Cálculo Diferencial e Integral I

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

Parte 1 - Limites
Limites envolvendo o infinito, Continuidade, Retas tangentes.

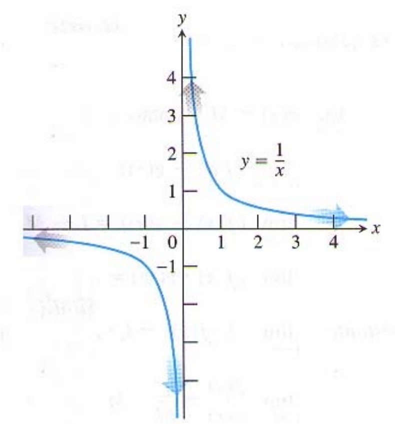
1) Introdução

Nessa aula continuaremos nosso estudo sobre limites de funções. Analisaremos o limite de funções quando o $x \to \pm\infty$ (infinito). Utilizaremos o conceito de assíntotas horizontal e vertical. Posteriormente veremos detalhadamente a continuidade de funções e suas aplicações. Por fim discutiremos o conceito de retas tangentes e seu papel no entendimento da taxa de variação (derivada em um ponto).

2) Limites envolvendo o infinito ($x \to \pm\infty$)

O símbolo para o infinito (∞) não representa nenhum numero real. Usamos ∞ para descrever o comportamento de um a função quando os valores em seu domínio ou imagem ultrapassam todos os limites finitos.

Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ é definida para qualquer valor de $x \neq 0$. Quando x é positivo e vai ficando cada vez maior, $1/x$ torna-se cada vez menor. Quando x é negativo e vai ficando cada vez maior em modulo, $1/x$ novamente é cada vez menor. Podemos sintetizar essas observações dizendo que $f(x) = 1/x$ tem limite 0 quando $x \to \pm\infty$.



Definições Limites com $x \to \pm\infty$

1. Dizemos que $f(x)$ possui o **limite L quando x tende ao infinito** e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se, à medida que x se distancia da origem no sentido positivo, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L.

2. Dizemos que $f(x)$ possui o **limite L com x tendendo a menos infinito** e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se, à medida que x se distancia da origem no sentido negativo, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de L.

A estratégia para calcular limites de funções quando x→ ± ∞ é semelhante àquela usada para o calculo dos limites finitos visto anteriormente. Lá, primeiro calculamos o limite das funções constante e identidade *y=k* e *y=x*. Então, estendemos esses resultados a outras funções aplicando um teorema sobre limites de combinações algébricas. Aqui, faremos a mesma coisa, exceto pelo fato de as funções iniciais serem *y=k* e *y=1/x* em vez de *y=k* e *y=x*. Os fatos bascos a serem verificados quando x→ ± ∞ são indicados no exemplo a seguir.

Exemplo 1 Limites de $1/x$ e k quando $x \to \pm\infty$

Demonstre que

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} k = \lim\limits_{x\to-\infty} k = k.$

Solução

(a) Na Figura 1.26, podemos observar que $y = 1/x$ se aproxima cada vez mais de zero à medida que o valor de x se afasta da origem, tanto para o lado positivo quanto para o negativo.

(b) Não importa quanto o valor de x se afaste da origem, a função constante $y = k$ sempre tem exatamente o valor k.

OBS: Limites tendendo ao infinito apresentam as mesmas propriedades dos limites finitos!

Teorema 7 Regras para Limites quando $x \to \pm\infty$

Se L, M e k são números reais e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{então}$$

1. *Regra da Soma:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regra da Subtração:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regra do Produto:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. *Regra da Multiplicação por Constante:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
5. *Regra do Quociente:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regra da Potenciação:* Se r e s são inteiros, $s \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

desde que $L^{r/s}$ seja um número real.

Exemplo 2 Usando o Teorema 7

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 5 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ Regra da Soma

$= 5 + 0 = 5$ Limites Conhecidos

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ Regra do Produto

$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$ Limites Conhecidos

2.1) Limites de Funções racionais quando $x \to \pm\infty$

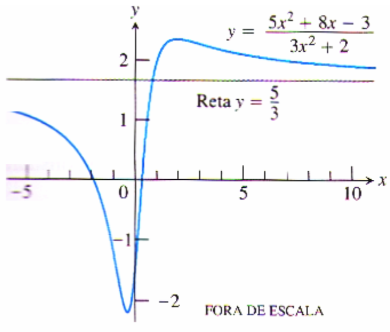
Para determinar o limite de uma função racional quando $x \to \pm\infty$, podemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparece no denominador. O que acontece depois depende dos graus dos polinômios envolvidos.

O **grau** do polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ é n, o maior expoente.

Exemplo 3 Numerador e Denominador de Mesmo Grau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

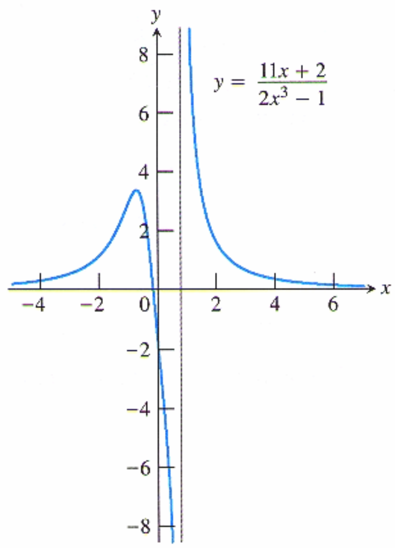
Divida o numerador e o denominador por x^2.



Exemplo 4 Grau do Numerador Menor que o Grau do Denominador

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)} = \frac{0+0}{2-0} = 0$$

Divida o numerador e o denominador por x^3.



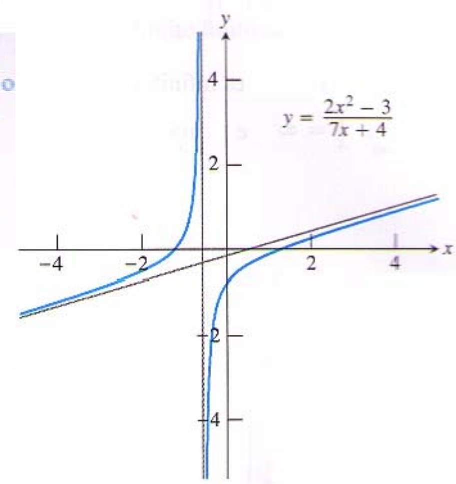
Exemplo 5 Grau do Numerador Maior que o Grau do Denominador

(a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-(3/x)}{7+(4/x)} = -\infty$$

Divida o numerador e o denominador por x. O numerador agora tende a $-\infty$ ao passo que o denominador tende a 7, então a razão $\to -\infty$.

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+(7/x)}{2-(3/x)-(10/x^2)} = \infty$$

Divida o numerador e o denominador por x^2. O numerador $\to \infty$; o denominador $\to 2$; a razão $\to \infty$.



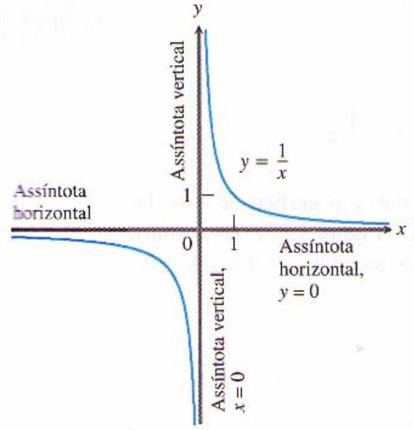
2.2) Assíntotas Horizontais e Verticais: Limites infinitos

Analisando f(x) = 1/x da figura ao lado, podemos observar o seguinte comportamento:

(a) Conforme $x \to \infty$, $(1/x) \to 0$, e então escrevemos $\lim_{x\to\infty} (1/x) = 0$.
(b) Conforme $x \to -\infty$, $(1/x) \to 0$, e então escrevemos $\lim_{x\to-\infty} (1/x) = 0$.

Dizemos que a reta $y = 0$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de f.

Se a distância entre o gráfico de uma função e uma reta fixa se aproxima de zero à medida que a curva se afasta da origem, dizemos que a curva se aproxima assintoticamente da reta e que a reta é uma *assíntota* do gráfico.



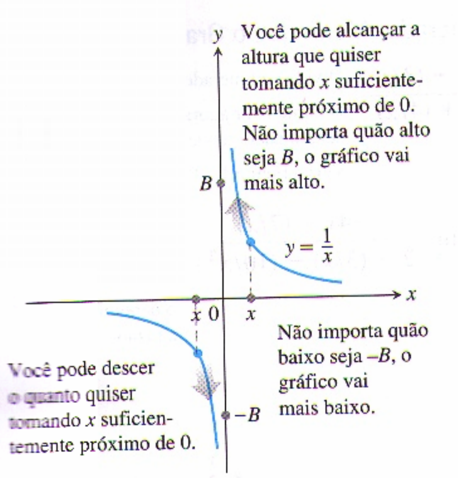
Os eixos cartesianos são assíntotas de ambos os ramos da hipérbole $y = 1/x$.

Analisando melhor a função f(x)=1/x na figura ao lado percebemos que conforme $x \to 0^+$, os valores de f crescem sem limitação, alcançando e ultrapassando todo numero real positivo. Isto é, dado qualquer numero real positivo B, mesmo que muito grande, os valores de f ficam ainda maiores. Portanto, f(x) não em limite quando $x \to 0^+$. Entretanto é conveniente descrever o comportamento de f (x) dizendo que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Quando $x \to 0^-$ os valores de f(x)=1/x tornam-se arbitrariamente grandes (em valores absolutos) e negativos logo dizemos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$



Limites infinitos laterais:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Definições Assíntotas Verticais e Horizontais

A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Uma reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Exemplo 6 Procurando Assíntotas

Encontre as assíntotas do gráfico de

$$y = \frac{x+3}{x+2}.$$

Solução Estamos interessados no comportamento da curva quando $x \to \pm\infty$ e quando $x \to -2$, onde o denominador é zero.

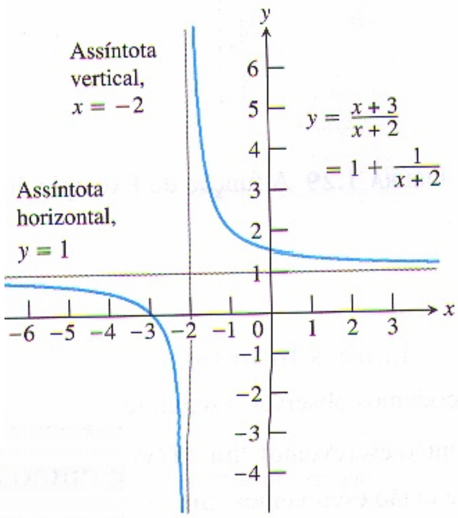
Vemos rapidamente quais são as assíntotas se reescrevemos a função racional dividindo o numerador pelo denominador

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ \hline -x-2 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Isso nos permite reescrever y:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

Agora vemos que a curva em questão é o gráfico de $y = 1/x$ deslocado 1 unidade para cima e 2 para a direita (Figura). As assíntotas, em vez de serem os eixos cartesianos, agora são as retas $y = 1$ e $x = -2$.



As retas $y = 1$ e $x = -2$ são as assíntotas da curva $y = (x+3)/(x+2)$ (Exemplo 6).

Exemplo 7 Assíntotas Não São Necessariamente Bilaterais

Encontre as assíntotas do gráfico de

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}.$$

Solução Estamos interessados no comportamento do gráfico quando $x \to \pm\infty$ e quando $x \to \pm 2$, onde o denominador é zero. Observe que f é uma função par de x, então o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

O comportamento quando $x \to \pm\infty$. Uma vez que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, a reta $y = 0$ é uma assíntota da curva à direita. Por simetria, também é uma assíntota à esquerda (Figura 1.33).

O comportamento quando $x \to \pm 2$. Uma vez que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,$$

a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical tanto à esquerda quanto à direita de $x = 2$. Por simetria, o mesmo vale para a reta $x = -2$.

Não há outras assíntotas porque f tem um limite finito em qualquer outro ponto.

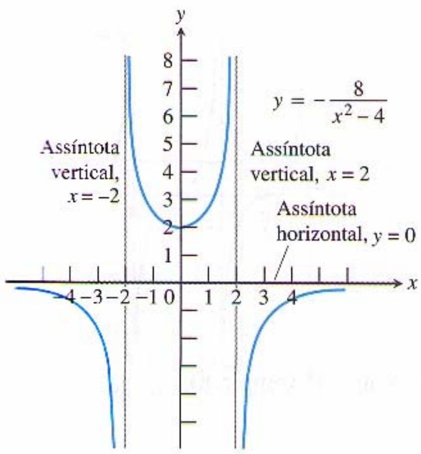


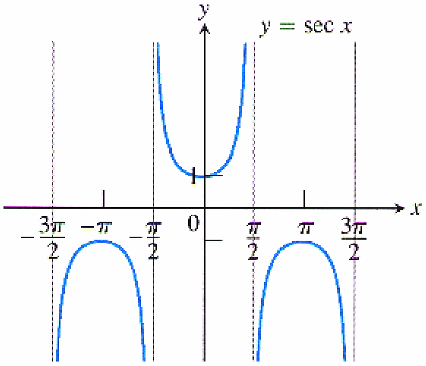
Gráfico de $y = -8/(x^2 - 4)$. Veja que a curva se aproxima do eixo x apenas por um lado.

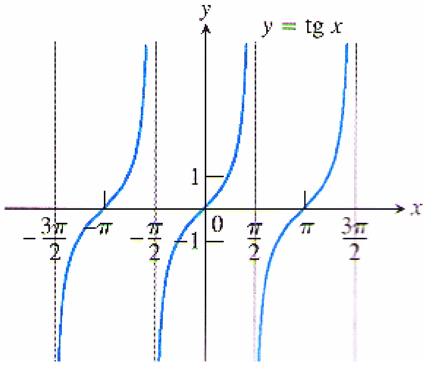
Exemplo 8 Curvas com Infinitas Assíntotas

As curvas

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{e} \qquad y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

apresentam assíntotas verticais em múltiplos inteiros ímpares de $\pi/2$, onde $\cos x = 0$

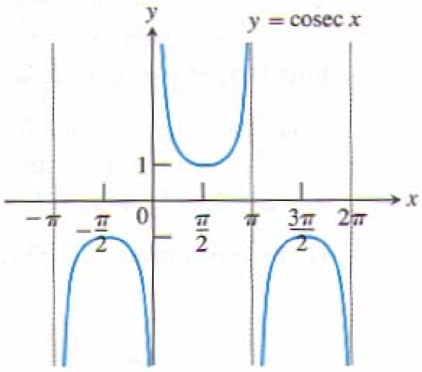


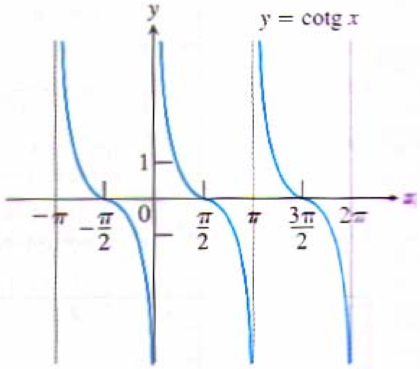


Os gráficos de

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{e} \qquad y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

têm assíntotas verticais para múltiplos inteiros de π, quando $\operatorname{sen} x = 0$





x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005

Exemplo 9 Assintota Horizontal de $y = e^x$

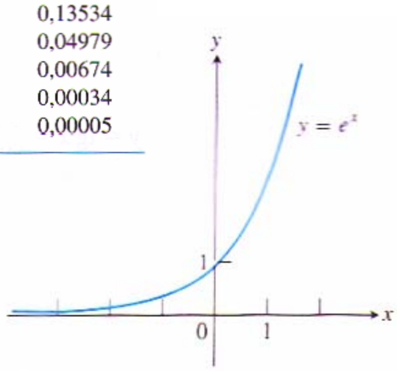
A curva

$$y = e^x$$

tem a reta $y = 0$ (o eixo x) como assíntota horizontal. Podemos observar no gráfico da Figura e na tabela anexa. Escrevemos:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0\,.$$

Veja que os valores de e^x se aproximam rapidamente de 0.



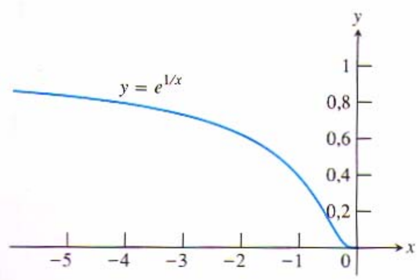
A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal da curva de $y = e^x$.

Exemplo 11 Usando a Substituição

Encontre $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

Solução Tomamos: $t = 1/x$. Pela Figura 1.31 sabemos que $t \to \infty$ quando $x \to 0^-$. Portanto,

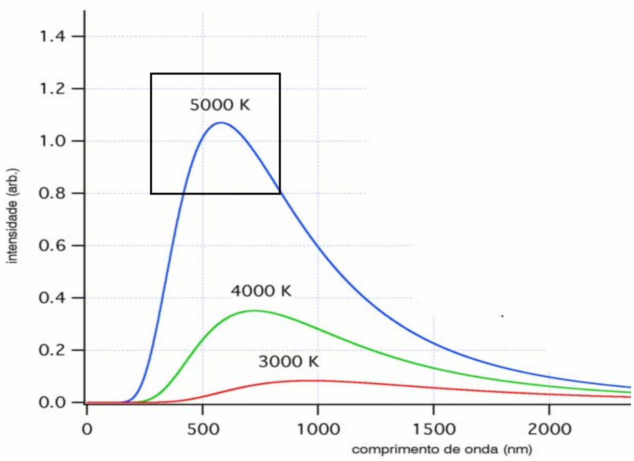
$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0 \qquad \text{Exemplo 9}$$



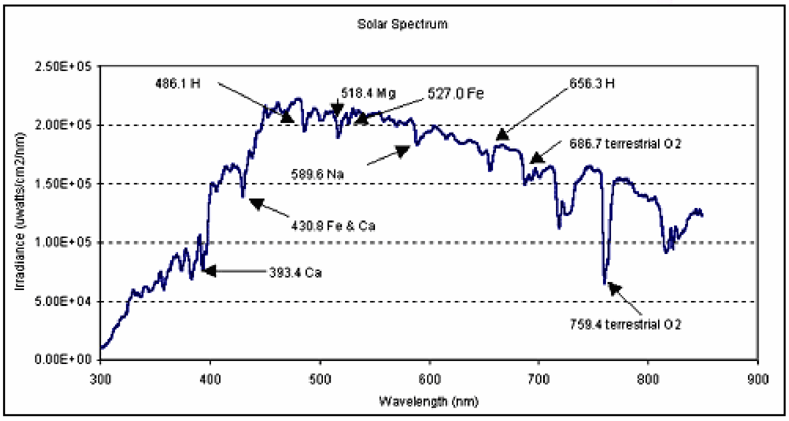
O gráfico de $y = e^{1/x}$ para $x < 0$ mostra que $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$

3) Continuidade

Funções contínuas são as funções que usamos para achar o ponto em que um planeta mais se aproxima do Sol ou o pico de concentração de anticorpos no plasma sanguíneo. Elas também são as funções que usamos para descrever como um corpo se move através do espaço ou como a velocidade de uma reação química varia com o tempo. Na verdade, tantos processos físicos ocorrem de modo contínuo que durante os séculos XVIII e XIX raramente se pensou em pesquisar qualquer outro tipo de comportamento. Foi uma surpresa quando os físicos de 1920 descobriram que a luz vem em partículas e que os átomos aquecidos emitem luz em freqüências distintas (Como conseqüência dessas e de outras descobertas e em função do grande uso de funções descontínuas na ciência da computação, na estatística e em modelos matemáticos, o tema da continuidade se tornou importante tanto prática como teoricamente.

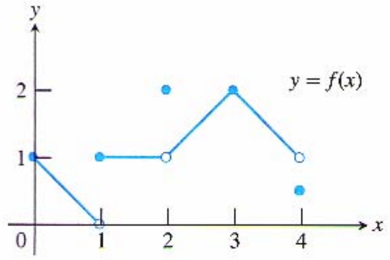


Espectro de corpo negro – Função continua.

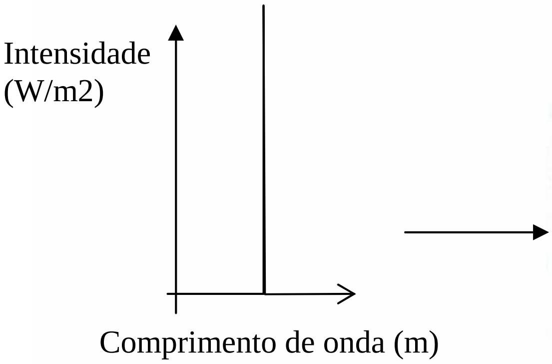


Espectro de Solar com linhas espectrais – ainda continuo.

OBS. Se as linhas tivessem largura infinitesimalmente pequena o espectro seria descontinuo nesses pontos.



A função é contínua em [0, 4] exceto em $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$



Exemplo 1 Investigando a Continuidade

Encontre os pontos nos quais a função f na Figura é contínua e aqueles em que é descontínua.

Solução A função f é contínua em todos os pontos de seu domínio [0, 4] exceto para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$. Nesses pontos há saltos no gráfico. Perceba a relação existente entre o limite de f e o valor de f em cada ponto do domínio da função.

Pontos nos quais f é contínua:

Quando $x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

Quando $x = 3$, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Quando $0 < c < 4$, $c \neq 1, 2$, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Pontos nos quais f é descontínua:

Quando $x = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

Quando $x = 2$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, mas $1 \neq f(2)$.

Quando $x = 4$, $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$, mas $1 \neq f(4)$.

Quando $c < 0$, $c > 4$, estes pontos não estão no domínio de f.

Para definirmos a continuidade em um ponto do domínio de uma função, precisamos definir a continuidade em um ponto interno (o que envolve um limite bilateral) e em um ponto final (o que envolve um limite lateral)

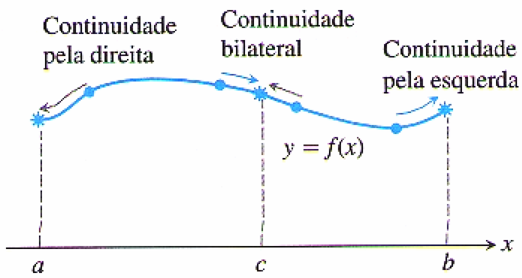


FIGURA Continuidade nos pontos a, b e c.

Definição Continuidade em um Ponto

Ponto interior: Uma função $y = f(x)$ é **contínua em um ponto interior** c de seu domínio quando

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Extremidades: Uma função $y = f(x)$ é **contínua na extremidade esquerda** a ou é **contínua na extremidade direita** b de seu domínio quando

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \quad \text{respectivamente.}$$

Se uma função f não é contínua em um ponto c, dizemos que f é **descontínua** em c e que c é um **ponto de descontinuidade** de f. Observe que c não precisa pertencer ao domínio de f.

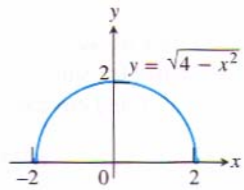


FIGURA 1.47 Contínua em todos os pontos de seu domínio.

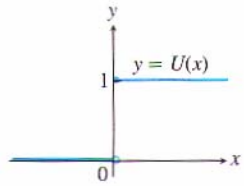


FIGURA 1.48 Continuidade à direita da origem.

Uma função f será **contínua à direita** de um ponto $x = c$ em seu domínio se $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. Será **contínua à esquerda** de c se $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. Assim, uma função será contínua em uma extremidade esquerda a de seu domínio se for contínua à direita de a e será contínua uma extremidade direita b de seu domínio se for contínua à esquerda de b. Uma função será contínua em um ponto interno c de seu domínio se e somente se for contínua à direita e à esquerda de c (Figura 1.46).

Exemplo 2 Uma Função Contínua em seu Domínio

A função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, $[-2, 2]$ (Figura 1.47), inclusive em $x = -2$, quando f é contínua à direita e $x = 2$, quando f é contínua à esquerda.

Exemplo 3 Uma Função com Descontinuidade de Salto

A função 'salto unitário' $U(x)$, traçada na Figura 1.48, é contínua à direita em $x = 0$, mas não é nem contínua à esquerda nem contínua aí. Ela apresenta descontinuidade de salto em $x = 0$.

Nós resumimos a continuidade em um ponto na forma de um teste.

Teste de Continuidade

Uma função $f(x)$ será contínua em $x = c$ se e somente se ela obedecer às três condições seguintes:

1. $f(c)$ existe (c está no domínio de f)

2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe (f tem um limite quando $x \to c$)

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (o limite é igual ao valor da função)

3.1) Funções contínuas

Uma função é **contínua em um intervalo** se e somente se for contínua em cada ponto do intervalo. Uma **função contínua** é aquela que é contínua em cada ponto de seu domínio. Uma função contínua não precisa ser contínua em todo intervalo. Por exemplo, $y = 1/x$ não é contínua em $[-1, 1]$

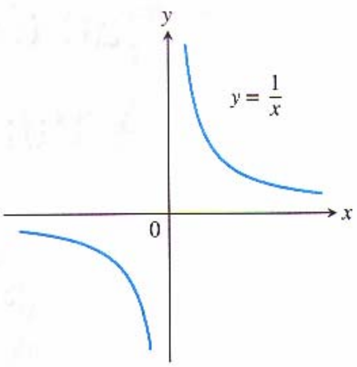


FIGURA 1.51 A função $y = 1/x$ é contínua em cada valor de x exceto em $x = 0$. Ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$ (Exemplo 5).

Exemplo 5 Identificando Funções Contínuas

A função $y = 1/x$ (Figura 1.51) é uma função contínua por ser contínua em cada ponto de seu domínio. Entretanto, ela apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 0$, porque aí não é definida.

Os seguintes tipos de funções são contínuos em cada ponto de seus domínios:

- polinomiais;
- funções racionais;
- funções raiz ($y = \sqrt[n]{x}$, n um inteiro positivo maior que 1);
- funções trigonométricas;
- funções trigonométricas inversas;
- funções exponenciais;
- funções logarítmicas.

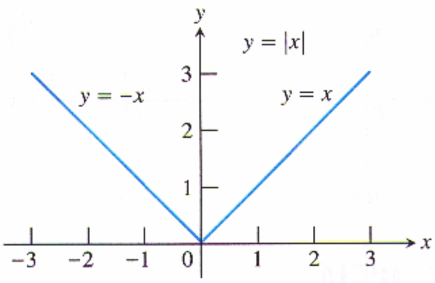


FIGURA 1.52 O canto preciso não impede que a função seja contínua na origem.

Funções polinomiais f são contínuas em todo número c porque $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Funções racionais são contínuas em todo ponto de seus domínios. Elas têm pontos de descontinuidade nos zeros de seus denominadores. Por seus gráficos não nos surpreendemos com o fato de que as funções seno e cosseno são contínuas.

A função inversa de qualquer função contínua é contínua. Vemos isso porque o gráfico de uma função contínua f não tem quebras e o gráfico de f^{-1} é obtido pela reflexão do gráfico de f sobre a reta $y = x$ (portanto o gráfico de f^{-1} também não apresenta quebras).

A função exponencial $y = a^x$ foi definida para ser contínua e, portanto, sua inversa $y = \log_a x$ é também contínua sobre seu domínio.

A função $f(x) = |x|$ é contínua em cada valor de x (Figura 1.52). Se $x > 0$, temos $f(x) = x$, um polinômio. Se $x < 0$, temos $f(x) = -x$, outro polinômio. Por fim, na origem, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$.

Combinações Algébricas

Como você pode ter percebido, combinações algébricas de funções contínuas são contínuas em qualquer lugar onde elas sejam definidas.

Teorema 8 Propriedades de Funções Contínuas

Se as funções f e g são contínuas em $x = c$, então as seguintes combinações são contínuas em $x = c$.

1. *Somas:* $f + g$
2. *Diferenças:* $f - g$
3. *Produtos:* $f \cdot g$
4. *Constantes múltiplas:* $k \cdot f$, para qualquer número k
5. *Quocientes:* f/g, uma vez que $g(c) \neq 0$

4) Retas tangentes

Para círculos, a tangência é 'natural'? Uma reta L será tangente a um círculo em um ponto P se L passar por P perpendicularmente ao raio em P (Figura 1.58). Uma linha como essa apenas *toca* o círculo. Mas o que significa dizer que uma reta L é tangente a alguma outra curva C em um ponto P? Generalizando a partir da geometria do círculo, podemos dizer que significa uma das afirmações a seguir.

1. L passa por P perpendicularmente à reta de P ao centro de C.
2. L passa somente por um ponto de C: o ponto P.
3. L passa por P e fica somente de um lado de C.

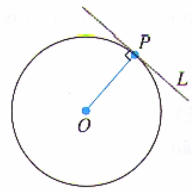
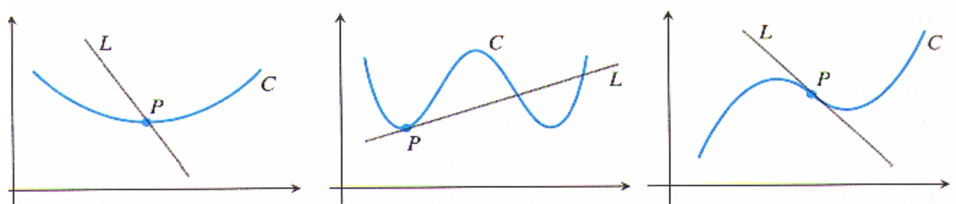


FIGURA 1.58 L será tangente ao círculo em P se passar por P perpendicularmente ao raio OP.

Embora essas afirmações sejam válidas se C for um círculo, nenhuma delas funcionará de maneira consistente para curvas mais gerais. A maioria das curvas não tem centro, e uma reta que talvez quiséssemos chamar de tangente deve cortar C em outros pontos ou cruzar C no ponto de tangência (Figura 1.59).



L encontra C somente em P mas não é tangente a C.

L é tangente a C em P mas encontra C em vários pontos.

L é tangente a C em P mas está dos dois lados de C, cruzando C em P.

Para definirmos tangência para curvas em geral, precisamos de um método *dinâmico* que leve em conta o comportamento das secantes que passam por P e pontos próximos Q, quando Q se move em direção a P ao longo da curva (Figura 1.60). Assim:

1. Começamos com o que *podemos* calcular, denominado coeficiente angular da secante PQ.

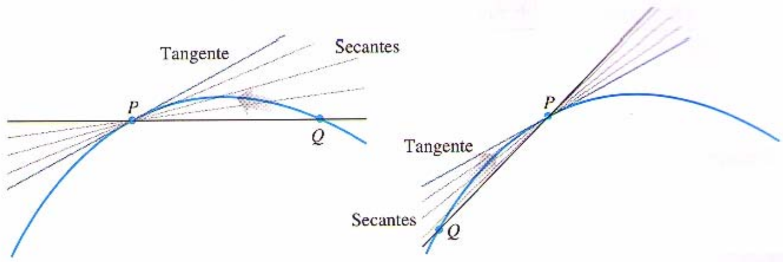


FIGURA 1.60 O método dinâmico para a tangência. A tangente a uma curva em P é a reta através de P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$ de cada lado.

2. Investigamos o limite do coeficiente angular da secante quando Q se aproxima de P ao longo da curva.

3. Se o limite existe, então o tomamos como o coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente à curva em P como sendo a reta através de P com esse coeficiente angular.

Exemplo 1 Reta Tangente a uma Parábola

Determine o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$. Escreva uma equação para a tangente à parábola nesse ponto.

Solução Começamos com uma reta secante através de $P(2, 4)$ e $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ próximo a P. Então escrevemos uma expressão para o coeficiente angular da secante PQ e investigamos o que acontece com o coeficiente angular quando Q se aproxima de P ao longo da curva:

$$\text{Coeficiente angular da secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Se $h > 0$, então Q fica acima e à direita de P, como na Figura 1.61. Se $h < 0$, então Q fica à esquerda de P (não mostrado). Em cada caso, quando Q se aproxima de P ao longo da curva, h tende a zero e o coeficiente angular da secante tende a 4:

$$\lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

Tomamos 4 como sendo o coeficiente angular da parábola em P.

A tangente à parábola em P é a reta através de P com coeficiente angular 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \quad \text{Equação ponto/coeficiente angular}$$
$$y = 4x - 4.$$

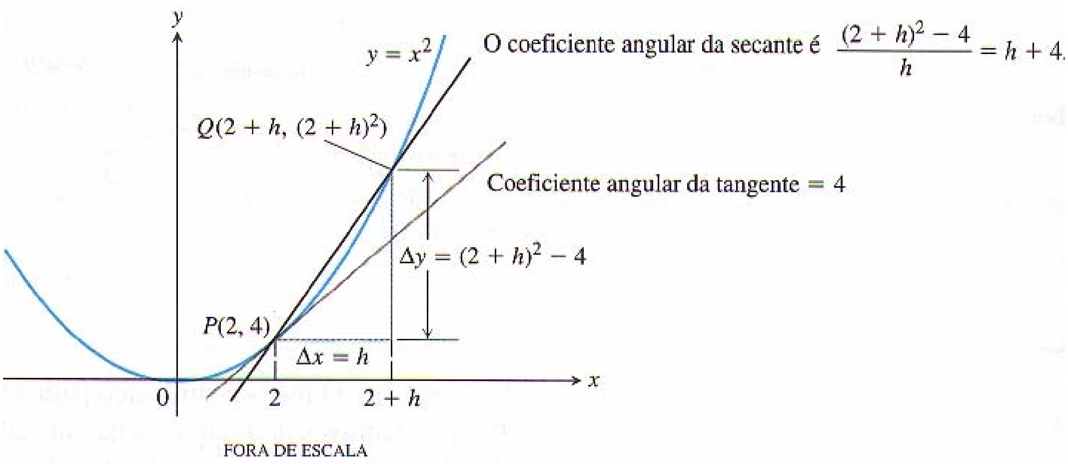


FIGURA 1.61 Diagrama para obter o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$

4.1) Obtendo uma reta tangente a um dado ponto de um gráfico de uma função

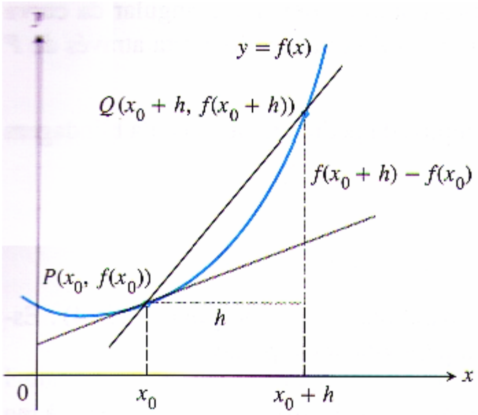


FIGURA 1.62 O coeficiente angular da tangente é

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Obtendo uma Tangente ao Gráfico de uma Função

Para determinarmos uma tangente a uma curva arbitrária $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$, usamos o mesmo processo dinâmico. Calculamos o coeficiente angular da secante através de P de um ponto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Então investigamos o limite do coeficiente angular quando $h \to 0$ (Figura 1.62). Se o limite existe, então o tomamos como coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente em P como sendo a reta que passa por P que tem esse coeficiente angular.

Definições Coeficiente Angular e Reta Tangente

O coeficiente angular da curva $y = f(x)$ em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ é o número

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(desde que o limite exista).}$$

A **reta tangente** ao gráfico de f em P é a reta que passa por P e tem esse coeficiente angular.

Sempre que elaboramos uma nova definição, é bom testá-la com objetos conhecidos para ter certeza de que dará os resultados desejados em casos familiares.

Resumindo: Como Achar a Tangente a curva y= f(x) em (x_o, y_o)

1. Calcule $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$.
2. Calcule o coeficiente angular
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
3. Se o limite existe, então determine a reta tangente quando
$y = y_0 + m(x - x_0)$.

Como Achar a Tangente à Curva $y = f(x)$ em (x_0, y_0)

1. Calcule $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$.
2. Calcule o coeficiente angular
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
3. Se o limite existe, então determine a reta tangente quando
$y = y_0 + m(x - x_0)$.

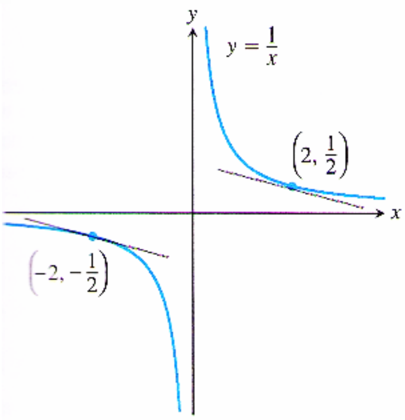


FIGURA 1.63 As duas retas tangentes a $y = 1/x$ tendo coeficiente angular $-1/4$.

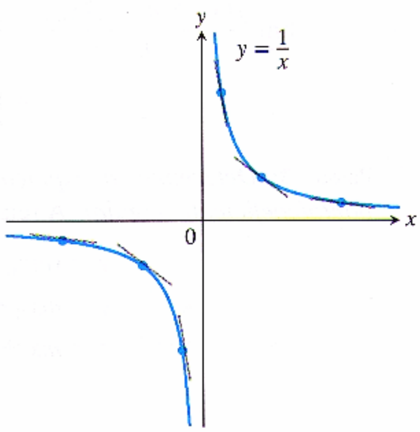


FIGURA 1.64 Os coeficientes angulares das tangentes, inclinadas próximo à origem, vão diminuindo à medida que o ponto de tangência se afasta da origem.

Exemplo 3 Coeficiente Angular e Tangente para $y = 1/x$

(a) Determine o coeficiente angular da curva $y = 1/x$ em $x = a$.

(b) Onde o coeficiente angular é $-1/4$?

(c) O que acontece com a tangente à curva no ponto $(a, 1/a)$ quando a varia?

Solução

(a) Dado $f(x) = 1/x$. O coeficiente angular em $(a, 1/a)$ é

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

Observe que foi preciso escrever '$\lim_{h \to 0}$' antes de cada fração até o momento em que pudemos calcular o limite fazendo a substituição $h = 0$.

(b) O coeficiente angular de $y = 1/x$ no ponto $x = a$ é $-1/a^2$. Este será $-1/4$ que

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Essa equação equivale a $a^2 = 4$, então $a = 2$ ou $a = -2$. A curva tem coeficiente angular $-1/4$ nos pontos $(2, 1/2)$ e $(-2, -1/2)$ (Figura 1.63).

(c) Observe que o coeficiente angular $-1/a^2$ é sempre negativo. Quando $a \to 0^+$, o coeficiente angular tende a $-\infty$ e a tangente se torna cada vez mais inclinada (Figura 1.64). Notamos a mesma situação quando $a \to 0^-$. Quando a se afasta da origem em qualquer direção, o coeficiente angular tende a 0^- e a tangente se torna menos inclinada.

4.2) Taxa de variação: Derivada em um Ponto

A expressão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

é chamada de **quociente de diferença de f em x_0 com incremento h**. Se o quociente de diferença tem um limite quando h tende a zero, esse limite é chamado de **derivada de f em x_0**. Se interpretamos o quociente de diferença como um coeficiente angular da secante, a derivada nos dá o coeficiente angular da tangente e da curva no ponto onde $x = x_0$. Se interpretamos o quociente de diferença como uma taxa média de variação, como fizemos na Seção 1.1, a derivada nos dá a taxa de variação da função em relação a x no ponto $x = x_0$. A derivada é uma das mais importantes ferramentas matemáticas usadas em cálculo. Começaremos a estudá-la no Capítulo 2. Outra ferramenta importante é a integral, e começaremos a estudá-la no Capítulo 4.

Exemplo 4 Velocidade Instantânea (Continuação da Seção 1.1, Exemplos 1 e 2)

Nos exemplos 1 e 2 da Seção 1.1, estudamos a velocidade de uma pedra em queda livre a partir do repouso próximo à superfície da Terra. Sabíamos que a pedra caía $y = 4{,}9t^2$ metros durante os primeiros t segundos e usamos uma seqüência de velocidades médias acrescentando intervalos curtos para estimar sua velocidade no instante $t = 2$. Qual *era* exatamente a velocidade da pedra nesse momento?

Solução Seja $f(t) = 4{,}9t^2$. A velocidade média da pedra no intervalo entre $t = 2$ e $t = 2 + h$ s era

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h} = \frac{4{,}9(h^2 + 4h)}{h} = 4{,}9(h+4).$$

A velocidade da pedra no instante $t = 2$ era

$$\lim_{h \to 0} 4{,}9(h+4) = 4{,}9(0+4) = 19{,}6 \text{ m/s}.$$

Nossa estimativa inicial de 19,6 metros por segundo estava certa.

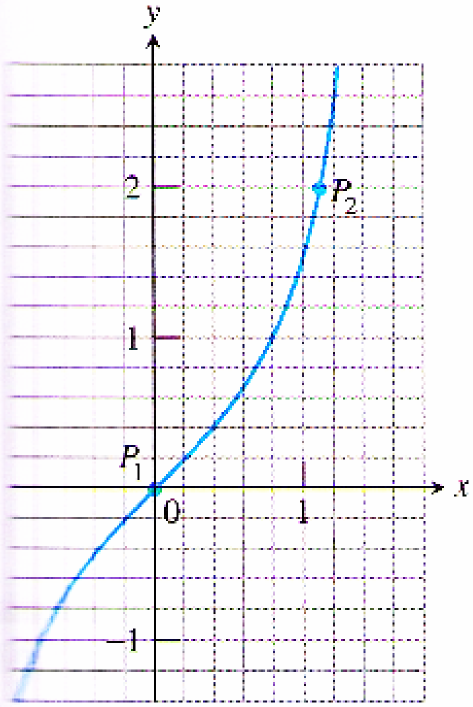
OBSERVACÃO: Todas essa afirmações referem-se a mesma coisa.

1. O coeficiente angular de $y = f(x)$ em $x = x_0$
2. O coeficiente angular da tangente à curva $y = f(x)$ em $x = x_0$
3. A taxa de mudança de $f(x)$ em relação a x em $x = x_0$
4. A derivada de f em $x = x_0$
5. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

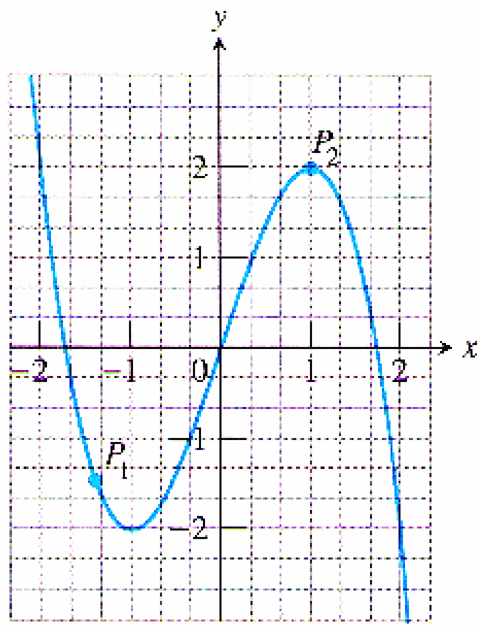
Exercícios propostos.

Nos exercícios 1–2, use o fundo quadriculado e uma régua para fazer estimativas do coeficiente angular da curva (em unidades y por unidades x) nos pontos P_1 e P_2. As curvas apresentadas aqui podem ter sofrido alguma mudança durante o processo editorial, portanto, suas respostas podem ser diferentes daquelas fornecidas no final do livro.

1.



2.



3 *Queda livre em Marte* A equação para queda livre na superfície de Marte é $s = 1{,}86t^2$ m, sendo t em segundos. Suponha que uma pedra caia de um penhasco de 200 m de altura. Determine a velocidade da pedra quando $t = 1$s.

4 Em quais pontos dos gráficos das funções dos exercícios abaixo das funções abaixo possuem tangente horizontal?

$f(x) = x^2 + 4x - 1$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x^3 - 3x$

5 Determine as equações de todas as tangentes à curva $y = 1/(x - 1)$ que tenham coeficiente angular -1.

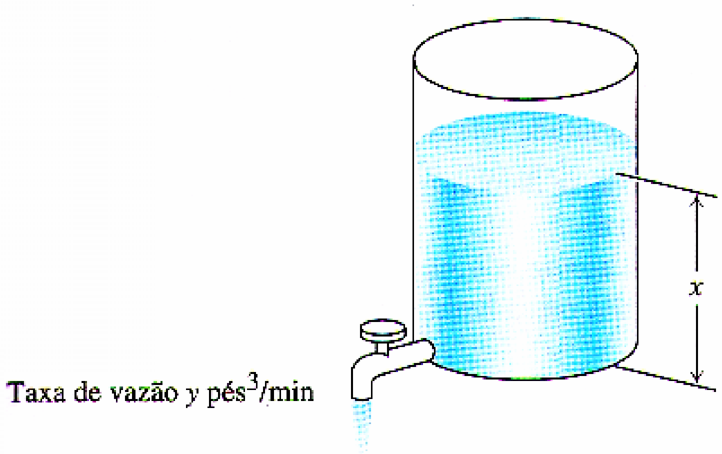
6 Determine a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ que apresente coeficiente angular $1/4$.

7 *A contração de Lorentz* De acordo com a teoria da relatividade, o comprimento de um objeto, por exemplo, de um foguete, parece a um observador depender da velocidade com que o objeto se desloca em relação ao próprio observador. Se ele medir o comprimento L_0 do foguete em repouso, depois com a velocidade v, o comprimento parecerá ser

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Essa é a equação da contração de Lorentz. Nela c é a velocidade da luz no vácuo, cerca de 3×10^8 m/s. O que acontece com L à medida que v aumenta? Calcule $\lim_{v \to c^-} L$. Por que foi necessário empregar o limite lateral à esquerda?

8 *Controlando o fluxo de um tanque enquanto a água escoa* A Lei de Torricelli diz que ao se esvaziar um tanque como o indicado na figura, a taxa y de escoamento da água é uma constante multiplicada pela raiz quadrada da altura da coluna de água x. A constante depende da forma e do tamanho da válvula de saída.



Suponha que $y = \sqrt{x} / 2$ para um dado tanque. Seu objetivo é manter uma taxa de vazão razoavelmente constante e para isso você adiciona água ao tanque com uma mangueira de vez em quando. Qual é a altura da coluna de água que você deve estabelecer para manter a taxa de vazão

(a) a 0,2 pé^3/min da taxa $y_0 = 1$ pé^3/min.

(b) a 0,1 pé^3/min da taxa $y_0 = 1$ pé^3/min.

Estudar os exercícios resolvidos sobre limites no endereço eletrônico abaixo:
http://www.mtm.ufsc.br/~azeredo/calculos/Acalculo/index.html