PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

CÁLCULO I

PROBLEMAS RESUELTOS

Rodrigo Vargas

Santiago de Chile
2007

Prefacio

Este libro con problemas resueltos pretende sirvir como texto para estudiantes en un primer curso de Cálculo. Así espero facilitar el estudio y la comprensión de los estudiantes. Grupos especiales, estudiantes avanzados, lectores que deseen una presentación más completa y los alumnos, por así decirlo, normales que busquen lecturas complementarias pueden consultar el libro "Análisis Real" volumen 1 de Elon Lages Lima que trata los mismos tópicos con un enfoque más amplio.

La parte mas importante de este libro son sus problemas resueltos, que sirven para fijar ideas, desarrollar algunos temas esbozados en muchos textos de cálculo y como oportunidad para que el lector compruebe lo sencillo de algunas soluciones. Naturalmente, me gustaría que el lector sólo consultase las soluciones después de haber hecho un serio esfuerzo para resolver cada problema. Precisamente es este esfuerzo, con o sin éxito, el que nos conduce a buenos resultados en el proceso de aprendizaje.

Los problemas que el lector encontrará se basan en las ayudantías del curso de cálculo en la Pontificia Universidad Católica de Chile, el cual está dirigido a estudiantes de Bachillerato.

Índice general

Capítulo 1

Números Reales

1.1. Pruebe que para cada $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

Solución: Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $a+b \in \mathbb{R}$ y existe un elemento $-(a+b)$ tal que

$$(a+b) + (-(a+b)) = 0\ .$$

Por otro lado, usando la asociatividad y conmutatividad de la suma, obtenemos

$$(a+b) + (-a) + (-b) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0$$

entonces $(-a) + (-b)$ es inverso aditivo de $(a+b)$, de la unicidad del inverso aditivo, se concluye que

$$-(a+b) = (-a) + (-b)\ .$$

1.2. Pruebe que para cada $x \in \mathbb{R}$, $-(-x) = x$.

Solución: Si $x \in \mathbb{R}$ existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + (-x) = 0$$

y además para $-x$ existe elemento inverso $-(-x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-x) + (-(-x)) = 0$$

de la unicidad del inverso aditivo concluimos que

$$-(-x) = x\ .$$

1.3. Sea $x \in \mathbb{R}$, pruebe que $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Solución: Notemos que

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x(0+1) = x \cdot 1 = x$$

sumando $-x$ a ambos lados de la igualdad $x \cdot 0 + x = x$, obtenemos $x \cdot 0 = 0$.

1.4. Pruebe que si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Solución: Si $b \neq 0$ entonces podemos multiplicar por b^{-1} y obtenemos

$$a \cdot b \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} \Rightarrow a \cdot 1 = 0 \Rightarrow a = 0\,.$$

1.5. Si $x, y \in \mathbb{R}$, pruebe que

$$x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)\,.$$

Solución: Notemos que

$$x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (-y + y) = x \cdot 0 = 0$$

sumando $-(x \cdot y)$ a ambos miembros de la igualdad $x \cdot (-y) + x \cdot y = 0$ se obtine

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y)\,.$$

Analogamente, para $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

1.6. Pruebe que para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a)(-b) = ab$.

Solución: Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ab \in \mathbb{R}$ y existe elemento inverso $-ab \in \mathbb{R}$ tal que

$$ab + (-ab) = 0\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(-a)(-b) &= (-a)(-b) + ab + (-ab) \\
&= (-a)(-b) + (-a)b + ab \\
&= (-a)((-b) + b) + ab \\
&= (-a) \cdot 0 + ab \\
&= ab\,.
\end{aligned}$$

1.7. Pruebe que si $0 < x < y$ entonces $y^{-1} < x^{-1}$.

Solución: Observemos primero que $x > 0 \Rightarrow x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$. A continuación multiplicamos ambos miembros de la desigualdad $x < y$ por $x^{-1}y^{-1}$ se tiene que $y^{-1} < x^{-1}$.

1.8. Pruebe que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución: Usando la desigualdad triángular obtenemos

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| \, .$$

De manera similar, $|y| - |x| \leq |x - y| \Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|$. Por transitividad obtenemos que:

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

o equivalentemente

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \, .$$

1.9. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, si $x^2 + y^2 = 0$ pruebe que $x = y = 0$.

Solución: Supongamos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ entonces sabemos que $x^2 > 0$ y $y^2 > 0$ entonces $x^2 + y^2 > 0$ lo cual es una contradicción.

1.10. Pruebe que $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$.

Solución: Notemos que, por problema anterior, se tiene

$$||a| - |b|| \leq |a - b| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$-\epsilon \leq |a| - |b| < \varepsilon$$

sumando ambos lados de la desigualdad de la derecha por $|b|$ obtenemos que $|a| < |b| + \varepsilon$.

1.11. Resuelva $\dfrac{1 + |2x - 3|}{|x + 5|} < 1$.

Solución: Esta desigualdad tiene sentido excepto para $x = -5$ establecemos este punto como una restricción. Los puntos críticos de esta desigualdad son los puntos en donde los valores absolutos cambian de

signo, para nuestro caso: $x_0 = \frac{3}{2}$ y $x_1 = -5$.
Caso 1: $x \in (-\infty, -5)$ entonces

$$|x+5| = -(x+5) \quad \text{y} \quad |2x-3| = -(2x-3)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1-(2x-3) < -(x+5) &\Rightarrow 1-2x+3 < -x-5 \\ &\Rightarrow 4-2x < -x-5 \\ &\Rightarrow x > 9\,. \end{aligned}$$

Se deduce que el conjunto de soluciones en este caso es vacio, es decir, $S_1 = \varnothing$.
Caso 2: $x \in (-5, 3/2]$ entonces

$$|x+5| = x+5 \quad \text{y} \quad |2x-3| = -(2x-3)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1-(2x-3) < x+5 &\Rightarrow 4-2x < x+5 \\ &\Rightarrow 3x < -1 \\ &\Rightarrow x > -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

y $S_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$.
Caso 3: $x \in (3/2, \infty)$ entonces

$$|x+5| = x+5 \quad \text{y} \quad |2x-3| = 2x-3\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1+(2x-3) < x+5 &\Rightarrow -2+2x < x+5 \\ &\Rightarrow x < 7 \end{aligned}$$

y $S_2 = \left(\frac{3}{2}, 7\right)$. Por lo tanto,

$$S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{2}\right) \cup \left[\tfrac{3}{2}, 7\right) = \left(-\tfrac{1}{3}, 7\right)\ .$$

1.12. Resuelva $\dfrac{(3-2x)(x+5)}{(x^2-25)(x+1)} > 0$.

Solución: Esta desigualdad tiene sentido excepto para $x = 5$, $x \neq -5$ y $x \neq -1$ establecemos estos puntos como restricciones. Notemos que

$$\frac{(3-2x)(x+5)}{(x^2-25)(x+1)} = \frac{(3-2x)(x+5)}{(x-5)(x+5)(x+1)} = \frac{(3-2x)}{(x-5)(x+1)}\,.$$

Los puntos críticos de esta desigualdad son los puntos en donde los las expresiones entre paréntesis cambian de signo, para nuestro caso: $x_0 = \frac{3}{2}$, $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$. Establecemos una tabla que nos facilita la comprensión del problema, en donde los intervalos a distinguir son aquellos separados por los puntos críticos que hemos distinguido porque son en donde ocurre cambio de signo en las expresiones.

$$-\infty \qquad -1 \qquad \frac{3}{2} \qquad 5 \qquad \infty$$

$3-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Soluciones	$+$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto, la inecuación es válida para los puntos pertenecientes a los intervalos

$$S_F = (-\infty, -1) \cup [3/2, 5)\,.$$

Note que en el punto 1 el intervalo es abierto debido a que 1 es un punto que la inecuación no tiene sentido, es decir, es una restricción, en cambio el punto 3/2 es incluido pues no existe restrición sobre este punto.

1.13. Resuelva $|x-2| \le |3x+1|$.

Solución: No hay restriciones y los puntos críticos son $x_0 = 2$ y $x_1 = -1/3$
Caso 1: $x \in (-\infty, -1/3)$ entonces

$$|x-2| = -(x-2) \quad \text{y} \quad |3x+1| = -(3x+1)\,.$$

En este caso nuestra inecuación se ve

$$\begin{aligned} -(x-2) \le -(3x+1) \quad &\Rightarrow \quad -x+2 \le -3x-1 \\ &\Rightarrow \quad 2x \le -3 \\ &\Rightarrow \quad x \le -3/2 \\ &\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -3/2]\,. \end{aligned}$$

Luego, $S_1 = (-\infty, -1/3) \cap (-\infty, -3/2] = (-\infty, -3/2]$.
Caso 2: $x \in [-1/3, 2]$ entonces

$$|x-2| = -(x-2) \quad \text{y} \quad |3x+1| = 3x+1\,.$$

Luego resolvemos la inecuación que en este caso es:

$$\begin{aligned} -(x-2) \leq 3x+1 &\Rightarrow -x+2 \leq 3x+1 \\ &\Rightarrow 1 \leq 4x \\ &\Rightarrow x \geq 1/4 \\ &\Rightarrow x \in [1/4, \infty)\,. \end{aligned}$$

La solución para este caso es la intersección de:

$$S_2 = [-1/3, 2] \cap [1/4, \infty) = [1/4, 2]\,.$$

Caso 3: $x \in (2, \infty)$ entonces

$$|x-2| = x-2 \quad \text{y} \quad |3x+1| = 3x+1\,.$$

Luego resolvemos la inecuación que en este caso es:

$$\begin{aligned} x-2 \leq 3x+1 &\Rightarrow -3 \leq 2x \\ &\Rightarrow x \geq -3/2 \\ &\Rightarrow x \in [-3/2, \infty)\,. \end{aligned}$$

La solución para este caso es la intersección de:

$$S_2 = (2, \infty) \cap [-3/2, \infty) = (2, \infty)\,.$$

La solución final es la unión de las soluciones de cada caso

$$S_F = S_1 \cup S_2 \cap S_3 \cap = (-\infty, -\tfrac{3}{2}] \cup [\tfrac{1}{4}, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{4})$$

1.14. Resuelva, $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + (x^2+x+1)}{-x^2-x-1} \leq 0$.

Solución: Como para cada $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > 0$ y además el discriminante de la parábola x^2+x+1 es negativo. Entonces la parábola no corta al eje x, se conluye que $x^2+x+1 \geq 0$ y $-(x^2+x+1) \leq 0$ luego se tiene que $\sqrt{x^2+1} + x^2+x+1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{x^2+1} + (x^2+x+1)}{-x^2-x-1} \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1.15. Resolver $\dfrac{-x^2-x-1}{|x^2+3x-1|} \leq x^2+3$.

Solución: Las restriciones son $x^2+3x-1 \neq 0$, es decir, que $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-2+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \right\} = S_1$ como $-x^2 - x - 1 < 0$ y $|x^2 + 3x - 1| > 0$. Tenemos que

$$\frac{-x^2 - x - 1}{|x^2 + 3x - 1|} < 0$$

pero $x^2 + 3 > 0$. Por transitividad obtenemos que la inecuación se satisace para todo $x \in S_1$.

1.16. Resolver $\dfrac{|x-1|+1}{|x-2|} \geq 1$

Solución: Las restriciones que contempla la inecuación son: $x \neq 2$. Para cada $x \neq 2$ resolvemos

$$|x-1| + 1 \geq |x-2|$$

Los puntos críticos en este caso son: $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.
Caso 1: $x \in (-\infty, 1]$ entonces $|x-1| = -(x-1)$ y $|x-2| = -(x-2)$

$$\begin{aligned} -(x-1) + 1 \geq -(x-2) \quad &\Rightarrow \quad -x + 2 \geq -x + 2 \\ &\Rightarrow \quad 2 \geq 2\,. \end{aligned}$$

Lo cual es válido siempre entonces la solución para este caso es:

$$S_1 = (-\infty, 1]\,.$$

Caso 2: $x \in (1, 2)$ entonces $|x-1| = x - 1$ y $|x-2| = -(x-2)$

$$\begin{aligned} (x-1) + 1 \geq -(x-2) \quad &\Rightarrow \quad x \geq -x + 2 \\ &\Rightarrow \quad x \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad x \in [1, \infty)\,. \end{aligned}$$

La solución para este caso es la intersección de:

$$S_2 = (1, 2) \cap [1, \infty) = (1, 2)$$

Caso 3: $x \in (2, \infty)$ entonces $|x-1| = x - 1$ y $|x-2| = x - 2$

$$\begin{aligned} (x-1) + 1 \geq x - 2 \quad &\Rightarrow \quad x \geq x - 2 \\ &\Rightarrow \quad 0 \geq -2\,. \end{aligned}$$

Lo cual es válido siempre entonces la solución para este caso es:

$$S_3 = (2, \infty)\,.$$

Como ya sabemos la solución final es la unión de las soluciones de los casos:

$$S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

1.17. Resuelva la siguiente inecuación

$$\left|\frac{|x-2|-3}{|x|-1}\right| \geq 4 \,.$$

Solución: Debemos tener $x \neq \pm 1$. Con esto debemos resolver

$$||x-2|-3| \geq 4||x|-1|$$

Caso 1: Para $x \in (-\infty,-1)$ tenemos que resolver

$$|x-2|-3 \geq 4(|x|-1)$$

que en este caso es equivalente a resolver

$$-(x-2)-3 \geq 4(-x-1)\,.$$

Haciendo unas pocas cuentas obtenemoss $x \geq -3/4 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{4},\infty\right)$. Luego la solución es $S_2 = (-\infty,-1) \cap (-3/4,\infty) = \varnothing$.
Caso 2: Para $x \in (-1,0)$ tenemos que resolver

$$-|x-2|+3 \geq 4(-|x|+1)$$

que en este caso es equivalente a resolver

$$(x-2)+3 \geq 4(x+1)\,.$$

Haciendo algunas cuentas que estoy seguro que ustedes mismos pueden verificar obtenemos $x \leq -1 \Rightarrow x \in (-\infty,-1)$. Luego la solución es $S_2 = (-1,0) \cap (-\infty,-1) = \varnothing$.
Caso 3: Para $x \in (0,1)$ tenemos que resolver

$$-|x-2|+3 \geq 4(-|x|+1)$$

que en este caso es equivalente a resolver

$$(x-2)+3 \geq 4(-x+1)\,.$$

Haciendo algunas cuentas que ya se vuelven algo aburridas obtenemos $x \geq 3/5 \Rightarrow x \in [3/5,\infty)$. Luego la solución es $S_3 = (0,1) \cap [3/5,\infty) = [3/5,1)$.
Caso 4: Para $x \in (1,2)$ tenemos que resolver

$$-|x-2|+3 \geq 4(-|x|+1)$$

que en este caso es equivalente a resolver

$$(x-2)+3 \geq 4(x-1)\,.$$

Haciendo algunas cuentas que ya dominio de memoria obtenemos $x \leq 5/3$. Luego la solución es $S_4 = (1,2) \cap (-\infty, 5/3] = (1, 5/3]$.
Caso 5: Para $x \in (2,5)$ tenemos que resolver

$$-|x-2|+3 \geq 4(|x|-1)$$

que en este caso es equivalente a resolver

$$-(x-2)+3 \geq 4(x-1)\,.$$

Haciendo algunas cuentas obtenemos $x \leq 9/5 \Rightarrow (-\infty, 9/5]$. Luego la solución es $S_5 = (2,5) \cap (-\infty, 9/5] = \varnothing$.
Caso 6: Para $x \in (5,\infty)$ tenemos que resolver

$$|x-2|-3 \geq 4(|x|-1)$$

que en este caso es equivalente a resolver

$$(x-2)-3 \geq 4(x-1)\,.$$

Haciendo las últimas cuentas obtenemos $x \leq -1/3 \Rightarrow (-\infty, -1/3]$. Luego la solución es $S_5 = (5,\infty) \cap (-\infty, -1/3] = \varnothing$.
Por lo tanto la solución final es

$$S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 = \left[\tfrac{3}{5}, 1\right) \cup \left(1, \tfrac{5}{3}\right]\,.$$

1.18. Si $a < b < c$, hacer un bosquejo de la gráfica de

$$f(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|\,.$$

Solución: Al igual que en la resolución de una inecuación tenemos puntos distinguidos, en donde los valores absolutos son cero, en nuestro caso son: a, b y c. Por ejemplo, si $x \in (-\infty, a]$ entonces se tiene que $|x-a| = -(x-a)$, $|x-b| = -(x-b)$ y $|x-c| = -(x-c)$, es decir $f(x) = -3x + a + b + c$. Haciendo este procedimiento obtenemos que

$$f(x) = \begin{cases} -3x+a+b+c & \text{si } x < a\,, \\ -x-a+b+c & \text{si } a \leq x < b\,, \\ x-a-b+c & \text{si } b \leq x < c\,, \\ 3x-a-b-c & \text{si } c \leq x\,. \end{cases}$$

y su gráfico es una lineal poligonal.

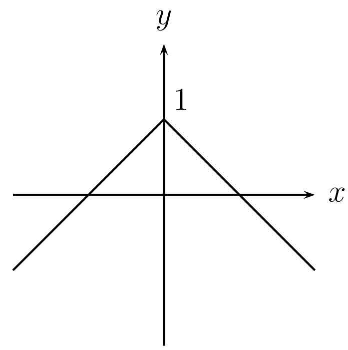
1.19. Bosqueje el gráfico de las funciones

(a) $f(x) = 1 - |x|$,

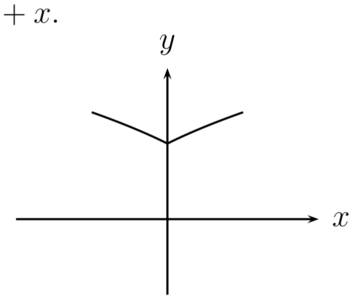
(b) $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

Solución:

(a) Si $x > 0$ entonces $f(x) = 1 - x$. Si $x < 0$, entonces $f(x) = 1 + x$. $f(0) = 1$. Su gráfico son dos semirrectas como lo muestra la figura



(b) Del gráfico de f vemos que $1 - |x| \geq 0$ en el intervalo $[-1, 1]$, por tanto $Dom(g) = [-1, 1]$. Dado que $1 - x$ es decreciente en $[0, 1]$ también lo es $\sqrt{1 - x}$. Sobre $[-1, 0]$, el crecimiento de $1 + x$ implica el crecimiento de $\sqrt{1 + x}$.

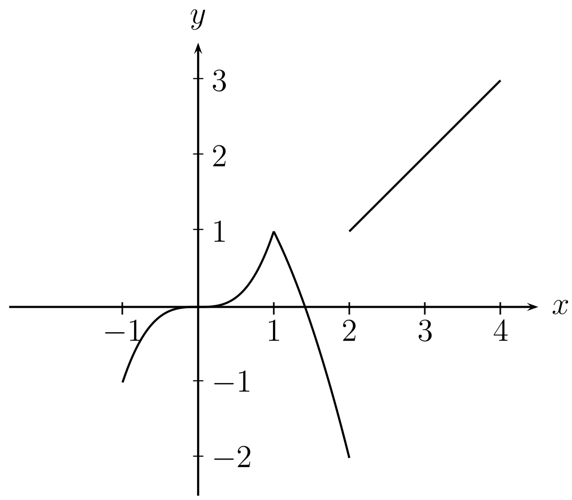


1.20. Consideremos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [-1, 1]\,, \\ -x^2 + 2 & x \in (1, 2)\,, \\ x - 1 & x \in (2, 4]\,. \end{cases}$$

Gráfique f y determine su imagen.

Solución: Observando el gráfico



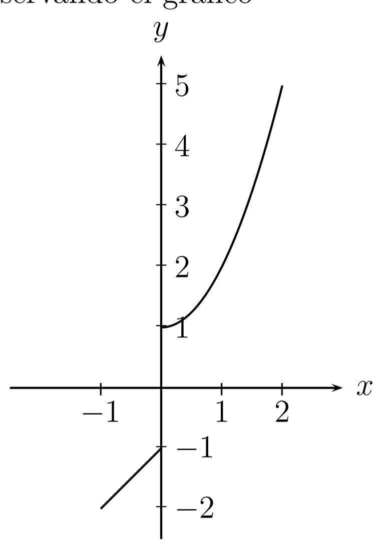
se deduce claramente que $Im(f) = [-2, 3)$.

1.21. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in [0, 2]\,, \\ x - 1 & x \in [-1, 0)\,. \end{cases}$$

Gráfique f y determine su imagen.

Solución: Aqui observando el gráfico



se observe que $Im(f) = [-2, -1) \cup [1, 5]$.

1.22. Determine el dominio y la imagen de las siguientes funciones

(a) $\sqrt{1 - x^2}$,

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

Solución:

(a) Para determinar el dominio debemos analizar los valores de x que hacen de $\sqrt{1-x^2}$ un número real.

$$\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 \leq 1 \, .$$

Por lo tanto, $Dom(\sqrt{1-x^2}) = [-1,1]$. Para encontrar la imagen, debemos despejar x en la ecuación que define la función

$$y = \sqrt{1-x^2} \Longleftrightarrow y^2 = 1-x^2 \, .$$

Se concluye que, $Im(\sqrt{1-x^2}) = [0,1]$.

(b) Primero consideremos la función $\sqrt{x+1}$, entonces

$$\sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \, .$$

Por tanto, $Dom(\sqrt{x+1}) = [-1,1)$. Podemos hallar el recorrido, debemos despejar x en la ecuación que define la función.

$$y = \sqrt{x+1} \Longleftrightarrow y^2 = x+1$$

y $y \in [0,\infty)$. Entonces, cualquiera sea $y \in [0,1)$, $x = y^2-1$ pertenece al dominio, por lo cual $Im(\sqrt{x+1}) = [0,1)$. La función $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ tiene por dominio $(-1,\infty)$, como puede deducirse a partir de lo anterior y su recorrido es $(0,1)$.

1.23. Dada la función

$$f(x) = \frac{x+a}{(x-a)(x-b)} \, .$$

Calcule a y b sabiendo que el $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2,1\}$ y que el gráfico de f pasa por el punto $\left(3, \frac{2}{5}\right)$.

Solución: Si f pasa por el punto $\left(3, \frac{2}{5}\right)$ entonces

$$\frac{3+a}{(3-a)(3-b)} = \frac{2}{5}$$

Haciendo algunas cuentas nos da que es equivalente a $11a+6b-2ab = 3$. Como el dominio es $\mathbb{R} - \{-2,1\}$ se deduce que a y b son iguales a -2 y 1 en algún orden. Una solución a la ecuación $11a++6b-2ab = 3$ es $a = 1$ y $b = -2$, con lo cual f nos queda

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} \, .$$

1.24. Creando gráficas de funciones nuevas apartir funciones conocidas.
Cambios y estiramientos: Sea $y = f(x)$ una función.

a) Al multiplicarse por una constante c. Esto tiene los siguientes efectos:

- Si $c > 1$ entonces $y = cf(x)$ estira el gráfico verticalmente.
- Si $0 < c < 1$ entonces $y = cf(x)$ contrae el gráfico verticalmente.
- Si $-1 < c < 0$ entonces $y = cf(x)$ refleja el gráfico sobre el eje x y lo contrae verticalmente.
- Si $c < -1$ entonces $y = cf(x)$ refleja el gráfico sobre el eje x y lo estira verticalmente.

b) Reemplazando y por $y - k$. Esto tiene los siguientes efectos:

- Si $k > 0$ entonces el $y - k = f(x)$ mueve el gráfico hacia arriba por las unidades de k.
- Si $k < 0$ entonces el $y - k = f(x)$ mueve el gráfico hacia abajo por las unidades de k.

c) Reemplazar x por $x - h$. Esto tiene los siguientes efectos:

- Si $h > 0$ entonces $y = f(x - h)$ mueve el gráfico a la derecha por las unidades de h.
- Si $h < 0$ entonces $y = f(x - h)$ mueve el gráfico a la izquierda por las unidades de h.

Usando esta información privilegiada, gráfique las siguientes funciones:

(a) $y = x^2 + 4x$,

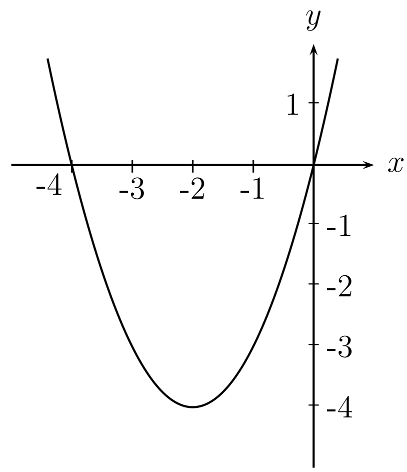
(b) $y = -3x^2 + 6x + 9$.

Solución:

(a) Completando cuadrados uno consigue

$$y = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x + 2)^2 - 4$$

Luego, $y + 4 = (x + 2)^2$ y el gráfico es igual que $y = x^2$ con una cambio a la izquierda de 2 unidades y hacia abajo de 4 unidades.

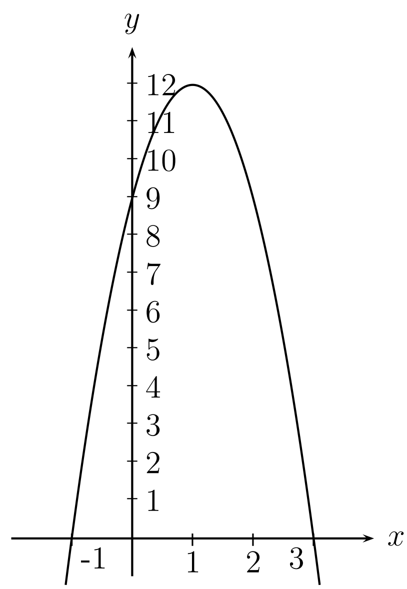


Aqui hemos asumido que usted sabe el gráfico de $y = x^2$.

(b) Factorizando y nuevamente completando cuadrado, obtenemos

$$y = -3(x^2 - 2x - 3) = -3(x^2 - 2x + 1 - 4) = -3((x-1)^2 - 4)$$

Luego, $y - 12 = -3(x-1)^2$ y el gráfico es igual que $y = x^2$ con un desplazamiento a la derecha de 1 unidad, hacia arriba por 12 unidades, una reflexión sobre el eje x y estirar por un factor 3.



1.25. Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}\ .$$

(a) Dado el número a, resuelva la ecuación $f(x) = a$.

(b) Deduzca que la imagen de f es $[0, 1)$.

(c) Bosqueje el gráfico de f.

Solución:

(a) Debido a que el valor absoluto de un número es positivvo o nulo, la ecuación $f(x) = a$ sólo tiene sentido si $a > 0$. Consideraremos el caso $x > 0$.

$$\frac{x}{1+x} = a \Longleftrightarrow x = a(1+x) \Longleftrightarrow x = \frac{a}{1-a}$$

para $x < 0$ tenemos que

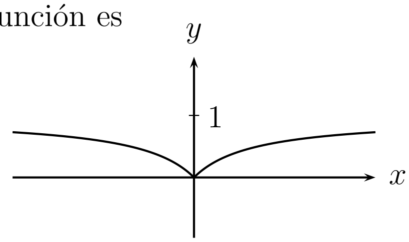
$$\frac{-x}{1-x} = a \Longleftrightarrow -x = a(1-x) \Longleftrightarrow x = \frac{a}{a-1}\,.$$

(b) Dado $a \in [0, 1)$ existe $x = \frac{a}{1-a}$ de modo que

$$f(x) = \frac{\dfrac{a}{1-a}}{1 + \dfrac{a}{1-a}} = a.$$

Esto nos dice que la función f toma todos los valores entre 0 y 1. Toma el valor 0 en $x = 0$, pero no toma el valor 1. Pues, si $f(x) = 1$, entonces debiera existir x tal que $\frac{x}{1+x} = 1$, lo que implica $1 = 0$, como esto es imposible, f no alcanza el valor 1. En consecuencia $Im(f) = [0, 1)$.

(c) El gráfico de esta función es



1.26. De como $\triangle$ discrimina

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, esta función describe una parábola, y es tal que si $\triangle = b^2 - 4ac$ es positiva tiene dos raices reales y distintas (es decir, la parábola corta en dos puntos al eje X). Si $\triangle = 0$ entonces tiene una única raíz real (la parábola corta en un único punto al eje X). Si $\triangle < 0$ entonces no tiene raices reales y por lo tanto no corta en ningún punto la absisa, en este caso existen dos posibilidades, o la parábola esta sobre el eje X o está bajo él, en el primer caso $f(x)$ es siempre positivo y en el segundo $f(x)$ es siempre negativo.

Conociendo esta nueva información, establezca el dominio de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 + 2x + 1}$$

Solución: En primer lugar necesitamos que $x^2 + 2x + 1 \neq 0$, pero esto equivale a que $(x^2 + 1)^2 \neq 0$, es decir, $x \neq -1$.
Además, para que la raiz este bien definida, $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ luego $(x - 2)(x - 1) \geq 0$. Por lo tanto, $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

1.27. Si $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ y $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 5}$, hallar $f(f(x))$ y $f(g(x))$.

Solución: Sea $y = f(x)$ entonces

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(y) = \frac{y}{y - 3} = \frac{f(x)}{f(x) - 3} \\ &= \frac{\frac{x}{x-3}}{\frac{x}{x-3} - 3} = \frac{\frac{x}{x-3}}{\frac{x-3(x-3)}{x-3}} = \frac{x}{9 - 2x} \,. \end{aligned}$$

Sea $z = g(x)$ entonces

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(z) = \frac{z}{z - 3} = \frac{\frac{x+1}{x-5}}{\frac{x+1}{x-5} - 3} \\ &= \frac{\frac{x+1}{x-5}}{\frac{x+1-3(x-5)}{x-5}} = \frac{x + 1}{x + 1 - 3x + 15} = \frac{x + 1}{16 - 2x} \,. \end{aligned}$$

1.28. Escriba $f(x) = e^{1/x^2}$ como composición de tres funciones $f = g \circ h \circ k$.

Solución: Basta considerar $k(x) = x^2$, $h(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = e^x$, entonces

$$(g \circ h \circ k)(x) = g(h(k(x))) = g(h(x^2)) = g\left(\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x^2} = f(x) \,.$$

1.29. Si f y g son funciones reales de variable real definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \,, \\ x + 2 & \text{si } x \leq 0 \,. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x > 3 \,, \\ x^2 & \text{si } x \leq 3 \,. \end{cases}$$

Determine la función $g(f(x))$.

Solución: Si $x \leq 0$ entonces $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$ y

$$g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4\,.$$

Si $0 < x \leq 3$ entonces $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2$ y

$$g(f(x)) = g(x^2+2) = (x^2+2)^2 = x^4 + 4x^2 + 4\,.$$

Si $x > 3$ entonces $f(x) = x^2 + 2$,$g(x) = 2x + 5$ y

$$g(f(x)) = g(x^2+2) = 2(x^2 + 2 + 5 = 2x^2 + 9\,.$$

Por lo tanto,

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2x^2 + 9 & \text{si } x > 3\,, \\ x^4 + 4x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \leq 3\,, \\ x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

1.30. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}.$$

Solución: Sea $a = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}}$ y $b = \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ entonces

$$\begin{aligned} y &= a + b \\ y^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\ &= a^3 + b^3 + 3aby \\ &= (x + \sqrt{1+x^2}) + (x - \sqrt{1+x^2}) + 3aby \\ &= 2x + 3y\sqrt[3]{(x + \sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2})} \\ &= 2x + 3y\sqrt[3]{x^2 - (1+x^2)} \\ &= 2x + 3y \\ \Rightarrow x &= \frac{y^2 + 3y}{2}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, permutando las variables, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3x}{2}\,.$$

1.31. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función inyectiva, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si f es estrictamente creciente entonces f^{-1} es estrictamente creciente.

Solución: Sean $y_1, y_2 \in Dom(f^{-1})$. Entonces, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Si $y_1 < y_2$, debemos demostrar que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Supongamos por reducción al absurdo que no se cumple lo que queremos demostrar. Si $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, entonces $x_1 = x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $y_1 = y_2$, lo que contradice la hipótesis. Si $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, entonces $x_1 > x_2$ y por tanto $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, $y_1 > y_2$, lo que nuevamente contradice la hipótesis. Así tenemos que f^{-1} es estrictamente creciente.

1.32. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\,.$$

Solución: El dominio de la función está determinado por la desigualdad

$$\frac{x^2}{4} - 1 \geq 0\,.$$

Por tanto,

$$Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Para calcular la inversa debemos despejar x en la ecuación $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \\ \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{x^2}{4} - 1 \\ y^2 - xy &= -1 \\ x &= y + \frac{1}{y}\,. \end{aligned}$$

Para responder correctamente al problema debemos permutar las variables, así:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}\,.$$

1.33. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}\,.$$

Solución: Sea $y = f(x)$, entonces

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{1 - \dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}}{1 + \dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}} = \sqrt{1+4x}\,.$$

Por tanto, $1 + 4x = \left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2$, lo que nos da

$$x = \frac{1}{4}\left[\frac{(1-y)^2}{(1+y)^2} - 1\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{(1-y)^2 - (1+y)^2}{(1+y)^2}\right] = -\frac{y}{(1+y)^2}\,.$$

Intercambiando las variables tenemos:

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}\,.$$

1.34. Sea $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$ una función. Hallar el dominio, recorrido, analizar inyectividad y sobreyectividad y una fórmula para f^{-1}.

Solución: El dominio de esta función queda determinado por la prohibición del que el denomirador no sea cero, es decir, $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Para hallar el recorrido, se observa que si $y = f(x)$ entonces

$$y(2x+1) = x-3 \Rightarrow 2xy+y = x-3 \Rightarrow x(2y-1) = -y-3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}.$$

Se deduce que $Rec(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
Nos proponemos demostrar que f es inyectiva. Por demostrar que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$. En efecto, si $f(x) = f(y)$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{2x+1} = \frac{y-3}{2y+1} \quad &\Rightarrow \quad (x-3)(2y+1) = (y-3)(2x+1) \\
&\Rightarrow \quad 2xy + x - 6y - 3 = 2xy + y - 6x - 3 \\
&\Rightarrow \quad x - 6y = y - 6x \\
&\Rightarrow \quad 7x = 7y \Rightarrow x = y\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva. Para demostrar la sobreyectividad, debemos probar que, para cada $y \in Rec(f)$ existe $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = y$.

Entonces, para cada $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ existe $x = \dfrac{y+3}{1-2y} \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-3}{2x+1} = \frac{\dfrac{y+3}{1-2y} - 3}{2\left(\dfrac{y+3}{1-2y}\right) + 1} \\ &= \frac{\dfrac{y+3-3(1-2y)}{(1-2y)}}{\dfrac{2(y+3)+(1-2y)}{(1-2y)}} = \frac{y+3-3+6y}{2y+6+1-2y} = y\,. \end{aligned}$$

Luego, f es sobreyectiva, de lo anterior se deduce que

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}\,.$$

1.35. Determine a y b de tal modo que el trinomio $ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $(x-1)^2$.

Solución: Podemos usar el método de divión sintética de Horner, si queremos dividir $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ por $x - c$ hacemos la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ & 0 & a_n \cdot c & b_n \cdot c & \cdots & b_1 \cdot c \\ \hline c & a_n & b_n = a_n \cdot c + a_{n-1} & b_{n-1} = b_n \cdot c + a_{n-2} & \cdots & f(a) \end{array}\,.$$

En nuesto caso, nos queda

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & a & a+b & a+b & a+b \\ \hline 1 & a & a+b & a+b & a+b & \underbrace{a+b+1}_{0} \end{array}\,.$$

Esta tabla se traduce a

$$ax^4 + bx^3 + 1 = \{ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b)x + (a+b)\}(x-1) + \underbrace{a+b+1}_{resto}\,.$$

Como deseamos que $(x-1)$ divida a $ax^4 + bx^3 + 1$ queremos que el resto sea cero, es decir, $a + b + 1 = 0$. Al dividir el polinomio $ax^3 + (a+b)x^2 +$

$(a+b)x+(a+b)$ por $(x-1)$ mediante división sintética obtenemos

$$\begin{array}{c|cccc} & a & a+b & a+b & a+b \\ & 0 & a & 2a+b & 3a+2b \\ \hline 1 & a & 2a+b & 3a+2b & \underbrace{4a+3b}_{0} \\ & & & & \end{array}.$$

De manera similar, deseamos que $4a+3b=0$, con esto obtenemos un sitema

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c+1=0 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -3a-3b=3 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right] \Rightarrow a=3 \Rightarrow b=-4$$

Por lo tanto, para que ax^4+bx^3+1 sea divisible por $(x-1)$, $a=3$ y $b=-4$.

1.36. Determine las raices del polinomio $p(x)=x^3+6x^2+kx+8$ y el coeficiente k, sabiendo que 2 es una solución de $p(x)=0$.

Solución: Si 2 es solución de $p(x)=0$, entonces $(x-2)$ divide a $p(x)$. Dividiendo obtenemos

$$\begin{array}{rcccccccl} & x^3 & + & 6x^2 & + & kx & + & 8 & : x-2 = x^2+8x+(16+k) \\ - & x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \hline & & & 8x^2 & + & kx & + & 8 & \\ - & & & 8x^2 & + & -16x & & & \\ \hline & & & & & (16+k)x & + & 8 & \\ - & & & & & (16+k)x & - & 2(16+k) & \\ \hline & & & & & & & 40+2k & \end{array}$$

La condición de divisiblidad obliga a que el resto sea cero entonces $40+2k=0 \Rightarrow k=-20$. Luego, podemos escribir

$$x^3+6x^2+kx+8=(x-2)(x^2+8x+16+k)=(x-2)(x^2+8x-4)$$

el último polinomio es de grado 2 y sabemos como extraer las raices: si $p(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ entonces las raices son

$$x=\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

para nuestro caso obtenemos $x=-4\pm 2\sqrt{5}$. Con esto hemos obtenido todas las raices.

1.37. Determine p y q de modo que al dividir $p(x) = x^4 + px^3 + qx^2 - 18x + 12$ por $(x+1)(x+3)$ el resto sea $2x+3$.

Solución: Un hecho que debemos considerar es que al dividir $f(x)$ por $(x-a)$ entonces el resto es igual a $f(a)$. En nuestro caso el resto es $r(x) = 2x+1$. Entonces, al dividir $p(x)$ por $(x+1)$ entonces el resto $r(-1)$ es igual $f(-1)$ y al dividir $p(x)$ por $(x+3)$ entonces el resto $r(-3)$ es igual $f(-3)$. De estas dos identidades obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 1 - p + q + 18 + 12 = 1 \\ 81 - 27p + 9q + 54 + 12 = -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -p + q = -30 \\ -27p + 9q = -150 \end{array}\right].$$

Resolviendolo obtenemos las soluciones

$$p = -\frac{20}{3}, \quad q = -\frac{110}{3}.$$

1.38. Encuentre las raíces y el coeficiente k de la ecuación

$$p(x) = 3x^3 + kx^2 + 8x + 4 = 0$$

sabiendo que tiene un par de raíces iguales.

Solución: Sea α la raíz repetida, entonces $p(x)$ es divisible por

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2.$$

Dividiendo podemos obtener:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 3x^2 & + & kx^2 & + & 8x & + \quad 4 & : x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 3x + (k + 6\alpha) \\ - & 3x^2 & - & 6\alpha x^2 & + & 3\alpha^2 x & & \\ \hline \end{array}$$

$$(8 + 2\alpha k + 9\alpha^2)x + 4 - \alpha^2 k - 6\alpha^3$$

El resto esta obligado a ser cero, con lo cual obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{r} 8 + 2\alpha k + 9\alpha^2 = 0 \\ -6\alpha^2 - k\alpha^2 + 4 = 0 \end{array}\right].$$

De la primera igualdad despejamos k, obteniendo

$$2\alpha k = -9\alpha^2 - 8 \Rightarrow k = \frac{-9\alpha^2 - 8}{2\alpha} = -\frac{9}{2}\alpha - \frac{4}{\alpha}.$$

Reemplazando el valor de k obtenido arriba en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
& -6\alpha^3 + \left(\frac{9}{2}\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\alpha^2 + 4 = 0 \\
\Rightarrow \quad & -6\alpha^3 + \frac{9}{2}\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \\
\Rightarrow \quad & -\frac{3}{2}\alpha^3 + 4\alpha + 4 = 0 \\
\Rightarrow \quad & 3\alpha^3 - 8\alpha - 8 = 0\,.
\end{aligned}$$

Debemos hallar soluciones o raices de la ecuación

$$3\alpha^3 - 8\alpha - 8 = 0 \tag{1.1}$$

Para esto usamos el siguiente resultado sobre raice racionales ($\mathbb{Q}$): Si la ecuación

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros tiene una raíz racional $\alpha = \dfrac{p}{q}$, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

En nuestro caso, si β es raiz de (1) entonces p divide a 8 y q divide a 3, los divisores de 8 son $\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$ y los divisores de 3 son $\{\pm1, \pm3\}$ .Las posibles raices racionales son

$$\beta \in \left\{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}\right\}\,.$$

Usted puede comprobar despues de algunos intentos fallidos que $\beta = 2$ es raiz, con lo cual obtenemos

$$k = -\frac{9}{2}\alpha - \frac{4}{\alpha} = -\frac{9}{2}\cdot 2 - \frac{4}{2} = -11\,.$$

Por lo tanto,

$$p(x) = (x-\alpha)^2(3x + (k + 6\alpha)) = (x-2)^2(3x+1)$$

y las raices son 2 y $-\frac{1}{3}$.

1.39. Encuentre las raíces y el coeficiente k de la ecuación

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 75 = 0$$

sabiendo que α y $-\alpha$ raices.

Solución: Si α y $-\alpha$ son raices, entonces $p(x)$ es divisible por

$$(x-\alpha)(x+\alpha) = x^2 - \alpha^2 \,.$$

Sea β la otra raiz, entonces

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 75 = (x^2-\alpha^2)(x-\beta) = x^3 - \beta x^2 - \alpha^2 x + \alpha^2\beta \,.$$

Para que dos polinomios sean iguales lo deben ser coeficiente a coefiente, entonces

$$\beta = 3, \;\; -\alpha^2 = k, \;\; \alpha^2\beta = 75$$

de estas igualdades se obtiene facilmente que

$$k = -25, \;\; \alpha = \pm 5, \;\; \beta = 3 \,.$$

1.40. Demostrar que x^2+x+1 es polinomio irreducible.

Solución: Basta observar que el discriminante de la ecuación de segundo grado ax^2+bx+c es menor que cero, esto es

$$\triangle = b^2 - 4ac = -5 < 0 \,.$$

Por lo tanto, el polinomio no tiene raices reales. No se puede factorizar en dos polinomios lineales en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el polinomio x^2+x+1 es irreducible.

1.41. Sea

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \,.$$

(a) Si $Dom(f) = (-\infty, -1)$, determine $Rec(f)$.

(b) Si $Rec(f) = (1, 2]$, calcule $Dom(f)$.

Solución:

(a) Sea $y = f(x)$ entonces

$$y = \frac{x+1}{x} \Rightarrow xy = x+1 \Rightarrow x(y-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y-1}$$

y como

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y-1} \in (-\infty, -1) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{y-1} \leq -1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{y-1} + 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1+y-1}{y-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{y}{y-1} \leq 0\,. \end{aligned}$$

Debemos resolver la última inecuación, para esto utilizamos la siguiente tabla:

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a ∞
y	$-$	$+$	$+$
$y-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

De la tabla se deduce que $Rec(f) = [0, 1)$, aquí no hemos incluido al número 1, por ser restricción en la inecuación.

(b)

$$\begin{aligned} \text{como} \quad y \in (1, 2] \quad &\Rightarrow \quad 1 < y \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad 1 < \frac{x+1}{x} \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{x} \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x} - 1 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{x} - 2 \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{x} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{1-x}{x} \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad x > 0 \quad \text{y} \quad \frac{1-x}{x} \leq 0\,. \end{aligned}$$

La última de las desigualdades la abordamos con una tabla, al igual que en el caso anterior,

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a ∞
$1-x$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

La tabla nos indica que los x que satisafacen $\dfrac{1-x}{x} \leq 0$ son $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{si } \ y \in (1,2] \ &\Rightarrow \ x > 0 \quad \text{y} \quad \frac{1-x}{x} \leq 0 \\
&\Rightarrow \ x > 0 \quad \text{y} \quad (x < 0 \ \text{ o } \ x \geq 1) \\
&\Rightarrow \ (x > 0 \ \text{ y } \ x < 0) \ \text{ o } \ (x > 0 \ \text{ y } \ x \geq 1) \\
&\Rightarrow \ x \geq 1\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Dom(f) = [1, \infty)$.

1.42. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

demuestre que f es inyectiva.

Solución: Por demostrar que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$. En efecto,

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) \ &\Rightarrow \ \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|} \\
&\Rightarrow \ x(1+|y|) = y(1+|x|)\,.
\end{aligned}$$

Consideremos primero que $x, y \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ x(1+y) = y(1+x) \\
&\Rightarrow \ x + xy = y + xy \\
&\Rightarrow \ x = y
\end{aligned}$$

en este cado la función f es inyectiva, ahora si $x, y < 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ x(1-y) = y(1-x) \\
&\Rightarrow \ x - xy = y - xy \\
&\Rightarrow \ x = y\,.
\end{aligned}$$

Luego f también es inyectiva en este caso, ahora si $x \geq 0$ y $y < 0$ entonces

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ x(1-y) = y(1+x) \\
&\Rightarrow \ x - xy = y + xy \\
&\Rightarrow \ x = y + 2xy\,.
\end{aligned}$$

Como $x \geq 0$ entonces $0 \leq y + 2xy = y(2x+1)$, pero $y < 0$ y $2x + 1 \geq 0$ lo cual implica que $y(2x+1) < 0$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, f es inyectiva.

1.43. Sea $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \, .$$

(a) Pruebe que f es estricatamente creciente.

(b) Demuestre que f es acotada superiormente.

Solución:

(a) Sean $x, y \in (-1, \infty)$ con $x < y$ entonces

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \frac{y}{y+1} - \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{y(x+1) - x(y+1)}{(y+1)(x+1)} \\ &= \frac{xy + y - xy - x}{(y+1)(x+1)} \\ &= \frac{y - x}{(y+1)(x+1)} > 0 \, . \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a lo siguiente que si $x < y \Rightarrow y - x > 0$, si $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$ y si $y > -1 \Rightarrow y + 1 > 0$, es decir, tanto numerador como denominador son positivos. Luego, $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente.

(b) Sabemos que $0 < 1$ sumando ambos lados en la última expresión por x, obtenemos $x < x+1$. Como $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$ entonces al multiplicar a ambos lados de la desigualdad anterior por $1/(x+1)$ no se invierte la desigualdad, luego

$$\frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow f(x) < 1 \;\; \forall \, x > -1 \, .$$

Por lo tanto, f es acotada superiormente.

1.44. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2^{x-1}}{x^2 \cdot 3^{x+1}}.$$

Pruebe que f es una función estrictamente decreciente.

Solución: Sean $x < y$ con $x, y \in \mathbb{R}^+$ y observemos el cuociente:

$$\begin{aligned} \frac{f(y)}{f(x)} &= \frac{\dfrac{2^{y-1}}{y^2 \cdot 3^{y+1}}}{\dfrac{2^{x-1}}{x^2 \cdot 3^{x+1}}} \\ &= \frac{2^{y-1}}{y^2 \cdot 3^{y+1}} \cdot \frac{x^2 \cdot 3^{x+1}}{2^{x-1}} \\ &= \frac{2^{y-x}}{3^{y-x}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{y-x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 < 1 \,. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior la obtenemos por lo siguiente:
Si $x < y \Rightarrow y - x > 0$ y como

$$\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{y-x} < 1 \,.$$

Además si $x < y$ entonces

$$\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 < 1 \,.$$

Obtenemos que,

$$\frac{f(y)}{f(x)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{y-x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 < 1 \,.$$

Por lo tanto, $f(x) > f(y)$, es decir, f es estrictamente creciente.

1.45. Demuestre que

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

es estrictamente creciente en el intervalo $[1, \infty)$.

Solución: Sean $x, y \in [1, \infty)$ tal que $x < y$ y observemos que:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y + \frac{1}{y} - x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{y^2+1}{y} - \frac{x^2+1}{x} \\ &= \frac{x(y^2+1) - y(x^2+1)}{xy} \\ &= \frac{xy^2 + x - yx^2 - y}{xy} \\ &= \frac{xy(y-x) - (y-x)}{xy} \\ &= \frac{(xy-1)(y-x)}{xy} \, . \end{aligned}$$

Si $x < y \Rightarrow y - x > 0$, $x, y \in [1, \infty)$ entonces $xy \geq 1 > 0$ entonces $xy - 1 > 0$, luego

$$(y - x) > 0, \quad xy - 1 > 0, \quad xy > 0 \, .$$

Se concluye que

$$f(y) - f(x) = \frac{(xy-1)(y-x)}{xy} > 0 \, .$$

Por lo tanto, $f(x) < f(y)$ y f es estrictamente decreciente.

1.46. Demuestre que toda función que esté definida en un intervalo simétrico $(-a, a)$ puede expresarse de manera única como suma de una función par y una función impar. Descomponga la siguiente función en sus partes par e impar

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \, .$$

Solución: Sea $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ una función y consideremos las siguientes funciones

$$f_p(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\}, \quad f_i(x) = \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\} \, .$$

Entonces, f_p es una función par y f_i es una función impar. En efecto, note que

$$\begin{aligned} f_p(-x) &= \frac{1}{2}\{f(-x) + f(-(-x))\} = \frac{1}{2}\{f(-x) + f(x)\} = f_p(x) \, , \\ -f_i(-x) &= -\frac{1}{2}\{f(-x) - f(-(-x))\} = \frac{1}{2}\{-f(-x) + f(x)\} = f_i(x) \, . \end{aligned}$$

Además observe que

$$f_p(x) + f_i(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)\} = f(x) \, .$$

Esto prueba que dada cualquier función f esta se puede escribir como la suma de una función par con una función impar. Nos queda probar que esta manera es única, para probar esto supongamos que existen dos maneras diferentes de descomponer f como suma de funciones par e impar, es decir

$$f(x) = g_p(x) + g_i(x) = h_p(x) + h_i(x)$$

con g_p, h_p funciones pares y g_i, h_i funciones impares. Usando el hecho que la resta de funciones pares es par y que la diferencia de funciones impares es impar, se tiene que

$$k(x) = g_p(x) - h_p(x) = h_i(x) - g_i(x) \, .$$

Luego, $k(x)$ es una función par e impar y la única función que es par e impar al mismo tiempo es la función idénticamente nula, entonces

$$k(x) = 0 \Rightarrow g_p(x) - h_p(x) = 0 = h_i(x) - g_i(x) \Rightarrow g_p(x) = h_p(x), g_i(x) = h_i(x).$$

Con esto hemos probado que la descomposición es única.
Para aquellos que aún no creen que la única función que es par e impar al mismo tiempo es la función idénticamente nula, observe si $k(x)$ lo fuera entonces deberia cumplir

$$k(x) = k(-x), \quad k(x) = -k(-x)$$

igualando $k(-x) = -k(-x) \Rightarrow 2k(-x) = 0 \Rightarrow k(-x) = 0$ para todo $x \in (-a, a)$. En particular, también es cierto para $-x$ entonces $k(x) = 0$ para todo $x \in (-a, a)$. Para concluir escribimos la descomposición para la f pedida.

$$\begin{aligned}
f_p(x) &= \frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{x^2+1}{-x-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)(x+1)-(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{x^3+x^2+x+1-x^3-x+x^2+1}{(x-1)(x+1)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2x^2+2}{(x-1)(x+1)}\right\} \\
&= \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_i(x) &= \frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2+1}{x-1}-\frac{x^2+1}{-x-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)(x+1)+(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{x^3+x^2+x+1+x^3-x-x^2+1}{(x-1)(x+1)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2x^3+2}{(x-1)(x+1)}\right\} = \frac{x^3+1}{(x-1)(x+1)}\,.
\end{aligned}$$

1.47. Sea $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}}$.

(a) Encuentre $Dom(f)$.

(b) Encuentre $\{x\in(1,\infty)/f(x)<1\}$.

Solución:

(a) Para hallar el dominio necesitamos analizar los valores de x que hacen de $\sqrt{4x+1}$, $\sqrt{x+6}$ y $\sqrt{x-1}$ un número real

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x+1}\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow 4x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{4},\infty\right)\,, \\
\sqrt{x+6}\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -6 \Leftrightarrow x\in[-6,\infty)\,, \\
\sqrt{x-1}\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \Leftrightarrow x\in[1,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Intersectando los valores obtenidos se establece que

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right) \cap [-6, \infty) \cap [1, \infty) \Leftrightarrow x \in [1, \infty).$$

Como última restricción el denominador debe ser distinto de cero, es decir, $\sqrt{x-1} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Por lo tanto, $Dom(f) = (1, \infty)$

(b) Para cada $x \in (1, \infty)$, notemos que

$$\begin{aligned}
f(x) < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x+6}{x-1}} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} < \sqrt{\frac{x+6}{x-1}} + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4x+1}{x-1} < \frac{x+6}{x-1} + 1 + 2\sqrt{\frac{x+6}{x-1}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4x+1}{x-1} - \frac{x+6}{x-1} - 1 < 2\sqrt{\frac{x+6}{x-1}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4x+1}{x-1} - \frac{x+6}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} < 2\sqrt{\frac{x+6}{x-1}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4x+1-x-6-x+1}{x-1} < 2\sqrt{\frac{x+6}{x-1}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2x-4}{x-1} < 2\sqrt{\frac{x+6}{x-1}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x-1} < \sqrt{\frac{x+6}{x-1}}.
\end{aligned}$$

Recuerde que si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$, pero $\dfrac{x-2}{x-1} \geq 0$ para

$x \in [2, \infty)$. Entonces, si $x \in [2, \infty)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x-1} < \sqrt{\frac{x+6}{x-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 < \frac{x+6}{x-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}\frac{(x-1)}{(x+6)} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+6)} - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2 - (x-1)(x+6)}{(x-1)(x+6)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 - 5x + 6}{(x-1)(x+6)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{10 - 9x}{(x-1)(x+6)} < 0\,.
\end{aligned}$$

Para resolver esta inecuación hacemos una tabla, aquí los puntos distinguidos son: -6, $10/9$ y 1.

$$-\infty \qquad -6 \qquad \frac{10}{9} \qquad 1 \qquad \infty$$

$10 - 9x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 6$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$

Entonces, $\dfrac{10-9x}{(x-1)(x+6)} < 0 \Leftrightarrow x \in (-6, 10/9] \cup (1, \infty)$, como originalmente $x \in [2, \infty)$ debemos intersectar las soluciones de la tabla con el intervalo del caso que estamos analizando, es decir que

$$\{x \in [2, \infty)/f(x) < 1\} = ((-6, 10/9] \cup (1, \infty)) \cap [2, \infty) = [2, \infty)$$

Ahora si $x \in (0, 1)$ entonces $\dfrac{x-2}{x-1} < 0$. Usaremos aqui el hecho que si $c < 0$ y $a < b \Rightarrow ac > bc$. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x-1} < \sqrt{\frac{x+6}{x-1}} &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} > \sqrt{\frac{x+6}{x-1}}\frac{(x-1)}{(x-2)} \\
&\Leftrightarrow 1 > \sqrt{\frac{(x+6)(x-1)^2}{(x-1)(x-2)^2}} \\
&\Leftrightarrow 1 > \frac{(x+6)(x-1)}{(x-2)^2} \\
&\Leftrightarrow 0 > \frac{(x+6)(x-1)-(x-2)^2}{(x-2)^2} \\
&\Leftrightarrow 0 > \frac{x^2+5x-6-x^2+4x-4}{(x-2)^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{9x-10}{(x-2)^2} < 0 \\
&\Leftrightarrow x \in (1, 10/9]\,.
\end{aligned}$$

Entonces $\{x \in (1,2)/f(x) < 1\} = (1, 10/9]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\{x \in (1,\infty)/f(x) < 1\} &= \{x \in (1,2)/f(x) < 1\} \cup \{x \in [2,\infty)/f(x) < 1\} \\
&= (1, 10/9] \cup [2, \infty)\,.
\end{aligned}$$

1.48. Determine si las siguientes funciones son inyectivas. En caso de serlo, encuentre la inversa.

(a) $f(x) = x^2$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$,

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,

(e) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x^2$.

Solución: Se dice que f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$

(a) f no es inyectiva note que $f(-1) = 1 = f(1)$ y $-1 \neq 1$.

(b) f es inyectiva, en efecto

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = x\,.$$

Para hallar la inversa de f sea $y = f(x)$ entonces $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$, permutando las variables obtenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \,.$$

(c) f es inyectiva, note que

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \;&\Rightarrow\; \frac{x-3}{2x+1} = \frac{y-3}{2y+1} \\ &\Rightarrow\; (x-3)(2x+1) = (y-3)(2y+1) \\ &\Rightarrow\; 2xy + x - 6y - 3 = 2xy + y - 6x - 3 \\ &\Rightarrow\; 7x = 7y \Rightarrow x = y \,. \end{aligned}$$

Ahora, sea $y = f(x)$ entonces

$$y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3 \Rightarrow x(2y-1) = -y-3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}.$$

Permutando las variables tenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x} \,.$$

(d) f no es inyectiva ya que $f(2) = -1/3 = f(-2)$ y $2 \neq -2$.

(e) f es inyectiva si $f(x) = f(y)$ entonces $1 - x^2 = 1 - y^2$ o equivalentemente $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$, como $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x = y$. Ahora, sea $y = f(x)$ entonces $y = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$ como $x \in \mathbb{R}^+$ entonces $x = \sqrt{1-y}$, permutando obtenemos

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1-x} \,.$$

1.49. Demuestre que $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ es estrictamente creciente en $[-1, 1]$ y estrictamente decreciente fuera de este intervalo.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \frac{y}{1+y^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{y(1+x^2) - x(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &= \frac{y + yx^2 - x + xy^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{xy(x-y) - (x-y)}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &= \frac{(x-y)(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} \,. \end{aligned}$$

Además, $1+x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y si $x < y$ entonces $x - y < 0$.
Caso 1: Si $x, y \in [-1, 1]$ es equivalente a $-1 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \Rightarrow |x||y| \leq 1 \Rightarrow |xy| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq xy \leq 1 \Rightarrow xy-1 \leq 0$, en resumen:

$$xy - 1 \leq 0, \quad x - y \leq 0, \quad (1+x^2)(1+y^2) \geq 0$$

entonces

$$f(y) - f(x) = \frac{(x-y)(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)\,.$$

En este caso f es estrictamente creciente.
Caso 2: Si $x, y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, un análisis similar nos permite establecer que $xy - 1 > 0$ y luego

$$f(y) - f(x) = \frac{(x-y)(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} < 0 \Rightarrow f(x) > f(y)\,.$$

En este caso f es estrictamente decreciente.

Capítulo 2

Sucesiones de Números Reales

2.1. Sea $a_1 = -2$, $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $n \geq 2$.

(a) Determine a_2, a_3 y a_4.

(b) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = -\left(\frac{1+3^n}{2}\right) .$$

Solución:

a) Basta utilizar la fórmula recursiva y obtenemos

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 1 = 3(-2) + 1 = -5 , \\ a_3 &= 3a_2 + 1 = 3(-5) + 1 = -14 , \\ a_4 &= 3a_4 + 1 = 3(-14) + 1 = -41 . \end{aligned}$$

b) Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad -\left(\frac{1+3^n}{2}\right)\Bigg|_{n=1} = -\left(\frac{1+3}{2}\right) = -2 = a_1 .$$

Ahora, debemos probar que si suponemos que P es válida para el número n, entonces se tiene que P también es válida para $n+1$, en forma abreviada si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad a_n = -\left(\frac{1+3^n}{2}\right) .$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3a_n + 1 \\
&= -3\left(\frac{1+3^n}{2}\right) + 1 \quad \text{(por la hipótesis inductiva)} \\
&= -\left(\frac{3+3^{n+1}}{2}\right) + \frac{2}{2} \\
&= \frac{-3-3^{n+1}+2}{2} = -\left(\frac{1+3^{n+1}}{2}\right) .
\end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.2. Sea $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$, para todo $n \geq 2$. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = 2 \cdot 3^n - 2^n .$$

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad (2 \cdot 3^n - 2^n)\big|_{n=1} = 2 \cdot 3 - 2 = 4 = x_1$$

Ahora, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad x_n = 2 \cdot 3^n - 2^n .$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 5a_n - 6x_{n-1} \\
&= 5(2 \cdot 3^n - 2^n) - 6(2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}) \quad \text{(por la hipótesis inductiva)} \\
&= 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n - 12 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} \\
&= 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \\
&= 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1} .
\end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.3. Demuestre que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7k .$$

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad (3^{2(n+1)} - 2^{n+1})\big|_{n=1} = 3^{2(2)} - 2^2 = 81 - 4 = 77 = 7 \cdot 11 .$$

Ahora, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7r \quad \text{para algún } r \in \mathbb{Z}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 3^{2((n+1)+1)} - 2^{(n+1)+1} &= 3^{(2n+2)+2} - 2^{(n+1)+1} \\ &= 3^2 \cdot 3^{2n+2} - 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= (7+2) \cdot 3^{2(n+1)} - 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= 7 \cdot 3^{2(n+1)} + 2 \cdot 3^{2(n+1)} - 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= 7 \cdot 3^{2(n+1)} + 2 \cdot (3^{2(n+1)} - 2^{n+1}) \\ &= 7 \cdot 3^{2(n+1)} + 2 \cdot 7r \quad \text{(por la hipótesis inductiva)} \\ &= 7 \cdot \underbrace{(3^{2(n+1)} + 2r)}_{k} = 7k\,. \end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.4. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\bigg|_{n=1} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,.$$

Ahora, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{(por la hipótesis inductiva)} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,. \end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.5. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1):\qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)\bigg|_{n=1}=\frac{1}{2}\,.$$

Ahora, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n):\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{(por hip.)}\\ &= \frac{n(n+1)+1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{(n+1)}{(n+2)}\,.\end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.6. Sea A un conjunto de cardinalidad n (es decir, A posee n elementos). Pruebe que el conjunto potencia de A, $\mathcal{P}(A)$, tiene cardinalidad 2^n.

Solución: Veamos si la propiedad es válida para un conjunto de 1 elemento. Sea $A=\{a\}$ entonces $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing, A\}$ y la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$ es 2.
Ahora, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$.
Hipótesis de inducción

$$P(n):\qquad \text{Si}\ \ \#A=n\Rightarrow \#\mathcal{P}(A)=2^n\,.$$

Sean A un conjunto de n elementos, es decir, $\#A = n$ y b un elemento tal que $b \notin A$. Consideremos el conjunto $B = A \cup \{b\}$ entonces $\#B = n+1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(B) &= \{X \in U : X \subseteq B\} \\
&= \{X \subseteq B : b \in X\} \cup \{X \subseteq B : b \notin X\} \\
&= \{X \subseteq B : b \in X\} \cup \mathcal{P}(A) \\
&= \{X \subseteq B : X = Y \cup \{b\}, Y \in \mathcal{P}(A)\} \cup \mathcal{P}(A)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\#\mathcal{P}(B) &= \#\{X \subseteq B : X = Y \cup \{b\}, Y \in \mathcal{P}(A)\} + \#\mathcal{P}(A) \\
&= \#\mathcal{P}(A) + \#\mathcal{P}(A) \\
&= 2^n + 2^n \qquad\qquad \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

2.7. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(2^{2n} - 3n - 1)$ es divible por 9.

Solución: Válido para $n = 1$

$$P(1): \qquad (2^{2n} - 3n - 1)\Big|_{n=1} = 2^2 - 3 - 1 = 0 = 9 \cdot 0\,.$$

Ahora, debemos probar que si suponemos que P es válida para el número n, entonces se tiene que P también es válida para $n+1$, en forma abreviada si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción es:

$$P(n): \qquad 2^{2n} - 3n - 1 = 9r \quad \text{para algún } r \in \mathbb{Z}\,.$$

Por demostrar:

$$P(n): \qquad 2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 = 9k \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}\,.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 2^2 \cdot 2^{2n} - 3n - 3 - 1 \\
&= (3+1) \cdot 2^{2n} - 3n - 3 - 1 \\
&= (2^{2n} - 3n - 1) + 3 \cdot 2^{2n} - 3 \\
&= 9r + 3 \cdot 2^{2n} - 3\,.
\end{aligned}$$

Utilizaremos nuevamente la inducción para probar que $3 \cdot 2^{2n} - 3$ es divisible por 9. Para $P(1)$ se tiene

$$(3 \cdot 2^{2n} - 3)\Big|_{n=1} = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 = 9 \cdot 1\,,$$

es decir, es válida para $n = 1$. Ahora $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Nuestra hìpótesis inductiva es

$$P(n): \qquad 3 \cdot 2^{2n} - 3 = 9u \quad \text{para algún } u \in \mathbb{Z}\,.$$

Por demostrar que

$$P(n+1): \qquad 3 \cdot 2^{2(n+1)} - 3 = 9w \quad \text{para algún } w \in \mathbb{Z}\,.$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{2(n+1)} - 3 &= 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{2n} - 3 \\ &= 3(3+1) \cdot 2^{2n} - 3 \\ &= 3 \cdot 2^{2n} - 3 + 9 \cdot 2^{2n} \\ &= 9u + 9 \cdot 2^{2n} \\ &= 9\,\underbrace{(u + 2^{2n})}_{s} = 9s \end{aligned}$$

con $s \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto para todo número natural $3 \cdot 2^{2n}$ es divisible por 9. Regresando, teniamos que

$$2^{2(n+1)} - 3(n+1) - 1 = 9r + 3 \cdot 2^{2n} - 3 = 9r + 9s = 9(r+s) = 9k$$

esto concluye la demostración.

2.8. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y r fijo con $r \neq 1$ se tiene que

$$1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}\,.$$

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)\Bigg|_{n=1} = \left(\frac{r - 1}{r - 1}\right) = 1\,.$$

Ahora, debemos probar que si suponemos que P es válida para el número n, entonces se tiene que P también es válida para $n+1$, en forma abreviada si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}\,.$$

Por demostrar que

$$P(n+1): \qquad 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}\ .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} + r^n &= \frac{r^n-1}{r-1} + r^n \quad \text{(hip. inductiva)} \\ &= \frac{r^n - 1 + r^n(r-1)}{r-1} \\ &= \frac{r^n - 1 + r^{n+1} - r^n}{r-1} \\ &= \frac{r^{n+1}-1}{r-1}\ . \end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.9. Demuestre la desigualdad de Bernoulli: Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

para todo $x \geq -1$.

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad \left.\begin{array}{l} (1+x)^n|_{n=1} = 1 + x \\ (1+nx)|_{n=1} = 1 + x \end{array}\right\} \Rightarrow (1+x)^n|_{n=1} \geq (1+nx)|_{n=1}\ .$$

Ahora, si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{para todo } x \geq -1\ .$$

Por demostrar que

$$P(n+1): \qquad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \quad \text{para todo } x \geq -1\ .$$

En efecto, si $P(n)$ es cierta entonces tenemos que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{para todo } x \geq -1$$

multiplicando ambos lados por $(1+x) \geq 0$, obtenemos

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \tag{2.1}$$

y note que

$$(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x\,. \qquad (2.2)$$

La última desigualdad se debe al hecho que como $nx^2 \geq 0$ entonces $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. Entonces por transitividad de (2.1) y (2.2) obtenemos que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \quad \text{para todo } x \geq -1$$

como queriamos probar.

2.10. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$2^n \geq 1+n\,.$$

Solución: Podriamos probar esto utilizando inducción, pero podemos hacerlo de manera directa utilizando la desigualdad de Bernoulli demostrada en el problema previo. Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo $x \geq -1$. En particular, para $x = 1$ obtenemos

$$(1+x)^n\big|_{x=1} = (1+1)^n = 2^n \geq (1+nx)\big|_{x=1} = 1+n$$

es decir, $2^n \geq 1+n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.11. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+ \ldots +n2^{n-1} = 1+(n-1)2^n\,.$$

Solución: Veamos si la propiedad P es válida para el número 1

$$P(1): \qquad (1+(n-1)2^n)\big|_{n=1} = 1\,.$$

Ahora, debemos probar que si suponemos que P es válida para el número n, entonces se tiene que P también es válida para $n+1$, en forma abreviada si $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Nuestra hipótesis de inducción

$$P(n): \qquad 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+ \ldots +n2^{n-1} = 1+(n-1)2^n\,.$$

Por demostrar que

$$P(n+1): \qquad 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+ \ldots +n2^{n-1}+(n+1)2^n = 1+n2^{n+1}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+...+n2^{n-1}+(n+1)2^n &= 1+(n-1)2^n+(n+1)2^n \\ &= 1+n2^n-2^n+n2^n+2^n \\ &= 1+2\cdot n2^n \\ &= 1+n2^{n+1}\,. \end{aligned}$$

Entonces, P es válida para todos los números naturales.

2.12. En $\left(\frac{x}{2}-2\sqrt[3]{x}\right)^{60}$, determine el término constante, si lo hay.

Solución: Usando el teorema del binomio de Newton obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}-2\sqrt[3]{x}\right)^{60} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{60}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{60-k}\cdot(-2\sqrt[3]{x})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{60}{k}\frac{x^{60-k}}{2^{60-k}}(-2)^k x^{k/3} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{60}{k}(-1)^k 2^{2k-60}x^{69-\frac{2}{3}k}\,. \end{aligned}$$

Para obtener el término constante, debe ocurrir que

$$60-\frac{2}{3}k=0 \Rightarrow k=90$$

y como k varia solamente entre 0 y 60, se concluye que no existe término constante.

2.13. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0\,.$$

Solución: Por demostrar que para todo $\varepsilon>0$ existe $r\in\mathbb{R}$ tal que si $n\geq r$ entonces

$$\left|\frac{5}{n+1}-0\right|<\varepsilon\,.$$

Note que

$$\left|\frac{5}{n+1}-0\right|=\frac{5}{n+1}\,.$$

Usando la propiedad Arquimediana, a saber, dado un número real $\delta>0$ siempre existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $0<\dfrac{1}{n}<\delta$. Entonces, dado $\delta=\frac{\varepsilon}{5-\varepsilon}>0$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{5-\varepsilon}\,.$$

Es decir,

$$5-\varepsilon < n\varepsilon \Rightarrow 5 < \varepsilon(n+1) \Rightarrow \frac{5}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{5}{n+1} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0\,.$$

2.14. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6n^3+2}{7n^3} = -\frac{6}{7}\,.$$

Solución: Por demostrar que:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N : \left|\frac{3n^2-6n^3+2}{7n^3} + \frac{6}{7}\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, notemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n^2-6n^3+2}{7n^3} + \frac{6}{7}\right| &= \left|\frac{3n^2-6n^3+2+6n^3}{7n^3}\right| \\ &= \frac{3n^2+2}{7n^3} \leq \frac{3n^2+2n^2}{7n^3} = \frac{5}{7n}\,. \end{aligned}$$

Por la propiedad Arquímediana, si $\delta = \dfrac{7\varepsilon}{5}$ existe N tal que $0 < \dfrac{1}{N} < \dfrac{7\varepsilon}{5}$, es decir

$$\frac{5}{7n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow \left|\frac{3n^2-6n^3+2}{7n^3} + \frac{6}{7}\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6n^3+2}{7n^3} = -\frac{6}{7}\,.$$

2.15. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right)\,.$$

Solución: Usando la descomposición $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ y la propiedad telescópica obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1\,.
\end{aligned}$$

2.16. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ donde $a_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

Solución: Usando la fórmula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, el término general de la sucesión se puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}\,.$$

2.17. Sea $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Solución: Notemos que

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}\,| = \left|\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}-\sqrt{2}\,\right| = \left|\frac{a_n^2-2\sqrt{2}a_n+2}{2a_n}\right| = \frac{(a_n-\sqrt{2})}{2a_n}$$

la última igualdad se debe a que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\begin{aligned}
(a_{n+1}-\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a_n^2-2\sqrt{2}a_n+2}{2a_n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}\right)^2 = \frac{(a_n-\sqrt{2})^4}{(2a_n)^2}\,.
\end{aligned}$$

Por inducción podemos probar que:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}\,| = \frac{(1-\sqrt{2})^{2n}}{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}\,.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt{2})^{2n} = 0$ y $0 < \dfrac{1}{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \dfrac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ Así, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ entonces

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}\,.$$

2.18. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{3n^2+4n}{5n^2-1}$,

b) $a_n = \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$,

c) $a_n = \dfrac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$,

d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

e) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$,

f) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

g) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Soluciones:

a) Usaremos el hecho que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ si $k \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{5n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{5n^2-1} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\frac{n^2}{n^2} + 4\cdot\frac{n}{n^2}}{5\cdot\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\cdot\frac{1}{n}}{5-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+4\cdot\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} 4\cdot\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{3+4\cdot 0}{5-0} = \frac{3}{5}\,.
\end{aligned}$$

b) Usaremos aqui el hecho que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ si y sólo si $|r| < 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} \cdot \frac{1/10^n}{1/10^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{10^n} + 2\cdot\frac{10^n}{10^n}}{\frac{5}{10^n} + 3\cdot\frac{10^n}{10^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n + 2}{5\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n + 3} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

c) Multiplicando en el denominador y numerador por $\dfrac{1}{n}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3\frac{n^2}{n^2} - 5\frac{n}{n^2} + 4\cdot\frac{1}{n^2}}}{\frac{2n}{n} - \frac{7}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3 - 5\frac{1}{n} + 4\cdot\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{7}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{aligned}$$

d) Usando la idéntidad $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0\,.
\end{aligned}$$

e) Usando la idéntidad $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n}} = 0\,.
\end{aligned}$$

f) Utilizaremos aquí:

Teorema 1 (Teorema del Sandwich)**.** *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ *y*

$$x_n \le z_n \le y_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

Para ello acotamos superior e inferiormente el término general notando que

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&\ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\,.
\end{aligned}$$

Entonces
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \, .$$
Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, obtenemos que
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \, .$$

g) Como cualquier raíz de un número mayor que uno es mayor que uno, podemos escribir:
$$\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + k_n$$
donde $k_n \geq 0$ y depende de n. Entonces, usando la desigualdad de Bernoulli, demostrada en ayudantias preteritas obtenemos:
$$\sqrt{n} = (1+k_n)^n > 1 + nk_n > nk_n$$
y por lo tanto, $k_n < \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Entonces,
$$1 < \sqrt[n]{n} = (1+k_n)^2 = 1 + 2k_n + k_n^2 < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \, .$$
Usando el Teorema del Sandwich se concluye que
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \, .$$

2.19. Pruebe que si $0 \leq a \leq b$ entonces
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b \, .$$

Solución: Usaremos el Teorema del Sandwich para hallar este límite. Notemos que si $0 \leq a \leq b$ entonces
$$0 \leq a^n \leq b^n \, .$$
Sumando b^n en la desigualdad anterior obtenemos:
$$b^n \leq a^n + b^n \leq b^n + b^n = 2b^n \, .$$
Radicando la desigualdad anterior a la n obtenemos:
$$b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot b \, .$$
Como $\lim\limits_{n\to\infty} b \cdot \sqrt[n]{2} = b \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}_{1} = b$ entonces en virtud del teorema del Sandwich obtenemos que:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b \, .$$

2.20. Calcular
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}\right).$$

Solución: Utilizaremos el Teorema del Sandwich para calcular este límite. Denotemos por
$$a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}.$$

Notemos lo siguiente:
$$\frac{1}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2+k}\leq\frac{1}{n^2+1}\quad\forall\, k=1,2,...,n.$$

Luego,
$$\frac{n}{n^2+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+n}\leq\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k}}_{a_n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+1}=\frac{n}{n^2+1}.$$

Es decir,
$$\frac{n}{n^2+n}\leq a_n\leq\frac{n}{n^2+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+n}=0$, entonces por el Teorema del Sandwich:
$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

2.21. Calcular
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}\right).$$

Solución: De manera similar al problema anterior, basta notar que:
$$\frac{n}{(2n)^2}\leq b_n\leq\frac{n}{n^2}$$

es decir,
$$\frac{1}{4n}\leq b_n\leq\frac{1}{n}$$

donde
$$b_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ entonces por el Teorema del Sandwich
$$\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

2.22. Demuestre que si $x_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Solución: Tomemos $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$a < c < 1\,. \tag{2.3}$$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$ y $x_n > 0$ entonces existe N tal que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c \qquad \forall\, n \geq N\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &< x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}\cdot x_n \\ &\leq c\cdot x_n = c\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot x_{n-1} \\ &\leq c^2\cdot x_{n-1} \\ &\vdots \\ &\leq c^{n-N+1}x_N = b_n \end{aligned}$$

es decir, $0 < x_{n+1} \leq b_n$ y como

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c^{n-N+1}x_N = x_N \underbrace{\lim_{n\to\infty} c^{n-N+1}}_{0} = 0$$

ya que por (2.3) se tiene que $|c| < 1$, luego por el Teorema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0\,.$$

2.23. Calcule el límite de las siguientes sucesiones

(a) $a_n = \dfrac{n^k}{a^n} \qquad (a > 1)$,

(b) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$,

(c) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Solución: Utilizaremos el resultado del problema anterior, que deducimos mediante el Teorema del Sandwich, para hallar estos límites

(a) Notemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^k}{a^n}} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a}$$

como $a_n > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{a} < 1\,.$$

Entonces, por el problema anterior

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0\,.$$

(b) Notemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

como $a_n > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1\,.$$

Entonces, por el problema anterior

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\,.$$

(c) Notemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

como $a_n > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\dfrac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Entonces, por el problema anterior

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

2.24. Calcule los siguientes límites de sucesiones

(a) $\sqrt[n]{n+k} \qquad (k \in \mathbb{N})$,

(b) $\sqrt[n]{n\sqrt{n}}$,

(c) $\sqrt[n]{\log n}$,

(d) $\sqrt[n]{n \log n}$.

Solución:

(a) Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq m \cdot n$, entonces

$$1 \leq n + k \leq n + m \cdot n = n(m+1)\,.$$

Entonces

$$1 \leq \sqrt[n]{n+k} \leq \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{m+1}\,.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{m+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m+1} = (1)\cdot(1) = 1\,.$$

Por el Teorema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k} = 1\,.$$

(b) Notemos que

$$1 \leq n\sqrt{n} = n \cdot n^{1/2} = n^{3/2} \leq n^{4/2} = n^2\,.$$

Entonces

$$1 \leq \sqrt[n]{n\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{n^2}\,.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Por el Teorema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\sqrt{n}} = 1\,.$$

(c) Para n suficientemente grande note que

$$1 \leq \log n \leq n$$

de hecho esta desigualdad es válida para todo $n > 3$ entonces

$$1 \leq \sqrt[n]{\log n} \leq \sqrt[n]{n}\,,$$

como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Por el Teorema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n} = 1\,.$$

(d) De manera similar, para n suficientemente grande

$$1 \leq n\log n \leq n \cdot n \leq n^2\,.$$

Entonces

$$1 \leq \sqrt[n]{n\log n} \leq \sqrt[n]{n^2}\,.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Por el Teorema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\log n} = 1\,.$$

2.25. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)}$.

Solución: Sabemos que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = L$ entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - L) = 0$ y notemos que

$$\frac{\log(n+1)}{\log(n)} - 1 = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log(n)} = \frac{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\log(n)}\,.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) = \log(\,1) = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}-1\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\log(n)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\log(n)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n)}=0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log(n)}=1\,.$$

2.26. Dado $a>0$, defina inductivamente la sucesión $\{x_n\}$ mediante $x_1=\sqrt{a}$ y $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$. Pruebe que $\{x_n\}$ es convergente y calcule su límite:

$$L=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}\,.$$

Solución: Notemos que $x_1=\sqrt{a}$ y $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$. Afirmamos que $\{x_n\}$ es una sucesión creciente. Por inducción, se tiene que demostrar que la propiedad se satisface para $n=1$. En efecto, tenemos que $\sqrt{a}>0$ entonces $a+\sqrt{a}>a$, es decir,

$$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}=x_2\,.$$

Ahora, $p(n)\Rightarrow p(n+1)$. Nuestra hipótesis inductiva es: $x_n<x_{n+1}$ y queremos probar que $x_{n+1}<x_{n+2}$. Tenemos que

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}<\sqrt{a+x_{n+1}}=x_{n+1}$$

como queriamos probar. Entonces, $\{x_n\}$ es creciente.
Debemos probar que $\{x_n\}$ es acotada superiormente. Afirmamos que $x_n\le L$ donde L es la raíz positiva de la ecuación $L^2=L+a$. En efecto por inducción:

$$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{L+a}=L\,.$$

Ahora, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$. Nuestra hipótesis inductiva es $x_n\le L$. Entonces,

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\le\sqrt{a+L}=L\,.$$

Por lo tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión monotona acotada, luego existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ digamos que su límite es M. Como el límite existe volviendo a la ecuación de recurrencia

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad &\Rightarrow \quad x_{n+1}^2 = a + x_n \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (a + x_n) \\ &\Rightarrow \quad M^2 = a + M \, . \end{aligned}$$

Despejando el de M tenemos

$$M = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

como $\{a_n\} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $M = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. En particular si $a = 2$ entonces $M = 2$.

2.27. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots ,$$

y encontrar su límite, si es que existe.

Solución: Note que esta sucesión se puede definir por recurrencia mediante:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \, .$$

Demostraremos que $\{a_n\}$ es una sucesión acotada superiormente por 2 y es creciente. Procediendo por inducción tenemos: $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. Supongamos que $a_{n-1} \leq 2$, entonces $a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$.
Para analizar el crecimiento demostraremos que $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$. En efecto, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n}{\sqrt{2a_n}} = \sqrt{\dfrac{a_n}{2}}$. Como $a_n \leq 2$, tenemos que $\dfrac{a_n}{2} \leq 1$ y por lo tanto, $\sqrt{\dfrac{a_n}{2}} \leq 1$. Lo cual equivale a tener $a_n \leq a_{n+1}$.
Luego, existe el limite de $\{a_n\}$, digamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Esto nos permite calcularlo usando la fórmula de recurrencia: $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, implica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}$, y po consiguiente, $L = \sqrt{2L}$, lo que nos lleva a la ecuación $L^2 - 2L = 0$ que tiene por solución $L = 0$ o $L = 2$. Como la sucesión es siempre mayor que cero, podemos deducir que $L = 2$.

2.28. Considere la sucesión

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad , u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \, .$$

(a) Demuestre que la sucesión formada por las razones de dos términos consecutivos $x_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ satisface la relación

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \, .$$

(b) Demuestre que las razones de dos términos consecutivos de la sucesión , $x_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$, converge y calcule su límite.

Solución:

(a) Note que

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}} = \frac{1}{\frac{u_{n+1}+u_n}{u_{n+1}}} = \frac{1}{1+\frac{u_n}{u_{n+1}}} = \frac{1}{1+x_n} \, .$$

(b) Como paso previo demostraremos, usando inducción, que $u_{n+1}u_n = u_n^2 + (-1)^n$, con $n \geq 2$. Si $n = 2$ se tiene que $u_3 u_1 = 2 \cdot 1 = 2$, reemplazando $n = 2$ en el segundo miembro de la igualdad que queremos demostrar, obtenemos: $u_2^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$. Por lo tanto, la igualdad es válida para $n = 2$. Ahora supongamos que $u_{k+1}u_{k-1} = u_k^2 + (-1)^k$ para todo $k \leq n$ y consideremos

$$\begin{aligned}
u_{n+2}u_n &= (u_{n+1}+u_n)u_n \\
&= (u_{n+1}+u_{n-1}+u_{n-2})u_n \\
&= ((u_n+u_{n-1})+u_{n-1}+u_{n-2})u_n \\
&= u_n^2 + 2u_{n-1}u_n + u_{n-2}u_n \\
&= u_n^2 + 2u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 + (-1)^{n-1} \quad \text{(hipótesis inductiva)} \\
&= (u_n+u_{n-1})^2 + (-1)^{n-1} \\
&= u_{n+1}^2 + (-1)^{n-1} \, .
\end{aligned}$$

Para analizar la existencia del límite veamos la diferencia entre dos términos consecutivos

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ &= \frac{u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}u_{n+2}} \,. \end{aligned}$$

Así vemos que la sucesión no es creciente ni decreciente, pero como

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}}$$

las distancias entre los términos de la sucesión tiende a cero, la sucesión tiene un límite que llamaremos L. Luego,

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty} x_n} \\ &\Rightarrow \quad L = \frac{1}{1+L} \\ &\Rightarrow \quad L^2 + L - 1 = 0 \,. \end{aligned}$$

Las soluciones a esta última ecuación son $L = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Por ser $x_n > 0$, para todo n, L debe ser un número positivo. Así, $L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.29. Demuestre, sin usar el teorema del binomio, que $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y que $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente.

Solución: Para estudiar el creciemiento de la suseción $\{a_n\}$ demostraremos que el cuociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es mayor que 1. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\\
&= \left(1+\frac{-1}{(n+2)^2}\right)^{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\\
&> \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \quad \text{(usando la desigualdad de Bernoulli)}\\
&= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto podemos concluir que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Siguiendo la misma técnica para la sucesión $\{b_n\}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}\right)^{n+1} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}\\
&= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}\\
&= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}\\
&> \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\frac{n+1}{n+2} \quad \text{(usando la desigualdad de Bernoulli)}\\
&= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n} > 1\,.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, $\{b_n\}$ es creciente.

2.30. Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ las sucesiones definidas por recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n}$$

con $a_0 > b_0 > 0$ fijos.

(a) Pruebe que ambas sucesiones son decrecientes.

(b) Muestre que ambas sucesiones son acotadas inferiormente y concluya que ambas son convergentes.

(c) Calcule los límites de ambas sucesiones.

Solución:

(a) Notemos que

$$b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n} = \frac{b_0}{a_0} a_{n+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_0}{a_0}\,.$$

Luego, se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} < 1 \Longrightarrow a_{n+1} < a_n\,.$$

Además,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n}}{\frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow b_{n+1} < b_n\,.$$

Por lo tanto, ambas suciones son decrecientes.

(b) Los términos de ambas suciones son positivos, entonces ambas suciones estan acotadas inferiormente por 0. Luego, como ambas sucesiones son monotonas y acotadas ellas poseen un límite, digamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

(c) Usando la relación de recurrencia tenemos que los límites de ambas sucesiones satisfacen lo siguiente:

$$a = \sqrt{ab} \qquad b = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{ab}$$

es decir, $a^2 = ab \Rightarrow a(a-b) = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = b$. Si $a = 0$ de la segunda ecuación sabemos que $b = 0$. Si $a = b$ de la segunda ecuación sabemos que $b = \frac{b_0}{a_0} b$ lo que obliga que $b = 0$ y en tal caso también $a = 0$. Por lo tanto, la única solución es que $a = b = 0$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

2.31. Considere la sucesión $\{s_n\}$ definida por recurrencia mediante

$$s_1 = 1, \qquad s_{n+1} = \sqrt{\frac{9 + s_n^2}{2}} \, .$$

(a) Pruebe que $\{s_n\}$ es acotada superiormente.

(b) Verifique que $\{s_n\}$ es creciente.

(c) Deduzca que $\{s_n\}$ es convergente y calcule su límite.

Solución:

(a) Primero debemos buscar el candidato para ser cota superior de (s_n). Después de resolver la parte (c) uno conjetura que 3 es cota superior. Probemos esto por inducción. Para $n = 1$ se tiene que $s_1 = a < 3$. Suponiendo que $s_n \leq 3$ tenemos que

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{9 + s_n}{2}} \leq \sqrt{\frac{9+9}{2}} = \sqrt{9} = 3 \, .$$

Por lo tanto, (s_n) es acotada superiormente por 3.

(b) Esto se puede hacer por inducción, pero utilizando la cota superior $s_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta ser más sencillo proceder directamente. En efecto,

$$s_n^2 = \frac{s_n^2 + s_n^2}{2} \leq \frac{9 + s_n^2}{2} = s_{n+1}^2 \Rightarrow s_n \leq s_{n+1} \, .$$

(c) Por el teorema de sucesiones monotonas y acotadas se tiene que (s_n) es convergente, es decir, existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$. Usando la relación de recurrencia:

$$s_{n+1}^2 = \frac{9 + s_n^2}{2}$$

y usando el álgebra de límites se obtiene que

$$L^2 = \frac{9 + L^2}{2} \, .$$

Resolviendo la ecuación cuadratica obtenemos que $L = \pm 3$. Pero $s_n > 0$ entonces necesariamente $L = 3$.

2.32. Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$s_1 = 2a, \qquad s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}} \, .$$

(a) Demuestre por inducción que $s_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y converge a un número real L.

(c) Encuentre el valor de L.

Solución:

(a) Para $n = 1$ es cierto que $s_1 = 2a > a$. Si suponemos que $s_n > a$ entonces

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}} > \sqrt{\frac{a^3 + a^2}{a+1}} = \sqrt{\frac{a^2(a+1)}{a+1}} = \sqrt{a^2} = a\ .$$

(b) Demostraremos que $s_{n+1} - s_n < 0$.
En efecto, como $s_n > a$ entonces

$$s_n^2 a > a^3 \Rightarrow s_n^2 a + s_n^2 > a^3 + s_n^2 \Rightarrow \sqrt{s_n^2 a + s_n^2} > \sqrt{a^3 + s_n^2}\ .$$

Luego, $-\sqrt{s_n^2 a + s_n^2} < -\sqrt{a^3 + s_n^2}$ y note que

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} - s_n \\ &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - s_n\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} \\ &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - \sqrt{s_n^2 a + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} \\ &< \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - \sqrt{a^3 + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} = 0\ . \end{aligned}$$

Como s_n es decreciente y acotada inferiormente es en consecuencia convergente a un número real L.

(c) Tomando límite a la formula recursiva que define la sucesión se obtiene:

$$L = \sqrt{\frac{a^3 + L^2}{a+1}}\ .$$

De donde

$$L^2(a+1) = a^3 + L^2 \Rightarrow L^2 a = a^3 \Rightarrow L^2 = a^2 \Rightarrow L = \pm a\ .$$

Ahora como $s_n > a$ entonces $L \geq a$ de donde se deduce que la única posibilidad es que $L = a$.

Capítulo 3

Límites de Funciones

3.1. Calcule los siguientes límites de funciones

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+3x-4}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+5}{x^2+3x-4}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(x^2+3x-4) &= \lim_{x\to 1} x^2 + 3\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 4 \\
&= (\lim_{x\to 1} x)^2 + 3\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 4 \\
&= 1^2 + 3\cdot 1 - 4 = 0\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1+0-0} = 0\,.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \infty\,.
\end{aligned}$$

(d) El numerador y el denominador se anulan cuando x toma el valor 1, por lo que debemos tratar de factorizar

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-4}{x-2} = \frac{-3}{-1} = 3\,.
\end{aligned}$$

3.2. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\,.$$

Solución: Usando la igualdad $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ para transformar algebraicamente la expresión reacionalizando la expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} \\
&= \frac{x+1-(x^2+x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} \\
&= \frac{-x^2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}\,.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

3.3. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}\,.$$

Solución: Usando la fórmula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ se puede racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x} &= \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}\cdot\frac{(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\\
&= \frac{1-(1-x)}{3x(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\\
&= \frac{x}{3x(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\\
&= \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})} = \frac{1}{9}\,.$$

3.4. Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin\left(\frac{x^2+2x-1}{x+3}\right)}{x}\,.$$

Solución: Sabemos que la función $\sin x$ es acotada entonces la función

$$1-\sin\left(\frac{x^2+2x-1}{x+3}\right)$$

es acotada y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ entonces, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin\left(\frac{x^2+2x-1}{x+3}\right)}{x} = 0\,.$$

3.5. Analizar el límite de la función

$$f(x) = x^{\frac{p}{3}}\{(x^2+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\}$$

cuando $x\to\infty$, según los valores de p.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}
x^{\frac{p}{3}}\{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\} &= x^{\frac{p}{3}}\{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\}\cdot\frac{(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4})}{(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4})}\\
&= \frac{x^{\frac{p}{3}}(x^2+1-x^2)}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4}}\\
&= \frac{x^{\frac{p}{3}}}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4}}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{4}{3}}}\\
&= x^{\frac{p-4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x^{-2}+x^{-4}}+\sqrt[3]{1+x^{-2}}+1}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & \text{Si } \ p=4\,,\\ \infty & \text{Si } \ p>4\,,\\ 0 & \text{Si } \ p<4\,.\end{cases}$$

3.6. Sea $f(x)$ una función tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Hallar

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{\log(f(x)+1)}-\sqrt{\log f(x)}\}\,.$$

Solución: Usando la idéntidad $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\log(f(x)+1)}-\sqrt{\log f(x)} &= \frac{\log(f(x)+1)-\log f(x)}{\sqrt{\log(f(x)+1)}+\sqrt{\log f(x)}}\\
&= \frac{\log\left(\frac{f(x)+1}{f(x)}\right)}{\sqrt{\log(f(x)+1)}+\sqrt{\log f(x)}}\,.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} p(x)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{f(x)+1}{f(x)}\right)=\log\left(1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}\right)=\log(1+0)=0$$

y

$$\lim_{x\to\infty} q(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\log(f(x)+1)}+\sqrt{\log f(x)}}=0\,.$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{\log(f(x)+1)}-\sqrt{\log f(x)}\}=\lim_{x\to\infty} p(x)q(x)=\lim_{x\to\infty} p(x)\cdot\lim_{x\to\infty} q(x)=0.$$

3.7. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ con $n, m \in \mathbb{N}$.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x^2 + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1} . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x^2 + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1} \\ &= \frac{1^{m-1} + 1^{m-2} + \cdots + 1^2 + 1 + 1}{1^{n-1} + 1^{n-2} + \cdots + 1^2 + 1 + 1} = \frac{m}{n} . \end{aligned}$$

3.8. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$.

Solución: Notemos que $1 - x^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} &= \frac{(x^2 + x + 1) - 3}{(1-x)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2 + x + 1)} = -\frac{x+2}{x^2 + x + 1} . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = -\frac{2}{3} .$$

3.9. Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2} &= \frac{(x-b) - (a-b)}{(x^2 - a^2)(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b})} \\ &= \frac{x-a}{(x-a)(x+a)(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b})} \\ &= \frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b} + \sqrt{a-b})} . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}\,.$$

3.10. Calcule $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin \pi x}{(x-2)\cos \pi x}$.

Solución: Haciendo el cambio de variable $t=x-2$ si $x\to 2$ entonces $t\to 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\sin \pi x}{(x-2)\cos \pi x} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi(t+2))}{t\cos(\pi(t+2))}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t+2\pi)}{t\cos(\pi t+2\pi))}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)\cos(2\pi)+\sin(2\pi)\cos(\pi t)}{t\cos(t\pi+2\pi))}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{t\cos(t\pi+2\pi))}\\
&= \pi\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos(t\pi+2\pi)}\right)\\
&= \pi\cdot(1)\cdot\frac{1}{\cos(2\pi)}=\pi\,.
\end{aligned}$$

En la tercera igualdad hemos usado la idéntidad trigonométrica

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\,.$$

3.11. Calcule $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Solución: Hacemos el cambio de variables $u=\frac{1}{x-2}$ si $x\to 2$ entonces $u\to 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(x^2-4)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2}(x-2)(x+2)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}(x+2)\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}(x+2)\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\sin(u)\\
&= (2+2)\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}\\
&= 4\cdot(1)=4\,.
\end{aligned}$$

3.12. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2} = A$.

Solución: Usando que

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha\,.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sin(a+x)+\sin(a-x) &= \sin a\cos x + \sin x\cos a + \sin a\cos x - \sin x\cos a \\ &= 2\sin a\cos x\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin a\cos x - 2\sin a}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin a(\cos x - 1)}{x^2}\cdot\left(\frac{\cos x+1}{\cos x+1}\right) \\ &= 2\sin a \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x+1)} \\ &= -2\sin a \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)} \\ &= -2\sin a\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x+1}\right) \\ &= -2\sin a\cdot(1)\cdot(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = -\sin a\,. \end{aligned}$$

3.13. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})(1+\cos x)}\\
&= \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+1})(1+1)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

3.14. Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Solución: Note que el denominador y el numerador se anulan en $x=1$ entonces ambos son divisibles por $(x-1)$. En general, se puede demostrar por inducción que:

$$x^n-2x+1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x-1)\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x-1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x-1}\\
&= \frac{1^{99}+1^{98}+\cdots+1^2+1-1}{1^{49}+1^{48}+\cdots+1^2+1-1}=\frac{98}{48}\,.
\end{aligned}$$

3.15. Sean $x_1<x_2$ las raíces de la ecuación $x^2-2ax+b^2=0$, con $a,b\in\mathbb{R}^+$ y $a>b$. Determinar los límites:

(a) $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{a-b}}$,

(b) $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{ax_2-b^2}{ax_1-b^2}$,

(c) $\lim\limits_{b\to a} \dfrac{ax_2 - bx_1}{ax_1 - bx_2}$.

Solución: Primero notemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - 2ax + b = 0$ son:

$$\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b^2} = a \pm \sqrt{(a-b)(a+b)}\,.$$

Como $x_1 < x_2$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$x_1 = a - \sqrt{(a-b)(a+b)}, \qquad x_2 = a + \sqrt{(a-b)(a+b)}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to a} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{a-b}} &= \lim_{b\to a} \frac{a + \sqrt{(a-b)(a+b)} - (a - \sqrt{(a-b)(a+b)})}{\sqrt{a-b}} \\
&= \lim_{b\to a} \frac{2\sqrt{(a-b)(a+b)}}{\sqrt{a-b}} \\
&= \lim_{b\to a} 2\sqrt{a+b} = 2\sqrt{a+a} = 2\sqrt{2a}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to a} \frac{ax_2 - b^2}{ax_1 - b^2} &= \lim_{b\to a} \frac{a(a + \sqrt{(a-b)(a+b)}) - b^2}{a(a - \sqrt{(a-b)(a+b)}) - b^2} \\
&= \lim_{b\to a} \frac{a^2 - b^2 + a\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a^2 - b^2 - a\sqrt{(a-b)(a+b)}} \\
&= \lim_{b\to a} \frac{(a-b)(a+b) + a\sqrt{(a-b)(a+b)}}{(a-b)(a+b) - a\sqrt{(a-b)(a+b)}} \\
&= \lim_{b\to a} \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}\{\sqrt{(a-b)(a+b)} + a\}}{\sqrt{(a-b)(a+b)}\{\sqrt{(a-b)(a+b)} - a\}} \\
&= \lim_{b\to a} \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)} + a}{\sqrt{(a-b)(a+b)} - a} \\
&= \frac{\sqrt{(a-a)(a+a)} + a}{\sqrt{(a-a)(a+a)} - a} = \frac{a}{-a} = -1\,.
\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to a}\frac{ax_2-bx_1}{ax_1-bx_2} &= \lim_{b\to a}\frac{a(a+\sqrt{(a-b)(a+b)})-b(a-\sqrt{(a-b)(a+b)})}{a(a-\sqrt{(a-b)(a+b)})-b(a+\sqrt{(a-b)(a+b)})}\\
&= \lim_{b\to a}\frac{a^2+a\sqrt{(a-b)(a+b)}-ab+b\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a^2-a\sqrt{(a-b)(a+b)}-ab-b\sqrt{(a-b)(a+b)}}\\
&= \lim_{b\to a}\frac{a(a-b)+(a+b)\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a(a-b)-(a+b)\sqrt{(a-b)(a+b)}}\\
&= \lim_{b\to a}\frac{\sqrt{a-b}\{a\sqrt{a-b}+(a+b)\sqrt{a+b}\}}{\sqrt{a-b}\{a\sqrt{a-b}-(a+b)\sqrt{a+b}\}}\\
&= \lim_{b\to a}\frac{a\sqrt{a-b}+(a+b)\sqrt{a+b}}{a\sqrt{a-b}-(a+b)\sqrt{a+b}}\\
&= \frac{a\sqrt{a-a}+(a+a)\sqrt{a+a}}{a\sqrt{a-a}-(a+a)\sqrt{a+a}}\\
&= \frac{2a\sqrt{2a}}{-2a\sqrt{2a}}=-1\,.
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Funciones Continuas

4.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

Demuestre que $f(x) = cx$ donde c es una constante.

Solución: Notemos que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0), \quad \text{lo que implica} \quad f(0) = 0\,.$$

En general, si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{n-veces}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{\text{n-veces}} = nf(1)\,.$$

Ahora, calcularemos $f(-n)$, con $n \in \mathbb{N}$. $f(0) = f(1-1) = f(1) + f(-1) = 0$, entonces $f(-1) = -f(1)$. Esto nos permite calcular $f(-n) = -nf(1)$. Notemos que

$$f(1) = f\left(n\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{lo que implica} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)\,.$$

Sea r un número racional, $r = \dfrac{p}{q}$ entonces

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{q}f(1) = rf(1)\,.$$

Si x es un número irracional, entonces x es límite de una sucesión de números racionales:

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n, \quad r_n \in \mathbb{Q}\,.$$

Como f es continua, podemos escribir

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = xf(1)\,.$$

Por lo tanto, obtenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = cx, \quad \text{con} \;\; c = f(1)\,.$$

4.2. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua tal que $f(a) < a$ y $f(b) > b$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Solución: Consideremos la funcion $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = f(x) - x$$

por ser f y la función idéntidad continuas obtenemos que ψ es continua. Además,

$$\psi(a) = f(a) - a < 0, \quad \psi(b) = f(b) - b > 0$$

entonces

$$\psi(a) < 0 < \psi(b)\,.$$

Por el teorema del valor intermedio existe $c \in [a, b]$ tal que $\psi(c) = 0$, es decir,

$$f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c\,.$$

4.3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $f(x) \in \mathbb{Q}\ \forall\, x \in [0, 1]$ y $f(1/2) = 1/2$. Pruebe que f es constante.

Solución: Supongamos lo contrario, es decir, que f no es constante, entonces existe $z \in [0.1]$ tal que $f(z) \neq \frac{1}{2}$. Luego,

$$f(z) > \frac{1}{2} \;\; \text{o bien} \;\; f(z) < \frac{1}{2}\,.$$

Supongamos que $f(z) > \frac{1}{2}$, pues el otro caso se prueba analogamente. Sea w es un número irracional tal que

$$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) < w < f(z)$$

entonces por el teorema del valor intermedio existe $c \in \left[\frac{1}{2}, z\right]$ tal que $f(c) = w$, lo cual contradice la hipótesis que f toma solamente valores racionales. Por lo tanto, $f(x) = 1/2$ para todo $x \in [0, 1]$.

4.4. Calcule a, b de modo la que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & \text{si } \; x < 0\,, \\ ax+b & \text{si } \; 0 \leq x \leq 2\,, \\ \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } \; 2 < x\,. \end{cases}$$

sea continua en todo punto de su dominio.

Solución: Como los polinomios y las raices cuadradas son funciones continuas y además la suma, la resta, el producto y cuociente de funciones continuas es una función continua obtenemos que f es continua en $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Falta analizar la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = 2.$$

Esto nos dice que la recta $y = ax + b$ debe pasar por el punto $(0, 2)$.
En el punto $x = 2$ tanto el numerador como el denominador se anulan, una posibilidad de evitar esta indeterminación es transformar algebraicamente la expresión amplicando por las expresiones conjugadas del numerador y del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} &= \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{(x^2-(x+2))(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x+1)-9)(x+\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{(x+2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \frac{9}{8}\,.$$

Por esta razón la recta $y = ax + b$ debe pasar por el punto $\left(2, \frac{9}{8}\right)$. Así obtenemos que

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{9}{8} - 2}{2 - 0} = \frac{7}{16}, \qquad b = 2\,.$$

Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{7}{16}x + 2$ sobre $[0, 2]$.

4.5. Probar que el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 1$ tiene a lo más dos raíces reales. Localice estas raices aproximademente.

Solución: Si existen $x < y$ tales que $p(x) \cdot (y) < 0$ entonces existe $c \in [x, y]$ tal que $p(c) = 0$. En efecto, si $p(x) \cdot (y) < 0$ entonces

$$p(x) < 0 < p(y) \quad \text{o bien} \quad p(y) < 0 < p(x)$$

en cualquiera de los dos casos como los polinomios son funciones continuas por el teorema del valor intermedio existe $c \in [x, y]$ tal que $p(c) = 0$. Apliquemos este criterio. Notemos que

$$p(-1) = 1, \quad p(0) = -1, \quad p(1) = -1, \quad p(2) = 7\,.$$

Entonces entre -1 y 0 y entre 1 y 2 debe haber soluciones de $p(x) = 0$. Busquemos la raíz c entre $-1 < c < 0$, subdiviendiendo sucesivamente el intervalo en dos partes y quedandonos con el intervalo en donde la función p tiene un cambio de signo.

$$\begin{array}{lll}
p(-0,5) = -0,8125 & \Rightarrow & -1 < c < -0,5\,, \\
p(-0,75) = -0,2616 & \Rightarrow & -1 < c < -0,75\,, \\
p(-0,8) = -0,0784 & \Rightarrow & -1 < c < -0,8\,, \\
p(-0,9) = 0,3851 & \Rightarrow & -0,9 < c < -0,8\,, \\
p(-0,85) = 0,1361 & \Rightarrow & -0,85 < c < 0,8\,, \\
p(-0,83) = 0,0463 & \Rightarrow & -0,83 < c < -0,8\,.
\end{array}$$

Podemos seguir si queremos una aproximación mayor, concluimos que existe $c \cong -0,815$ tal que $p(c) = 0$. De manera similar, encontramos que $c \cong 1,3084$ tal que $p(c) = 0$.

4.6. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c + 1/2)$.

Solución: Consideremos $\varphi : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(x + 1/2) - f(x)$$

por ser f continua entonces φ es continua y además

$$\varphi(0) + \varphi(1/2) = f(1/2) - f(0) + f(1) - f(1/2) = 0\,.$$

Supongamos que $\varphi(0) < \varphi(1/2)$ (si $\varphi(0) > \varphi(1/2)$ se procede de forma similar) entonces

$$\varphi(0) < \frac{\varphi(0) + \varphi(1/2)}{2} = 0 < \varphi(1/2)\,.$$

Por el teorema del valor intermedio existe $c \in [0, 1/2]$ tal que $\varphi(c) = 0$, es decir, $f(c) = f(c + 1/2)$.

4.7. Sea $f : \mathbb{R} - \{1, 4\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{x^3 + 1}{x - 4} .$$

a) Estudie la continuidad de f en su dominio. Justifique.

b) ¿Es posible definir f en 1 y 4 de modo que sea continua?

c) Pruebe que existe $x_0 \in [2, 3]$ tal que $f(x_0) = 0$.

d) Demuestre que $[-23, \frac{1}{2}] \subseteq f([2, 3])$.

Solución:

a) En $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1, 4\}$ las funciones $\frac{x^2+1}{x-1}$ y $\frac{x^3+1}{x-4}$ son racionales bien definidas (denominador no nulo) y por lo tanto son continuas. Luego, f es suma de funciones continuas y por lo tanto es continua en $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

b) Note que tanto en $x = 1$ como en $x = 4$ se tiene que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to 4} f(x) = \pm\infty .$$

Luego, NO es posible definir f en 1 y 4 para que sea continua por la inexistencia de los límites.

c) Se sabe que f es continua en $[2, 3] \subset Dom(f)$. Además,

$$f(3) = -23 < 0 < \frac{1}{2} = f(2) .$$

Por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in [2, 3]$ tal que $f(x_0) = 0$.

d) Como $f(2) = \frac{1}{2}$ y $f(3) = -23$ entonces $[-23, \frac{1}{2}] = [f(3), f(2)]$. Sea $d \in [-23, \frac{1}{2}]$ entonces $d \in [f(3), f(2)]$. Entonces por la continuidad de f y en virtud del teorema del valor intermedio existe $x_0 \in [2, 3]$ tal que $f(x_0) = d$. Pero $f(x_0) \in f([2, 3])$. Así, $f(x_0) = d \in f([2, 3])$ por lo tanto $[-23, \frac{1}{2}] \subseteq f([2, 3])$.

4.8. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y tales que

$$f(a) = -g(b), \quad f(b) = -g(a).$$

Pruebe que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(b-x)^n$ con $n \in \mathbb{N}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para esto caso, el valor de $x_0 \in [a,b]$.

Solución: Definamos la función $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = f(x) + g(x)$$

por ser f y g continuas se concluye que ψ es continua. Notemos que

$$\begin{aligned} \psi(a) &= f(a) + g(a) = f(a) - f(b)\,, \\ \psi(b) &= f(b) + g(b) = f(b) - f(a)\,. \end{aligned}$$

Entonces, $\psi(a)\psi(b) = -(f(a) - f(b))^2 < 0$, entonces la función cambia de signo, es decir,

$$\psi(a) \leq 0 \leq \psi(b) \quad \text{o bien} \quad \psi(b) \leq 0 \leq \psi(a)$$

en cualquiera de los dos casos por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $\psi(x_0) = 0$, es decir, $f(x_0) = -g(x_0)$ como queriamos probar. Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-a)^n = 0\,, & f(b) &= (b-a)^n\,, \\ g(a) &= -(b-a)^n\,, & f(b) &= (b-b)^n = 0 \end{aligned}$$

entonces se verifica que

$$f(a) = -g(b) = 0, \quad f(b) = -g(a) = (b-a)^n$$

de lo anterior existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$

$$\begin{aligned} f(x_0) = -g(x_0) &\Rightarrow (x-a_0)^n = (b-x_0)^n \\ &\Rightarrow x_0 - a = b - x_0 \\ &\Rightarrow x_0 = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

4.9. Sea $f(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \pi$.

Solución: Podemos considerar $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = f(x) - \pi$$

entonces ϕ es continua y satisface

$$\phi(0) = -\pi < 0 < 6 = \phi(2)$$

entonces por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in [0,2]$ tal que $\phi(x_0) = 0$ o equivalentemente $f(x_0) = \pi$.

4.10. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0 \,, \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \,, \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\log x} & \text{si } x > 1 \,, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, $a \neq 1$. Analice la continuidad de la función.

Solución: La función f es continua en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ ya que en cada uno de éstos se puede aplicar los teoremas de álgebra y composición de funciones continuas. Sólo es necesario observar que en $(-\infty, 0)$ la función $\frac{\sin(a(1-a)x)}{x}$ es continua puesto que el denominador no se anula, lo mismo ocurre con $\frac{\sin(a(x-1))}{\log x}$ en el intervalo $(1, \infty)$.
Para estudiar la continuidad en 0 conviene calcular los límites laterales de f en este punto. Utilizando la definición de f y la hipótesis $a \neq 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(1-a)x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin((1-a)x)}{(1-a)x} \cdot (1-a) \\ &= 1 - a \,. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} b(x-a)^2 = ba^2 \,.$$

Ahora bien f es continua en 0 si y sólo si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, es decir, si

$$1 - a = ba^2 \,.$$

Calculemos los límites laterales de f en 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(a(x-1))}{\log x} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(a(x-1))}{a(x-1)} \cdot \frac{a(x-1)}{\log x} \,. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $z = x - 1$ entonces cuando $x \to 1^+$ se tiene que $z \to 0^+$ y luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{z\to 0^+} \frac{\sin(az)}{az}\cdot\frac{az}{\log(z+1)} \\
&= \left(\lim_{z\to 0^+} \frac{\sin(az)}{az}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{az}{\log(z+1)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{az}{\log(z+1)} \,.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio $z = \frac{1}{n}$ entonces cuando $z \to 0^+$ se tiene que $n \to \infty$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^+} \frac{\log(1+z)}{z} &= \lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \log(e) = 1 \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{az}{\log(z+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{\frac{\log(1+z)}{z}} = \frac{a}{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+z)}{z}} = a \,.$$

Finalmente la continuidad de f en 1 es equivalente a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, lo que es equivalente a

$$b(1-a)^2 = a \,.$$

Por lo tanto, para garantizar la continuidad de f debemos buscar $a \neq 0$, $a \neq 1$ tales que

$$1 - a = ba^2, \qquad b(1-a)^2 = a \,.$$

Reemplazando la primera de las ecuaciones en la segunda obtenemos que

$$b(1-a)^2 = a \Rightarrow b(ba^2) = a \Rightarrow b^3a^4 = a$$

dividiendo por a que suponemos distinto de cero por hipótesis se tiene

$$a^3b^3 = 1 \Rightarrow ab = 1$$

volviendo a la primera ecuación

$$1 - a = ba^2 \Rightarrow 1 - a = (ba)a \Rightarrow 1 - a = a \Rightarrow a = \frac{1}{2}\,, \quad b = 2 \,.$$

Capítulo 5

Derivadas

5.1. Calcule por definición las derivadas de las siguientes funciones

(a) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ en $x = 0$,

(b) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ en $x = 5$,

(c) $f(x) = \log x$ en $x = a$.

Solución:

(a) Por defición de la deriva obtenemos que

$$
\begin{aligned}
f\,'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} + 1}{\sqrt{\cos x} + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x(\sqrt{\cos x} + 1)} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\sqrt{\cos x} + 1)(\cos x + 1)} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(\sqrt{\cos x} + 1)(\cos x + 1)} \\
&= -\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(\sqrt{\cos x} + 1)(\cos x + 1)} \\
&= -(1) \cdot \frac{0}{(2)(2)} = 0\,.
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(5) &= \lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}\\
&= \lim_{x\to 5}\frac{(2x-1)-9}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}\\
&= \lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}\\
&= \lim_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}\\
&= \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\log x-\log a}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\log\left(\frac{x}{a}\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}\right)\log\left(\frac{x}{a}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\log\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\,.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $n = 1/(x-a)$ tenemos que cuando $x\to a$ entonces $n\to\infty$. Despejando obtenemos que

$$n = \frac{1}{x-a} \Rightarrow nx-na = 1 \Rightarrow nx = na+1 \Rightarrow x = \frac{na+1}{n}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{na+1}{na}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1/a}{n}\right)^n\\
&= \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1/a}{n}\right)^n\right) = \log(e^{1/a}) = \frac{1}{a}\,.
\end{aligned}$$

5.2. Derive las funciones

(a) $f(x) = (x+1)^2(x-3)^5$,

(b) $g(x) = \sqrt{x^2+1}$,

(c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(d) $k(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$,

(e) $l(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,

(f) $r(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.

Solución:

(a) Derivamos usando la regla de derivación para el producto de funciones

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{d}{dx}(x+1)^2\right)(x-3)^5 + (x+1)^2\left(\frac{d}{dx}(x-3)^5\right) \\ &= 2(x+1)(x-3)^5 + (x+1)^2 \cdot 5(x-3)^4 \\ &= (x+1)(x-3)^4[2(x-3)+5(x+1)] \\ &= (x+1)(x-3)^4(7x-1) \end{aligned}$$

(b) Usando la regla de la cadena, para la composición de funciones, junto con

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{r}}\right) = \frac{1}{r}x^{\frac{1}{r}} - 1\ ,$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - 1\left(\frac{d}{dx}(x^2+1)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ . \end{aligned}$$

(c) Usando la regla de derivación para el producto de funciones y la regla de la cadena obtenemos que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{d}{dx}(1)\right)\sqrt{1-x^2} + 1 \cdot \left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= 0 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \cdot \left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ . \end{aligned}$$

(d) Usando la regla de derivación para el cuociente de dos funciones junto con la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \frac{\left(\dfrac{d}{dx}\sqrt{x-5}\right)\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\left(\dfrac{d}{dx}\sqrt{x+5}\right)}{(\sqrt{x+5})^2}\\
&= \frac{1}{(x+5)}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\right)\\
&= \frac{1}{(x+5)}\cdot\frac{(x+5)-(x-5)}{2\sqrt{x-5}\sqrt{x+5}}\\
&= \frac{10}{2\sqrt{x-5}\cdot(x+5)^{3/2}}=\frac{5}{\sqrt{x-5}\cdot(x+5)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

(e) Usando la regla de derivación para el cuociente de funciones, la regla de la cadena y sabiendo que

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x\,,$$

$$\begin{aligned}
l'(x) &= \frac{\left(\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+\sin x}\right)\cdot\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}\cdot\left(\dfrac{d}{dx}\sqrt{1-\sin x}\right)}{(\sqrt{1-\sin x})^2}\\
&= \frac{1}{1-\sin x}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}}\cdot\left(\frac{d}{dx}(1+\sin x)\right)\sqrt{1-\sin x}-\right.\\
&\qquad\left.\sqrt{1+\sin x}\frac{1}{2\sqrt{1-\sin x}}\cdot\left(\frac{d}{dx}(1-\sin x)\right)\right)\\
&= \frac{1}{1-\sin x}\left(\frac{\sqrt{1-\sin x}}{2\sqrt{1+\sin x}}\cdot\cos x-\frac{\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1-\sin x}}\cdot(-\cos x)\right)\\
&= \frac{1}{1-\sin x}\left(\frac{(1-\sin x)\cos x+(1+\sin x)\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1-\sin x}}\right)\\
&= \frac{1}{1-\sin x}\left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1-\sin x}}\right)\\
&= \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}\cdot(1-\sin x)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

(f) Usando la regla de la cadena y usando que

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}\,,$$

$$\begin{aligned}
r\,'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{d}{dx}(1+x^2)\right)\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,(2x)\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.
\end{aligned}$$

5.3. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivables. Pruebe que si $f'(x)=g'(x)$ entonces $f(x)=g(x)+c$ donde c es una constante.

Solución: Considere la función $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x)=f(x)-g(x)\,.$$

Por ser f y g funciones diferenciables entonces φ es diferenciable. Note que

$$\varphi\,'(x)=f\,'(x)-g\,'(x)=0\,.$$

Sabemos que toda función diferenciable es continua. Afirmamos que $\varphi(x)=c$ para todo $x\in[a,b]$, donde c es una constante. En efecto, dados $x,y\in[a,b]$ arbitrarios entonces la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x,\varphi(x))$ y $(y,\varphi(y))$ es

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}$$

como la función φ es continua existe necesariamene $c\in[x,y]$ tal que

$$\varphi\,'(c)=\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\,.$$

Entonces,

$$\varphi(x)-\varphi(y)=\varphi\,'(c)(x-y)=0,\quad \forall\, x,y\in[a,b]$$

entonces $\varphi(x)=\varphi(y)$ para todo $x,y\in[a,b]$, luego φ es una función constante. De lo que se concluye que

$$\varphi(x)=c\Rightarrow f(x)=g(x)+c\,.$$

Note que el recíproco de este problema también es verdadero, si $f(x) = g(x) + c$ entonces $f\,'(x) = g\,'(x)$.

5.4. Demostrar que

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad g(x) = f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)$$

tienen la misma derivada.

Solución: Para resolver este problema podemos derivar ambas funciones y obtener mediante simplificacion algebraica que ambas funciones son iguales, proponemos que este método lo haga el lector para familiarizarse con la derivación. Intentaremos mostrar que las funciones difieren de una constante y por lo tanto poseen la misma derivada. Notemos que

$$\begin{aligned}
g(x) &= f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) = \log\left(\frac{1+\left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)}{1-\left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)}\right) \\
&= \log\left(\frac{\dfrac{(1+ax)+(a+x)}{1+ax}}{\dfrac{(1+ax)-(a+x)}{1+ax}}\right) = \log\left(\frac{(1+ax)+(a+x)}{(1+ax)-(a+x)}\right) \\
&= \log\left(\frac{1+a+x(1+a)}{1-a-x(1-a)}\right) = \log\left(\frac{(1+a)(1+x)}{(1-a)(1-x)}\right) \\
&= \log\left(\frac{(1+a)}{(1-a)}\cdot\frac{1+x}{1-x}\right) = \log\left(\frac{(1+a)}{(1-a)}\right) + \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= \log\left(\frac{(1+a)}{(1-a)}\right) + f(x)
\end{aligned}$$

es decir, $g(x) = f(x) + c$ donde $c = \log\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)$ es una constante. Por lo tanto, $f\,'(x) = g\,'(x)$.

5.5. Derivar las siguientes funciones

(a) $f(x) = \left(\dfrac{a-bx^n}{a+bx^n}\right)^m$,

(b) $g(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x - x\sin x}$,

(c) $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{3x} + 1}$.

Solución:

(a) Usando la regla de la cadena y la regla de derivación para el cuociente de dos funciones obtenemos

$$\begin{aligned}
f\,'(x) &= m \cdot \left(\frac{a - bx^n}{a + bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{a - bx^n}{a + bx^n}\right) \\
&= m \cdot \left(\frac{a - bx^n}{a + bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{-nbx^{n-1} \cdot (a + bx^n) - (a - bx^n)(nbx^{n-1})}{(a + bx^n)^2} \\
&= m \cdot \left(\frac{a - bx^n}{a + bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{-nabx^{n-1} - nb^2x^{2n-1} - nabx^{n-1} + nb^2x^{2n-1}}{(a + bx^n)^2} \\
&= m \cdot \left(\frac{a - bx^n}{a + bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{-2nabx^{n-1}}{(a + bx^n)^2} \\
&= -\frac{2mnabx^{n-1} \cdot (a - bx^n)^{m-1}}{(a + bx^n)^{m+1}}\,.
\end{aligned}$$

(b) Usando la regla de derivación para el cuociente de dos funciones y usando que

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\,.$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{(\cos x - x\sin x)^2}\left(\frac{d}{dx}(\sin x - x\cos x)\cdot(\cos x - x\sin x) - \right.\\
&\qquad \left.(\sin x - x\cos x)\cdot\frac{d}{dx}(\cos x - x\sin x)\right)\\
&= \frac{1}{(\cos x - x\sin x)^2}\left(\left(\cos x - \frac{d}{dx}(x\cos x)\right)\cdot(\cos x - x\sin x) - \right.\\
&\qquad \left.(\sin x - x\cos x)\cdot\left(-\sin x - \frac{d}{dx}(x\sin x)\right)\right)\\
&= \frac{1}{(\cos x - x\sin x)^2}\left((\cos x - (\cos x - x\sin x))\cdot(\cos x - x\sin x) - \right.\\
&\qquad \left.(\sin x - x\cos x)\cdot(-\sin x - (\sin x + x\cos x))\right)\\
&= \frac{1}{(\cos x - x\sin x)^2}((x\sin x)\cdot(\cos x - x\sin x) - \\
&\qquad (\sin x - x\cos x)\cdot(-2\sin x - x\cos x))\\
&= \frac{1}{(\cos x - x\sin x)^2}(x\sin x\cos x - x^2\sin^2 x + \\
&\qquad 2\sin^2 x - x\cos x\sin x - x^2\cos^2 x))\\
&= \frac{2\sin^2 x - x^2}{(\cos x - x\sin x)^2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Usando que

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x\,,$$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{(e^{3x}+1)^2}\cdot\left(\frac{d}{dx}(e^x - 1)\cdot(e^{3x}+1) - (e^x - 1)\cdot\frac{d}{dx}(e^{3x}+1)\right)\\
&= \frac{e^x\cdot(e^{3x}+1) - (e^x - 1)\cdot(3e^{3x})}{(e^{3x}+1)^2}\\
&= \frac{e^{4x} + e^x - 3e^{4x} + 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}\\
&= \frac{-2e^{4x} + 3e^{3x} + e^x}{(e^{3x}+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

5.6. Derivar aplicando derivación logaritmica

(a) $f(x) = x^{x^x}$,

(b) $g(x) = x^{\sin^2 x}$,

(c) $h(x) = \dfrac{(3x-2)(2x-3)\cos x}{(5x+7)\log x}$.

Solución:

(a) Notemos que

$$\log f(x) = \log(x^x)^x = x \log x^x = x^2 \log x \,.$$

Entonces derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\frac{1}{f(x)} f\,'(x) = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x \,.$$

Por lo tanto,

$$f\,'(x) = \frac{2x \log x + x}{f(x)} = \frac{2x \log x + x}{x^{x^x}} \,.$$

(b) Notemos que

$$\log g(x) = \log x^{\sin^2 x} = \sin^2 x \log x \,.$$

Derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f\,'(x) = 2 \sin x \cos x \log x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{x} \,.$$

Por lo tanto,

$$f\,'(x) = \frac{2x \sin x \cos x \log x + \sin^2 x}{x \cdot x^{\sin^2 x}} \,.$$

(c) Notemos que

$$\begin{aligned} \log h(x) &= \log\left(\frac{(3x-2)(2x-3)\cos x}{(5x+7)\log x}\right) \\ &= \log((3x-2)(2x-3)\cos x) - \log((5x+7)\log x) \\ &= \log(3x-2) + \log(2x-3) + \log(\cos x) - \\ &\quad \log(5x+7) - \log(\log x) \,. \end{aligned}$$

Derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\frac{1}{h(x)} \cdot h\,'(x) = \frac{3}{3x-2} + \frac{2}{2x-3} + \frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{5}{5x+7} - \frac{1/x}{\log x} \,.$$

Por lo tanto,

$$h'(x) = \frac{(3x-2)(2x-3)\cos x}{(5x+7)\log x}\left(\frac{3}{3x-2} + \frac{2}{2x-3} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{5}{5x+7} - \frac{1}{x \log x}\right) .$$

5.7. Sea $\psi(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Demuestre que $\psi'(x) = 1-\psi(x)^2$. Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de ψ que se paralela a la recta $3x-4y-12=0$.

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-(e^{2x}-1)(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \\
1-\psi^2(x) &= 1-\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2-(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Observe que la pendiente de la recta $3x-4y-12=0$ es $\dfrac{3}{4}$. Queremos hallar los puntos en el gráfico de ψ que tienen pendiente $3/4$, usando la idéntidad demostrada tomando $y=\psi(x)$ obtenemos la condición

$$y' = \frac{3}{4} = 1-y^2 \Rightarrow y^2-\frac{1}{4} \Rightarrow \left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } y=\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Rightarrow e^{2x}+1 = 2e^{2x}-2 \\
&\Rightarrow \quad e^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\log 3 \\
&\Rightarrow \quad x = \log\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto en $x=\log\sqrt{3}$ la recta tangente al gráfico de ψ es paralela a la recta $3x-4y-12=0$.

5.8. Pruebe que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ satisface que

$$|f(x)-f(y)| \le c|x-y|^\alpha, \qquad \forall\, x,y \in [a.b]$$

con $\alpha>1$ y $c\in\mathbb{R}$, entonces f es constante.

Solución: Sabemos que

$$f'(y) = \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

entonces usando la desigualdad de la hipótesis obtenemos

$$\begin{aligned}
|f'(y)| &= \left|\lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \lim_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \\
&= \lim_{x\to y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le \lim_{x\to y}\frac{c|x-y|^\alpha}{|x-y|} = \lim_{x\to y} c|x-y|^{\alpha-1} = 0\,.
\end{aligned}$$

Note que el límite anterior es cero pues $\alpha - 1 > 0$.
Por lo tanto, $|f'(y)| \leq 0$ lo que implica que $f'(y) = 0$ para todo $y \in [a, b]$ si y sólo si f es constante en $[a, b]$.

5.9. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es k-veces diferenciable y

$$f(tx) = t^k f(x), \qquad \forall\, t, x \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx^k$.

Solución: Derivamos la idéntidad de la hipótesis con respecto al parametro t y obtenemos

$$f\,'(tx) \cdot x = kt^{k-1} f(x)\ .$$

Si derivamos la última igualdad con respecto al parametro t obtenemos

$$f\,''(tx) \cdot x^2 = k(k-1)t^{k-2} f(x)\ .$$

Si volvemos a derivar con respecto al parametro t se obtiene

$$f\,'''(tx) \cdot x^3 = k(k-1)(k-2)t^{k-3} f(x)\ .$$

Procediendo inductivamente se observa que si la idéntidad se deriva k-veces se obtiene la igualdad

$$f^{(k)}(tx) \cdot x^k = k\,! f(x);$$

es decir, obtenemos que para todo $x, t \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(tx)}{k\,!} x^k\ .$$

En particular, si $t = 0$ se obtiene finalmente que

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k = cx^k$$

como queriamos probar.

5.10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f'(x)| \leq k, \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \qquad \forall\, x, y \in [a, b]\ .$$

Solución: Usando el Teorema del Valor Medio se establece que para todo $x, y \in [a, b]$ existe $x_0 \in (y, x)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\ ,$$

entonces

$$|f(x) - f(y)| = |f(x_0)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|\ .$$

5.11. Calcular aproximadamente $\sqrt{304}$.

Solución: Como aplicación del Teorema del Valor Medio es posible aproximar la raiz cuadrada de 304. Considere la función $f : [289, 304] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, como f es diferenciable entonces existe $x_0 \in (289, 304)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(304) - f(289)}{304 - 289} = \frac{\sqrt{304} - 17}{15}\ .$$

Además $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ con lo cual obtenemos la igualdad

$$\sqrt{x_0} = \frac{15}{2(\sqrt{304} - 17)}\ .$$

Por otro lado, la función f es creciente entonces como $x_0 \in (289, 304)$ entonces

$$17 = \sqrt{289} \leq \sqrt{x_0} \leq \sqrt{304} \leq \sqrt{324} = 18 \quad \Rightarrow \quad 17 \leq \sqrt{x}_0 \leq 18$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 17 \leq \frac{15}{2(\sqrt{304} - 17)} \leq 18 \quad &\Rightarrow \quad \frac{17 \cdot 2}{15} \leq \frac{1}{\sqrt{304} - 17} \leq \frac{18 \cdot 2}{15} \\
&\Rightarrow \quad \frac{15}{18 \cdot 2} \leq \sqrt{304} - 17 \leq \frac{15}{17 \cdot 2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{15}{18 \cdot 2} + 17 \leq \sqrt{304} \leq \frac{15}{17 \cdot 2} + 17 \\
&\Rightarrow \quad 17{,}416 \leq \sqrt{304} \leq 17{,}441\ .
\end{aligned}$$

5.12. Usando el Teorema del Valor Medio, demestre que

a) $-x \leq \sin x \leq x$ para todo $x \geq 0$.

b) Si $\alpha > 1$ entonces

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x, \qquad \forall\, x > 0\,.$$

Solución:

a) Consideremos la función $f : [0,x] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$ entonces por el teorema del valor medio existe $x_0 \in (0,x)$ tal que

$$f\,'(x_0) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}$$

como $f'(x_0) = \cos x_0$ obtenemos $\sin x = x \cos x_0$. Sabemos que $-1 \leq \cos x_0 \leq 1$ entonces $-x \leq x \cos x_0 \leq x$, por lo tanto

$$-x \leq \sin x \leq x \qquad \forall\, x \geq 0\,.$$

b) Consideremos la función $f : [0,x] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ entonces por el teorema del valor medio existe $x_0 \in (0,x)$ tal que

$$\alpha(1+x_0)^{\alpha-1} = f'(x_0) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}\,.$$

Ahora, como $x_0 > 0$ y $\alpha - 1 > 0$ entonces $(1+x_0)\alpha - 1 \geq 1$. Por lo tanto,

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha(1+x_0)^{\alpha-1} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} - 1 \geq \alpha x \Rightarrow (1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x\,.$$

5.13. Sea $f : \mathbb{R} - [0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^{-1}}$. Encuentre $(f^{-1})'(y)$.

Solución: Notemos que

$$y = \sqrt{1-x^{-1}} \Longrightarrow x = \frac{1}{1-y^2}\,.$$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \dfrac{1}{x^2} \neq 0$ entonces

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1-y^2}\right)^{-1}}} \cdot \dfrac{1}{\left(\frac{1}{1-y^2}\right)^2}} = \frac{2y}{(1-y^2)^2}\,.$$

5.14. Sea $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ derivable en $(1,4)$. Suponga que

$$|f'(x)| \leq 4, \quad \forall\, x \in [1,4]\,.$$

Demostrar que

$$|f(1) - f(4)| \leq 12\,.$$

Solución: Por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe $c \in (1,4)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{f(4) - f(1)}{3}$$

entonces

$$|f(1) - f(4)| = 3|f'(c)| \leq 3 \cdot 4 = 12\,.$$

5.15. Deduzca una fórmula para la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \arcsin(x) : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

b) $y = \arccos(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$,

c) $y = \arctan(x) : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

a) Como la derivada del $\sin x$ es la función $\cos x$, que es distinta de cero en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos aplicar el teorema de la función inversa, que nos asegura la existencia de la derivada y nos dice cómo calcularla:

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y$$

entonces

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

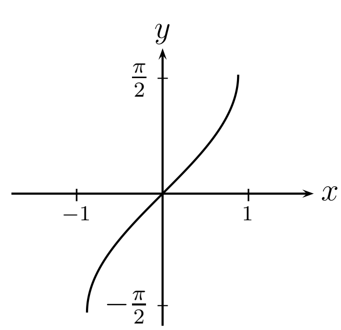


Gráfico de $f(x) = \arcsin x$

b) Notemos que
$$y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos x \,.$$
Nuevamente se satisfacen las hipótesis del teorema de la función inversa y tenemos:
$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,.$$

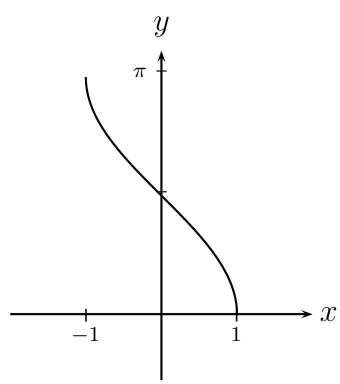


Gráfico de $f(x) = \arccos x$

c) Notemos que
$$y = \arctan x \Longleftrightarrow x = \tan y \,.$$
En virtud del teorema de la función inversa, tenemos:
$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \,.$$

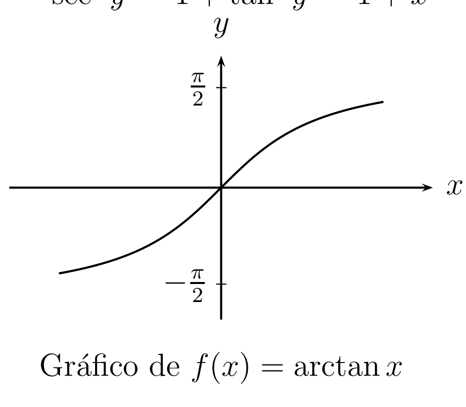


Gráfico de $f(x) = \arctan x$

5.16. Considere
$$f(x) = \begin{cases} xsin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } \; x \neq 0 \,, \\ 0 & \text{si } \; x = 0 \,. \end{cases}$$

Pruebe que f es diferenciable en $x \neq 0$ y que f no tiene derivada en $x = 0$.

Solución: En $x \neq 0$ se cumple que f es diferenciable por ser producto y composición de funciones diferenciable. Para calcular f' utilizamos regla de derivación:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Para $x = 0$ utilizamos la definición de derivada se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,,$$

pero este límite no existe, entonces f no es diferenciable en $x = 0$.

5.17. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable con $0 < a < b$ y que satisface

$$f(a) = f(b) = 0\,.$$

Pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que la tangente a f en el punto c pasa por el origen.

Solución: Sabemos que la recta tangente al gráfico de f en un punto c es:

$$y = f(c) = f\,'(c)\cdot c + b\,.$$

Si queremos que la recta pase por el origen debemos tener que $b = 0$, es decir, debemos demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = f'(c)\cdot c$$

o equivalentemente que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}\,.$$

Para esto, consideremos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

la cual es diferenciable debido a que f lo es y $x \neq 0$ en $[a,b]$ y sabemos que el cuociente de funciones diferenciables es diferenciable. Por el Teorema del Valor Medio existe $c \in (a,b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0\,.$$

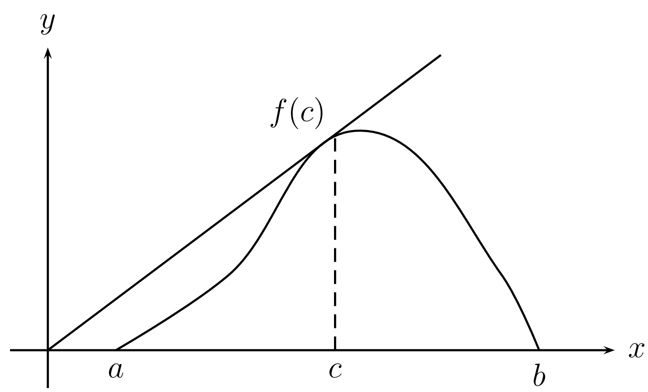
La última igualdad la obtuvimos debido a la definición de g junto a que $f(a) = f(b) = 0$. Usando la regla de la derivación para el cuociente de funciones obtenemos la derivada de la función g en el punto $x = c$:

$$g'(c) = \frac{f'(c)\cdot c - f(c)}{c^2}\,.$$

Entonces, se obtiene que

$$\frac{f'(c)\cdot c - f(c)}{c^2} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

como queriamos demostrar.



5.18. Demuestre usando el Teorema del valor medio que

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall\, x \geq 0\,.$$

Solución: Consideremos la función $f : [0,x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \ln(1+t)\,.$$

Por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in (0,x)$ entonces

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}\,.$$

Además, derivando la función f obtenemos

$$f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}\,.$$

Notemos que, como $0 < \xi < x$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+\xi} \le 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} \le f'(\xi) \le 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} \le \frac{\ln(1+x)}{x} \le 1\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando por x la última desigualdad se obtiene

$$\frac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x\,.$$

5.19. Calcule $y'(x)$ e $y''(x)$ si

a) $xy^3 + 2xy = \sin x$,

b) $y^5x^2 + \sin(y^2)x = 2x$.

Solución:

a) Derivando implicitamente la igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} & y^3 + 3xy^2y' + 2y + 2xy' = \cos x \\ \Rightarrow\quad & y'(3xy^2 + 2x) = \cos x - y^3 - 2y \\ \Rightarrow\quad & y' = \frac{\cos x - y^3 - 2y}{x(3y^2+2)}\,. \end{aligned}$$

Derivando nuevamente se obtiene que

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-\sin x - 3y^2y' - 2y')(3xy^2+2x) - (\cos x - y^3 - 2y)(6xyy'+2)}{(3xy^2+2x)^2} \\ y'' &= \frac{-x\sin x(3y^2+2) - 2(\cos x - y^3 - 2y)}{x^2(3y^2+2)^2} \\ &\quad -y'\left(\frac{x(3y^2-2)(3y^2+2) + 6xy(\cos x - y^3 - 2y)}{x^2(3y^2+2)^2}\right) \\ y'' &= \frac{-x\sin x(3y^2+2) - 2(\cos x - y^3 - 2y)}{x^2(3y^2+2)^2} \\ &\quad -\left(\frac{\cos x - y^3 - 2y}{x(3y^2+2)}\right)\left(\frac{(3y^2-2)(3y^2+2) + 6y(\cos x - y^3 - 2y)}{x(3y^2+2)^2}\right)\,. \end{aligned}$$

b) Derivando implicitamente obtenemos

$$\begin{aligned} & 5y^4y'x^2 + 2y^5x + \cos(y^2)2yy'x + \sin(y^2) = 2 \\ \Rightarrow \quad & y'(5y^4x^2 + 2xy\cos(y^2)) = 2 - 2xy^5 - \sin(y^2) \\ \Rightarrow \quad & y' = \frac{2 - 2xy^5 - \sin(y^2)}{xy(5y^3x + 2\cos(y^2))}. \end{aligned}$$

La derivada y'' queda como ejercicio para el lector.

5.20. Probar que $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener más de una raíz en [-1,1] para todo b.

Solución: Notemos que

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Como $f(0) = -3 < 0$ entonces la función f es decreciente en $[-1,1]$. Luego posee a lo más un cero en [-1,1]. De lo contrario la función no sería decreciente.

5.21. Pruebe que $x^4 + ax^2 - b$ tiene exactamente dos raices reales para todo a, b reales positivos.

Solución: Sea $f(x) = x^4 + ax^2 - b$ y note que $f(x) = f(-x)$. Siempre es posible encontrar $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $x_0^4 + ax_0^2 > b$ entonces

$$f(-x_0) = f(x_0) > 0 \quad \text{ y } \quad f(0) = -b < 0$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c_0 \in (-x_0, 0)$ y $c_1 \in (0, x_0)$ tal que

$$f(c_0) = 0\,, \quad f(c_1) = 0\,.$$

Supongamos que existe otra raíz, es decir, que existe c_2 tal que $f(c_2) = 0$ entonces

$$f(c_0) = f(c_1) = f(c_2)\,.$$

Por el teorema de Rolle existe $d_1 \in (c_0, c_1)$ y $d_2 \in (c_1, c_2)$ tal que

$$f'(d_1) = f'(d_2) = 0\,,$$

pero la derivada se anula solo una vez, ya que $f'(x) = 2x(2x^2 + a) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x^2 = -a/2 < 0$ como la última ecuación no tiene raices reales se establece que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

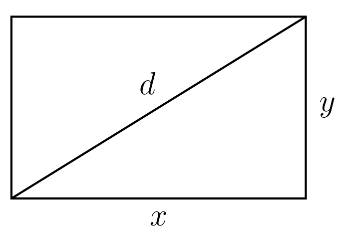
Por lo tanto, f solo posee dos raíces reales.

Capítulo 6

Fórmula de Taylor y Aplicaciones de la Derivada

6.1. Demuestre que de todos los rectángulos con diagonal dada $d = 1$, el que tiene mayor área, es el cuadrado.

Solución:



Rectángulo

Tenemos que la función área esta dada en términos de las dimensiones del rectángulo de ancho x y largo y entonces

$$A(x, y) = x \cdot y \,.$$

Por el teorema del Pitagoras

$$x^2 + y^2 = 1$$

entonces $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ como las distancias no son negativas entonces $y = \sqrt{1 - x^2}$. Luego, nuestra función área nos queda en términos de una sola variable:

$$A(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2} \,.$$

Para obtener el máximo de esta función debemos hallar su derivada

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

los puntos candidatos a ser máximos o mínimos relativos son aquellos puntos en los cuales $A'(x) = 0$, es decir,

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow 1-x^2 = x^2 \Longrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

nos quedams con la solución positiva en vista que no existe distancias negativas, entonces $x_0 = 1/\sqrt{2}$ es candidato a ser máximo o mínimo relativo, para distinguir usamos el siguiente criterio:

$$\begin{array}{c} \text{Si} \quad A''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \quad \text{es un mínimo}\,. \\ \text{Si} \quad A''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \quad \text{es un máximo}\,. \end{array}$$

Derivando obtenemos

$$A''(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x-x^3}{(1-xr)^{3/2}}$$

y

$$A''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4 < 0 \Longrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{es un máximo}$$

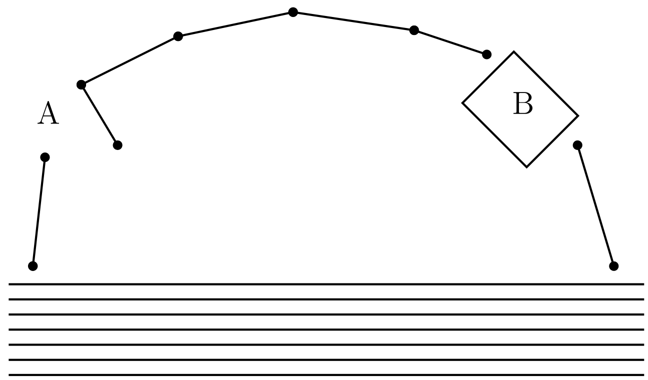
y notemos que

$$y_0 = \sqrt{1-x_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = x_0$$

luego, el mayor área es un cuadrado.

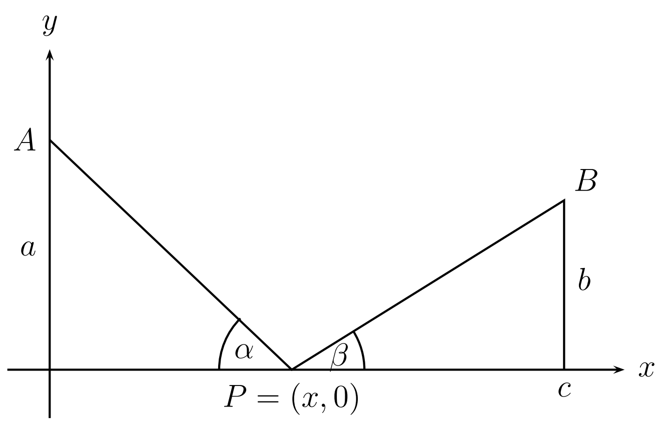
6.2. Al atardecer, las vacas entran a un corral por una puerta ubicada en el punto A, luego se dirigen automáticamente a un estero a tomar agua. El estero sirve como límite del canal. Después se dirigen a la puerta del establo, ubicado en B. Una vaca muy perezosa y, por lo tanto, inteligente, quiso minimizar el número de pasos debería efectuar para ir primero al estero, beber agua y entrar al establo a dormir. ¿Cuál es la respuesta que obtuvo la vaca?

Solución:



Aquí vive la vaca perezosa

El estero esta sobre una recta que tomaremos como el eje X; el eje Y como la perpendicular de A al eje X. Llamaremos $P = (x, 0)$ el punto en el estero en el cuál debería beber agua la vaca para minimizar el número de pasos.



Situación Geométrica

Sean $A = (0, a)$, $B = (c, b)$ entonces

$$s(x) = |AP| + |PB| = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c - x)^2 + b^2}$$

para hallar donde s es mínima, la vaca procedió de la siguiente manera:

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}} .$$

Luego, la vaca busco los puntos en donde la derivada es cero, que son los puntos candidatos a ser máximos o mínimos locales

$$s'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}$$

elevando al cuadrado la vaca obtuvo:

$$x^2[(c-x)^2+b^2] = (c-x)^2(x^2+a^2)$$

la vaca cancelo $x^2(c-x)^2$ de ambos lados de la expresión y obtuvo $b^2x^2 = a^2(c-x)^2$ luego $bx = \pm a(c-x)$. Por lo tanto, la vaca, obtuvo el punto

$$x_0 = \frac{ac}{a+b}\,.$$

Para saber si este punto es máximo o mínimo la vaca sabia bien el criterio con la segunda deriva, asi que volvio a derivar, obteniendo

$$s''(x) = \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{[(c-x)^2+b^2]^{3/2}}$$

la vaca inmediatamente se dio cuenta que esta derivada es siempre positiva, por lo que no perdio el tiempo evaluando en el punto que habia hallado. Por lo tanto, s tiene un mínimo en $x_0 = \dfrac{ac}{a+b}$. La vaca, se dio cuenta que este problema es un problema geometrico y observo que si α y β son los ángulos indicados en la figura, entonces

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}$$

por lo tanto la ecuación $s'(x) = 0$ se convierte en $\cos\alpha = \cos\beta$, como α y β son ángulos agudos, la única solución es $\alpha = \beta$. Luego, la vaca se dirigió a beber agua a un punto P en la orilla del estero, sabiendo que éste forma ángulos iguales con las rectas que van de P a la puerta A y la puerta B. En la actualidad la vaca se dedica a usar este principio ganando apuestas en su mesa favorita, la mesa de pool.

6.3. Analizar el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Solución: Como el denominador nunca se anula tenemos que el dominio de f es $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

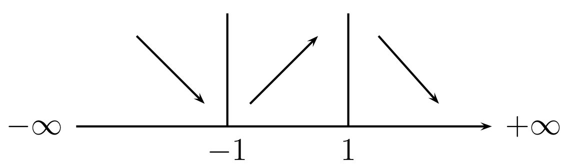
luego en $x = 0$ el gráfico corta al eje x.

$$f(x) > 0 \iff x > 0\,.$$

Por tanto f es positiva para valores positivos de x y es negativa para valores negativos de x.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,.$$

Luego, $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$. Como f' es continua, para conocer su signo basta calcular su valor en un punto de cada intervalo: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Tenemos que: $f'(-2) = f'(2) < 0$, $f'(0) = 1 > 0$.



Crecimiento de la curva

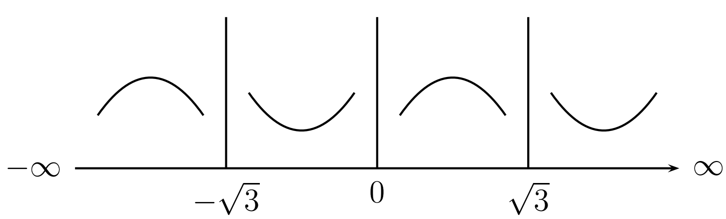
Esto nos dice que en el punto $x = -1$ la función tiene un mínimo y en $x = 1$ la función tiene un máximo.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - (1-x^2)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Entonces,

$$f''(x) = 0 \iff x = 0, x = \pm\sqrt{3}\,.$$

Nuevamente usando la continuidad de f'' para conocer si signo, basta calcular su valor en un punto de cada intervalo: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$: $f''(-2) < 0$, $f''(-1) > 0$, $f''(1) < 0$, $f''(2) > 0$.

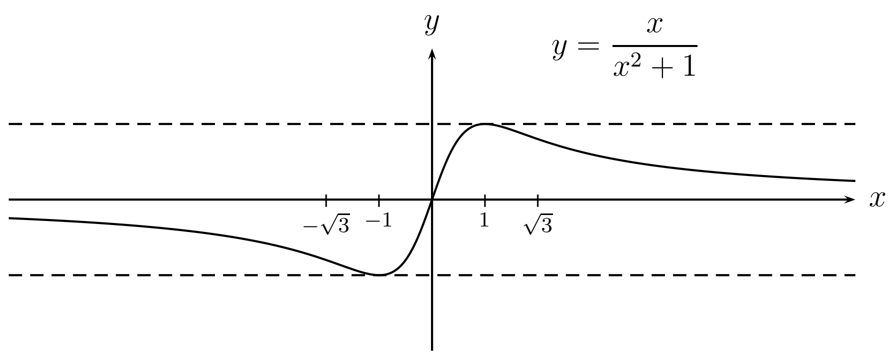


Concavidad de la curva

Por no haber indeterminación en el denominador no hay asíntota verticales y tenemos

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0\,, \\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0\,, \end{aligned}$$

entonces la recta $y = ax + b = 0$ es una asíntota horizonatal y el gráfico de la función nos queda:



Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

6.4. Analizar el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,.$$

Solución: Procediendo de manera similar al problema anterior se obtiene

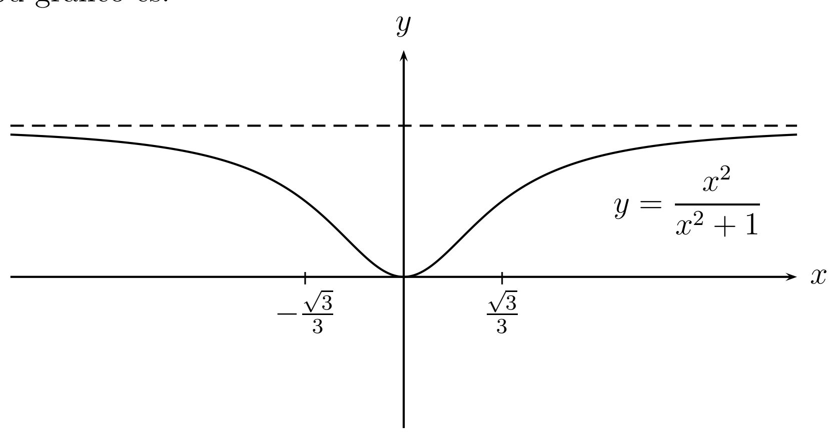
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- La función tiene un cero en $x = 0$.
- f es siempre positiva.
- Tiene un mínimo en $x = 0$ ya que

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,.$$

- Sus puntos de inflexión son $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, pues se tiene que

$$f''(x) = \frac{2(1-3x^2)}{(x^4+1)^3}\,.$$

- La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de f. Debido a que $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ y $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.
- Su gráfico es:



6.5. Analizar el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x-15}\,.$$

Solución: Note que

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x-15} = \frac{1}{(x-3)(x+5)}\,.$$

Entonces, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$. El signo de f depende del signo del denominador $(x+5)(x-3)$.
Luego, f es positiva en $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$, f es negativa en $(-5, 3)$ y f no tiene ceros, pues el numerador no se anula por ser constante.

$$f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x-15)^2}\,.$$

Por ser el denominador positivo, el signo de f' es igual al signo del numerador.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \Longleftrightarrow -2(x+1) > 0 \Longleftrightarrow x+1 < 0 \Longleftrightarrow x < -1 \\ f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x > -1 \\ f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \; . \end{aligned}$$

Considerando el signo de f' y los puntos que no pertenecen al dominio de la función, se tiene que:

- f es creciente en $(-\infty, -5) \cup (-5, -1)$.
- f es decreciente en $(-1, 3) \cup (3, \infty)$.

Como $f'(-1) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$; en $x = -1$ la función puede alcanzar un máximo o un mínimo. Aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene que en $x = -1$, f alcanza un máximo local y este es $f(-1) = -\frac{1}{16}$. La función no tiene otroa máximos o mínimos.

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 19)}{(x^2 + 2x - 15)^3} \; .$$

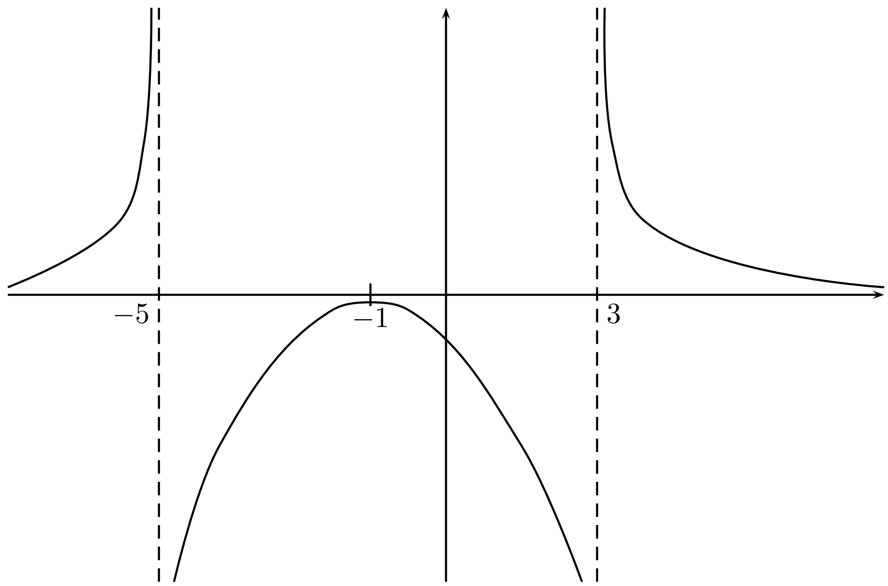
El numerador no tiene raíces reales y el denominador tiene potencia impar, por lo tanto el signo de f'' es igual al signo de f. Así que se tiene:

- f es convexa en $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$.
- f es concava en $(-5, 3)$.

Como los cambios de signo de f'' se producen en los puntos no pertenecientes al dominio, se concluye que f no tiene puntos de inflexión. La función posee asíntotas verticales en los puntos $x = 3$ y $x = -5$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x^2 + 2x - 15)} = 0 \; , \\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 15} = 0 \; , \end{aligned}$$

entonces la recta $y = ax + b = 0$ es una asíntota al gráfico de f. El esbozo de la función se da a continuación:



Gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 15}$

6.6. Analizar el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}\,.$$

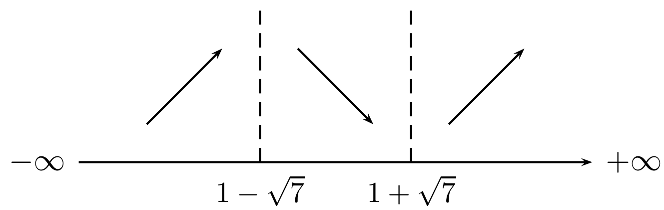
Solución: Como $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}$ entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$. $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Como el numerador cambia de signo en $x = 0$ y el denominador en $x = -1$ y $x = 2$ y f es continua en su dominio, para conocer el signo de f basta calcular el valor de f en cada subintervalo determinado por los puntos antes señalados. En $(-\infty, -1)$ la función es negativa, pues $f(-2) < 0$. En $(-1, 0)$ la función es positiva, pues $f(-1/2) > 0$. En $(0, 2)$ la función es negativa, pues $f(1/2) < 0$. En $(2, \infty)$ la función es positiva, pues $f(3) > 0$. Derivando la función se obtiene

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{((x+1)(x-2))^2}\,.$$

Por tanto,

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2(x^2 - 2x - 6) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = 1 \pm \sqrt{7}\,.$$

Estos tres valore son los valores críticos de la función. De la expresión de f' vemos que su signo depende del signo de $(x^2 - 2x - 6)$, es decir, los cambios de signo pueden producirse en $x = 1 + \sqrt{7} \simeq 3,65$ o en $x = 1 - \sqrt{7} \simeq -1,65$. Obtenemos lo siguiente



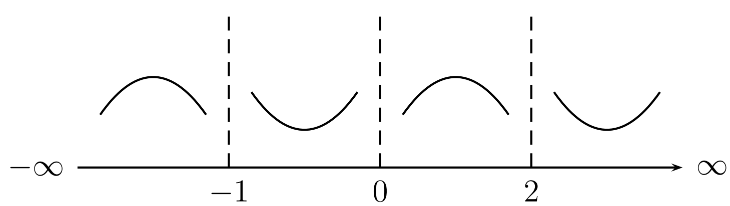
Crecimiento de la función

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+2x+4)}{(x+1)^3(x-2)^3}\,.$$

Como x^2+2x+4 no tiene raíces reales, esta expresión es siempre positiva,

$$f''(x) = 0 \iff x = 0\,.$$

El resumen del análisis de concavida se encuentra en la figura 14.

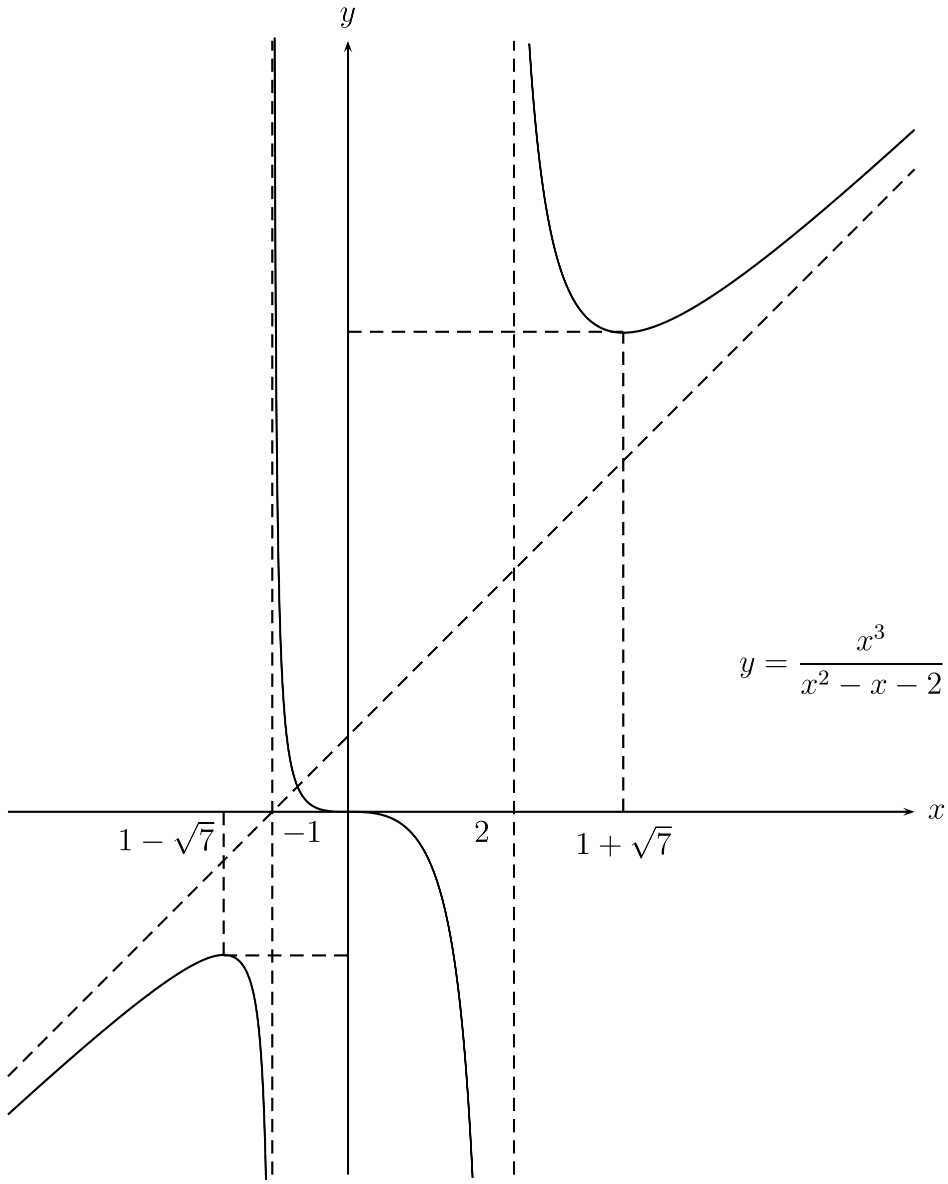


Concavidad de la función

Entonces $x = 0$ es el único punto de inflexión, en $x = 1 - \sqrt{7}$ la función tiene un máximo local y en $x = 1 + \sqrt{7}$ tiene un mínimo local.
Por no haber indeterminación en el denominador no hay asíntota verticales y tenemos

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x-2} = 1\,,\\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-x-2} = 1\,, \end{aligned}$$

entonces la recta $y = ax + b = x + 1$ es una asíntota al gráfico de f. El esbozo de la función se da a continuación:



6.7. Analizar el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} \,.$$

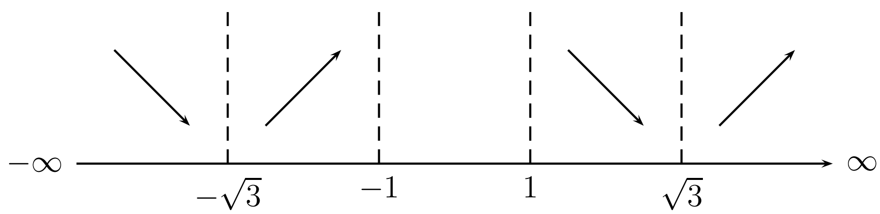
Solución: Notemos que

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \,.$$

Entonces, $Dom(f) = \mathbb{R} - [-1, 1]$ y además $f(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)$.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-1} - \dfrac{(x^2+1)x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{2x(x^2-1) - x(x^2+1)}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{x^3-3x}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

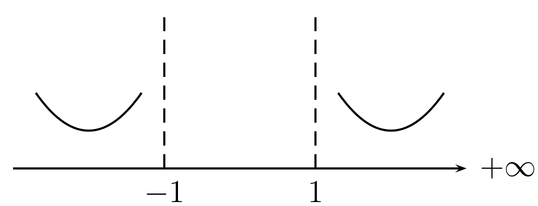
Entonces, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{3}$. Analizando el signo de f' obtenemos



Entonces, f es creciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$ y f es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Derivando, nuevamente la función se obtiene

$$f''(x) = \frac{3(x^2+1)}{(x^2-1)^{5/2}}\,.$$

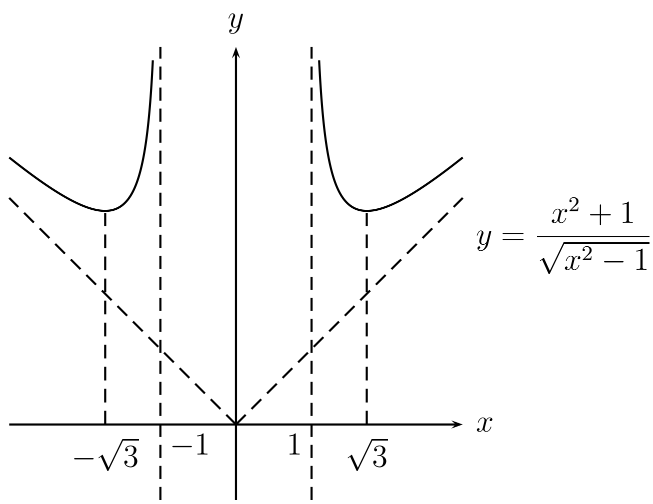
Analizando el signo de f'' obtenemos



Ya que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Además f posse dos asíntotas verticales en $x = 1$ y en $x = -1$.

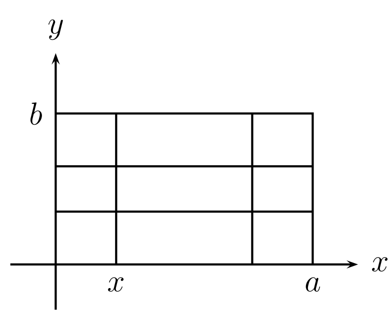
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2 - x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}[x^2+1+x\sqrt{x^2-1}]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2+1-x^4+x^2}{\sqrt{x^2-1}[x^2+1+x\sqrt{x^2-1}]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2-1}[x^2+1+x\sqrt{x^2-1}]} = 0\,.
\end{aligned}$$

Luego la recta $y = x$ es una asíntota de la curva y por simétria también lo es $y = -x$. El gráfico de la función queda como la figura:



6.8. Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a y b.

Solución: La situación geometrica se aprecia en el siguiente dibujo:



El volumen de la caja es

$$V(x) = (a-2x)(b-2x)x = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$$

y su derivada es

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$$

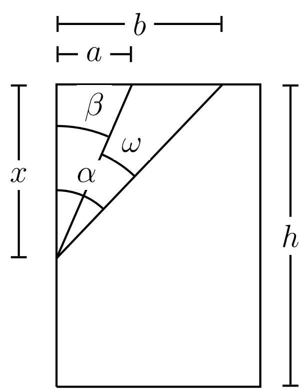
$V'(x)$ se anula en $x_{\pm} = \dfrac{(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$. Ambas raíces son reales y positivas, entonces como $V''(x) = 24x - 4(a+b)$ y

$$V''(x_{\pm}) = \pm\sqrt{a^2+b^2-ab}$$

se concluye que hay un máximo en x_- y un mínimo en x_+. Finalmente las dimensiones de la caja son: largo$=a-2x_-$, ancho$=b-2x_-$ y alto$=x_-$.

6.9. Una Cancha de fútbol mide 90×61 metros, y los arcos tienen un largo de 11 metros. Unn puntero izquierdo, que chutea muy bien, se mueve pegado a su costado. ¿A qué distancia del banderin del corner debe chutear para obtener las máximas posibilidades de marcar un gol?.

Solución: Veamos primeramente la situación geométrica



Queremos máximizar $\omega = \alpha - \beta$ que es equivalente a maximizar su tangente

$$\tan\omega = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{b}{x}-\dfrac{a}{x}}{1+\dfrac{b}{x}\dfrac{a}{x}} = \frac{bx-ax}{x^2+ab}\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d\tan\omega}{dx} = \frac{(b-a)(x^2+ab)-2x(b-a)x}{(x^2+ab)^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad ax^2-bx^2+ab^2-a^2b=0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2(a-b)+ab(b-a)=0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = ab \Leftrightarrow x=\sqrt{ab}\,.\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que $2a + 11 = 61$ y $a + 11 = b$ resolviendo este sistema obtenemos que $a = 25$ y $b = 36$. Luego,

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{25 \cdot 36} = 30 \text{ metros}\,.$$

Note que

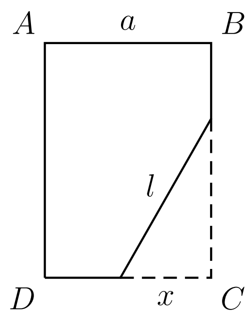
$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \tan\omega}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{(a-b)x^2 + ab(b-a)}{(x^2+ab)^2}\right) \\
&= \frac{2x(a-b)(x^2+ab)^2 - ((a-b)x^2 + ab(b-a))2(x^2+ab)(2x)}{(x^2+ab)^4} \\
&= \frac{2x(a-b)(x^2+ab) - 4x((a-b)x^2 + ab(b-a))}{(x^2+ab)^3} \\
&= -\frac{(a-b)x[x^2 - 6ab]}{(x^2+ab)^3}\,.
\end{aligned}$$

Se verifica que

$$\left.\frac{d^2 \tan\omega}{dx^2}\right|_{\sqrt{ab}} = \frac{(a-b)\sqrt{ab}(ab-6ab)}{(2ab)^3} = \frac{(a-b)\sqrt{ab}5ab}{8a^3b^3} < 0$$

y $x = \sqrt{ab}$ es un máximo.

6.10. Doble una hoja de papel rectángular haciendo conicideir el vértice C con un punto del lado AD. Determine x para que la longitud del pliegue l sea mínima. Obtenga además la longitud del pliegue mínimo.

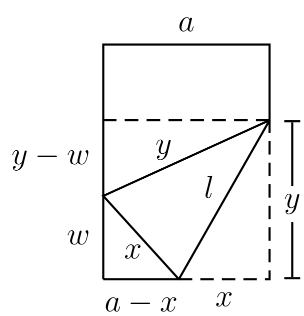


Solución: Usando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$w^2 = x^2 - (a-x)^2 \,, \tag{6.1}$$
$$l^2 = x^2 + y^2 \,, \tag{6.2}$$
$$y^2 = (y-w)^2 + a^2 \,. \tag{6.3}$$

Por (6.3) tenemos que

$$y^2 = a^2 + y^2 - 2yw + w^2 \Rightarrow y = \frac{w^2+a^2}{2w} \,.$$



Entonces

$$l^2 \;=\; x^2 + \left(\frac{w^2+a^2}{2w}\right)^2 = x^2 + \frac{(w^2+a^2)^2}{4w^2}$$

y usando (6.1) se tiene que

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + \frac{[x^2-(a-x)^2+a^2]^2}{4(x^2-(a-x)^2)} \\ &= x^2 + \frac{[x^2-a^2+2ax-x^2+a^2]^2}{4(x^2-a^2+2ax-x^2)} \\ &= x^2 + \frac{ax^2}{2x-a} \,. \end{aligned}$$

Entonces,

$$l = \sqrt{x^2 + \frac{ax^2}{2x-a}} \,.$$

Por otro lado, como $\sqrt{x}$ es creciente, basta minimizar la cantidad subradical, es decir:

$$f(x) = x^2 + \frac{ax^2}{2x-a}$$

y

$$f'(x) = 2x + \frac{2ax(2x-a) - 2ax^2}{(2x-a)^2} = \frac{2x(2x-a)^2 + 2ax^2 - 2a^2x}{(2x-a)^2}\,.$$

Si $f'(x) = 0$ se debe tener que

$$\begin{aligned} 2x(2x-a)^2 + 2ax^2 - 2a^2x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x(4x^2 - 4ax + a^2) + 2ax^2 - 2a^2x = 0 \\ &\Rightarrow \quad x(4x - 3a) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{3a}{4}\,. \end{aligned}$$

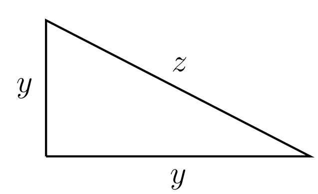
Entonces,

$$l = \sqrt{x^2 + \frac{ax^2}{2x-a}}\,\Bigg|_{\frac{3a}{4}} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{\frac{9}{16}a^3}{\frac{3}{2}a - a}} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{9}{8}a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a\,.$$

la verificación de que $x = \dfrac{3a}{4}$ es mínimo queda como desafío para el lector.

6.11. Entre todos los triángulos rectángulos con perímetro $2p$, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Solución:



De la figura tenemos

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2p\,, & (6.4) \\ x^2 + y^2 &= z^2\,, & (6.5) \\ A &= \frac{xy}{2}\,. & (6.6) \end{aligned}$$

De la ecuación (6.4) tenemos $z = 2p - x - y$ entonces elevando al cuadrado obtenemos

$$z^2 = 4p^2 + x^2 + y^2 - 4px - 4py + 2xy$$

como $z^2 = x^2 + y^2$ entonces

$$4p^2 = 4px + 4py - 2xy\ .$$

Despejando y se obtiene

$$y(4p-2x) = 4p(p-x) \Rightarrow y = \frac{4p(p-x)}{2(2p-x)} = \frac{2p(p-x)}{2p-x}\ .$$

Este valor de y lo reemplazamos en la ecuación (6.6) para dejar el área expresada como función de una variable:

$$A(x) = \frac{p(px-x^2)}{2p-x}\ .$$

Entonces,

$$A'(x) = \frac{(x^2-4px+2p^2)p}{(2p-x)^2}\ .$$

Para que se anule $A'(x)$, basta que se anule el denominador, por lo que debemos resolver la ecuación

$$x^2 - 4px + 2p^2 = 0$$

cuyas soluciones son $x = p(2 \pm \sqrt{2})$ de estas dos posibilidades debemos elegir $x = p(2-\sqrt{2})$, pues el otro valor es mayor que el perímetro. Con este valor de x calculamos y, z. Así, $y = p(2-\sqrt{2})$, $z = 2p(\sqrt{2}-1)$, lo que nos dice que el triángulo es isósceles. Ahora verifiquemos que los valores corresponden a un máximo usando el criterio de la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
A''(x) &= \frac{p[(2p-x)^2(2x-4p) - (x^2-4px+2p^2)(2(2p-x)(-1))]}{(2p-x)^4} \\
&= \frac{p(2p-x)[(2p-x)(4x-2p) + 2x^2 - 8px + 4p^2]}{(2p-x)^4} \\
&= \frac{-4p^3}{(2p-x)^3} < 0\ .
\end{aligned}$$

El signo de la derivada nos confirma que los valores obtenidos corresponden a un máximo.

Nota 1. Jean Bernoulli en 1694, había descubierto que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $x = a$ tales que $f(a) = g(a) = 0$ y existe el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{entonces} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Sin embargo, Bernoulli, durante su estancía en París, firmó un contrato con el márquez de L'Hôpital, según el cual, a cambio de un salario regular, se comprometía a enviar a L'Hôpital sus descubrimientos.
Esta regla es conocida por el nombre de L'Hôpital, porque éste la incorporó en un texto de cálculo diferencial que apareció publicado en París en 1696.

6.12. Calcular $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}$.

Solución: La expresión

$$\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}$$

evaluada en $x = \pi$ da una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin x}{2 \sin x \cos x - \sin x} \, .$$

Esta espresión también es una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo cual nuevamente debe aplicarse la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \frac{-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x}{2\cos(2x) - \cos x} = \frac{-\frac{1}{4} + 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{4} \, .$$

6.13. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cotan} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Solución: Este límite corresponde a una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$.

$$\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

esta última expresión es una forma del tipo $\dfrac{0}{0}$ aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \frac{-x}{1 + \dfrac{x}{\sin x} \cos x} \, .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \pi} \left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right) = 0 \, .$$

6.14. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x-1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2x-x^2-1}{(x^2-1)(x-1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)}=-\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

6.15. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución: Aplicando dos veces la regla de L'Hôpital se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0\,.
\end{aligned}$$

6.16. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\tan x}$.

Solución: Evaluando $\dfrac{1-\cos^2 x}{x\tan x}$ en $x=0$, se obtiene una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo cual de debe aplicar regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x(-\sin x)}{\tan x+x\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{\tan x+x\sec^2 x}\,.$$

Evaluando la última expresión se obtine una forma $\dfrac{0}{0}$. Aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sec^2 x+\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x}=1\,.$$

6.17. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\pi - 2\arctan\sqrt{x})$.

Solución: El cálculo directo de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\pi - 2\arctan\sqrt{x})$ conduce a una forma indeterminada de tipo $0 \cdot +\infty$. Para aplicar la regla de L'Hôpital se debe transformar en una forma de tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\pi - 2\arctan\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\pi - 2\arctan\sqrt{x})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2\,.$$

6.18. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$.

Solución: La evaluación directa de este límite da lugar a una forma indeterminada de tipo $\infty \cdot 0$, por lo tanto se debe transformar en una del tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\dfrac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2x^2\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2\,.
\end{aligned}$$

6.19. Demuestre que

$$\lim_{x\to1} \frac{ax^2 - 2ax + a}{bx^2 - 2bx + b} = \frac{a}{b}\,.$$

Solución: La evaluación directa de este límite es una expresión de la forma $\dfrac{0}{0}$ entonces usando la regla de L'Hôpital obtenemos

$$\lim_{x\to1} \frac{ax^2 - 2ax + b}{bx^2 - 2bx + b} = \lim_{x\to1} \frac{2ax - 2a}{2bx - 2b} = \lim_{x\to1} \frac{2a(x-1)}{2b(x-1)} = \frac{a}{b}\,.$$

6.20. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

alrededor del punto $x = 0$.

Solución: Notemos que las derivadas sucesivas dan:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}\,, \\
f''(x) &= \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \\
f'''(x) &= -\frac{2\cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}\,, \\
f^{(4)}(x) &= \frac{2\cdot 3\cdot 4(1+x)^3}{(1+x)^8} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}\,.
\end{aligned}$$

Entonces, se deduce que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n\cdot n!\,.$$

Luego, el desarrollo de Taylor de f entorno de $x = 0$ es:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot k!}{k!}x^k + \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(1+c)^{n+2}(n+1)!}x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}x^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

6.21. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

alrededor del punto $x = 0$.

Solución: Las derivadas sucesivas dan

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,,\\
f''(x) &= \frac{2x(-3+x^2)}{(1+x^2)^3}\,,\\
f'''(x) &= \frac{-6(-6x^2+x^4+1)}{(1+x^2)^4}\,,\\
f^{(4)}(x) &= \frac{24x(-10x^2+x^4+5}{(1+x^2)^5}\,,\\
f^{(5)}(x) &= \frac{-120(-15x^4+x^6+15x^2-1)}{(1+x^2)^6}\,.
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par}\,,\\ \pm\, n! & \text{si } n \text{ es impar}\,. \end{cases}$$

Entonces, el desarrollo de Taylor de f alrededor de $x=0$ es

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\\
&= x - x^3 + x^5 - \cdots \pm\ x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

6.22. Calcule las derivadas de orden 2007 y 2008 de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

en el punto $x=0$.

Solución: Las derivadas sucesivas de f son

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,, \\
f''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\,, \\
f'''(x) &= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}\,, \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}\,, \\
f^{(5)}(x) &= \frac{-240x(3x^4-10x^2+3)}{(1+x^2)^6}\,, \\
f^{(6)}(x) &= \frac{720(7x^6-35x^4+21x^2-1)}{(1+x^2)^7}\,.
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par}\,, \\ \pm\,(n+1)! & \text{si } n \text{ es impar}\,. \end{cases}$$

Entonces, $f^{(2008)}(0) = 0$ y $f^{(2007)}(0) = 2008!$.

6.23. Encuentre el desarrollo de Taylor de

$$f(x) = \log(\cos(x))$$

hasta orden 3, entorno a $x = 0$ y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$, para $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Solución: Note que f está bien definida en $(-\pi/2, \pi/2)$ y que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x\,, \\
f''(x) &= -\sec^2 x\,, \\
f'''(x) &= -2\sec x(\sec x \tan x) \\
&= -2\sec^2 x \tan x
\end{aligned}$$

con

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0$$

entonces el desarrollo de Taylor de orden 3 es:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\,x^4$$

donde $\xi \in (0, x)$. Ahora para establecer la cota del resto observe que

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= (-2\sec^2 x \tan x)' \\ &= -4\sec x \tan x(\sec x \tan x) - 2\sec^2 x \sec^2 x \\ &= -2\sec^2 x(2\tan^2 x + \sec^2 x) \end{aligned}$$

y como

$$\sup_{\xi\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} |\sec(\xi)| = \sqrt{2}, \qquad \sup_{\xi\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} |\tan(\xi)| = 1 .$$

Entonces, para $\xi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ se tiene

$$|f^{(4)}(\xi)| \le 2 \cdot |\sec \xi|^2(2 \cdot |\tan \xi|^2 + |\sec \xi|^2) =\le (2)\cdot(2)\cdot(2+2) = 16 .$$

Por lo tanto el resto está acotado por:

$$\left|\frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\, x^4\right| \le \frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)| \cdot |x|^4 = \frac{16}{24}|x|^4 = \frac{2}{3}|x|^4 .$$

6.24. Sean $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en el punto $a \in (\alpha, \beta)$. Si $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ y $f(x) \ge g(x)$ $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$. Demuestre que $f''(a) \ge g''(a)$.

Solución: Consideremos $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Entonces, $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es dos veces derivable en a y como $f(x) \ge g(x)$, $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$ se obtiene que

$$\varphi(x) \ge 0, \quad \varphi(a) = \varphi'(a) = 0 .$$

Entonces el desarrollo de Taylor de φ de orden 2 es:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{\varphi'''(c)}{3}(x-a)^3 \\ &= \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{\varphi'''(c)}{3}(x-a)^3 \\ &= (x-a)^2\left[\frac{\varphi''(a)}{2} + \frac{\varphi'''(c)}{3}(x-a)\right] \end{aligned}$$

como $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi'''(c)}{2}(x-a) = 0$ si $\varphi''(a) < 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$$\frac{\varphi''(a)}{2} + \frac{\varphi'''(c)}{3}(x-a) < 0$$

lo cual implica que $\varphi(x) < 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, necesariamente $\varphi(a) \ge 0 \Rightarrow f''(a) \ge g''(a)$

6.25. A partir del desarrollo de Taylor entorno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$. Demuestre la fórmula del binomio

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k \,.$$

Solución: Consideremos $f(x) = (x+a)^n$ entonces

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x+a)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(x+a)^{n-k}\,.$$

Luego,

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k}\,.$$

El desarrolo de Taylor de f entorno a 0 es

$$f(x) = (x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k \,.$$

Note que el resto es cero ya que la deriva $n+1$ de un polinomio de grado n es cero.