que $|x - y| < \delta$ pero $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.
En particular, existe $x_1, y_1 \in [c, d]$ tal que $|x_1 - y_1| < 1$ pero

$$|f(x_1) - f(y_1)| \geq \epsilon$$

En particular, existe $x_2, y_2 \in [c, d]$ tal que $|x_2 - y_2| < \dfrac{1}{2}$ pero

$$|f(x_2) - f(y_2)| \geq \epsilon$$

$\vdots$
En particular, existe $x_n, y_n \in [c, d]$ tal que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ pero

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

La sucesión $\{x_n\}$ es acotada y puesto que $[c, d]$ es compacto, tiene una subsucesión convergente, digamos $\{x_{m_n}\} \to x \in [c, d]$.

Demostraremos que la subsucesión correspondiente de $\{y_n\}$, es decir $\{y_{m_n}\}$ también converge a x.

Con este fin, sea $\gamma > 0$. Escogamos $m_j \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m_n > m_j$, $|x_{m_n} - x| < \dfrac{\gamma}{2}$. Además, escogamos $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_k > \dfrac{2}{\gamma}$; entonces, si $m_n > \max\{m_j, m_k\}$, tenemos

$$\begin{aligned} |y_{m_n} - x| &= |y_{m_n} - x_{m_n} + x_{m_n} - x| \\ &\leq |y_{m_n} - x_{m_n}| + |x_{m_n} - x| \\ &< \frac{1}{m_n} + \frac{\gamma}{2} < \frac{1}{m_k} + \frac{\gamma}{2} < \gamma \end{aligned}$$

Finalmente notamos que la convergencia de ambas sucesiones $\{x_{m_n}\}$ y $\{y_{m_n}\}$ a x y la continuidad de f implica - por el teorema 5.0.11 - que las sucesiones $\{f(x_{m_n})\} \to f(x)$ y $\{f(y_{m_n})\} \to f(x)$. Por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m_n \geq n_0$, $|f(x) - f(x_{m_n})| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $|f(x) - f(y_{m_n})| < \dfrac{\epsilon}{2}$, lo cual implica que $|f(y_{m_n}) - f(x_{m_n})| < \epsilon$. Esta contradicción concluye la demostración. □

Teorema 5.2.5. *($\imath$) Si f es continua en $[c,d]$, entonces $J = f([c,d])$ es compacto y*
($\imath\imath$) Si I es cualquier intervalo y f es continua en I entonces $J = f(I)$ es conexo.

Demostración:
($\imath$) Usamos el teorema 4.1.12. Sea $\mathcal{F}$ una cubierta abierta de J. Por el corolario 5.0.13, $\{f^{-1}[F] : F \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de $[c,d]$ y por compacidad de $[c,d]$ tiene una subcubierta finita, digamos $\mathcal{G} = \{f^{-1}[F_1], \ldots, f^{-1}[F_n]\}$.
Claramente $\{F_1, \ldots, F_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{F}$ de J. △

($\imath\imath$) Para demostrar conexidad de J, supongamos, al contrario, que J es disconexa; entonces por el teorema 4.2.3, J no es un intervalo y por lo tanto existen $a, c \in J$ y $b \notin J$ tal que $a < b < c$. Entonces, por el corolario 5.0.13, los conjuntos $f^{-1}[(-\infty, b)]$ y $f^{-1}[(b, \infty)]$ son abiertos no vacios (pues a está en el primero y c en el segundo) en I, son mutuamente ajenos y su unión es I (pues $b \notin J$). Se sigue que I no es conexo, lo cual es una contradicción. □

Corolario 5.2.6. *La imagen de un intervalo cerrado y acotado bajo una función continua es un intervalo cerrado y acotado (puede ser un intervalo trivial $[a,a] = \{a\}$).*

Corolario 5.2.7. *(Teorema del valor intermedio) Si f es continua en $I = [c,d]$, entonces si $a, b \in f(I)$ y $a < s < b$, existe $r \in [c,d]$ tal que $f(r) = s$.*

Demostración: Por el corolario 5.2.6, la imagen $f(I)$ de I bajo la función f es un intervalo, al cual pertenece tanto a como b. Por lo tanto, puesto que $a < s < b$, tenemos $s \in f(I)$ lo cual implica que existe $r \in I$ tal que $f(r) = s$. □

5.3 Límites laterales

Cuando calculamos el límite de una función en un punto x_0 consideramos valores de x en el entorno de x_0, es decir en ambos lados de x. ¿Que pasa si solo consideramos valores de x en un lado de x_0?

Definición 5.3.1. *(1) Sea* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *una función y* $a \in (c, d]$*; se define el límite lateral izquierdo de* f *en* a*,(escrito* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$*) por:*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L_1$$

si dado $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < a - x < \delta$ *entonces* $|f(x) - L_1| < \epsilon$.

(2) Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *una función y* $a \in [c, d)$*; se define el límite lateral derecho de* f *en* a*, (escrito* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$*) por:*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L_2$$

si dado $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < x - a < \delta$ *entonces* $|f(x) - L_2| < \epsilon$.

Como en el caso de límite, el valor de $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ no depende del valor de $f(a)$ pero solo depende de los valores de $f(x)$ para x en el entorno de a pero menores que a. Igualmente, el valor de $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ no depende del valor de $f(a)$ pero solo depende de los valores de $f(x)$ para x en el entorno de a pero mayores que a.

Teorema 5.3.2. *Sea* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *y* $a \in (c, d)$*; el* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe si y sólo si* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ *existen y son iguales.*

Demostración: Tarea.

Usando los límites laterales y el teorema 5.3.2, podemos definir diferentes tipos de discontinuidades.

Definición 5.3.3. *Un punto de discontinuidad* $a \in (c, d)$ *de una función* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *es un salto si* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ *existen, pero no son iguales.*

Un punto de discontinuidad $a \in (c, d)$ *de una función* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *es una discontinuidad removible si* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ *existen y son iguales, pero no son iguales a* $f(a)$.

Un punto de discontinuidad $a \in (c, d)$ *de una función* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *es una discontinuidad esencial si uno (o ambos) de los límites* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ *no existen.*

Tareas.

1) Determinar si $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ existe si $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = [\mathrm{sen}(x)]^{-1}$.

2) Definir funciones con los tres diferentes tipos de discontinuidad.

3) Demostrar que si $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ es creciente (es decir, $f(x) \leq f(y)$ si $x < y$) entonces $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ existen en todo punto $a \in (c, d)$.

4) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x = \dfrac{p}{q} \quad \text{es racional} \\ 0 & \text{si} \quad\; x \quad\; \text{es irracional} \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en cada número irracional.

5) Suponga que f es continua en $\mathbb{R}$ y $f(q) = 0$ para cada número racional q. Demostrar que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

6) (2 puntos) Sean A un conjunto acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en A. Demostrar que la imagen $f[A]$ es acotado. (Nota, ni A ni $f[A]$ tienen que ser cerrados).

Capítulo 6

La integral de Riemann

En este capitulo definiremos la integral de Riemann y obtendremos algunas de sus propiedades.

Definiciones 6.0.4. *Un conjunto P es una partición de un intervalo $[c, d]$ si*
(ı) P es finito y
(ıı) $c, d \in P$.

Si P es una partición de $[c, d]$ entonces escribiremos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y asumiremos que $c = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = d$.

La norma de una partición P, escrita $\|P\|$, se define como

$$\max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, \ldots, n-1\}.$$

Una partición P' refina una partición P si $P \subseteq P'$.

Sea f una función acotada en un intervalo compacto $[c, d]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[c, d]$.
Para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, sean $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ y $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$.

Definición 6.0.5. *La suma superior de Riemann de f relativa a la partición P es*

$$S(f, P) = \sum_{0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k),$$

y la suma inferior de Riemann de f relativa a la partición P es

$$I(f, P) = \sum_{0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k),$$

La integral superior de Riemann de f en $[c, d]$ es

$$\overline{\int_c^d} f(x)dx = \inf\{S(f, P) : P \quad \textit{es una particion de} \quad [c, d]\}$$

y la integral inferior de Riemann de f en $[c,d]$ es

$$\underline{\int_c^d} f(x)dx = \sup\{I(f,P) : P \quad \textit{es una particion de} \quad [c,d]\}.$$

Definición 6.0.6. *Decimos que la función f es Riemann integrable en $[c,d]$ si*

$$\overline{\int_c^d} f(x)dx = \underline{\int_c^d} f(x)dx$$

y en este caso el valor común se escribe

$$\int_c^d f(x)dx.$$

Nuestra primera tarea es demostrar que las integrales inferior y superior existen. Para eso, necesitamos un lema.

Lema 6.0.7. *Si $m = \inf\{f(x) : x \in [c,d]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [c,d]\}$, entonces para cada partición P de $[c,d]$ tenemos*

$$m(d-c) \leq I(f,P) \leq S(f,P) \leq M(d-c).$$

Demostración: Si $P = \{c = x_0, x_1, \dots, x_n = d\}$, entonces

$$I(f,P) = \sum_0^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

y puesto que $m \leq m_k$ para cada $k = 0, 1, \dots, n$, tenemos

$$I(f,P) \geq \sum_0^{n-1} m(x_{k+1} - x_k) = m \sum_0^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = m(d-c).$$

Es obvio que $I(f,P) \leq S(f,P)$ y solo falta la última desigualdad.
Pero

$$S(f,P) = \sum_0^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

y puesto que $M \geq M_k$ para cada $k = 0, 1, \dots, n$, tenemos

$$S(f,P) \leq \sum_0^{n-1} M(x_{k+1} - x_k) = M \sum_0^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = M(d-c).$$

$\square$

Corolario 6.0.8. *Las integrales superior e inferior existen.*

Demostración: Para cada partición P de $[c, d]$, tenemos

$$I(f, P) \leq M(d-c) \quad \text{y} \quad S(f, P) \geq m(d-c)$$

Así, se define la integral inferior (respectivamente, la integral superior) como supremo (respectivamente ínfimo) de un conjunto acotado superiormente (respectivamente, inferiormente). □

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que una función continua en $[c, d]$ es integrable en este intervalo. Necesitamos algunos resultados preliminares.

Teorema 6.0.9. *Sea f una función acotada en $[c, d]$; si una partición T refina a una partición P de $[c, d]$ entonces*

$$I(f, P) \leq I(f, T) \leq S(f, T) \leq S(f, P).$$

Demostración: Supongamos que $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ y $Q = P \cup \{z\}$ donde $x_j < z < x_{j+1}$ para algún $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ fijo. Sean, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{gathered}
M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\
m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\
M' = \sup\{f(x) : x \in [x_j, z]\}, \\
M'' = \sup\{f(x) : x \in [z, x_{j+1}]\}, \\
m' = \inf\{f(x) : x \in [x_j, z]\} \quad \text{y} \\
m'' = \inf\{f(x) : x \in [z, x_{j+1}]\}.
\end{gathered}$$

Claramente, tenemos $M'', M' \leq M_k$ y $m'', m' \geq m_k$.

Después de cancelar la mayoría de los términos, tenemos

$$\begin{aligned}
I(f, Q) - I(f, P) &= [m'(z - x_j) + m''(x_{j+1} - z)] - m_j(x_{j+1} - x_j) \\
&= [m'(z - x_j) + m''(x_{j+1} - z)] - [m_j(x_{j+1} - z) + m_j(z - x_j)] \\
&= (m' - m_j)(z - x_j) + (m'' - m_j)(x_{j+1} - z) \geq 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $I(f, P) \leq I(f, Q)$.

En forma semejante, después de cancelar la mayoría de los términos, tenemos

$$\begin{aligned}
S(f, P) - S(f, Q) &= M_j(x_{j+1} - x_j) - [M'(z - x_j) + M''(x_{j+1} - z)] \\
&= [M_j(x_{j+1} - z) + M_j(z - x_j)] - [M'(z - x_j) + M''(x_{j+1} - z)] \\
&= (M_j - M')(z - x_j) + (M_j - M'')(x_{j+1} - z) \geq 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $S(f, P) \geq S(f, Q)$.

Así hemos demostrado que $I(f, P) \leq I(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$.

Ahora supongamos que T es una partición que refina a P, digamos $T = P \cup \{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$. Definamos inductivamente

$$Q_0 = P, \quad Q_1 = Q_0 \cup \{z_0\}, \quad Q_2 = Q_1 \cup \{z_1\}, \quad \ldots, \quad Q_m = Q_{m-1} \cup \{z_m\} = T$$

Por lo que hemos demostrado,

$$I(f, P) = I(f, Q_0) \leq I(f, Q_1) \leq \cdots \leq I(f, Q_m) = I(f, T).$$

En forma semejante,

$$S(f, P) = S(f, Q_0) \geq S(f, Q_1) \geq \cdots \geq S(f, Q_m) = S(f, T),$$

y la demostración está concluida. □

Corolario 6.0.10. *Sea f una función acotada en $[c, d]$; si P y Q son particiones de $[c, d]$ entonces $I(f, P) \leq S(f, Q)$.*

Demostración: El conjunto $P \cup Q$ es una partición de $[c, d]$ que refina tanto a P como a Q. Por lo tanto, por el teorema anterior

$$I(f, P) \leq I(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q).$$

□

Teorema 6.0.11. *Una función acotada $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ es integrable de Riemann si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición Q de $[c, d]$ tal que*

$$S(f, Q) - I(f, Q) < \epsilon.$$

Demostración: Si f es integrable en $[c, d]$ entonces

$$\inf\{S(f, P) : P \text{ es una particion de } [c, d]\} = \sup\{I(f, P) : P \text{ es una particion de } [c, d]\}$$

$$= \int_c^d f(x)dx.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe una partición P_0 de $[c, d]$ tal que

$$S(f, P_0) < \int_c^d f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Igualmente, existe una partición P_1 de $[c, d]$ tal que

$$I(f, P_1) > \int_c^d f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $Q = P_0 \cup P_1$, se sigue del teorema 6.0.9 que

$$I(f, P_1) \leq I(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P_0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(f,Q)-I(f,Q) &\leq S(f,P_0)-I(f,P_1) \\ &\leq (S(f,P_0)-\int_c^d f(x)dx)+(\int_c^d f(x)dx - I(f,P_1)) \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon. \end{aligned}$$

△

Inversamente, supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe una partición Q de $[c,d]$ tal que

$$S(f,Q)-I(f,Q)<\epsilon.$$

Puesto que

$$I(f,Q) \leq \underline{\int_c^d} f(x)dx \leq \overline{\int_c^d} f(x)dx \leq S(f,Q),$$

se sigue que

$$\overline{\int_c^d} f(x)dx - \underline{\int_c^d} f(x)dx < \epsilon.$$

Pero ϵ es arbitrario y por lo tanto,

$$\overline{\int_c^d} f(x)dx = \underline{\int_c^d} f(x)dx$$

y así podemos concluir que f es integrable. □

Teorema 6.0.12. *Una función continua en $[c,d]$ es integrable de Riemann en $[c,d]$.*

Demostración: Sean f continua en $[c,d]$ y $\epsilon > 0$. Por el teorema 5.2.4, f es uniformemente continua en $[c,d]$ y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $|x-z| < \delta$ entonces $|f(x)-f(z)| < \dfrac{\epsilon}{(d-c)}$.
Sea $Q=\{c=x_0,x_1,\ldots,x_n=d\}$ una partición de $[c,d]$ con $\|Q\|<\delta$.
Si $x,z \in [x_k,x_{k+1}]$, $\quad |x-z|<\delta$ y por lo tanto $|f(x)-f(z)| < \dfrac{\epsilon}{(d-c)}$.
Por el corolario 5.2.6, la imagen del intervalo compacto $[x_k,x_{k+1}]$ bajo la función f es un intervalo compacto, digamos $[m_k,M_k]$, para cada $k=0,1,\ldots,n$.
Los puntos m_k,M_k pertenecen al rango de f, y por lo tanto existen puntos $a_k,b_k \in [x_k,x_{k+1}]$ tales que $f(a_k)=m_k$ y $f(b_k)=M_k$.
Entonces $|b_k-a_k|<\delta$ y por lo tanto $M_k-m_k<\dfrac{\epsilon}{(d-c)}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
S(f,Q)-I(f,Q) &= \sum_{0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) - \sum_{0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \\
&= \sum_{0}^{n-1} (M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k) \\
&< \left[\frac{\epsilon}{(d-c)}\right] \sum_{0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) \\
&= \left[\frac{\epsilon}{(d-c)}\right] (d-c) = \epsilon.
\end{aligned}$$

El resultado se sigue del teorema 6.0.11. □

Definición 6.0.13. *Una función es monótona si es creciente o decreciente.*

Teorema 6.0.14. *Una función monótona en $[c,d]$ es integrable de Riemann en $[c,d]$.*

Demostración: Asumimos que f es creciente en $[c,d]$. Sea $\epsilon > 0$; escojamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $(d-c)(f(d)-f(c)) < m\epsilon$ y fijemos una partición $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ de $[c,d]$ tal que $\|P\| < \dfrac{(d-c)}{m}$.
Notemos que

$$\sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = f(x_{k+1}) \quad \text{y} \quad \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = f(x_k).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
S(f,P)-I(f,P) &= \sum_{0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k) - \sum_{0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) \\
&= \sum_{0}^{n-1} (f(x_{k+1})-f(x_k))(x_{k+1}-x_k) \\
&< \frac{d-c}{m} \sum_{0}^{n-1} (f(x_{k+1})-f(x_k)) \\
&= \left(\frac{d-c}{m}\right) (f(d)-f(c)) < \epsilon.
\end{aligned}$$

El resultado se sigue del teorema 6.0.11. □

Tareas.

1. Demostrar que una función decreciente es integrable de Riemann.

2. Demostrar que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ no es integrable de Riemann en $[0,1]$.

3. Demostrar por inducción que

$$\sum_{1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

4. Sea la partición P de $[0,1]$ definida por

$$P = \left\{ 0 = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{(n-1)}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\}.$$

Calcular

a) $S(f,P)$ si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x^2$.

b) $S(g,P)$ si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = 3x + 1$.

c) Deducir el valor de $\int_0^1 f(x)dx$ y $\int_0^1 g(x)dx$. (Usar los resultados del Problema 3.)

Vamos a necesitar ciertas propiedades de la integral de Riemann; las expresamos en la forma de dos teoremas sin demostraciones:

Teorema 6.0.15. *Si f, g son integrables en $[c,d]$ y $r, s \in \mathbb{R}$, entonces $rf + sg$ es integrable en $[c,d]$ y*

$$\int_c^d (rf + sg)dx = r\int_c^d f dx + s\int_c^d g dx.$$

Así es que el conjunto de funciones integrables forma un espacio vectorial V y la integral de Riemann considerada como una función de V en $\mathbb{R}$ es lineal.

Teorema 6.0.16. *Si f es integrable en $[c,d]$ y $x \in [c,d]$, entonces f es integrable en $[c,x]$ y en $[x,d]$ y*

$$\int_c^x f dx + \int_x^d f dx = \int_c^d f dx.$$

Además de adición, existe la operación de multiplicación de funciones. Ahora demostraremos que el producto de dos funciones integrables es integrable. Para ello necesitamos tres lemas.

Lema 6.0.17. *Si f es integrable en $[c,d]$ y $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [c,d]$, entonces $\int_c^d f dx \geq 0$.*

Demostración: Si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [c,d]$, entonces $I(f,P) \geq 0$ para cualquier partición P de $[c,d]$. Por lo tanto $\underline{\int_c^d} f dx \geq 0$ y el resultado se sigue inmediatemente. $\square$

Corolario 6.0.18. *Si f, g son integrables en $[c,d]$ y $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [c,d]$, entonces*

$$\int_c^d f dx \leq \int_c^d g dx.$$

Demostración: Notemos que $(g-f)(x) \geq 0$ para cada $x \in [c,d]$ y apliquemos teoremas 6.0.15 y 6.0.17. $\square$

Lema 6.0.19. *Si f es integrable en $[c,d]$, también lo es $|f|$ y*

$$\left|\int_c^d f dx\right| \leq \int_c^d |f| dx.$$

Demostración: Sean $\epsilon > 0$ y $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ una partición de $[c,d]$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \epsilon$.
Sean

$$\begin{aligned} M_k &= \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\ m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\ M'_k &= \sup\{|f|(x) : x \in [x_j, z]\}, \\ m'_k &= \inf\{|f|(x) : x \in [x_j, z]\}. \end{aligned}$$

Es obvio que $M'_k - m'_k \leq M_k - m_k$ y por lo tanto

$$S(|f|,P) - I(|f|,P) \leq S(f,P) - I(f,P) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $|f|$ es integrable. Además, $-|f|(x) \leq f(x) \leq |f|(x)$ para cada $x \in [c,d]$ y se sigue del corolario 6.0.18 que

$$-\int_c^d |f| dx \leq \int_c^d f dx \leq \int_c^d |f| dx,$$

por lo tanto

$$\left|\int_c^d f dx\right| \leq \int_c^d |f| dx.$$

$\square$

Lema 6.0.20. *Si f es integrable en $[c,d]$, entonces también lo es f^2.*

Demostración: Supongamos que $f(x)$ es no negativa y $f(x) \leq M$ para cada $x \in [c,d]$. Sean $\epsilon > 0$ y $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ una partición de $[c,d]$ tal que $S(f,p) - I(f,P) < \dfrac{\epsilon}{2M}$. Sean

$$\begin{aligned} M_k &= \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\ m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}. \end{aligned}$$

Entonces, puesto que $f(x)$ es no negativa, si $x \in [x_k, x_{k+1}]$,
$m_k^2 = \inf\{f^2(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ y $M_k^2 = \sup\{f^2(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S(f^2, P) - I(f^2, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k^2 - m_k^2)(x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k + m_k)(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2M(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&= 2M \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&= 2M(S(f, P) - I(f, P) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f^2 es integrable en $[c, d]$.

Finalmente, si f es una función integrable en $[c, d]$ (que toma valores tanto negativos como positivos), entonces por el lema 6.0.19, $|f|$ es integrable en $[c, d]$ y por lo que ya hemos demostrado, $|f|^2$ es integrable en $[c, d]$. Pero $f^2 = |f|^2$ y el resultado queda demostrado. □

Teorema 6.0.21. *Si f y g son integrables en $[c, d]$, también lo es fg.*

Demostración: Por el teorema 6.0.15 y el lema 6.0.20, las funciones f^2, g^2 y $(f + g)^2$ son integrables en $[c, d]$.
Por el teorema 6.0.15,

$$\frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right] = fg$$

es integrable en $[c, d]$. □

6.1 La integral indefinida

Supongamos que f es una función integrable en $[c, d]$. Por el teorema 6.0.16, f es integarble en $[c, x]$ para cada $x \in [c, d]$. Por lo tanto, podemos definir una función $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_c^x f dx.$$

La función F se llama *la integral indefinida de f en [c,d].*

Teorema 6.1.1. *La integral indefinida de una función integrable f es una función (uniformemente) continua en $[c, d]$.*

Demostración: Puesto que f es integrable, f es acotada y podemos encontrar $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in [c, d]$. Sea $\epsilon > 0$ y pongamos $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$. Entonces si $|x - z| < \delta$ (y asumimos que $x < z$),

$$\begin{aligned} |F(x) - F(z)| &= \left| \int_c^z f dx - \int_c^x f dx \right| = \left| \int_x^z f dx \right| \\ &\leq \left| \int_x^z M dx \right| \leq M|z - x| < \epsilon, \end{aligned}$$

así hemos demostrado la continuidad uniforme de F. □

6.2 El Teorema del valor medio (para integrales)

Teorema 6.2.1. *Si f es continua en $[c, d]$, entonces existe $s \in [c, d]$ tal que*

$$\int_c^d f dx = f(s)(d - c).$$

Demostración: Puesto que f es continua, se sigue del teorema 5.2.5, que la imagen de $[c, d]$ bajo la función f es un intervalo compacto, digamos $[m, M]$, (así es que $m = \inf\{f(x) : x \in [c, d]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [c, d]\}$).
Por lo tanto, existen $r, t \in [c, d]$ tales que $f(r) = m$ y $f(t) = M$ (sin pérdida de generalidad, asumimos $r < t$).
Por el lema 6.0.7,

$$m(d - c) \leq \int_c^d f dx \leq M(d - c),$$

y por lo tanto existe $L \in [m, M]$ tal que $\int_c^d f dx = L(d - c)$.
Otra vez por la continuidad de f, se sigue del corolario 5.2.7, aplicado en el intervalo $[r, t]$, que existe $s \in [r, t]$ tal que $f(s) = L$ y el resultado queda demostrado. □

Tareas: 1) Sean f y g funciones integrables en $[c, d]$. Si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [c, d]$, demuestre que existe $L \in [m, M]$ tal que

$$\int_c^d fg dx = L \int_c^d g dx.$$

2) Sean f continua en $[c, d]$ y g integrable y no negativa en $[c, d]$; demuestre que entonces existe $s \in [c, d]$ tal que

$$\int_c^d fg dx = f(s) \int_c^d g dx.$$

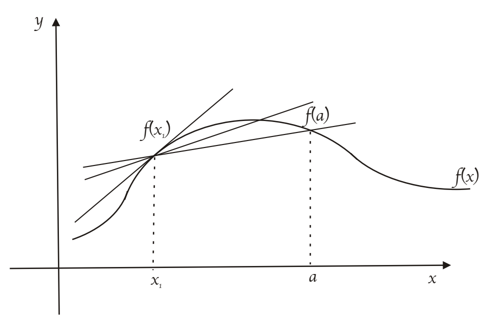
Capítulo 7

La Derivada

Nuestro objetivo en este capitulo es una definición formal de la derivada y su interpretación.

Todos sabemos la diferencia entre una secante y una tangente a una curva, por ejemplo una circunferencia, y es fácil definir la primera. Pero ¿Como se define la tangente?

Supongamos ahora que f es una función definida en un intervalo (c, d). Para definir la tangente en el punto $(a, f(a))$ donde $a \in (c, d)$, la consideramos como el límite de las secantes que unen $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ cuando $x \to a$.



Para determinar la recta tangente en $(a, f(a))$, debemos además especificar su pendiente, la cual va a ser el límite de las pendientes de las secantes.
La secante a la curva $y = f(x)$ que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene ecuación

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

y es fácil calcular que esta recta tiene pendiente

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Si x es un punto arbitrario del dominio de f, entonces la secante que une los puntos de la curva $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ tiene pendiente

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

y tomando el límite cuando $x \to a$ obtenemos la pendiente de la tangente a la curva en $(a, f(a))$:

$$\text{Pendiente de la tangente} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Nota: Es imprescindible el uso de límites: Si simplemente sustituimos $x = a$ en la expresión para la pendiente de la secante, obtenemos la expresión $\frac{0}{0}$, la cual no tiene sentido.

Definición 7.0.2. *Sea f una función definida en (c, d) y $a \in (c, d)$. Si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

existe, se dice que f es diferenciable *en a y el valor del límite se llama la* derivada *de f en a, escrita $f'(a)$, $Df(a)$ o $\dfrac{df}{dx(a)}$.*

A veces es conveniente escribir $x = a + h$ y en vez de tomar el límite cuando $x \to a$, tomamos el límite cuando $h \to 0$. En ese caso, tenemos

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si f es diferenciable en cada punto de un intervalo (c, d), entonces podemos calcular la derivada en cualquier punto arbitrario x de (c, d):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

y esto define una nueva *función* $f' : (c, d) \to \mathbb{R}$, la *primera derivada de* f.

Ejemplo 7.0.3. *La derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ está dada por*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.
\end{aligned}$$

□

Tarea 7.0.4. *Demostrar que si se define* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por* $f(x) = kx \quad (k \in \mathbb{R})$*, entonces* $f'(x) = k$.

Teorema 7.0.5. *Si* $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $a \in (c, d)$*, entonces* f *es continua en* a.

Demostración: Si f es diferenciable en a, entonces

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] &= \lim_{h\to 0} \frac{h(f(a+h) - f(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(a) \times 0 = 0.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a),$$

es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

así hemos demostrado que f es continua en a. □

7.1 Propiedades básicas de la derivada

El cálculo de la derivada usando la definición puede involucrar mucho trabajo. A continuación, vamos a desarrollar unas fórmulas que simplifican el trabajo.

Teorema 7.1.1. *Sean* f *y* g *funciones diferenciables en* (c, d)*. Entonces,*

(a) $f + g$ *es diferenciable en* (c, d) *y*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

(b) fg *es diferenciable en* (c, d) *y*

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

(c) Si $g(x) \neq 0$*, entonces* $\frac{1}{g}$ *es diferenciable en* x *y*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2},$$

(d) Si $g(x) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en x y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Demostración:
(a) Tarea. $\triangle$

(b)

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x),
\end{aligned}$$

puesto que el teorema 7.0.5 implica que f es continua en (c, d) y por lo tanto, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. $\triangle$

(c) Si $g(x) \neq 0$, entonces por el teorema 5.1.1 (b), podemos encontrar una vecindad $V = (x - \delta, x + \delta)$ de x tal que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in V$.
Ahora, si $|h| < \delta$, se sigue que $g(x+h) \neq 0$ y tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= -g'(x) \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)}.
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que g es diferenciable en x, es también continua en x; puesto que $g(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ es continua en x. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g(x)^2}$$

y tenemos,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

△

d) Aplicando (b) y (c) tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\
&= f'(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x) + f(x)\left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right)\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \\
&= \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 7.1.2. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $f(x) = x^n$, *entonces* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Demostración: Lo probaremos por inducción.
El resultado es cierto para $n = 1$ (Tarea 7.0.4) y suponemos que es cierto para $n = k$. Entonces si $n = k+1, f(x) = x^{k+1} = x.x^k$. Aplicando (b), tenemos

$$f'(x) = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k,$$

es decir, la fórmula vale también para $n = k+1$. □

Tarea 7.1.3. *Demostrar que si* $-n \in \mathbb{N}$ *y* $f(x) = x^n$, *entonces* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Teorema 7.1.4. *(La Regla de la Cadena) Sean* f *una función diferenciable en* $(c,d), x \in (c,d)$ *y* g *una función cuyo dominio incluye el rango de* f *y diferenciable en* $f(x)$.
Entonces la función compuesta $\phi = g \circ f$ *es diferenciable en* x *y*

$$\phi'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demostración: Consideremos la función s definida por

$$s(x+h) = \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) & \text{si} \quad h \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad h = 0. \end{cases}$$

Puesto que f es diferenciable en x, se sigue que $\lim_{h \to 0} s(x+h) = 0 = s(x)$ y por lo tanto, s es continua en x. Nota que para todos los valores de h tenemos

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + s(x+h)].$$

En forma semejante, si $y = f(x)$ y definimos la función t por

$$t(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z) - g(y)}{z - y} - g'(y) & \text{si} \quad z \neq \\ \quad 0 & \text{si} \quad z = y. \end{cases},$$

entonces t es continua en $y = f(x)$ y para todos los valores de z tenemos,

$$g(z) - g(y) = (z - y)[g'(y) + t(z)].$$

Además, puesto que f es diferenciable en x, es continua en este punto también y por lo tanto $t \circ f$ es continua en x. Entonces,

$$\lim_{h \to 0} (t \circ f)(x + h) = (t \circ f)(x) = t(f(x)) = t(y) = 0.$$

Sustituyendo $z = f(x + h)$ y $y = f(x)$, tenemos,

$$\begin{aligned} \phi(x + h) - \phi(x) &= (g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x) = g(f(x + h)) - g(f(x)) \\ &= g(z) - g(y) = (f(x + h) - f(x))[g'(f(x)) + t(f(x + h))] \\ &= h[f'(x) + s(x + h)][g'(f(x)) + t(f(x + h))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = [f'(x) + s(x + h)][g'(f(x)) + t(f(x + h))]$$

y puesto que

$$\lim_{h \to 0} (t(f(x + h)) = t(f(x)) = t(y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} s(x + h) = 0$$

se sigue inmediatemente que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = f'(x)g'(f(x)).$$

$\square$

Sea $f : A \to B$ una función uno a uno y suprayectiva, es decir, una biyección entre A y B. Si se define $f^{-1} : B \to A$ por $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, entonces f^{-1} es una función y claramente $(f^{-1} \circ f)(x) = x = (f \circ f^{-1})(x)$.
f^{-1} se llama la *función inversa de* f.

Tarea 7.1.5. *Una función $f : (c, d) \to \mathbb{R}$, que es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (c, d) es uno a uno y por lo tanto es una biyección entre (c, d) y $f[(c, d)]$.*
Demostrar el siguiente inverso parcial: Si $f : (c, d) \to B$ es una biyección continua, entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (c, d). (2 puntos)

Lema 7.1.6. *Si $f : (c,d) \to B$ es una biyección continua y estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) en (c,d), entonces $f^{-1} : B \to (c,d)$ es continua también.*

Demostración: Sea $x \in (c,d)$ y escojamos $\epsilon > 0$ tal que $[x-\epsilon, x+\epsilon] \subseteq (c,d)$. Entonces $f(x-\epsilon) < f(x) < f(x+\epsilon)$ y $f[[x-\epsilon, x+\epsilon]] \subseteq [f(x-\epsilon), f(x+\epsilon)]$. Puesto que f es continua, la imagen del intervalo $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ bajo la función continua f es conexo, y por lo tanto tiene que ser $[f(x-\epsilon), f(x+\epsilon)]$.
Puesto que f es una biyección, se sigue que la imagen del intervalo abierto $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ tiene que ser $(f(x-\epsilon), f(x+\epsilon))$.

Ahora escogemos $\delta > 0$ tal que $(f(x)-\delta, f(x)+\delta) \subseteq (f(x-\epsilon), f(x+\epsilon))$. Entonces,
si $y \in (f(x)-\delta, f(x)+\delta)$, es decir, $|y - f(x)| < \delta$, $f^{-1}(y) \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, es decir, $|f^{-1}(y) - x| < \epsilon$, así hemos demostrado la continuidad de f^{-1}. □

Teorema 7.1.7. *(El Teorema de la Función Inversa) Si $f : (c,d) \to B$ es una biyección y $f'(a)$ existe y no es igual a 0, entonces $f^{-1} : B \to (c,d)$ es diferenciable en $f(a)$ y*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostración: Notemos primero que $f^{-1} : B \to (c,d)$ existe y puesto que f es continua en el intervalo $(c,d), B$ es conexo (por lo tanto es un intervalo). Queremos averiguar que si $b = f(a)$ entonces,

$$\lim_{z \to y} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

existe y en caso afirmativo su valor.

Supongamos que $x = f^{-1}(y)$ y consideremos

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^{-1}.$$

Puesto que f es diferenciable en a y $f'(a) \neq 0$, se sigue que

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Por lo tanto, tomando en cuenta que si $y \to b$, entonces $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a$ por la continuidad de f^{-1},

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(b) &= \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{f'(a)}.
\end{aligned}$$

□

Tarea 7.1.8. *Demostrar que si* $r = \dfrac{m}{n}$ *y* $f(x) = x^r$, *entonces* $f'(x) = rx^{r-1}$.

7.2 El Teorema del Valor Medio

Definición 7.2.1. *Sea* $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ *diferenciable; se dice que* $a \in (c, d)$ *es un máximo local (respectivamente mínimo local) de* f *si existe una vecindad* V *de* a *tal que* $f(a) \geq f(x)$ *(respectivamente,* $f(a) \leq f(x)$*) para cada* $x \in V$.

Ahora vamos a demostrar que si f es diferenciable en un máximo o mínimo local a, entonces $f'(a) = 0$.

Teorema 7.2.2. *Sea* $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* $a \in (c, d)$*; si* $f'(a) > 0$ *entonces existe una vecindad* $(a - \delta, a + \delta)$ *de* a *tal que* $f(x) < f(a)$ *si* $x \in (a - \delta, a)$ *y* $f(x) > f(a)$ *si* $x \in (a, a + \delta)$.
Recíprocamente, si $f'(a) < 0$ *entonces existe una vecindad* $(a - \delta, a + \delta)$ *de* a *tal que* $f(x) > f(a)$ *si* $x \in (a - \delta, a)$ *y* $f(x) < f(a)$ *si* $x \in (a, a + \delta)$.

Demostración: Puesto que

$$\lim_{h \to 0} h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

existe una vecindad $V = (a - \delta, a + \delta)$ de a tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

para cada $x \in V$.

Por lo tanto, para cada $x \in V$, $f(x) - f(a)$ y $x - a$ deben de ser simultáneamente positivos o simultáneamente negativos. Es decir, si $x < a$ entonces $f(x) < f(a)$ y si $x > a$ entonces $f(x) > f(a)$. △

Dejamos el segundo resultado como tarea. □

Corolario 7.2.3. *Si* $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ *y* $a \in (c, d)$ *es un máximo o mínimo local de* f *y* f *es diferenciable en* a*, entonces* $f'(a) = 0$.

Demostración: Si $f'(a) \neq 0$, digamos $f'(x) > 0$ entonces existe una vecindad $V = (a - \delta, a + \delta)$ de a tal que si $x \in (a - \delta, a)$, entonces $f(x) < f(a)$ y si $x \in (a, a + \delta)$, entonces $f(x) > f(a)$. Claramente entonces, a no es un máximo local de f.

La demostración en caso de que $f(x) < 0$ es casi igual y la dejamos como ejercicio. □

En el último teorema es muy importante que a sea un punto interior del dominio de f.
Por ejemplo, si se define $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x$ entonces 0 es un mínimo local y 1 es un máximo local de f, pero $f'(0) \neq 0 \neq f'(1)$.

Notamos también que el inverso del teorema 7.2.2 es falso:
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $f(x) = x^3$, entonces f es estrictamente creciente en su dominio, pero $f'(0) = 0$.

Teorema 7.2.4. *(Teorema de Rolle) Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua en $[c, d]$ y diferenciable en (c, d) con $f(c) = f(d)$. Entonces existe $a \in (c, d)$ tal que $f'(a) = 0$.*

Demostración: Si f es constante, entonces para cada $x \in (c, d)$, $f'(x) = 0$. Si f no es constante la imagen del intervalo compacto $[c, d]$ bajo la función continua f es un intervalo compacto, digamos $[m, M]$, donde $m < M$. Entonces existen $a, b \in [c, d]$ tales que $f(a) = m$ y $f(b) = M$ y puesto que $m \neq M$, se sigue que uno de a, b es distinto de c y d, digamos $a \in (c, d)$. Por lo tanto a es un mínimo local de la función en el interior del dominio y se sigue del teorema 7.2.3 que $f'(a) = 0$. □

Corolario 7.2.5. *(Teorema del Valor Medio) Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua en $[c, d]$ y diferenciable en (c, d); existe $a \in (c, d)$ tal que*

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(a),$$

(es decir, la secante que une $(c, f(c))$ y $(d, f(d))$ es paralela a la tangente en $(a, f(a))$).

Demostración: Se define $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = [f(d) - f(c)](x - c) - [f(x) - f(c)](d - c).$$

Se puede verificar directamente que h es continua en $[c, d]$ y diferenciable en (c, d) y $h(c) = h(d) = 0$. Así es que h satisface las hipótesis del Teorema de Rolle y debe existir $a \in (c, d)$ tal que $h'(a) = 0$.
Pero,

$$h'(x) = [f(d) - f(c)] - (d - c)f'(x).$$

Por lo tanto,

$$0 = h'(a) = [f(d) - f(c)] - (d - c)f'(a)$$

es decir

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(a).$$

□

Es obvio que la derivada de una función constante es 0. El inverso, que una función cuya derivada sea 0 en un intervalo es constante, no es tan obvio. Lo demostraremos como corolario del Teorema del Valor Medio.

Teorema 7.2.6. *Si f es continua en $[c, d]$ y $f'(x) = 0$ para cada $x \in (c, d)$, entonces f es constante en $[c, d]$.*

Demostración: Sea $x \in (c, d)$; la hipótesis del corolario 7.2.5 se satisface en el intervalo $[c, x]$ y por lo tanto, existe $a \in (c, x)$ tal que

$$0 = f'(a) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Se sigue que $f(x) = f(c)$ y puesto que x es un punto arbitrario de (c, d) se sigue que f es constante en $[c, d)$. Para terminar, notemos que f es continua en d y por lo tanto, $f(d) = \lim_{x \to d} f(x) = f(c)$, es decir f es constante en $[c, d]$. □

Teorema 7.2.7. *Si f y g son continuas en $[c, d]$ y diferenciables en (c, d) y $g(c) \neq g(d)$; además, asumimos que no existe ningún punto $x \in (c, d)$ tal que $f'(x) = g'(x) = 0$. Entonces existe $a \in (c, d)$ tal que $g'(a) \neq 0$ y*

$$\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demostración: Definimos una función ϕ en $[c, d]$ por

$$\phi(x) = f(x) - f(c) - \left(\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)}\right)[g(x) - g(c)].$$

Puesto que ϕ es una combinación lineal de las funciones f y g, se sigue que ϕ es continua en $[c, d]$ y diferenciable en (c, d) y $\phi(c) = \phi(d) = 0$. Aplicando el Teorema de Rolle, existe $a \in (c, d)$ tal que $\phi'(a) = 0$. Entonces,

$$\phi'(a) = f'(a) - \left(\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)}\right) g'(a) = 0.$$

Si $g'(a) = 0$, se sigue que $f'(a) = 0$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $g'(a) \neq 0$ y al efectuar la división, obtenemos,

$$\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

□

Corolario 7.2.8. *Si f y g son continuas en $[c, d]$ y diferenciables en (c, d) y $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (c, d)$. Entonces existe $a \in (c, d)$ tal que*

$$\frac{f(d) - f(c)}{g(d) - g(c)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demostración: Si $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (c, d)$, se sigue que $g(c) \neq g(d)$, pues de otro modo tendríamos una contradicción al Teorema de Rolle. Por lo tanto, f y g satisfacen las condiciones del teorema 7.2.7 y el resultado es inmediato. □

Teorema 7.2.9. *(La Regla de L'Hôpital) Sean f y g continuas en $[c,d]$ con $f(c)=g(c)=0$ y diferenciables en (c,d) y $g'(x)\neq 0$ para cada $x\in(c,d)$. Si*

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \quad \textit{entonces} \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L \quad \textit{también.}$$

Demostración: Las funciones f y g satisfacen las hipótesis del teorema 7.2.8 en cualquier intervalo $[c,x]$ con $c<x\leq d$. Por lo tanto, para cada $x\in(c,d]$, podemos encontrar $a_x\in(c,x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(a_x)}{g'(a_x)}.$$

Sea $\epsilon>0$; puesto que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, existe $\delta>0$ tal que si $|z-c|<\delta$, entonces

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}-L\right|<\epsilon.$$

Claramente, si $|x-c|<\delta$, entonces $|a_x-c|<\delta$ también y por lo tanto,

$$\left|\frac{f'(a_x)}{g'(a_x)}-L\right|<\epsilon$$

y puesto que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a_x)}{g'(a_x)}$$

esto implica que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\epsilon,$$

así hemos demostrado que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

□

También se puede usar la Regla de L'Hôpital para evaluar límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 7.2.10. *(La Regla de L'Hôpital, 2^{da} parte) Sean f y g funciones diferenciables en (c,d) tales que $g'(x)\neq 0$ en $(c,c+h)$ para algún $0<h<d-c$ y $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$.*
Si

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g'(x)}=L, \quad \textit{entonces} \quad \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L \quad \textit{también}$$

Demostración: Sea $0 < \epsilon < 1$; puesto que $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ y $\displaystyle\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $g(x) > 0$ y $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$. Asumimos que $\delta < h$.
Usando una vez más el hecho de que $\displaystyle\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, podemos escoger $b \in (c, c+\delta)$ tal que si $x \in (c, b)$, entonces $g(x) > \max\left\{\dfrac{g(c+\delta)}{\epsilon}, \dfrac{f(c+\delta)}{\epsilon}\right\}$. Las funciones f y g satisfacen las hipótesis del teorema 7.2.7 en $[x, c+\delta]$ para cualquier $x \in (c, b)$ y por lo tanto, existe $a \in (x, c+\delta)$ tal que

$$\frac{f(c+\delta) - f(x)}{g(c+\delta) - g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

es decir,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}\frac{g(c+\delta)}{g(x)} + \frac{f(c+\delta)}{g(x)}.$$

Por lo tanto, si $x \in (c, b)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\leq \left|\frac{f'(a)}{g'(a)} - L\right| + \epsilon(|L| + \epsilon) + \epsilon \\ &< \epsilon + \epsilon(|L| + \epsilon) + \epsilon \\ &< (|L| + 3)\epsilon \end{aligned}$$

el cual es un múltiplo fijo de ϵ. □

Ejemplo 7.2.11. *Las funciones $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = x$ satisfacen la hipótesis del teorema 7.2.9, por lo tanto*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

Aún cuando la derivada $f'(x)$ exista no tiene que ser continua; no obstante, satisface el Teorema del Valor Intermedio:

Teorema 7.2.12. *(Teorema del Valor Intermedio para Derivadas) Sea f una función diferenciable en (c, d); si $s, t \in (c, d), s < t$ y $f'(s) < u < f'(t)$, entonces existe $p \in (s, t)$ tal que $f'(p) = u$.*

Demostración: Ponemos $\phi(x) = f(x) - ux$; entonces $\phi'(s) = f'(s) - u < 0$ y $\phi'(t) = f'(t) - u > 0$. Tenemos que demostrar la existencia de $p \in (c, d)$ tal que $\phi'(p) = 0$.

Claramente, ϕ es diferenciable, y por lo tanto, continua en $[s, t]$; por lo tanto, la imagen de $[s, t]$ bajo la función ϕ es un intervalo compacto, digamos $[m, M]$. Puesto que m está en el rango de ϕ, existe $p \in [s, t]$ tal que $\phi(p) = m$. Afirmamos que $p \in (s, t)$, pues $\phi'(s) < 0$ y $\phi'(t) > 0$, y el teorema 7.2.2 implica que

$\phi(x) < \phi(s)$ para x en algún intervalo $(s, s+\epsilon_1)$ y $\phi(x) < \phi(t)$ para x en algún intervalo $(t-\epsilon_2, t)$. Así es que el mínimo de la función ϕ en $[s,t]$ no puede ocurrir ni en s ni en t. Por lo tanto, $p \in (s,t)$ y se sigue del corolario 7.2.3, que $\phi'(p) = 0$. $\square$

Tarea 7.2.13. *1) Demostrar que si f es continua en $[c,d]$ y diferenciable en (c,d) entonces*

a) Si $f'(x) \geq 0$ para cada $x \in (c,d)$, entonces f es creciente en $[c,d]$

b) Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in (c,d)$, entonces f es estrictamente creciente en $[c,d]$.

2) Suponer que f es continua en $[c,d]$ y diferenciable en (c,d). Si $a, b \in (c,d)$ tienen la propiedad de que $f'(a) = f'(b) = 0$, pero $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,b)$, entonces hay a lo más un punto $z \in (a,b)$ tal que $f(z) = 0$. (1 punto)

3) Demostrar que si $f'(x)$ existe y es acotada en (c,d), entonces f es uniformemente continua en (c,d).

4) Demostrar que si f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y a es el número mayor tal que $f'(a) = 0$, entonces hay a lo más un solo número $b > a$ tal que $f(b) = 0$.

5) Demostrar que si $f'(x)$ existe y es acotada en $(0,1)$ y $\{x_n\} \to 0$ entonces $\{f(x_n)\}$ converge. (2 puntos)

6) Sean $r \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^r sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Para cuales valores de r
1) ¿f continua en 0?
2) ¿f diferenciable en 0?
3) ¿f' continua en 0?

Corolario 7.2.14. *Si f es diferenciable en $a \in (c,d)$, y f' no es continua en a, entonces a es una discontinuidad esencial de f'.*

Demostración: Primero, supongamos que a es un salto de f'.
Entonces $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ existen pero no son iguales, digamos $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = M$, con $L < M$. Tomemos $\epsilon = \dfrac{(M-L)}{3} > 0$; entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta_1$, entonces $|f'(x) - L| < \epsilon$. Igualmente, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta_2$, entonces $|f'(x) - M| < \epsilon$. Puesto que $L + \epsilon < M - \epsilon$, podemos escoger $u \in (L+\epsilon, M-\epsilon), u \neq f'(a)$.

Ahora es fácil verificar que f' no satisface el Teorema Intermedio para Derivadas, pues en el intervalo $\left[a-\frac{\delta_1}{2}, a+\frac{\delta_2}{2}\right]$, existen los puntos s, t tales que $f'(s) < L+\epsilon < u < M-\epsilon < f'(t)$ pero no existe ningún punto p tal que $f'(p) = u$. $\triangle$

Ahora suponemos que a es una discontinuidad removible de f', es decir, $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe (digamos igual a L), pero $L \neq f'(a)$ (digamos $L < f'(a)$). Sea $\epsilon = \frac{|L-f'(a)|}{2}$; usando la existencia del límite, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f'(x) - L| < \epsilon$. Tomemos $s \in (a-\delta, a+\delta)$ tal que $a \neq s$; entonces $f'(s) < L+\epsilon < f'(a)$. Si se escoje $u \in (L+\epsilon, f'(a))$, entonces es claro que no existe ningún $p \in [s, a]$ (o $[a, s]$) tal que $f'(p) = u$. $\square$

7.3 Derivadas de orden superior

Si una función f es diferenciable en (c, d) y su derivada f' es también diferenciable en (c, d), su derivada se llama la *segunda derivada* de f y se denota por f'' $\left(\text{a veces suele denotarse también por} \quad f^{(2)}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D^2 f\right)$.

Si f'' es diferenciable se puede repetir este proceso para obtener *la tercera derivada* , $f^{(3)}$ y otras derivadas de orden superior $f^{(4)}, f^{(5)}$ etc.

Una función $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ cuya n-ésima derivada $f^{(n)}$ existe en cada punto de (c, d) y es continua en (c, d) se dice que es de *clase* C^n (en (c, d)).
Si f posee derivadas de orden n para cada $n \in \mathbb{N}$, se dice que f es de *clase* C^∞ (en (c, d)).

Se dice que una función f es *convexa* (a veces se dice *cóncava hacia arriba*) en (c, d) si para cualquier par de puntos distintos $a, b \in (c, d)$ y $x \in (a, b)$,

$$f(x) \leq \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b) - f(a)] + f(a).$$

y f es *cóncava* (a veces se dice *cóncava hacia abajo*) en (c, d) si

$$f(x) \geq \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b) - f(a)] + f(a).$$

La ecuación de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b)$ en la gráfica de f es

$$y = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b) - f(a)] + f(a)$$

y por lo tanto, una función f es convexa (respectivamente, cóncava) en (c, d) si para cualquier par de puntos distintos $a, b \in (c, d)$, la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ yace debajo (respectivamente, arriba) de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de f.

Lema 7.3.1. *Sean $u, v, p, q \in \mathbb{R}$ y $v, q > 0$, entonces $\dfrac{u}{v} \leq \dfrac{p}{q}$ si y sólo si*

$$\frac{u}{v} \leq \frac{u+p}{v+q}$$

Demostración: Tarea. $\square$

Teorema 7.3.2. *Una función f es convexa en (c, d) si y sólo si para cualesquiera puntos $a, x, b \in (c, d)$ con $a < x < b$,*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Demostración: Aplicamos el lema 7.3.1 con $u = f(x) - f(a)$, $v = x - a > 0$, $p = f(b) - f(x)$ y $q = b - x > 0$ y obtenemos

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

si y sólo si

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(a)+f(b)-f(x)}{x-a+b-x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

es decir,

$$f(x) \leq \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b)-f(a)] + f(a).$$

$\square$

Lema 7.3.3. *Si f es diferenciable en (c, d) y $f'(x) \geq 0$ (respectivamente $f'(x) \leq 0$) para cada $x \in (c, d)$, entonces f es creciente (respectivamente, decreciente) en (c, d).*

Demostración: Sean $x, z \in (c, d)$ con $x < z$; por el Teorema del Valor Medio aplicado en el intervalo $[x, z]$, existe $u \in [x, z]$ tal que

$$0 \leq f'(u) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Se sigue que $f(z) \geq f(x)$, es decir, f es creciente.

El otro caso es semejante. $\square$

Teorema 7.3.4. *Sea $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en (c, d); f es convexa (respectivamente, cóncava) en (c, d) si $f''(x) \geq 0$ (respectivamente $f''(x) \leq 0$) para cada $x \in (c, d)$.*

Demostración: Se sigue del lema 7.3.3 que si $f''(x) \geq 0$ para cada $x \in (c, d)$ entonces $f'(x)$ es una función creciente en (c, d). Por lo tanto, si $a, x, b \in (c, d)$ con $a < x < b$ y aplicamos el Teorema del Valor medio en los intervalos $[a, x]$ y $[x, b]$, existe $s \in [a, x]$ y $t \in [x, b]$ tal que

$$f'(s) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad f'(t) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Puesto que $s \leq t$ y f' es creciente, se sigue que $f'(s) \leq f'(t)$, es decir

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

y el resultado se sigue del teorema 7.3.2.

La demostración en el caso de que $f''(x) \leq 0$ es semejante. □

Teorema 7.3.5. *Si f es dos veces diferenciable en $(c, d), a \in (c, d)$ y $f'(a) = 0$. Entonces a es un mínimo local de f si $f''(a) > 0$ y a es un máximo local de f si $f''(a) < 0$.*

Demostración:
1) Si $f''(a) > 0$ entonces por el teorema 7.2.13, existe una vecindad $V = (a - \delta, a + \delta)$ de a tal que $f'(x) < f'(a) = 0$ cuando $x \in (a - \delta, a)$ y $f'(x) > f'(a) = 0$ cuando $x \in (a, a + \delta)$. Del lema 7.3.3, concluimos que f es decreciente en $(a - \delta, a)$ y creciente en $(a, a - \delta)$, así hemos demostrado que a es un mínimo local de f.

2) Tarea. □

Capítulo 8

La antiderivada y la integral de Riemann

En esta sección desarrollaremos la relación entre la derivada y la integral de Riemann. Esta relación es muy importante pues es relativamente sencillo calcular una derivada - es simplemente el límite de una función - mientras la integral se define de una manera más compleja. Vamos a demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo que esencialmente dice que los operadores lineales de la derivada y la integral de Riemann son inversos (cuando se escogen correctamente sus dominios) y por lo tanto, se puede calcular la integral, calculando la "antiderivada".

Teorema 8.0.6. *(Teorema Fundamental del Cálculo, 1^{ra} parte) Sea F continua y diferenciable en (s,t) tal que F' es integrable en $[c,d] \subseteq (s,t)$, entonces*

$$\int_c^d F'dx = F(d) - F(c).$$

Demostración: Sea $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ una partición de $[c,d]$. La función F satisface la hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[c,d]$ y por lo tanto también en cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $t_k \in [[x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$F'(t_k))(x_k - x_{k-1}) = F(x_k) - F(x_{k-1}) \quad ....(*)$$

Claramente entonces, para cada $k = \{1, 2, \ldots, n]$, tenemos

$$\begin{aligned} m_k = \inf\{F'(x) : x \in [x_{k-1} - x_k]\} &\leq F'(t_k) \\ &\leq \sup\{F'(x) : x \in [x_{k-1} - x_k]\} = M_k, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq F'(t_k))(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1}),$$

y sustituyendo (*), obtenemos

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ahora, si sumamos sobre $k = 1, \ldots, n$, obtenemos

$$\sum_1^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_1^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \leq \sum_1^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Notemos que la serie en medio $\sum_1^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$ "telescopea" y su suma es $F(d) - F(c)$. Por lo tanto, tenemos

$$\sum_1^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq F(d) - F(c) \leq \sum_1^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

El término en medio ya es constante y si tomamos el supremo del lado izquierdo y el ínfimo del lado derecho, obtenemos

$$\underline{\int_c^d} F'(x)dx \leq F(d) - F(c) \leq \overline{\int_c^d} F'(x)dx.$$

Ahora el resultado se sigue inmediatemente de la integrabilidad de F'. $\square$

En el teorema 6.0.12, demostramos que una función continua en $[c, d]$ es integrable en este intervalo; por lo tanto hemos demostrado el siguiente resultado:

Corolario 8.0.7. *Si F es de clase C^1 en (c, d) entonces*

$$\int_a^x F'dx = F(x) - F(a),$$

para cada $a, x \in (c, d)$.

Hemos demostrado que la composición de la integral con la derivada da la identidad si se restringe atención a la clase C^1. Ahora examinamos la composición inversa, es decir, la derivada de la integral.

Teorema 8.0.8. *(Teorema Fundamental del Cálculo, 2^{da} parte)*
Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrable en $[c, d]$ y $F(x) = \int_c^x f dx$ su integral indefinida; si f es continua en $a \in (c, d)$ entonces $F'(a) = f(a)$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$; por ser continua f en a, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [c, d]$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Por lo tanto, si

$0 < x - a < \delta$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| &= \left| \frac{\int_c^x f(x)dx - \int_c^a f(x)dx}{x - a} - f(a) \right| \\
&= \left| \frac{\int_a^x f(x)dx}{x - a} - \frac{f(a)(x - a)}{x - a} \right| \\
&= \left| \frac{\int_a^x f(x)dx}{x - a} - \frac{\int_a^x f(a)dx}{x - a} \right| \\
&= \left| \frac{1}{x - a} \int_a^x (f(x) - f(a))dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{x - a} \right| \left| \int_a^x (f(x) - f(a))dx \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{x - a} \right| \int_a^x |(f(x) - f(a))| \, dx \\
&\leq \left| \frac{1}{x - a} \right| \int_a^x \epsilon dx = \epsilon.
\end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que la misma desigualdad vale si $0 < a - x < \delta$ y por lo tanto, si $0 < |x - a| < \delta$,

$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| < \epsilon,$$

así hemos demostrado que

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{F(x) - F(a)}{x - a} \right) = f(a).$$

□

El corolario 8.0.7 es la clave para la evaluación de integrales. Si queremos calcular $\int_c^d f(x)dx$, donde f es una función continua, debemos buscar una función F tal que $F' = f$ y entonces

$$\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c).$$

Definición 8.0.9. *Sea $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ una función continua; si F es una función diferenciable en (s, t) donde $c < s < t < d$ tal que $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in (s, t)$, entonces F se llama una* antiderivada de f en $[s, t]$.

Teorema 8.0.10. *Sean F y G antiderivadas de una función f en (c, d) entonces $G(x) = F(x) + k$ para algún $k \in \mathbb{R}$ y cada $x \in (c, d)$.*

Demostración:
Si F y G son antiderivadas de f en (c,d), entonces $G'(x) = f(x) = F'(x)$ para cada $x \in (c,d)$. Se sigue que $0 = G'(x) - F'(x) = (G-F)'(x)$ y es una consecuencia del teorema 7.2.6 que $G - F$ es una constante. □

Teorema 8.0.11. *(Integración por partes) Si f, g son integrables en $[c,d]$ y poseen antiderivadas F, G respectivamente en $[c,d]$ entonces Fg es integrable en $[c,d]$ y para cada $x \in [c,d]$ tenemos*

$$\int_c^x F(t)g(t)dt = F(x)G(x) - F(c)G(c) - \int_c^x f(t)G(t)dt.$$

Demostración: Puesto que F es diferenciable en $[c,d]$ es continua en este intervalo y por el teorema 6.0.12, es integrable en $[c,d]$. La integrabilidad de Fg ahora es una consecuencia del teorema 6.0.21

Del teorema 7.1.1(b) concluimos que FG es diferenciable y

$$(FG)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t);$$

por lo tanto, FG es una antiderivada de la función $fG + Fg$.
Del corolario 8.0.7, podemos concluir que

$$\int_c^x (fG + Fg)(t)dt = (FG)(x) - (FG)(c),$$

y al rearreglar y expandir los términos, tenemos:

$$\int_c^x F(t)g(t)dt = F(x)G(x) - F(c)G(c) - \int_c^x f(t)G(t)dt.$$

□

Teorema 8.0.12. *(Integración por sustitución)*
Sea g una función de clase C^1 en (c,d) y f una función continua en un intervalo $I \supseteq [g(c), g(d)]$ (o $I \supseteq [g(d), g(c)]$). Entonces,

$$\int_c^z f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(z)} f(x)dx.$$

Demostración: Supongamos que $g(c) < g(d)$; puesto que f es continua en $[g(c), g(d)]$, es también integrable en cualquier subintervalo de este intervalo y para cada $s \in [g(c), g(d)]$ ponemos

$$F(s) = \int_{g(c)}^{s} f(x)dx.$$

Puesto que f es continua en $[g(c), g(d)]$ se sigue que F es diferenciable en este intervalo y si definimos $H : [c, d] \to \mathbb{R}$ por $H(t) = F(g(t))$, se sigue del teorema 7.1.4 que H es diferenciable en $[c, d]$ y

$$H'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Si aplicamos el corolario 8.0.7, obtenemos:

$$\int_c^z f(g(t))g'(t)dt = H(z) - H(c).$$

No obstante,

$$H(c) = F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(c)} f(x)dx = 0$$

y por lo tanto,

$$\int_c^z f(g(t))g'(t)dt = H(z) = F(g(z)) = \int_{g(c)}^{g(z)} f(x)dx.$$

□

8.1 Integrales impropias

Una de las condiciones para definir la integral de Riemann de una función f es que f sea acotada. No obstante, aun cuando f no es acotada en un intervalo $(c, d]$ puede suceder que f es acotada y integrable en todos los subintervalos de la forma $[x, d] \subseteq (c, d]$.
Si $\lim\limits_{x\to c+} \int_x^d f(t)dt$ existe, su valor L se llama la *integral impropia* de f en $(c, d]$ y se escribe $\int_c^d f(t)dt$.
Análogamente, si f es acotada y integrable en todos los subintervalos de la forma $[c, x] \subseteq [c, d)$ y si $\lim\limits_{x\to d-} \int_c^x f(t)dt$ existe, su valor L se llama la integral impropia de f en $[c, d)$ y se escribe $\int_c^d f(t)dt$.

Ejemplo 8.1.1. *Si $0 < x < 1$, la función $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ es integrable en el intervalo $[x, 1]$ y es fácil calcular que $\int_x^1 f(t)dt = 2 - 2\sqrt{x}$. Por lo tanto*

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} (2 - 2\sqrt{x}) = 2.$$

□

Definición 8.1.2. *Se dice que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *si dado* $\epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que para cada* $x \geq k$, $|f(x) - L| < \epsilon$.
Se puede definir el límite en $-\infty$ *análogamente:* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ *si dado* $\epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que para cada* $x \leq k$, $|f(x) - L| < \epsilon$.

Siempre se define la integral de Riemannn sobre un intervalo compacto. No obstante, puede suceder que f es acotada y integrable en todos los intervalos de la forma $[c, x]$.
Si $\lim\limits_{x\to\infty} \int_c^x f(t)dt$ existe, su valor L se llama la *integral impropia* de f en $[c, \infty)$ y se escribe $\int_c^\infty f(t)dt$.

Ejemplo 8.1.3. *Si* $1 < x$, *la función* $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ *es integrable en el intervalo* $[1, x]$ *y es fácil calcular que* $\int_1^x f(t)dt = 1 - \dfrac{1}{x}$. *Por lo tanto*

$$\int_1^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Tarea 8.1.4. *Determinar si las siguientes integrales impropias existen:*

(1) $\int_0^1 \log(t)dt$

(2) $\int_1^3 \dfrac{1}{(t\log(t)}dt$

(3) $\int_0^\infty f(t)dt$ *donde:*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & si \quad 0 < t < 1 \\ \dfrac{1}{t^3} & si \quad t \geq 1. \end{cases}$$

(4) $\int_0^\infty e^{-t}dt$

(5) $\int_0^1 \left(\dfrac{1}{t}\right) dt.$

8.2 Curvas rectificables

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$; si $f_1 : A \to \mathbb{R}$ y $f_2 : A \to \mathbb{R}$ son funciones, entonces se puede definir una función $\mathbf{f}$: $A \to \mathbb{R}^2$ por $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Tal función f se llama una *función con valores vectoriales*. Ahora suponemos que $[c, d] \subseteq A$.

Definiciones 8.2.1. *(1) Se dice que* $\mathbf{f}$ *es integrable en* $[c,d]$ *si* f_1 *y* f_2 *son integrables en* $[c,d]$ *y se define*

$$\int_c^d \mathbf{f}(t)dt = \left(\int_c^d f_1(t)dt, \int_c^d f_2(t)dt\right)$$

(2) Se dice que $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* (c,d) *si* f_1 *y* f_2 *son diferenciables en* (c,d) *y se define*

$$\mathbf{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t)).$$

(3) Se dice que $\mathbf{f}$ *es continua en* $[c,d]$ *si* f_1 *y* f_2 *son continuas en* $[c,d]$.

(4) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *se define* $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ *y en consecuencia, si* $\|\mathbf{f}\| : A \to \mathbb{R}$ *se define*

$$\|\mathbf{f}\|(t) \equiv \|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}.$$

Notamos que si $v, w \in \mathbb{R}^2$, *entonces* $\|v\|$ *representa la distancia Euclideana de* v *al punto* $(0,0)$ *y por lo tanto,* $\|v-w\|$ *representa la distancia Euclideana entre* v *y* w. *Además,* $\|\mathbf{f}\|$ *es una función de* A *en* $\mathbb{R}$.

Tarea 8.2.2. *Demostrar que si* $\mathbf{g}$ *es continua entonces* $\|\mathbf{g}\|$ *lo es también.*

Lema 8.2.3. *(La desigualdad de Cauchy-Schwartz)*
Sean $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$; *entonces*

$$|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leq \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\|$$

es decir,

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Demostración: Definamos $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{2} (a_n - xb_n)^2$; claramente $\alpha(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y al expandir obtenemos,

$$\alpha(x) = (a_1^2 + a_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + (b_1^2 + b_2^2)x^2.$$

Puesto que $\alpha(x) \geq 0$, el discriminante de esta ecuación cuadrática debe ser menor o igual a cero, es decir,

$$(-2(a_1b_1 + a_2b_2))^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

es decir,

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

□

Lema 8.2.4. *(La Desigualdad del Triángulo)*
Si $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2), \quad \overrightarrow{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$*, entonces*

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\| \leq \|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|.$$

Demostración: Debemos demostrar que

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Al efectuar la expansión, tenemos,

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + b_1^2 + b_2^2,$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 &\leq a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2 \\ &= (\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 \leq (\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\|)^2,$$

y el resultado se sigue ya que todas las cantidades son positivas. $\square$

Lema 8.2.5. *Si* $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ *es continua en* $[c, d]$ *entonces*

$$\left\| \int_c^d \mathbf{g}(t) dt \right\| \leq \int_c^d \|\mathbf{g}(t)\| \, dt.$$

Demostración: Se sigue de la tarea 8.2.2 que $\|\mathbf{g}\| : [c, d] \to \mathbb{R}$ es continua y por lo tanto integrable en $[c, d]$.
Ahora,

$$\begin{aligned} \left\| \int_c^d \mathbf{g}(t) dt \right\|^2 &= \left\| \left(\int_c^d g_1(t) dt, \quad \int_c^d g_2(t) dt \right) \right\|^2 \\ &= m \left(\int_c^d g_1(t) dt \right)^2 + \left(\int_c^d g_2(t) dt \right)^2 \\ &= \int_c^d g_1(t) \left(\int_c^d g_1(t) dt \right) dt + \int_c^d g_2(t) \left(\int_c^d g_2(t) dt \right) dt \\ &= \int_c^d \left[g_1(t) \left(\int_c^d g_1(t) dt \right) + g_2(t) \left(\int_c^d g_2(t) dt \right) \right] dt. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz,
con $a_1 = g_1(t)$, $a_2 = g_2(t)$, $b_1 = \int_c^d g_1(t)dt$ y $b_2 = \int_c^d g_2(t)dt$, obtenemos

$$\left[g_1(t)\left(\int_c^d g_1(t)dt\right) + g_2(t)\left(\int_c^d g_2(t)dt\right)\right]$$
$$\leq \sqrt{(g_1(t)^2 + g_2(t)^2)}\sqrt{\left[\left(\int_c^d g_1(t)dt\right)^2 + \left(\int_c^d g_2(t)dt\right)^2\right]}$$

y ahora, se sigue del corolario 6.0.18, que

$$\int_c^d \left[g_1(t)\left(\int_c^d g_1(t)dt\right) + g_2(t)\left(\int_c^d g_2(t)dt\right)\right] dt$$
$$\leq \int_c^d \sqrt{(g_1(t)^2 + g_2(t)^2)}\sqrt{\left(\int_c^d g_1(t)dt\right)^2 + \left(\int_c^d g_2(t)dt\right)^2} dt.$$

Es decir,

$$\left\|\int_c^d \mathbf{g}(t)dt\right\|^2 \leq \int_c^d \|\mathbf{g}\|(t)\|\|\int_c^d \mathbf{g}(t)dt\|dt = \left\|\int_c^d \mathbf{g}(t)dt\right\|\int_c^d \|\mathbf{g}\|(t)dt.$$

Solo queda notar que si $\|\int_c^d \mathbf{g}(t)dt\| = 0$, la desigualdad es trivial; de otro modo, se puede dividir entre $\|\int_c^d \mathbf{g}(t)dt\|$ para obtener el resultado deseado. □

Si $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ es una partición de $[c, d]$ entonces

$$L(P, \quad \mathbf{f}) = \sum_0^{n-1} \|\mathbf{f}(x_{k+1}) - \mathbf{f}(x_k)\|$$

siendo la suma de las longitudes de los segmentos que unen $\mathbf{f}(x_k)$ con $\mathbf{f}(x_{k+1})$, puede pensarse como una aproximación lineal por trozos a la longitud de la curva $\mathbf{f}(t)$ entre $t = c$ y $t = d$. Puesto que la distancia más corta entre dos puntos es una recta, $L(P, \quad \mathbf{f})$ va a ser menor o igual a la "longitud real" de la curva (si este término tiene sentido). Por eso hacemos la siguiente definición:

Definición 8.2.6. *Se dice que (la curva representada por la gráfica de)* $\mathbf{f}$ *es rectificable si*

$$L(\mathbf{f}) = \sup\{L(P, \quad \mathbf{f}) : P \quad \textit{es una partición de} \quad [c, d]\} < \infty,$$

y en este caso, $L(\mathbf{f})$ *se llama la longitud de la curva* $\mathbf{f}$*, entre* $x = c$ *y* $x = d$.

Teorema 8.2.7. *Si* $\mathbf{f}\,'$ *es continua en* $[c, d]$ *(es decir, si* f_1 *y* f_2 *son de clase* C^1 *en* $[c, d]$*) entonces* $\mathbf{f}$ *es rectificable y*

$$L(\mathbf{f}) = \int_c^d \|\mathbf{f}\,'\|(t)dt.$$

Demostración: Sea $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ una partición de $[c,d]$; entonces, por el teorema 8.0.6,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}(x_{k+1}) - \mathbf{f}(x_k)\| &= \sqrt{[(f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)]^2 + [(f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)]^2} \\
&= \sqrt{\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1'(t)dt\right)^2 + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_2'(t)dt\right)^2} \\
&= \left\|\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1'(t)dt, \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_2'(t)dt\right)\right\| \\
&= \left\|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbf{f}\,'(t)dt\right\| \\
&\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|\mathbf{f}\,'\|(t)dt,
\end{aligned}$$

por el lema 8.2.5

Ahora, si sumamos de $k = 0$ a $n - 1$, obtenemos

$$L(P, \quad \mathbf{f}\,) \leq \int_c^d \|\mathbf{f}\,'\|(t)dt,$$

y por lo tanto,

$$L(\mathbf{f}) = \sup\{L(P, \quad \mathbf{f}\,) : P \quad \text{es una partición de} \quad [c,d]\} \leq \int_c^d \|\mathbf{f}\,'\|(t)dt.$$

Ahora debemos demostrar la desigualdad inversa.

Puesto que f_1' y f_2' son continuas en $[c,d]$, son uniformemente continuas en este intervalo. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - z| < \delta$, entonces para $k = 1, 2$, $|f_k'(x) - f_k'(z)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Se sigue que si $|x - z| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}\,'(x) - \mathbf{f}\,'(z)\| &= \sqrt{(f_1'(x) - f_1'(z))^2 + (f_2'(x) - f_2'(z))^2} \\
&< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Sea $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_n = d\}$ una partición de $[c,d]$ con $\|P\| < \delta$. Entonces si $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, de la Desigualdad del Triángulo, tenemos

$$\|\mathbf{f}\,'(x)\| \leq \|\mathbf{f}\,'(x_k)\| + \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} \|\mathbf{f}\,'(t)\|\,dx &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\|\mathbf{f}\,'(x_k)\| + \epsilon]\,dx \\
&= [\|\mathbf{f}\,'(x_k)\| + \epsilon]\,(x_{k+1} - x_k) \\
&= \|\mathbf{f}\,'(x_k)\|(x_{k+1} - x_k) + \epsilon(x_{k+1} - x_k) \\
&= \left\| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\mathbf{f}\,'(x) + \mathbf{f}\,'(x_k) - \mathbf{f}\,'(x)]\,dx \right\| + \epsilon(x_{k+1} - x_k) \\
&\leq \left\| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbf{f}\,'(x)dx \right\| + \left\| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\mathbf{f}\,'(x_k) - \mathbf{f}\,'(x)]dx \right\| + \epsilon(x_{k+1} - x_k) \\
&\leq \|\mathbf{f}(x_{k+1} - \mathbf{f}(x_k)\| + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \epsilon dx + \epsilon(x_{k+1} - x_k) \\
&\leq \|\mathbf{f}(x_{k+1} - \mathbf{f}(x_k)\| + 2\epsilon(x_{k+1} - x_k).
\end{aligned}$$

Finalmente, si sumamos ambos lados de la ecuación desde $k = 0$ hasta $k = n-1$, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_c^d \|\mathbf{f}\,'(t)\|dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|\mathbf{f}\,'(t)\|dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{f}(x_{k+1} - \mathbf{f}(x_k)\| + \sum_{k=0}^{n-1} 2\epsilon(x_{k+1} - x_k) \\
&= L(P, \mathbf{f}\,) + 2\epsilon(d - c) \\
&\leq L(\mathbf{f}\,) + 2\epsilon(d - c),
\end{aligned}$$

y puesto que ϵ es arbitrario, tenemos

$$\int_c^d \|\mathbf{f}\,'(t)\|dx \leq L(P, \mathbf{f}\,)$$

□

Tarea 8.2.8. *(1) Encontrar la longitud de las siguientes curvas:*

(a) $\mathbf{f}(x) = (\operatorname{sen}(x), \cos(x))$ *entre* $x = 0$ *y* $x = 2\pi$.
(b) $\mathbf{f}(x) = (x, x^2 + 3x - 1)$ *entre* $x = -1$ *y* $x = 1$.

(2) Demostrar que si $a, b \in (0, \infty)$, *entonces*

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

(3) Demostrar que si $a, b \in (0, \infty)$, *entonces*

$$\frac{a + b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b.$$

8.3 El Teorema de Taylor

El teorema que vamos a demostrar a continuación es una generalización del Teorema del Valor Medio (Corolario 7.2.5). Veremos en la siguiente sección que es de gran utilidad en la teoría de series de potencia.

Teorema 8.3.1. *(El Teorema de Taylor)*
Sea f una función $(n+1)$-veces diferenciable en (c,d); si $a \in (c,d)$, entonces para cada $x \in (c,d)$, existe z entre x y a tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demostración: Definimos las funciones ϕ y ψ en (c,d) por

$$\begin{aligned} \phi(s) &= f(x) - f(s) - (x-s)f'(s) - \cdots - (x-s)^n \frac{f^{(n)}(s)}{n!} \\ \psi(s) &= \phi(s) - \left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{n+1} \phi(a). \end{aligned}$$

Tanto ϕ como ψ son diferenciables en (c,d) y puesto que $\phi(x) = 0$ se tiene $\psi(x) = \psi(a) = 0$. Por eso, podemos aplicar el Teorema de Rolle a la función ψ en el intervalo de a a x y existe un punto z entre a y x tal que $\psi'(z) = 0$.

Ahora, un simple (pero muy laborioso) cálculo produce,

$$\phi'(s) = -\frac{(x-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s).$$

y por lo tanto,

$$\psi'(s) = \phi'(s) + (n+1)\frac{(x-s)^n}{(x-a)^{n+1}}\phi(a).$$

Si $s = z$, obtenemos

$$0 = \psi'(z) = \phi'(z) + (n+1)\frac{(x-z)^n}{(x-a)^{n+1}}\phi(a),$$

es decir,

$$\phi(a) = -\left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{(x-a)^{n+1}}{(x-z)^n}\phi'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Así es que hemos demostrado la siguiente igualdad,

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \cdots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

y al reordenarla, obtenemos el resultado deseado. $\square$

La expresión

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama *el n-ésimo polinomio de Taylor* y el término

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se llama el *residuo (de grado n+1)* y generalmente se denota por $R_n(x)$.

El siguiente teorema es una forma alternativa del Teorema de Taylor y da otra expresión para el residuo.

Teorema 8.3.2. *Sea f una función $(n+1)$-veces diferenciable en una vecindad V de a tal que $f^{(n+1)}$ es integrable en cualquier intervalo contenido en V; entonces para cada $x \in V$:*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

donde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right).$$

Demostración: Puesto que f^{n+1} es continua en (c,d), es integrable en cualquier intervalo $[a,x] \subseteq (c,d)$. Se obtendrá el resultado al integrar $R_n(x)$ por partes $(n+1)$-veces:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\left(\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right) \\
&= \left[-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-t)^n\right]_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \left[\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right]_a^x + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt \\
&= \ldots\ldots\ldots\cdots = -\sum_1^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + \int_a^x f'(t)dt \\
&= -\sum_1^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + f(x) - f(a).
\end{aligned}$$

□

8.4 Una aplicacion del Teorema de Taylor

Como veremos en la siguiente sección, el Teorema de Taylor tiene muchas aplicaciones en la teoría de series de potencia. También tiene unas aplicaciones directas en la aproximación de funciones.

Ejemplo 8.4.1. *Encontrar el valor de e con error menor que* 10^{-3}.

Solución: Aplicaremos el Teorema de Taylor a la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0,1]$, es decir, con $x = 1$ y $a = 0$. Se sabe que $f^{(n)}(x) = e^x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, $f^{(n)}(0) = 1$ para cada n. El n-ésimo polinomio de Taylor es

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

y el residuo es de la forma

$$R_n(1) = R_n(x)|_{x=1} = \frac{x^{n+1}e^z}{(n+1)!}|_{x=1} = \frac{e^z}{(n+1)!} \quad \text{para algún} \quad z \in [0,1].$$

Para obtener la precisión requerida, debemos escoger n tal que $R_n(1) < 10^{-3}$. Puesto que $z \in [0,1]$, se sigue que $e^z < 4$ y si escogemos $n = 6$, tenemos

$$\frac{e^z}{7!} < \frac{4}{5040} = \frac{1}{1260} < 10^{-3}.$$

Por lo tanto, se obtiene la aproximación deseada, evaluando la suma

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{6!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \\ &= 2 + \frac{517}{720} = 2.718(055....). \end{aligned}$$

□

Problemas variados

(1) Encontrar el valor de $\sqrt{2}$ con error menor que 10^{-2}. (Indicación: Aplicar el Teorema de Taylor a la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $[0,1]$ con $a = 0$ y $x = 1$.)

(2) Sea f dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$; demostrar que si $\epsilon > 0$, entonces existe $z \in (x, x + 2\epsilon)$ tal que

$$f'(x) = \frac{1}{2\epsilon}[f(x+2\epsilon) - f(x)] - \epsilon f^{(2)}(z).$$

(3) (a) Sea f dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$; demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)+f(x+h)-2f(x)}{h^2} = f^{(2)}(x).$$

(b) ¿Es cierto que la existencia de este límite implica la existencia de $f^{(2)}$?

(4) Evaluar

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$.

(5) Demostrar que si $f(x) = e^x$, entonces $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$ para cada x y $a = 0$.

(6) Sea f dos veces diferenciable en (c,d) y $f^{(2)}(x) \geq 0$ para cada $x \in (c,d)$. Demostrar que la gráfica de f yace arriba de la tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ $\quad (a \in (c,d))$.

(7) Suponga que f es una función continua en $[0,\infty)$ y diferenciable en $(0,\infty)$ tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente.
Si g se define por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, demostrar que g es creciente.

(8) Sea f una función tres veces diferenciable en $[-1,1]$ tal que

$$f(-1) = f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(1) = 1.$$

Aplicar el Teorema de Taylor con $a = 0$ y $x = \pm 1$ para demostrar que existen $c \in (-1,0)$ y $d \in (0,1)$ tales que $f^{(3)}(c) + f^{(3)}(d) = 6$.

El lema 8.2.5 es válido si $\mathbf{g}$ es integrable, pero para demostrarlo, hay que probar que $\|\mathbf{g}\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ es integrable si g_1 y g_2 son integrables. Ya hemos demostrado que si f es integrable entonces f^2 es integrable (lema 6.0.20) y por eso, solo falta el siguiente resultado:

(9) Demostrar que si f es integrable en $[c,d]$, también lo es $\sqrt{f}$.

Capítulo 9

Sucesiones y series de funciones

Si para cada $n \in \mathbb{N}, f_n : A \to \mathbb{R}$ es una función y si $\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$ (el cual es el límite de una sucesión de números reales) existe para cada $x \in A$, podemos definir una función $f : A \to \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}.$$

La función f se llama el *límite puntual* de la sucesión de funciones $\{f_n\}$; se dice que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* a f en A y se escribe $\{f_n\} \to_p f$
(o a veces simplemente $\{f_n\} \to f$).

Ejemplo 9.0.2. *Para cada $x \in [0,1)$, la sucesión $\{x^n\}$ converge a 0. Por lo tanto, la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a la función constante 0 en $[0,1)$. No obstante, si $x = 1$, la sucesión $\{x^n\}$ converge a 1 y si $x > 1$ la sucesión $\{x^n\}$ no converge (se puede decir que converge a ∞) y por lo tanto, en el intervalo $[0,1]$, la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función f dada por*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & si \quad t = 1 \end{cases}$$

y no converge en ningún intervalo $[0,a]$ si $a > 1$.

Este ejemplo muestra claramente que aún cuando el límite puntual de una sucesión de funciones continuas exista (como ocurre en $[0,1]$), no tiene que ser continua. $\square$

Teorema 9.0.3. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en A si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ y cada $x \in A$, existe $n_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.*

Demostración: Es la definición de convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$. $\square$

El teorema 9.0.3 tiene una demostración trivial pero es importante pues demuestra claramente que la elección de n_0 no sólo depende de ϵ sino también de x.

Ejemplo 9.0.4. *La sucesión* $\{f_n\}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ *converge puntualmente a la función constante* 0 *en todo* $\mathbb{R}$ *pues*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x \cdot 0 = 0 \quad \text{para cada número real } x.$$

No obstante, dado $\epsilon > 0$ *no hay ningún* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{x}{n} < \epsilon$ *para cada* x *y cada* $n \geq n_0$*. Mientras más grande sea* x*, más grande vamos a tener que escoger* n_0 *para un valor fijo de* ϵ*.* $\square$

Dado $\epsilon > 0$, si podemos escoger un número natural n_0 que funciona para todos los números x en el dominio, entonces decimos que $\{f_n\}$ es uniformamente convergente. Formalmente, hacemos la siguiente definición.

Definición 9.0.5. *Se dice que una sucesión* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* A *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *para cada* $n \geq n_0$ *y cada* $x \in A$*. Escribimos* $\{f_n\} \to_u f$*.*

Teorema 9.0.6. *Si* $\{f_n\} \to_u f$ *en* A *entonces* $\{f_n\} \to_p f$ *en* A*.*

Demostración: Obvio. $\square$

Teorema 9.0.7. *Una sucesión* $\{f_n\} \to_u f$ *en* A *si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *para cada* $n \geq n_0$*, es decir, la sucesión* $\{\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\}$ *converge a* 0*.*

Demostración: Tarea. $\square$

Ahora vamos a demostrar un lema que caracteriza a la convergencia uniforme de una sucesión de funciones sin la necesidad de conocer el límite.

Lema 9.0.8. *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones acotadas en* $A \subseteq \mathbb{R}$*; la sucesión converge uniformemente en* A *si dado* $\epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $m, n > k$*,* $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$*.*

Demostración: Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en A, digamos a la función f.
Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para

cada $x \in A$.
Se sigue que si $m, n > k$ y para cada $x \in A$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = 2\epsilon/3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $m, n > k$,

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

△

Inversamente, supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n > k$,

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces para cada $a \in A$ (fijo) y $m, n \geq k$, $|f_m(a) - f_n(a)| < \epsilon$, es decir $\{f_n(a)\}$ es una sucesión de Cauchy (en $\mathbb{R}$) y por lo tanto converge (en $\mathbb{R}$), digamos a r_a. Esto ocurre para cada elemento $x \in A$ y así podemos definir una función $f : A \to \mathbb{R}$ por $f(x) = r_x$ y demostraremos que f es el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}$.

Puesto que $\{f_n(a)\} \to f(x)$, para cada $n \geq k$ existe $j \in \mathbb{N}$ (que en general, dependerá de x) tal que para cada $|f_{n+j}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Pero si $n \geq k$, tenemos $n + j \geq k$ y por lo tanto $|f_n(x) - f_{n+j}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Combinando las desigualdades, se tiene para cada $x \in A$ y cada $n \geq k$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - f_{n+j}(x) + f_{n+j}(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f(x) - f_{n+j}(x)| + |f_{n+j}(x) - f_n(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

así hemos demostrado la convergencia uniforme de la sucesión. □

Tarea 9.0.9. *1) Determinar los valores de* $a \in [0, 1]$ *para que la sucesión de funciones definida en el ejemplo 9.0.2 converge uniformemente en* $[0, a]$.

2) Determinar si las siguientes sucesiones convergen puntualmente y/o uniformente en el dominio dado y si es así, encontrar su límite.

a) $\left\{ \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right\}$ *en* $\mathbb{R}$

b) $\{x^n\}$ *en* $\mathbb{R}$,

c) $\{x^n\}$ *en* $[-1, 1]$,

d) $\{x/n\}$ *en* $[0, 10^6]$,

e) $\left\{\dfrac{2x}{(1+n^2x^2)}\right\}$ *en* $[0,1]$,

f) $\{f_n\}$ *en* $[0,\infty)$ *donde*

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \leq n \\ 0 & si \quad t > n, \end{cases}$$

g) $\left\{\dfrac{1}{(nx)}\right\}$ *en* $(0,1]$,

h) $\left\{\dfrac{2nx}{(1+n^2x^2)}\right\}$ *en* $[0,1]$.

Ya vimos en el ejemplo 9.0.2, que el límite puntual de funciones continuas (aún diferenciables) no tiene que ser continua. Ahora vamos a considerar el caso de convergencia uniforme. Supongamos que f_n es continua (respectivamente, diferenciable, integrable) en A y $\{f_n\} \to_u f$ en A, ¿Es cierto que f es continua (respectivamente diferenciable, integrable) en A?

Tarea 9.0.10. *Encontrar una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones integrables en* $[0,1]$ *que converge puntualmente a una función no integrable en* $[0,1]$.

Empezamos con continuidad; esto se puede ver como un problema de intercambio de límites:

Supongamos que $\{f_n\} \to_u f$ en A y que cada función f_n es continua en $a \in A$, es decir, $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$. Puesto que $\{f_n\} \to_p f$ en A, tenemos $\lim_{n\to\infty} \{f_n(a)\} = f(a)$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\lim_{x\to a} f_n(x)\right\} = f(a).$$

Por otro lado, f es continua en a si y sólo si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y puesto que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, la función f es continua en a si y sólo si

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = f(a) = \lim_{n\to\infty} \left\{\lim_{x\to a} f_n(x)\right\},$$

es decir, si se puede intercambiar el orden de tomar límites.

Teorema 9.0.11. *Si* f_n *es continua en* A *y* $\{f_n\} \to_u f$ *en* A*, entonces* f *es continua en* A.

Demostración: Sean $a \in A$ y $\epsilon > 0$; puesto que $\{f_n\} \to_u f$, existe $k \in \mathbb{N}$ (en adelante, fijo) tal que si $n \geq k$, $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para cada $x \in A$. Además, por la continuidad de f_k en a, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f_k(x) - f_k(a)| < \dfrac{\epsilon}{3}$.
Ahora, si $|x - a| < \delta$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(a) + f_k(a) - f(a)| \\
&\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 9.0.12. *Si f_n es integrable en $[c, d]$ y $\{f_n\} \to_u f$ en $[c, d]$, entonces f es integrable en $[c, d]$ y además,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_c^d f_n(t)dt \right\} = \int_c^d f(t)dt.$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$; puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[c, d]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{4(d-c)}$ para cada $x \in [c, d]$. Puesto que la función f_k es integrable, existe una partición $P = \{c = x_0, x_1, \ldots, x_\ell = d\}$ de $[c, d]$ tal que $S(f_k, P) - I(f_k, P) < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Hacemos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
m_j &= \inf\{f(x) : x \in [x_j - x_{j-1}]\}, \\
m_j^n &= \inf\{f_n(x) : x \in [x_j - x_{j-1}]\}, \\
M_j &= \sup\{f(x) : x \in [x_j - x_{j-1}]\}, \\
M_j^n &= \sup\{f_n(x) : x \in [x_j - x_{j-1}]\},
\end{aligned}$$

entonces, si $n \geq k$ tenemos

$$(m_j^n - m_j) \leq \frac{\epsilon}{4(d-c)} \quad \text{y} \quad (M_j^n - M_j) \leq \frac{\epsilon}{4(d-c)}.$$

Por lo tanto, si $n \geq k$

$$\begin{aligned}
|I(f_n, P) - I(f, P)| &= \left| \sum_{j=1}^{\ell} (m_j^n - m_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\epsilon}{d-c}(x_j - x_{j-1}) \right| \\
&= \left| \frac{\epsilon}{4(d-c)} \sum_{j=1}^{\ell} (x_j - x_{j-1}) \right| = \frac{\epsilon}{4},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|S(f_n,P)-S(f,P)| &= \left|\sum_{j=1}^{\ell}(M_j^n-M_j)(x_j-x_{j-1})\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\epsilon}{d-c}(x_j-x_{j-1})\right| \\
&= \left|\frac{\epsilon}{4(d-c)}\sum_{j=1}^{\ell}(x_j-x_{j-1})\right| = \frac{\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

En particular,

$$|I(f,P)-I(f_k,P)| \leq \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad |S(f,P)-S(f_k,P)| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|S(f,P)-I(f,P)| &= |S(f,P)-S(f_k,P)+S(f_k,P)-I(f_k,P)+I(f_k,P) \\
&\quad -I(f,P)| \\
&\leq |S(f,P)-S(f_k,P)|+|S(f_k,P)-I(f_k,P)|+|I(f_k,P) \\
&\quad -I(f,P)| \\
&< \frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon,
\end{aligned}$$

y se concluye la demostración de que f es integrable.

Finalmente, notemos que si $n \geq k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_c^d f_n(t)dt-\int_c^d f(t)dt\right| &= \left|\int_c^d [f_n(t)-f(t)]dt\right| \leq \int_c^d |f_n(t)-f(t)|dt \\
&\leq \int_c^d \frac{\epsilon}{4(d-c)}dt = \frac{\epsilon}{4} \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

hemos así demostrado que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_c^d f_n(t)dt\right\} = \int_c^d f(t)dt.$$

□

El límite uniforme de una sucesión de funciones diferenciables en (c,d) no tiene que ser diferenciable. Aunque es difícil dar formulas explicitas, es fácil imaginar una sucesión de curvas suaves que convergen uniformemente a la función f dada por $f(x)=|x|$, que no es diferenciable en 0. La situación es aún peor si consideramos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 9.0.13. *La sucesión* $\{f_n\}$ *definida por* $f_n(x) = \dfrac{(\ sen(nx))}{n}$ *converge uniformemente en* $\mathbb{R}$ *a la función constante* 0 *cuya derivada es otra vez* 0. *Las funciones* f_n *son diferenciables en* $\mathbb{R}$ *y* $f_n'(x) = \cos(nx)$ *pero la sucesión* $\{\cos(nx)\}$ *no converge para muchos valores de* x *(encontrar tal valor de* x*).*

Ejemplo 9.0.14. *La sucesión* $\{f_n\}$ *definida por* $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x^2)}$ *converge uniformemente en* $[0,\infty)$ *a la función constante* 0 *cuya derivada es otra vez* 0. *Las funciones* f_n *son diferenciables, pero* $f_n'(x) = \dfrac{(1-x^2n^2)}{(1+n^2x^2)^2}$ *y por lo tanto la sucesión de derivadas* $\{f_n'\}$ *es tal que* $\{f_n'(x)\} \to 0$ *si* $x > 0$ *y* $\{f_n'(x)\} \to 1$ *si* $x = 0$ *(Demuestralo!).*

No obstante, convergencia de las derivadas "casi" implica convergencia de la sucesión original. El siguiente teorema, cuya demostración se omite, es el mejor posible.

Teorema 9.0.15. *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones diferenciables en* (c,d) *tal que existe por lo menos un punto* $a \in (c,d)$ *tal que* $\{f_n(a)\}$ *converge.*
Si la sucesión de derivadas $\{f_n'\}$ *converge uniformemente en* (c,d)*, entonces la sucesión* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a una función diferenciable* f *y* $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ *para cada* $x \in (c,d)$.

Vamos a usar el teorema 9.0.15 para definir formalmente la función exponencial.

Lema 9.0.16. *Existe una función* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
a) $\exp'(x) = \exp(x)$,
b) $\exp(0) = 1$.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define inductivamente $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_1(x) = 1 + x$ y $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)dt$.

Notemos que f_1 es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto integrable en cualquier subintervalo compacto de $\mathbb{R}$. Por el teorema 6.1.1, cada integral indefinida es continua y por lo tanto, si f_n es continua, f_{n+1} es continua (e integrable) en su turno. Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo, f_{n+1} es diferenciable y $f_{n+1}'(x) = f_n(x)$.

Tarea. Demostrar por inducción que

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Por lo tanto, si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{x^k}{k!} \right|.$$

Ahora fijemos x y supongamos que hemos escogido $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq \ell$, es decir $x \in [-\ell, \ell]$; si $m \geq 2\ell$, entonces

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\ell^k}{k!} \right| \\
&= \frac{\ell^{m+1}}{(m+1)!} \left[1 + \frac{\ell}{m+2} + \frac{\ell^2}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{\ell^{n-m-1}}{(m+2)\ldots(n-1)n} \right] \\
&< \frac{\ell^{m+1}}{(m+1)!} \left[1 + \frac{\ell}{m} + \frac{\ell^2}{m^2} + \cdots + \frac{\ell^{n-m-1}}{m^{n-m-1}} \right] \\
&< \frac{\ell^{m+1}}{(m+1)!} \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots \right] \\
&< 2\frac{\ell^{m+1}}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

Tarea. Demostrar que para cada $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ 2\frac{\ell^{m+1}}{(m+1)!} \right\} = 0.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para cada $x \in [-\ell.\ell]$.
Se sigue del lema 9.0.8 que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente convergente, digamos a la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en cualquier intervalo $[-\ell, \ell]$ y

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Puesto que $f_n(0) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $e(0) = 1$. Además, puesto que $f'_{n+1} = f_n$ la sucesión $\{f'_n\}$ converge al mismo límite y ahora al aplicar el teorema 9.0.15, se tiene que exp es diferenciable y $\exp'$ es el límite uniforme de la sucesión $\{f'_n\}$, es decir, exp. □

A la función exp definida en el teorema anterior se le llama *la función exponencial* y $\exp(1)$ se denota por e.

Corolario 9.0.17. *La función* exp *es de clase* C^∞.

Lema 9.0.18. *La función* $\exp$ *es la única función que satisface las partes a) y b) del lema 9.0.16.*

Demostración: Supongamos que g es otra función con las propiedades a) y b) del lema 9.0.16 y sea $h(x) = \exp(x) - g(x)$. Se puede verificar fácilmente que $h(x) = 0$ y $h^{(n)}(x) = h(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora sea $a \in \mathbb{R}$; puesto que h es continua en $[0, a]$ es acotada en este intervalo. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|h(t)| \leq M$ para cada $t \in [0, a]$. Aplicamos el Teorema de Taylor a la función h en el intervalo $[0, a]$ para obtener

$$\begin{aligned} h(a) &= h(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} a^k + \frac{h^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!} a^{n+1} \\ &= \frac{h^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!} a^{n+1} = \frac{h(z_n)}{(n+1)!} a^{n+1} \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} a^{n+1} \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ donde $z_n \in [0, a]$, (puesto que $h^{(n)}(0) = h(0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ y por lo tanto $h(a) = 0$. Por ser a arbitrario, $h(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, hemos así demostrado que $g(x) = \exp(x)$. $\square$

Teorema 9.0.19. *La función* $\exp$ *tiene las siguientes propiedades:*

(1) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$

(2) Para cada $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

(3) Para cada $q \in \mathbb{Q}$, $\exp(q) = [\exp(1)]^q = e^q$

Demostración:

(1) Supongamos que $\exp(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$ (asumimos $a > 0$). Puesto que $\exp$ es continua en $[0, a]$ es acotada en este intervalo. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\exp(t)| \leq M$ para cada $t \in [0, a]$. Al aplicar el Teorema de Taylor a la función $\exp$ en el intervalo $[0, a]$, obtenemos:

$$\exp(0) = \exp(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\exp^{(k)}(a)}{k!}(0 - a)^k + \frac{\exp^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(0 - a)^{n+1}$$

donde z_n yace entre 0 y a. Puesto que $\exp(a) = \exp^{(n)}(a) = 0$ para cada n, se tiene

$$1 = \frac{\exp^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(0 - a)^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}(0 - a)^{n+1}$$

lo cual es imposible ya que $\left\{ \dfrac{M}{(n+1)!}(-a)^{n+1} \right\} \to 0.$ $\triangle$

(2) Sean $x, y \in \mathbb{R}$; puesto que $\exp(y) \neq 0$ para cada $y \in \mathbb{R}$, si definimos $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$, f es continua en $\mathbb{R}$. Si diferenciamos con respecto a x, se tiene

$$f'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = f(x) \quad \text{y} \quad f(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1.$$

Pero exp es la única función con estas propiedades y se sigue que

$$f(x) = \exp(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}.$$

$\triangle$

(3) Tarea.

$\square$

9.1 Series de Funciones.

También se puede definir *una serie de funciones* $\sum f_n$: Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ es una función, entonces se definen funciones $s_n : A \to \mathbb{R}$ por $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

La función s_n se llama la *n-ésima suma parcial* de la serie en A y si la sucesión $\{s_n(x)\}$ converge para cada $x \in A$, se define la *suma de la serie de funciones* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ en A por

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Se dice que la serie $\sum f_n$ *converge* o *converge puntualmente* (respectivamente, *converge uniformemente*) en A si la sucesión de funciones $\{s_n\}$ de sumas parciales converge puntualmente (respectivamente, uniformemente) en A.
Se dice que $\sum f_n$ *converge absolutamente* en A si la serie $\sum |f_n(x)|$ es convergente para cada $x \in A$.

Los siguientes resultados son consecuencia inmediata de los teoremas correspondientes sobre convergencia de sucesiones de funciones.

Teorema 9.1.1. *Si una serie de funciones* $\sum f_n$ *converge uniformemente a* f *en* A *entonces* f *es continua en* A.

Demostración: teorema 9.1.2 $\square$

Teorema 9.1.2. *Si una serie de funciones integrables $\sum f_n$ converge uniformemente a f en $[c,d]$, entonces f es integrable en $[c,d]$ y*

$$\int_c^d \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d f_n(t)dt.$$

Demostración: teorema 9.0.12 □

Teorema 9.1.3. *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones diferenciables en (c,d) tal que existe por lo menos un punto $a \in (c,d)$ tal que $\sum f_n(a)$ converge. Si la serie de derivadas $\sum f_n'$ converge uniformemente en (c,d), entonces la serie $\sum f_n$ converge uniformemente a una función diferenciable f y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \textit{para cada } x \in (c,d).$$

Demostración: teorema 9.0.15. □

Hay dos importantes criterios para la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Teorema 9.1.4. *(El Criterio de Cauchy)*
Sean f_n funciones definidas en $A \subseteq \mathbb{R}$. La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A si dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq k$ $(m < n)$ y para cada $x \in A$,

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x)| < \epsilon.$$

Demostración: Tarea. (Aplicar el lema 9.0.8.) □

Teorema 9.1.5. *(El Criterio-M de Weierstrass)*
Supongamos que M_n es un número positivo para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\sum M_n$ es convergente. Si $f_n : A \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A$, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\sum M_n$ es convergente, la sucesión $\{\sum_{j=1}^{n} M_j\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq k$,

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} M_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} M_j - \sum_{j=1}^{m} M_j\right| < \epsilon,$$

es decir,

$$|M_{m+1} + M_{m+2} + \cdots + M_{n-1} + M_n| < \epsilon.$$

Puesto que $|f_n(x)| \leq M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A$, tenemos

$$||f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \cdots + |f_{n-1}(x)| + |f_n(x)|| < \epsilon,$$

y en consecuencia, después de repetidas aplicaciones de la Desigualdad Triangular obtenemos

$$|f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x)| < \epsilon,$$

para cada $m, n \geq k$ y cada $x \in A$.
Ahora, el resultado es una consecuencia inmediata del teorema 9.1.4. $\square$

Tarea 9.1.6. *(1) Determinar si la siguiente serie es convergente o uniformemente convergente y en caso afirmativo, determinar la función límite.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) \quad en \quad [0, \infty),$$

(2) Determinar si las siguientes series son uniformemente y/o absolutamente convergentes en $[0, \infty)$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+n^2} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

9.2 Series de Potencias

En esta sección vamos a considerar un tipo especial de series de funciones.

Sean $\{a_k\}$ un número real par cada $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$, $c \in \mathbb{R}$ y supongamos que $f_k(x) = a_n(x-c)^k$ para cada $k = 0, 1, \ldots$.
La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

se llama una *serie de potencias* (centrada en $x = c$).

En general asumiremos que $c = 0$. En caso de que $c \neq 0$ la teoría es semejante.

Es obvio que una serie de la forma $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ converge puntualmente en $x = 0$, pero, ¿Converge en otros puntos de $\mathbb{R}$?

Definición 9.2.1. *Sea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ *una serie de potencias. Consideramos la sucesión*

$$\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$$

y se define

$$R = \begin{cases} 0 & si \quad limsup\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = \infty \\ \dfrac{1}{limsup}\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} & si \quad 0 < limsup\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} < \infty \\ +\infty & si \quad limsup\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = 0 \end{cases}$$

El número R se llama el *radio de convergencia* de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$.

En lo sucesivo, solo trataremos series de potencias para las cuales la sucesión

$$\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$$

converge a un número real o a $+\infty$.

Para estas sucesiones, la definición de R se reduce a

$$R = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = \infty \\ \dfrac{1}{\lim}\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} & \text{si} \quad 0 < \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} < \infty \\ +\infty & \text{si} \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\} = 0 \end{cases}$$

Teorema 9.2.2. *Sea* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ *una serie para la cual* $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}$ *existe. Si R es el radio de convergencia de la serie, entonces la serie es absolutamente convergente para todo x tal que $|x| < R$ y divergente para todo x tal que $|x| > R$.*

Demostración: Por el Criterio de la Razón de Cauchy (corolario 3.1.4), una serie $\sum b_n$ converge absolutamente si $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}\right\} < 1$ y diverge si $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}\right\} > 1$.

Por lo tanto, la serie de potencias $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ converge absolutamente si

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right|\right\} \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} < 1 \end{aligned}$$

y diverge si

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right|\right\} \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} > 1\end{aligned}$$

Hay tres casos a considerar:

1) Si $\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} = \infty$, entonces si $x \neq 0$, $|x|\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} = \infty$ y por lo tanto, la serie converge si y sólo si $x = 0$.

2) Si $0 < \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} < \infty$, entonces la serie converge absolutamente si

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}} = R$$

y diverge si

$$|x| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}} = R$$

3) Si $\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} = 0$, entonces $|x|\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} = 0$ para cada x y por lo tanto la serie converge para cada $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Notemos que este teorema (que lleva el nombre del *Criterio de Cauchy-Hadamard*) no decide convergencia en los puntos $x = \pm R$.
En estos dos puntos, la serie puede ser convergente o divergente.
Si $0 < R < \infty$, el intervalo $(-R, R)$ se llama el *intervalo de convergencia* de la serie.

Ejemplo 9.2.3. *La serie de potencias $\sum x^n$ tiene $a_n = 1$ para cada n, por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} = 1$ y la serie converge en $(-1, 1)$ y diverge en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. La serie diverge también cuando $x = \pm 1$, pues las series $\sum 1$ y $\sum (-1)^n$ son divergentes.*

Tarea 9.2.4. *Encontrar el radio de convergencia R de las siguientes series. Si $0 < R < \infty$, determinar si la serie converge en los extremos del intervalo de convergencia.*

a) $\sum \frac{x^n}{n}$

b) $\sum \frac{x^n}{n!}$

c) $\sum \frac{x^n}{n^2}$

d) $\sum nx^n$

Teorema 9.2.5. *Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$, entonces la serie converge uniformemente en cualquier subintervalo compacto de $(-R, R)$.*

Demostración:, Sea $0 < s < R$; basta demostrar que la serie converge uniformemente en $[-s, s]$.

Sea $t = \dfrac{(s+R)}{2}$; puesto que $s < R$, se tiene $s < t < R$ y por lo tanto $\sum a_n t^n$ es una serie convergente (de números reales). Pero si $x \in [-s, s]$, se sigue que $|x| \leq s < t$ y por lo tanto $|a_n x^n| \leq a_n t^n$.

La convergencia de la serie $\sum a_n x^n$ se sigue del Criterio-M de Weierstrass.

$\square$

Al combinar los teoremas 9.2.2 y 9.2.5, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 9.2.6. *Una serie de potencias converge uniformemente y absolutamente en cualquier subintervalo compacto contenido en su intervalo de convergencia.*

En caso de que la serie converge en uno de los extremos del intervalo de convergencia $(-R, R)$, se puede demostrar aun más.

Omitimos la demostración del siguiente teorema.

Teorema 9.2.7. *(Teorema de Abel) Si una serie de potencias con radio de convergencia R converge en $x = R$ (respectivamente, en $x = -R$), entonces la convergencia es uniforme en $[s, R]$ para cada s tal que $-R < s$ (respectivamente, en $[-R, t]$ para cada t tal que $t < R$).*

Obviamente, si la serie es convergente tanto en $x = R$ como en $x = -R$, entonces la convergencia es uniforme en $[-R, R]$.

Corolario 9.2.8. *Si una serie de potencias converge para cada $x \in S \subseteq \mathbb{R}$, entonces la convergencia es uniforme en cualquier subintervalo compacto contenido en S.*

Teorema 9.2.9. *La función límite de una serie de potencias es continua en su intervalo de convergencia.*

Demostración: Supongamos que la serie de potencia $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia R y sea $a \in (-R, R)$. Escojamos s tal que $-R < -s \leq a \leq s < R$; la serie converge uniformemente en $[-s, s]$ y es consecuencia del teorema 9.0.11 que la función límite es continua en $[-s, s]$, específicamente en a. $\square$

Teorema 9.2.10. *Una serie de potencias es integrable término por término en cualquier subintervalo compacto de su intervalo de convergencia.*
Es decir si $\sum a_n t^n$ tiene radio de convergencia R y si $[c, x] \subseteq (-R, R)$, entonces $f(t) = \sum a_n t^n$ es integrable en $[c, x]$ y

$$\begin{aligned} \int_c^x f(t)dt &= \int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n t^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_c^x . \end{aligned}$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata de los teoremas 9.0.12 y 9.2.5. $\square$

Lema 9.2.11. *Las series de potencias $\sum a_n x^n$ y $\sum n a_n x^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración: Supongamos que el radio de convergencia de $\sum a_n x^n$ es R. Si $x \in (-R, R)$, entonces podemos encontrar s tal que $|x| < s < R$, es decir, $\frac{|x|}{s} < 1$.

Consideremos la serie de números reales

$$\sum b_n, \qquad \text{donde} \quad b_n = n \left(\frac{|x|}{s} \right)^{n-1}.$$

Si aplicamos el Criterio de la razón de Cauchy (corolario 3.1.4) a esta serie, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \right\} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{|x|}{s} \right) \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right) \right\} \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{|x|}{s} \right) \right\} \\ &= \frac{|x|}{s} < 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la serie $\sum b_n$ converge.

Ahora se sigue del lema 3.0.15 que $\{b_n\} \to 0$ y por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < 1$ para cada $n \geq n_0$, es decir, para cada $n \geq n_0$, tenemos

$$1 > |b_n| = n \left(\frac{|x|}{s} \right)^{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$|na_n x^{n-1}| = \frac{1}{s}|a_n s^n||b_n| < \frac{1}{s}|a_n s^n|.$$

Pero $\sum \frac{1}{s}|a_n s^n| = \frac{1}{s}\sum |a_n s^n|$ y puesto que $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente en $[-s, s]$, se sigue que $\sum |a_n s^n|$, y por lo tanto, $\sum \frac{1}{s}|a_n s^n|$, son series convergentes.

Ahora, la convergencia (absoluta) de la serie $\sum na_n x^{n-1}$ es una consecuencia del Criterio de Comparación (teorema 3.0.19). Puesto que x es arbitrario, la serie $\sum na_n x^{n-1}$ converge para cada $x \in (-R, R)$. $\triangle$

Inversamente, supongamos que el radio de convergencia de la serie $\sum na_n x^{n-1}$ es mayor que R, es decir, la serie $\sum na_n x^{n-1}$ converge en algún punto d tal que $d > R$. Por el teorema 9.2.10, la serie $\sum na_n x^{n-1}$, cuya suma denotamos por $f(x)$ es integrable término por término en $[0, d]$ y

$$\begin{aligned}\int_0^d f(x)dx &= \int_0^d \sum na_n x^{n-1}dx = \sum \int_0^d na_n x^{n-1}dx \\ &= \left(\sum a_n d^n\right) - a_0,\end{aligned}$$

lo cual es imposible pues la serie $\sum a_n x^n$ diverge en $x = d$. $\square$

Teorema 9.2.12. *Si la serie $f(x) = \sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces es diferenciable término a término en $(-R, R)$; es decir $f'(x) = \sum na_n x^{n-1}$ y esta serie converge en $(-R, R)$.*

Demostración: Se sigue del lema anterior que la serie $\sum na_n x^{n-1}$ converge en $(-R, R)$ y del corolario 9.2.6 que la convergencia es uniforme en cualquier subintervalo compacto de $(-R, R)$.

Claramente la serie $\sum a_n x^n$ converge en un punto de $(-R, R)$ (de hecho en todos!) y por lo tanto el resultado se sigue del teorema 9.1.3. $\square$

Corolario 9.2.13. . *El límite de una serie de potencias es una función C^∞ en su intervalo de convergencia.*

Ejemplo 9.2.14. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tiene radio de convergencia 1, y converge en $[-1, 1)$. En el intervalo $(-1, 1)$ su derivada término a término es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

pero esta serie no converge en $x = -1$.

Aunque las series $\sum a_n x^n$ y $\sum n a_n x^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia, este ejemplo demuestra que en los extremos del intervalo, una puede converger y la otra divergir.

Tarea 9.2.15. *Demostrar que* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge uniformemente a* $\dfrac{1}{(1-x)}$ *en cualquier subintervalo compacto de* $(-1,1)$*. Encontrar la función límite de* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ *y el radio de convergencia de esta serie.*

9.3 Las Series de Taylor y de Maclaurin

El corolario 9.2.13 dice que cualquier función representada por una serie de potencias es de clase C^∞.
¿Es cierto el inverso? Es decir, ¿Es cierto que cualquier función de clase C^∞ puede expresarse en la forma de una serie de potencias?
Esto es el problema que vamos a estudiar a continuación.

Sea f una función de clase C^∞ en un intervalo $(-r,r)$; del teorema de Taylor se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $x, a \in (-r,r)$, f se puede escribir en la forma:

$$(*) \qquad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

para algún z entre x y a.

Por otro lado, si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$, entonces f es diferenciable término a término. Si sustituimos $x=a$, tenemos $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (a-a)^k = a_0$.

Ahora, si efectuamos repetidas derivadas, obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k (x-a)^k)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} \end{aligned}$$

y por lo tanto, $f'(a) = 1a_1 = 1!a_1$.

Entonces,

$$f^{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_k(x-a)^{k-2}$$

y por lo tanto, $f^{(2)}(a) = 2 \cdot 1 a_2 = 2! a_2$.

Si continuamos este proceso, obtenemos, $f^{(k)}(a) = k! a_k$, y por lo tanto la única serie que puede converger a $f(x)$ es la serie

$$(**) \qquad f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Si converge a $f(x)$ en el intervalo de convergencia, esta serie se llama la *Serie de Taylor* de f alrededor de $x = a$. En caso de que $a = 0$, y la serie

$$f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge en el intervalo de convergencia, se llama la *Serie de Maclaurin* de f.

Aunque la serie de potencias (**) es la única serie que podría converger a $f(x)$ para cada x en su intervalo de convergencia, no hay ninguna garantía de que esto suceda.

Consideremos el siguente ejemplo.

Ejemplo 9.3.1. *Sea*

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{t^2}} & si \quad t \neq 0 \\ 0 & si \quad t = 0. \end{cases}$$

Tarea A. Demuestra por inducción que

$$f^{(n)}(t) = \frac{f(t)P_{2n}(t)}{t^{3n}},$$

donde

$$P_0(t) = 1 \quad \text{y} \quad P_{2n+2}(t) = (2 - 3nt^2)P_{2n}(t) + t^3 P'_{2n}(t).$$

Tarea B. Usa la Regla de l'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{f^{(n)}(t)}{t} \right] = 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)}{t - 0} = -\lim_{t \to 0} \frac{f^{(n-1)}(t)}{t} = 0.$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se sigue que la serie

$$f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

es igual a cero para cada $t \in \mathbb{R}$ y converge a $f(t)$ solo en $t = 0$; es decir, la función f no es representable por una serie de potencias alrededor de $t = 0$. $\square$

Si comparamos las expresiones (*) y (**), vemos que la serie

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

es el límite de la sucesion de polinomios de Taylor

$$\left\{ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right\}$$

y

$$\left| f(x) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \right| = |R_n(x)|.$$

Por lo tanto, la serie

$$f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

converge a $f(x)$ para cada x en el intervalo de convergencia si y sólo si $\{R_n(x)\} \to 0$ para cada x.

Ejemplo 9.3.2. *Calcular la serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, su radio de convergencia y verificar que converge a $f(x)$ en el intervalo de convergencia.*

Notemos que

$$f'(x) = \cos(x), f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen}(x), f^{(3)}(x) = -\cos(x), f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x) = f(x).$$

Por lo tanto,

$$f'(0) = 1, f^{(2)}(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(4)}(0) = f(0) = 0.$$

Por lo tanto, todas las coeficientes de potencias pares de x son iguales a 0. Por eso, si converge, la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ es

$$\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

El radio de convergencia de esta serie se obtiene de la siguiente manera:

Si ponemos $b_n = \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ entonces $b_{n+1} = \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y

$$\left\{\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|\right\} = \left\{\frac{x^2}{2n(2n+1)}\right\}$$

la cual converge a 0 para cada $x \in \mathbb{R}$.
Por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

converge para cada $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, debemos demostrar que esta serie converge a $\text{sen}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, lo cual es equivalente a demostrar que la sucesión de residuos $\{R_n(x)\} \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Usando el Teorema de Taylor, tenemos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{para algún } z \text{ entre } x \text{ y } 0.$$

Pero

$$f^{(n+1)}(z) = \pm\cos(z) \quad \text{o} \quad f^{(n+1)}(z) = \pm\text{sen}(z)$$

y por lo tanto, $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ y en consecuencia,

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

y puesto que

$$\left\{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\right\} \to 0,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene $\{R_n(x)\} \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. □

Tarea 9.3.3. *1) Calcular las series de Taylor de las siguientes funciones, encontrar su radio de convergencia y verificar que converge a $f(x)$ en el intervalo de convergencia.*

a) $f(x) = \cos(x)$ *alrededor de* $x = 0$,

b) $f(x) = \ln(x)$, *alrededor de* $x = 1$,

c) $f(x) = \tan(x)$, *alrededor de* $x = 0$.

d) $f(x) = \text{arcsen}(x)$ *alrededor de* $x = 0$.

2) Demostrar que si $\sum f_n$ es uniformemente convergente, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función constante 0.

9.4 Series de Fourier

Definición 9.4.1. *Sea f una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ o un intervalo; se dice que f es periódica con periodo a si $f(x+a) = f(x)$ para cada x tal que x y $x+a$ están en el dominio de f y a es el número positivo menor con esta propiedad.*

Una serie de Fourier es una serie de funciones de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}(kx)], \quad \text{donde } a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

Si se denota la suma de esta serie (si existe) por $f(x)$, entonces es una consecuencia inmediata de la periodicidad de $\mathrm{sen}(x)$ y $\cos(x)$ que

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

para cada x en el dominio de f y por lo tanto, f es periódica con periodo 2π. Por eso, solo consideramos valores de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Se puede demostrar que si la serie de Fourier converge uniformemente a f en un intervalo, entonces los valores de los números a_n y b_n (para $n = 0, 1, 2, \dots$) están dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{sen}(nx)dx.$$

El paso clave en la comprobación de estas fórmulas es la demostración de que si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\mathrm{sen}(nx)dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(mx)\mathrm{sen}(nx)dx = 0.\end{aligned}$$

y que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(mx) = \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) = \pi.$$

Tarea. Intentar verificar las igualdades anteriores.

Los números a_n y b_n se llaman *los coeficientes de Fourier* de la función f.

Tarea. Encontrar los coeficientes de Fourier de las siguientes funciones en $[0, 2\pi]$:

a) $f(x) = x$,

b) $f(x) = |\mathrm{sen}(x)|$,

c) $f(x) = |1 - x|$.