CURSO CERO DE MATEMÁTICAS

Álgebra y Geometría

Dra. Mónica Cortés Molina - Dr. Fernando García Alonso
Dr. José A. Reyes Perales - Dr. Ferran Verdú Monllor

RESUMEN TEORÍA DE ÁLGEBRA

Matrices

Las matrices constituyen una herramienta fundamental para la ejecución de cálculos eficientes en el Algebra Lineal, ya que se encuentran presentes, como elemento de enlace entre los diferentes conceptos, en los siguientes temas: sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, funciones lineales y determinantes.

Definición de matriz de números reales: Se llama matriz de orden $m \times n$ a un tabla de $m \times n$ números reales, ordenados en *m* filas y *n* columnas, encerrados por un paréntesis o corchete. Se denotan con letras mayúsculas (*A*; *B*; *C*…)

Tipos de matrices:
1. Matriz Fila: tiene orden $1 \times n$, es decir una fila.
2. Matriz Columna: tiene orden $m \times 1$, es decir una columna.
3. Matriz Cuadrada: tiene el mismo número de filas y columnas, es decir $m = n$.
4. Matriz Rectangular: tiene diferentes el número de filas y columnas, es decir $m \neq n$.
5. Matriz Transpuesta de una dada: es aquella matriz que tiene como columnas las filas de la matriz dada.
6. Matriz Diagonal: es una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.
7. Matriz Escalar: es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son iguales, es decir $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$ y $a_{ij} = k$ para todo $i = j$.
8. Matriz Identidad o Matriz Unidad: es un caso especial de las matrices escalares en la que los elementos de la diagonal principal son todos igual a 1. Se denota con la letra *I*.
9. Matriz Triangular: se dice que una matriz es triangular si todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son iguales a cero, puede ser triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, o superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.
10. Matriz Opuesta a una matriz dada: es aquella cuyos elementos son iguales a los de la matriz dada, pero de signo contrario.
11. Matriz Simétrica: es una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ que es igual a $A^t = \left(a_{ji}\right)$. Es decir, los $a_{ij} = a_{ji}$ para todo *i, j* = 1…*n*.
12. Matriz Antisimétrica: o también Hemisimétrica es una matriz *A* tal que $-A^t = A$.
13. Matrices Permutables: Son aquellas que verifican la propiedad conmutativa es decir $A{*}\cdot B = B{*}\cdot A$.
14. Matrices Antipermutables: Son aquellas que verifican: $B * A = -B * A$.
15. Matriz Involutiva: si se cumple que $A^2 = I$ ($A^2 = A * A$).
16. Matriz Idempotente: si se cumple que $A^2 = A$.
17. Matriz Nilpotente de orden *k*: si se cumple que $A^k = 0$ y que A^{k-1} es no nula, *k* es un entero positivo, y representa el índice de nilpotencia de la matriz.
18. Matriz Singular: su determinante es igual a cero.
19. Matrices Equivalentes: dos matrices son equivalentes ($A \sim B$) si una de ellas se deduce de la otra como consecuencia de transformaciones elementales.

Rango de una matriz:
Es el número de filas o columnas linealmente independientes.

Operaciones elementales con matrices:
1. Intercambiar filas o columnas.
2. Multiplicación de una fila o columna por un escalar diferente de cero.
3. Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila (o realizar el mismo proceso pero con columnas).

Propiedades de la Adición de matrices:
1. Conmutativa: $A+B = B+A$
2. Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. Elemento neutro: $A+0 = 0+A$; 0 es la matriz nula
4. Distributiva: $k\cdot(A+B) = k\cdot A+k\cdot B$
5. Elemento opuesto: $A+(-A) = 0$.
6. Propiedad de la traspuesta: $(A+B)^t= A^t+ B^t$

Propiedades del producto por un escalar:
1. Conmutativa: $k\cdot.A = A\cdot k$
2. Asociativa: $k\cdot l\cdot A = k\cdot (l\cdot A)$
3. Distributiva: $A\cdot(k+l) = k\cdot A+l\cdot A$
4. Distributiva respecto a la suma de matrices: $k\cdot (A+B)= k\cdot A+k\cdot B$

Propiedades del producto de matrices:
1. Asociativa: $A*(B*C)= (A*B)*C$
2. Distributiva respecto a la suma: $C*(A+B) = C*A+C*B$
3. Propiedad de la traspuesta: $(A*B)^t = B^t * A^t$

Propiedades de la Inversa de una matriz:
1. La inversa si existe es única
2. La Inversa debe cumplir que: $A* A^{-1}=I$
3. La traspuesta de la inversa es :$(B^{-1})^t$ = :$(B^t)^{-1}$
4. Inversa del producto: Si A y B son regulares del mismo orden $(A*B)^{-1} = B^{-1}* A^{-1}$

Determinantes

Dada una matriz cuadrada A su determinante se simboliza así: $|A|$, det(A) o Det(A).

Determinantes de orden dos:

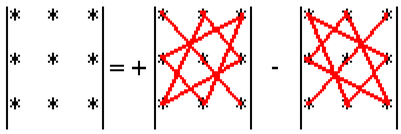
Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinantes de orden tres, regla de Sarrus:

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ entonces:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23}\right).$$

Gráficamente:



Menor complementario de un elemento:
Sea *A* una matriz cuadrada, y sea a_{ij} un elemento de *A*. El determinante de la submatriz que resulta de eliminar de *A* la fila *i* y la columna *j*, se denomina menor complementario del elemento a_{ij}, notándose por α_{ij}.

Adjunto de un elemento:
Sea *A* una matriz cuadrada, y sea a_{ij} un elemento de *A*. Se denomina adjunto del elemento a_{ij} y se nota como A_{ij} al determinante $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Matriz adjunta:
Sea *A* una matriz cuadrada, $A = (a_{ij})$. Se define la matriz adjunta de la matriz *A* y se nota como *adj*(*A*), a la matriz $(A_{ij})^t$

$$adj(A) = (A_{ij})^t$$

Desarrollo de un determinante por adjuntos de una fila o columna:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces:

El desarrollo por adjuntos de la fila *i* es:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

El desarrollo por adjuntos de la columna *j* es:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Propiedades de los determinantes:
1. det (*A*) = det(A^t)
2. Si dos filas (o dos columnas), se intercambian el determinante resultante será de signo contrario al inicial.
3. El det(*A**·*B*) = det *A* det *B*, siempre que *A* y *B* sean del mismo orden.
4. Si dos filas (o dos columnas) son iguales el det(*A*) =0
5. Si una fila (o una columnas de la matriz se multiplica por un escalar *k* el determinante queda multiplicado por *k*
6. Si dos filas (o dos columnas) son proporcionales, entonces el determinante de esa matriz es igual a 0
7. El det (k·*A*) = k^n.det(*A*), siendo *n* el orden da la matriz.
8. Una matriz con determinante igual a cero se denomina matriz singular.
9. Una matriz con determinante diferente de cero se denomina matriz regular.

10. Si una fila (o una columna) tienen un factor común, éste puede salir fuera del determinante.
11. Si una fila (o una columna), tiene solo elementos iguales a cero, entonces el determinante es cero.

Rango de una matriz por determinantes:
El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

Cálculo de la matriz inversa:

Dada una matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, regular, la matriz inversa de A se calcula

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

en notación más compacta $A\overline{x}=\overline{b}$.

Asociado a todo sistema es posible considerar la matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada del sistema, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$A^{+}=\left(A\middle|\overline{b}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Teorema de Rouché-Fröbenius:
En álgebra lineal, el teorema de Rouché-Fröbenius permite calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en función del rango de la matriz de coeficientes y del rango de la matriz ampliada asociadas al sistema.

Lleva el nombre del matemático francés Eugène Rouché quien lo enunció y del matemático alemán Ferdinand Georg Fröbenius quien fue uno de los muchos matemáticos que lo demostraron.
Así, en otros idiomas recibe otros nombres como el teorema de Rouché-Capelli, el teorema de Rouché-Fontené, el teorema de Kronecker-Capelli, etc.

Enunciado del teorema de Rouché-Fröbenius:
El teorema establece que para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es condición necesaria y suficiente que la matriz formada por los coeficientes y la ampliada por los términos independientes posean el mismo rango.
En tal caso el sistema será determinado si su rango coincide con el número de incógnitas ó será indeterminado su rango coincide con el número de incógnitas.

Eliminación Gaussiana, eliminación de Gauss o eliminación de Gauss-Jordan:
En matemáticas, la eliminación gaussiana, eliminación de Gauss o eliminación de Gauss-Jordan, llamadas así debido a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, son algoritmos del álgebra lineal para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y encontrar matrices inversas. Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Cuando se aplica este proceso, la matriz resultante se conoce como: "forma escalonada".
El método fue presentado por el matemático Carl Friedrich Gauss, pero se conocía anteriormente en un importante libro matemático chino llamado Jiuzhang Suanshu o Nueve capítulos del arte matemático.

Algoritmo de eliminación de Gauss
Sea un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Se supone que $a_{11} \neq 0$, en caso contrario se procedería a reordenar las filas y columnas del sistema.
Se trata de transformar la matriz ampliada del sistema en una matriz escalonada, para obtener un sistema equivalente que se resolverá calculando las incógnitas x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_1$, en ese orden.

Realizando las transformaciones elementales $\text{i-esima fila -}\left(\text{primera fila} \times \frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ y llamando

$c_{ij} = a_{ij} - a_{1j}\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ y $r_i = b_i - b_1\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, con $i = 2,...,m$, y $j = 2,...,n$ se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

Reiterando el procedimiento, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

que permite calcular de forma sencilla las incógnitas x_n , $x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Regla de Cramer:

La regla de Cramer es un teorema del álgebra lineal, que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704 - 1752), quien publicó la regla en su Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques de 1750, aunque Colin Maclaurin también publicó el método en su Treatise of Geometry de 1748 (y probablemente sabía del método desde 1729).

La regla de Cramer es de importancia teórica porque da una expresión explícita para la solución del sistema. Sin embargo, para sistemas de ecuaciones lineales de más de tres ecuaciones su aplicación para la resolución del mismo resulta excesivamente costosa computacionalmente, es ineficiente para grandes matrices y por ello no es usado en aplicaciones prácticas que pueden implicar muchas ecuaciones. Sin embargo, como no es necesario pivotar matrices, es más eficiente que la eliminación gaussiana para matrices pequeñas.

Enunciado de la regla de Cramer:

Si $A\overline{x} = \overline{b}$ es un sistema de ecuaciones con $|A| \neq 0$. Entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

donde A_j es la matriz resultante de reemplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b.

Hágase notar que para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de la matriz A ha de ser no nulo.

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

Matrices

1.- Calcular las matrices A y B tales que:

$$\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A+2B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución: $A=\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -5 & 21 \end{pmatrix}$.

2.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, calcular:

a) A^t
b) $BA^t - C$
c) BB^tC
d) C^2
e) $(AC)^{-1}$

Solución: a) $A^t=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $BA^t - C=\begin{pmatrix} 11 & -10 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ c) $BB^tC=\begin{pmatrix} 11 & 66 & -10 \\ 10 & -4 & 20 \end{pmatrix}$
d) imposible e) imposible

3.- Calcular $A^2 - B^2$ sabiendo que $A+B=P$ y $A-B=Q$, siendo:

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^2 - B^2=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 18 \end{pmatrix}$

4.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar el conjunto C de todas las matrices que conmutan con ella.

Solución: $C=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}=\left\{b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; bd \in \mathbb{R}\right\}$

5.- Calcular las matrices inversas de las matrices siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$

Solución: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&9&-4\\0&-2&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-2&-1&-1\\\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

6.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX = B$
b) $XA = B$
c) $AX+B = X$
d) $P^{-1}XP = A$

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}2&1\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ c) $X=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9&7\\-1&2\end{pmatrix}$ d) $X=\begin{pmatrix}2&1\\4&0\end{pmatrix}$.

7.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-2&4&2&1\\4&2&1&-2\\2&1&-2&4\\1&-2&4&2\end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1}.

Solución: $A^2=25I\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{25}A$

Determinantes

1.- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}3&6&-5&4\\-2&0&6&0\\1&1&2&0\\0&3&-1&-1\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}2&6&6&2\\2&7&3&6\\1&5&0&1\\3&7&0&7\end{vmatrix}$

Solución: a) $\begin{vmatrix}3&6&-5&4\\-2&0&6&0\\1&1&2&0\\0&3&-1&-1\end{vmatrix}=-180$ b) $\begin{vmatrix}2&6&6&2\\2&7&3&6\\1&5&0&1\\3&7&0&7\end{vmatrix}=-168$

2.- Demostrar la igualdad: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

3.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, comprobar que $|A+B| \neq |A| + |B|$.

4.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, comprobar que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

5.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $|A^t|$

b) $|AA^t|$

c) $|2A|$

d) $|4A^{-1}|$

Solución: a) $|A^t| = 19$ b) $|AA^t| = 19^2$ c) $|2A| = 152$ d) $|4A^{-1}| = \frac{64}{19}$

6.- Resolver las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = 0$

Solución: a) $-3\left(4-x^2\right)\left(1-x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \wedge x = \pm 1$ b) $x^2 y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

7.- Calcular el rango de las siguientes matrices, según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{cases} r(A)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \\ 2+\lambda^2+\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2} i \notin \mathbb{R} \end{cases} \\ \lambda = 1 \Rightarrow r(A)=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} r(B)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2} i \notin \mathbb{R} \end{cases} \\ \lambda = -1 \Rightarrow r(B)=2 \end{cases}$

c) $r(C)=2$

8.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$, calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$

Solución: a) $\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix} = 2$ b) $\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = -12$

<u>Sistemas de ecuaciones lineales</u>

1.- Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y-2z=2 \\ -x+5y-4z=-2 \end{cases}$$

Solución: S. I.

2.- Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z+t+u=0 \\ 3x-y+t-u=6 \\ 6x+y+t+u=1 \\ x-2y+2z-2t=-5 \end{cases}$$

Solución: S. C. I. con 2 g. l. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{13}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$

3.- Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x - 6y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución: S. I.

4.- Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 1 \\ 2x - 3y + z + t = 2 \\ x + 9y + 2z - 4t = 1 \end{cases}$$

Solución: S. C. I. con 2 g. l. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$

5.- Discutir y resolver el siguiente sistema, según los valores de $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ x - y = -1 \\ ax + y = 1 \\ x + ay = -1 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} a \neq -1, \forall b \in \mathbb{R}. \text{ S. I.} \\ a = -1, \forall b \in \mathbb{R}. \text{ S. C. D. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b-1}{4} \\ \frac{b+3}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$

6.- Discutir y resolver el siguiente sistema, según los valores de $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 4y - 3z = 7 \\ 2x + 3y - az = 4 \\ 5x + 7y - (a+b) = 8 + b \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} a \neq 4 \begin{cases} b \neq 3 \text{ S. I.} \\ b = 3 \text{ S. C. D.} \end{cases} \\ a = 4 \begin{cases} b \neq 3 \text{ S. C. D.} \\ b = 3 \text{ S. C. I. con 1 g. l. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

7.- Discutir el siguiente sistema, según los valores de $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} a \neq 1 \begin{cases} a \neq -3 \text{ S. C. D.} \\ a = -3 \begin{cases} b = -1 \text{ S. C. I.} \\ b \neq -1 \text{ S. I.} \end{cases} \end{cases} \\ a = 1 \begin{cases} b = 1 \text{ S. C. I} \\ \text{b} \neq 1 \text{ S. I.} \end{cases} \end{cases}$

8.- Discutir y resolver el siguiente sistema, según el valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} \forall a \neq -2{,}1 \text{ S. C. D.} \\ a = 1 \text{ S. C. I.con 2 g. l. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall \alpha\beta \in \mathbb{R} \\ a = -2 \text{ S. I.} \end{cases}$

9.- Resolver:

a) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$ c) $2x - 3y + 4z + t = 0$ d) $\begin{cases} x + 2y + t = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + 0t = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$

RESUMEN TEORÍA DE GEOMETRÍA

Producto escalar de vectores

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, se llama producto escalar a una aplicación de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\bullet} \mathbb{R}$, que a cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, le hace corresponder un número real que representaremos por $\vec{u}\bullet\vec{v}$, que cumple $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ las siguientes condiciones:

i) Es simétrica: $\vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}$

ii) $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\bullet\vec{w} = \alpha(\vec{u}\bullet\vec{w}) + \beta(\vec{v}\bullet\vec{w})$

iii) Si $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\bullet\vec{u} > 0$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dotado de un producto escalar," $\bullet$ ",, se dice que es un espacio vectorial euclídeo (E.V.E.), y se denota por $(\mathbb{R}^3(\mathbb{R}),\bullet)$.

Producto escalar canónico: Si $\vec{u}(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, el producto $\vec{u}\bullet\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ es un producto escalar llamado producto escalar canónico en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. En adelante consideraremos este producto escalar canónico.

Norma de un vector: $\vec{u}(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$: $\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}} = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Propiedades del producto escalar: En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, se verifican las siguientes propiedades:

i) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

ii) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \ \forall\vec{u} \in \mathbb{R}^3$

iii) $|\vec{u}\bullet\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|, \ \forall\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

iv) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \ \forall\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (Desigualdad triangular o de Minkowski)

Ángulo entre vectores: Si $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ son dos vectores no nulos del E.V.E. $(\mathbb{R}^3(\mathbb{R}),\bullet)$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite escribir

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}} \quad \text{con} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Se dice que θ, es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, escribiéndose $\theta = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. Y de ahí la expresión clásica: $\vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.

Vectores ortogonales: En el E.V.E. $(\mathbb{R}^3(\mathbb{R}),\bullet)$, se dice que dos vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ son ortogonales si $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$ .Se representa por $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Los vectores de la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ son ortogonales con el producto escalar canónico.

Ecuaciones del plano y la recta en el espacio afín tridimensional

Considerando la definición de espacio afín $A_3 = \mathbb{R}^3$ a cuyos elementos llamaremos puntos, y $U_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, se obtiene el espacio afín tridimensional $\mathbb{R}^3$ asociado al e.v. $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Ecuaciones del plano: Un plano es una variedad lineal afín de dimensión dos. Por tanto es el conjunto de puntos de la forma:

$$Plano(P;\vec{u},\vec{v}) = \left\{ X \,/\, \overrightarrow{PX} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \right\} \text{ con } rg(\vec{u},\vec{v}) = 2$$

Si en el espacio afín se adopta una referencia cartesiana $R = \left(O, \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)\right)$ se tiene, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, la ecuación anterior puede escribirse en la llamada forma vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)$$

igualando componente a componente, se obtiene una ecuación paramétrica del plano:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y &= p_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z &= p_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{aligned}$$

Eliminando los parámetros α y β se obtiene la ecuación implícita o general del plano:

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante anterior se obtiene una ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde:

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}; \quad B = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

con $(A, B, C) \neq \vec{0}$ por ser rango de $(\vec{u}, \vec{v})$ igual a dos.

Recíprocamente se puede probar que una ecuación del tipo $Ax + By + Cz + D = 0$ con $(A, B, C) \neq \vec{0}$ representa un plano.

Ecuaciones de la recta: Una recta es una variedad lineal afín de dimensión uno. Por tanto es el conjunto de puntos de la forma:

$$Recta(P;\vec{u}) = \left\{ X \,/\, \overrightarrow{PX} = \alpha\vec{u} \right\} \text{ con } \vec{u} \neq \vec{0}$$

Si en el espacio afín se adopta una referencia cartesiana $R=\left(O,\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)\right)$ se tiene: $P=(p_1,p_2,p_3)$, y $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, la ecuación anterior puede escribirse en la llamada forma vectorial paramétrica:

$$(x,y,z)=(p_1,p_2,p_3)+\alpha(u_1,u_2,u_3)$$

igualando componente a componente, se obtiene una ecuación paramétrica de la recta,

$$\begin{aligned} x &= p_1+\alpha u_1 \\ y &= p_2+\alpha u_2 \\ z &= p_3+\alpha u_3 \end{aligned}$$

eliminando el parámetro α resulta una expresión denominada ecuación continua de la recta,

$$\frac{x-p_1}{u_1}=\frac{y-p_2}{u_2}=\frac{z-p_3}{u_3}$$

Observación 1: Cuando aparece un cero en el denominador se interpreta como que el numerador correspondiente, también es cero.

Como $(u_1,u_2,u_3)\neq\vec{0}$, una de sus coordenadas es distinta de cero, por lo que el sistema continuo anterior tiene siempre sentido. Si por ejemplo $u_1\neq 0$ entonces el sistema continuo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} u_2(x-p_1) &= u_1(y-p_2) \\ u_3(x-p_1) &= u_1(z-p_3) \end{aligned}$$

o sea, de la forma:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

expresión que se conoce como unas ecuaciones implícitas de la recta.

Observación 2: Toda recta se puede interpretar como la intersección de dos planos, aunque en general no todo sistema del tipo anterior determina una recta en el espacio afín tridimensional.

Si tenemos dos puntos distintos $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$, un vector director de la recta que determinan es:

$$\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$$

la ecuación de la recta que pasa por ellos, expresada en su forma continua sería:

$$\frac{x-p_1}{q_1-p_1}=\frac{y-p_2}{q_2-p_2}=\frac{z-p_3}{q_3-p_3}$$

en la que se sigue utilizando el mismo convenio en el caso de anularse algún denominador.

Posiciones relativas en el Espacio Afín Tridimensional

Incidencia Punto-Recta: hay incidencia punto-recta cuando el punto pertenece a la recta, es decir, cuando cumple la ecuación de la recta.

Incidencia Punto-Plano: hay incidencia punto-plano cuando el punto pertenece al plano, es decir, cuando cumple la ecuación del plano

Posiciones relativas de dos planos:

Sean los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, consideremos las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Si $rg(M) = 2 \Rightarrow rg(M^*) = 2 \Rightarrow$ SCI *un gr. libertad, los planos se cortan en una recta*

Si $rg(M) = 1$ y $\begin{cases} rg(M^*) = 2 \Rightarrow \text{SI, } \textit{los planos son paralelos} \\ rg(M^*) = 1 \Rightarrow \text{SCI, } \textit{dos gr. libertad, los planos son coincidentes} \end{cases}$.

Posiciones relativas de tres planos:

Sean los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$, consideremos las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Si $rg(M) = 3 \Rightarrow rg(M^*) = 3 \Rightarrow$ SCD, *los tres planos se cortan en un punto*

Si $rg(M) = 2$ y $\begin{cases} rg(M^*) = 3 \Rightarrow \text{SI, } \textit{no existen puntos comunes a los tres planos} \\ rg(M^*) = 2 \Rightarrow \text{SCI, } \textit{un gr. libertad, los tres planos se cortan en una recta} \end{cases}$.

Si $rg(M) = 1$ y $\begin{cases} rg(M^*) = 2 \Rightarrow \text{SI, } \textit{no existen puntos comunes a los tres planos} \\ rg(M^*) = 1 \Rightarrow \text{SCI, } \textit{dos gr. libertad, los tres planos coinciden} \end{cases}$

Nota: En los casos que hay dos posibilidades estudiaremos dos a dos las ecuaciones que forman el sistema.

Posiciones relativas de recta y plano:

Sea $r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ y $\pi \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ consideramos las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \; M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Si $rg(M) = 3 \Rightarrow rg(M^*) = 3 \Rightarrow$ SD, *la recta y el plano se cortan en un punto*

Si $rg(M)=2$ y $\begin{cases} rg(M^*)=3 \Rightarrow \text{SI, } \textit{recta y plano paralelos} \\ rg(M^*)=2 \Rightarrow \text{SCI, } \textit{un gr. libertad, recta incidente (contenida) en el plano} \end{cases}$

Posiciones relativas de dos rectas:
Caso I: Las rectas vienen dadas en forma continua.
Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{x-p_1}{u_1}=\frac{x-p_2}{u_2}=\frac{x-p_3}{u_3} \quad \text{con } \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\neq\vec{0} \text{ y } P(p_1,p_2,p_3)$$

$$s \equiv \frac{x-q_1}{v_1}=\frac{x-q_2}{v_2}=\frac{x-q_3}{v_3} \quad \text{con } \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\neq\vec{0} \quad \text{y } Q(q_1,q_2,q_3)$$

$$rg(\vec{u},\vec{v})=1 \text{ (rectas con misma dirección) y} \begin{cases} rg\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=1 \Rightarrow \text{rectas coincidentes} \\ rg\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2 \Rightarrow \text{rectas paralelas} \end{cases}$$

$$rg(\vec{u},\vec{v})=2 \text{ (rectas de distinta dirección) y} \begin{cases} rg\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=2 \Rightarrow \text{las rectas se cortan en un punto} \\ rg\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right)=3 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan} \end{cases}$$

Caso II: Las rectas vienen dadas en forma implícita.
Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases} \text{ y las matrices:}$$

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \text{ y } M^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}.$$

$rg(M^*)=4 \Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan .

$rg(M^*)=rg(M)=3 \Rightarrow$ S.C.D., las rectas r y s se cortan en un punto.

$rg(M^*)=3\neq 2=rg(M) \Rightarrow$ S.I., las rectas r y s son paralelas.

$rg(M^*)=2=rg(M) \Rightarrow$ S.C.I., un gr. libertad, las rectas r y s coinciden.

Espacio afín euclídeo tridimensional

Si consideramos el espacio afín $A_3=\mathbb{R}^3$ y dotamos a $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, de estructura de espacio vectorial euclídeo con el producto escalar canónico, se obtiene el espacio afín euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$.
En todo lo que sigue, se da por supuesto que se ha adoptado una referencia cartesiana rectangular $R=(O,(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3))$.

Distancia entre dos puntos: Dados los puntos $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$. La distancia entre P y Q viene dada por:

$$d(P,Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Cosenos directores de un vector: Se llaman cosenos directores de un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \vec{0}$ a los cosenos de los ángulos formados por el vector $\vec{x}$ con los vectores de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ que vienen dados por:

$$\cos\alpha_i = \frac{x_i}{\left\|\vec{x}\right\|} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$i = 1, 2, 3$$

Observación 3: Estos cosenos directores son las coordenadas del vector $\dfrac{\vec{x}}{\left\|\vec{x}\right\|}$, respecto de la base de la referencia y es inmediato que: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$

Producto vectorial y mixto

Estudiaremos a continuación una operación interna en el espacio vectorial euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ llamada producto vectorial, que es útil por su aplicación a la Física y a las Matemáticas; en particular se utilizará en este curso para resolver ciertos problemas métricos.

Producto vectorial: Dados dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, de coordenadas $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ referidos a una base ortonormal, $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Se llama producto vectorial de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, y se nota como $\vec{x} \times \vec{y}$ o bien como $\vec{x} \wedge \vec{y}$, al vector:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3}$$

Observación 4: Es frecuente escribir la expresión obtenida, de una manera simbólica, fácil de recordar, pero incorrecta desde el punto de vista formal, del modo siguiente:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

En el caso de que $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ sean linealmente dependientes, entonces su producto vectorial es el vector cero.

Propiedades del producto vectorial:

1. Anticonmutatividad: $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.
2. Distributiva: $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.
3. $(\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\lambda\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow$ El sistema $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ es linealmente dependiente.

5. $\vec{x}\bullet(\vec{x}\times\vec{y})=\vec{y}\bullet(\vec{x}\times\vec{y})=0. \quad \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.
6. Fórmula de expulsión:
$$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=\left(\vec{x}\bullet\vec{z}\right)\vec{y}-(\vec{x}\bullet\vec{y})\vec{z} \quad \forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3(\mathbb{R}).$$
7. Fórmula de Lagrange:
$$(\vec{x}\times\vec{y})\bullet(\vec{u}\times\vec{v})=(\vec{x}\bullet\vec{u})(\vec{y}\bullet\vec{v})-(\vec{x}\bullet\vec{v})(\vec{y}\bullet\vec{u}) \quad \forall \vec{x},\vec{y},\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3(\mathbb{R}).$$
8. Módulo del producto vectorial: $\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|=\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\cdot\left|\sin\theta\right|$, siendo θ el ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Luego $\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|$ coincide con el área del paralelogramo de lados $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Observación 5: Como $\theta=\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\in[0,\pi]$, el $sin\theta\geq 0$ luego $\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|=\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|\cdot\sin\theta$

Definición: Sean $B=(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$ y $B'=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ dos bases de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.
Las dos bases tienen la misma orientación $\Leftrightarrow$ $sig(\det(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}))=sig(\det(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}))$

Proposición. Sea el sistema $\{\vec{x},\vec{y}\}$ linealmente independiente. La orientación de la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y})$ es la misma que la orientación de la base ortonormal $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$.
De las propiedades anteriores se deduce la siguiente definición geométrica de producto vectorial.

Definición geométrica. El producto vectorial de dos vectores, linealmente independientes, $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ es otro vector $\vec{x}\times\vec{y}$ tal que:

- $\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|=\left\|\vec{x}\right\|\left\|\vec{y}\right\|\left|\sin\theta\right|$
- $\vec{x}\circ(\vec{x}\times\vec{y})=\vec{y}\circ(\vec{x}\times\vec{y})=0$
- La orientación determinada por la terna $(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y})$ es igual a la orientación determinada por la base $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, es decir:
$$sig(\det(\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}))=sig(\det(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})).$$

Producto mixto: Se llama producto mixto de tres vectores $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ al escalar $\vec{x}\circ\left(\vec{y}\times\vec{z}\right)$, que representaremos por $\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]$. Pudiéndose expresar:
$$\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

Vector característico

Sea un plano $\pi\equiv Plano\left(P;\vec{u},\vec{v}\right)= Ax+By+Cz+D=0$, y el vector $\vec{\omega}=\left(A,B,C\right)\neq\vec{0}$.
Si $X\left(x,y,z\right)\in\pi\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$.

Si $P(p_1, p_2, p_3) \in \pi \Leftrightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0$.

Luego: $A(x - p_1) + B(y - p_2) + C(z - p_3) = 0$

Aunque este resultado es conocido, ahora se tiene una interpretación euclídea de los coeficientes (A, B, C): el vector $\vec{\omega} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ es ortogonal a cualquier vector del plano π. A dicho vector se le llama vector característico del plano π.

A continuación se van a estudiar problemas métricos relacionados con ángulos y distancias.

Problemas métricos; Ángulos, distancias, áreas y volúmenes

Ángulo entre dos rectas: Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{x - p_2}{u_2} = \frac{x - p_3}{u_3} \quad \text{con } \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0} \text{ y } P(p_1, p_2, p_3)$$

$$s \equiv \frac{x - q_1}{v_1} = \frac{x - q_2}{v_2} = \frac{x - q_3}{v_3} \quad \text{con } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \vec{0} \quad \text{y} \quad Q(q_1, q_2, q_3)$$

$$\cos(\widehat{r, s}) = \left| \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right|$$

Ángulo entre dos planos: Sean los planos:

$$\pi_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \ con \ \vec{\omega}_1 = (A_1, B_1, C_1) \neq \vec{0}$$

$$\pi_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \ con \ \vec{\omega}_2 = (A_2, B_2, C_2) \neq \vec{0}$$

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \left| \frac{\vec{\omega}_1 \bullet \vec{\omega}_2}{\|\vec{\omega}_1\| \|\vec{\omega}_2\|} \right|$$

Ángulo entre recta y plano: Dada la recta $r \equiv \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{x - p_2}{u_2} = \frac{x - p_3}{u_3}$ con $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$ y $P(p_1, p_2, p_3)$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, con $\vec{\omega} = (A, B, C) \neq \vec{0}$

$$\sin(\widehat{r, \pi}) = \left| \frac{\vec{u} \bullet \vec{\omega}}{\|\vec{u}\| \|\vec{\omega}\|} \right|$$

Distancia de un punto a un plano: Sea el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y el plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos planos paralelos: Basta tomar un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ de uno de los planos y calcular la distancia de ese punto al otro plano.

Distancia de un punto a una recta: Dada la recta $r \equiv \frac{x-p_1}{u_1} = \frac{x-p_2}{u_2} = \frac{x-p_3}{u_3}$ con $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$ y un punto $Q(q_1, q_2, q_3)$.

$$d(Q,r) = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan:

<u>Método 1</u>

i) Se halla la ecuación del plano π que contiene a una de las rectas r y que es paralelo a la otra recta, s.

ii) Se toma un punto cualquiera $Q \in s$ y se calcula la distancia de Q al plano π.

<u>Método 2</u>

Sean las rectas

$r \equiv \frac{x-p_1}{u_1} = \frac{x-p_2}{u_2} = \frac{x-p_3}{u_3}$ con $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$ y $P(p_1, p_2, p_3)$

$s \equiv \frac{x-q_1}{v_1} = \frac{x-q_2}{v_2} = \frac{x-q_3}{v_3}$ con $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \vec{0}$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$

que se cruzan, es decir, $rg\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right) = 3$.

$$d(r,s) = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \right| \text{(mínima distancia)}$$

Área del triángulo: Dados los vértices A, B, C de un triángulo en el espacio,

$$Área(ABC) = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Volumen del paralelepípedo: El valor absoluto del producto mixto $\left[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right]$ es el volumen del paralelepípedo de aristas construidas sobre los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Volumen del tetraedro: Dados los vértices A, B, C, D de un tetraedro.

$$Volumen(ABCD) = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$

<u>Otros problemas métricos</u>

Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan:

<u>Método 1</u>

Dadas las rectas en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = q_1 + \mu v_1 \\ y = q_2 + \mu v_2 \\ z = q_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Sean $P_\lambda\left(p_1 + \lambda u_1, p_2 + \lambda u_2, p_3 + \lambda u_3\right)$ y $Q_\mu\left(q_1 + \mu v_1, q_2 + \mu v_2, q_3 + \mu v_3\right)$, puntos genéricos de las rectas r y s respectivamente.

Al exigir que $\begin{cases} \overrightarrow{P_\lambda Q_\mu} \bullet \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{P_\lambda Q_\mu} \bullet \vec{v} = 0 \end{cases}$, se obtiene λ y μ y hallamos P y Q.

La perpendicular común es la recta que pasa por P y Q, (siendo $d\left(P,Q\right)$ la mínima distancia entre las rectas que se cruzan).

<u>Método 2</u>

i) Halle el plano π que contiene a s y es paralelo a r.

ii) Halle el plano π' que contiene a r y es paralelo a un vector característico de π.

iii) Calculemos la intersección $\pi' \cap r = A$.

iv) La recta que pasa por A y es $\perp \pi$, es la perpendicular común a r y s.

Recta de máxima pendiente de un plano π respecto de un plano α, que pasa por un punto $P \in \pi$:

i) Halle la recta $r = \pi \cap \alpha$.

ii) Halle el plano $\beta \perp r$ que pasa por P.

iii) La recta de máxima pendiente buscada es $s \equiv \beta \cap \pi$.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

1.- Calcule a para que el vector $\vec{u}=(-2,1,a)$ sea ortogonal al vector $\vec{v}=(2,1,3)$.
Solución: $a=1$.

2.- Halle un vector ortogonal a $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,1)$ y cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.
Solución: $(-2,-2,4)$ y $((2,2,-4))$

3.- Calcule un vector ortogonal a $\vec{u}=(2,3,-1)$ y $\vec{v}=(1,4,2)$ cuya tercera componente sea 1.
Solución: $(2,-1,1)$.

4.- Halle el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=5$ y $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$.
Solución: 60º

5.- Halle las coordenadas de los puntos que dividen al segmento de extremos $A(2,-1,3)$ y $B(5,11,-12)$, en tres partes iguales.
Solución: $M(3,3,-2)$ y $N(4,7,-7)$.

6) Responda razonadamente a:
a) ¿Están alineados los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,0)$ y $C(3,1,-4)$?.
b) Halle la ecuación cartesiana del plano π, que pasa por los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,0)$ y $C(3,1,-4)$. ¿Pertenecen los puntos $D(3,1,2)$ y $E(0,1,2)$ al plano π?
c) Calcule la ecuación de un plano paralelo al plano π, que pase por el punto $F=(0,1,0)$
d) Halle una ecuación continua de la recta que pase por el punto $P(3,1,2)$ y sea perpendicular al plano π.
e) Calcule el punto simétrico de $D(3,1,2)$ respecto del plano π.
f) Calcule el punto simétrico de $Q(2,1,3)$ respecto de la recta de ecuación $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{3}$
g) Halle la ecuación de un plano α que pase por el punto $R(1,2,3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación paramétrica es $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=2 \\ z=3\lambda \end{cases}$.
h) Estudie la posición relativa del plano π con la recta $x-1=\frac{y+2}{0}=\frac{3-z}{-2}$.
i) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y C.
j) Calcule el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

k) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -4x + 2y - 2z + 5 = 0$.

l) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y.
$$\pi_3 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda + 2\mu - 3 \\ z = \mu \end{cases}$$

m) Calcule una ecuación continua de la recta $\pi_1 \cap \pi_3$.

n) Ángulo que forman $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$, $s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{0}$.

o) Ángulo que forman $\pi \equiv 3x - 2y + 6z - 1 = 0$ y $\alpha \equiv 2x + 3y + 4 = 0$.

p) Ángulo que forman $\pi \equiv 3x - 2y + 6z - 1 = 0$ y $s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{0}$.

Solución:

a) NO están alineados los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,0)$ y $C(3,1,-4)$.

b) $\pi \equiv 2x - y + z = 1$. $D(3,1,2) \notin \pi$. $E(0,1,2) \in \pi$.

c) $\pi \equiv 2x - y + z = -1$.

d) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

e) $D'(-1,3,0)$.

f) $Q'\left(\frac{30}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

g) $\alpha \equiv 2x - 3z + 7 = 0$.

h) Se cortan en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -2, 0\right)$.

i) Área del triángulo $= \frac{3}{2}\sqrt{6}\ u^2$.

j) Volumen del tetraedro $= 3\ u^3$.

k) π_1 y π_2 son paralelos.

l) π_1 y π_3 se cortan en una recta.

m) Ecuación de la recta $\pi_1 \cap \pi_3 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$

n) 45º

o) 90º

p) 5º 47´51,49”

7.- Estudie la posición relativa del plano $x - 3y - 6z = 5$ y la recta $r \equiv x = 2 + 3\lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = \lambda$.

Solución: paralelos.

8.- Estudie la posición relativa del plano $x - 3y - 6z = -1$ y la recta $r \equiv x = 2 + 3\lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = \lambda$.

Solución: incidentes (recta contenida en el plano).

9) Obtenga la ecuación de un plano que contenga a la recta *r* y sea perpendicular al plano π , siendo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \qquad \pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} .$$

Solución: 4x+3y-z-8=0.

10.- Halle la ecuación de una recta que es paralela a los planos $x - 3y + z = 0$, $2x-y+3z-5 = 0$ y pasa por el punto *P* (2,-1,5).

Solución: $r \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$.

11.- Halle la ecuación de un plano paralelo a las rectas *r* y *s* y que pase por *P*(0,2,-1) siendo $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{0}$.

Solución: x+y-z-3=0.

12.- Halle la ecuación de una recta paralela a los planos $2x - y - z = 0$ y $3x - 6y + 5z - 1 = 0$ y que pase por el punto *P*(4,1,2).

Solución: $\frac{x-4}{11} = \frac{y-1}{13} = \frac{z-2}{9}$.

13.- Determine la proyección ortogonal de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{2-y}{2} = \frac{z}{-2}$ sobre el plano $x - 2y + z + 3 = 0$.

Solución: $s \equiv (1-\lambda, 2+2\lambda, 5\lambda)$.

14.- Sea el plano π de ecuación $x + 2y + 3z = 5$

a) Encuentre la ecuación de un plano paralelo a π cuya distancia al origen sea 3.

b) Calcule el punto *P* del plano π que esté más próximo al origen.

c) Sea *Q* el punto (1, 1, 1). se sabe que los segmentos *OP* y *OQ* son dos lados de un paralelogramo. Halle los vértices y el área de dicho paralelogramo.

Solución:

a) $x + 2y + 3z = \pm 3\sqrt{14}$

b) $P\left(\frac{5}{14}, \frac{10}{14}, \frac{15}{14}\right)$

c) $Q\left(\frac{19}{14}, \frac{24}{14}, \frac{29}{14}\right)$, A= $\frac{5\sqrt{6}}{14}u^2$

15.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $x+2y+3z-1=0$. Calcule la ecuación de una recta situada en el plano dado, que pase por el punto *P*(2,1,-1) y sea perpendicular a *r*.

Solución: (2+λ, 1-5λ , -1+3λ).

16.- Calcule la longitud del segmento de recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ comprendido entre los planos $3x+z = 5$, $x-y-z= 0$.

Solución: $\dfrac{5\sqrt{6}}{4}\ u$

17.- Halle la ecuación de una recta *r* que pasa por *P*(-1,0,2) siendo paralela al plano π y perpendicular a la recta s, donde:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 + 2\lambda - 2\mu \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

Solución: $r \equiv (-1+t, -4t, 2+10t)$.

18.- Halle la longitud de la proyección del segmento de extremos *A*(2,1,-3) y *B*(3,4,2) sobre el plano $2x+y-2z=0$.

Solución: $\dfrac{\sqrt{2610}}{9}\ u$

19.- Si un plano tiene de ecuación $ax+by+cz+d=0$, exprese, en forma continua, la recta perpendicular al mismo y que pase por el origen.

Solución: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$

20.- Calcule la ecuación de una recta *r* que pase por el punto (2,0,0) , esté contenida en el plano $3x + 2y = 6$ y sea perpendicular a la dirección de la recta de ecuación: $x = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$.

Solución: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z}{5}$

21.- Determine al menos de dos formas distintas la distancia del punto *P*(5,-1,6) a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

Solución: $2\sqrt{3}\ u$

22.- Obtenga la ecuación de un plano paralelo al $x + y + \sqrt{2}z = 1$ que se encuentre a 5 unidades de distancia de él.

Solución: $x + y + \sqrt{2}z - 11 = 0,\ \ x + y + \sqrt{2}z + 9 = 0$

23.- Determine el área del triángulo de vértices *A*(1,1,1) , *B*(-1,2,5) y *C*(0,1,6).

Solución: $\dfrac{\sqrt{62}}{2} u^2$

24.- Obtenga la ecuación de la recta simétrica de $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-3}$ respecto al plano π de ecuación $-2x + y - z = 1$.

Solución: $\frac{x-11}{-8} = \frac{y-10}{-5} = \frac{z+13}{8}$.

25.- Determine la longitud de la proyección del segmento de extremos: $A(2,1,-3)$ y $B(3,4,-1)$ sobre el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda - \mu \\ z = 2 - 2\lambda + 2\mu \end{cases}$

Solución: Vector proyección $\left(\frac{117}{65}, \frac{39}{65}, 0\right)$, longitud = $\frac{39}{65}\sqrt{10}\ u$

26.- Halle la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 9 - 2\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

así como la mínima distancia entre ellas.
Solución:

Perpendicular común $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{1}$

Mínima distancia: $d\left((3,5,2),(1,3,3)\right) = 3\ u$

27.- Calcule:
a) La perpendicular común a las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

b) La mínima distancia entre ellas.
Solución:

a) Perpendicular común $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

b) Mín. distancia: $3\,u$

28.- En el tetraedro *ABCD*, las coordenadas de los vértices *B*, *C* y *D* son respectivamente (1,2,3) , (2,3,3) y (3,2,4). Halle:
a) La ecuación del plano *BCD*.
b) El seno del ángulo entre la recta *BC* y el plano $x + 2y + 3z = 4$.
c) Si *AC* y *AD* son perpendiculares a *BD* y *BC* respectivamente y si la longitud del segmento *AB* es $\sqrt{26}$, halle las coordenadas de *A*. ¿Cuántas soluciones hay?
Solución:
a) $x - y - 2z + 7 = 0$

b) $\frac{3}{\sqrt{28}}$

c) Dos: $A(0,5,7)$ y $B(4,1,-1)$.

29.- Halle la ecuación de la recta r que se apoya en $s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$, es paralela al plano $y-z=0$ y pasa por $P(0,1,1)$

Solución: $\begin{cases} y-z=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$

30.- Determine los valores de a y b para que las rectas r y s se corten perpendicularmente, siendo:

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{a} = \frac{z+1}{-1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+y=b \\ y-z=1 \end{cases}$$

Solución: $a=3$, $b=7/4$.

31.- De un cubo se conoce su centro $C(1,1,1)$ y que una de sus caras está en el plano $2x+y+z+1=0$. Halle el volumen de dicho cubo.

Solución: $V = \dfrac{250\sqrt{6}}{9} u^3$

32.- Halle b para que las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-b}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ sean secantes.

Solución: $b=-11$.

33) Los puntos P(1,1,-3) y Q(-1,0,0) son dos vértices consecutivos de un rectángulo. Los otros dos vértices pertenecen a una recta que pasa por C(4,3,-5). Halle:

a) La ecuación de la recta r y del plano π que contiene al rectángulo.

b) Las coordenadas de los otros vértices.

c) Área del rectángulo.

Solución:

a) $r \equiv \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+5}{3}$; $\pi \equiv 4x-5y+z+4=0$

b) R(2,2,-2) y S(0,1,1)

c) área: $\sqrt{42}\ u^2$.

34) Los lados de un cuadrado están sobre las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}$.Calcule su área.

Solución: Longitud del lado del cuadrado $\dfrac{\sqrt{21}}{3} u$. Área = $\dfrac{7}{3}\ u^2$.

35) Calcule:

a) La recta t de máxima pendiente, que pasa por el punto P(1,1,3) del plano $x+y+2z=8$, respecto del plano $z=1$.

b) La ecuación de la recta t^*, simétrica de la anterior respecto del plano $z=1$.

Solución:

a) $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$

b) $t^* \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{1}$

36.- Halle la posición relativa de los planos siguientes:

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x+2y-z-3=0 \\ \pi_2 \equiv 3y-2z-1=0 \\ \pi_3 \equiv x+y+z-2=0 \end{cases}$ $b)\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x-y+z-1=0 \\ \pi_2 \equiv -4x+2y-2z-1=0 \\ \pi_3 \equiv 6x-y+z-4=0 \end{cases}$ $c)\begin{cases} \pi_1 \equiv x-y+z-1=0 \\ \pi_2 \equiv 3x+y-2z=0 \\ \pi_3 \equiv 2x+2y-3z+4=0 \end{cases}$

Solución:

a) Se cortan en el punto $\left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

b) Dos planos paralelos y otro los corta.

c) Se cortan dos a dos sin ningún punto común a los tres.