Matemáticas Básicas

1 de octubre de 2005

Índice general

Capítulo 1

Combinatoria, binomio de Newton y simbología

Sumario. El principio de inducción. El símbolo sumatorio. Conceptos y fórmulas del análisis combinatorio: variaciones, permutaciones y combinaciones. Números combinatorios. Binomio de Newton. Ejercicios.

1.1. Los números naturales y racionales. Combinatoria.

Sabemos que los naturales se notan por $\mathbb{N}$ y son $\{0,1,2,\ldots\}$, podemos definir en ellos una suma y un producto, propiedades que el alumno conoce y domina, aquí recordaremos el principio de buena ordenación y el método de inducción.

Principio de buena ordenación.- Todo subconjunto no vacio tiene primer elemento.

Método de inducción.- Dado un subconjunto U de $\mathbb{N}$, cuyos elementos se caracterizan por verificar la propiedad P, es decir, $U = \{k \in \mathbb{N} \,/\, P(k)\}$; si se verifica:

1. La propiedad es cierta para un valor inicial. ($0 \in U$ o $1 \in U$)

2. Si un natural verifica la propiedad, también la verifica el siguiente. ($k \in U \Rightarrow k+1 \in U$)

entonces $U \equiv \mathbb{N}$.

Observaciones.- Si en lugar de 1 se verifica que $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, U será el conjunto $\{\tilde{n}, \tilde{n}+1, \tilde{n}+2, \ldots\}$.

Si en lugar de 2 se verifica ($k \in U \Rightarrow k+2 \in U$), entonces U sería el conjunto de los números pares o el de los impares, según sea $0 \in U$ o $1 \in U$.

Se usa cuando necesitamos demostrar que una propiedad que depende de un número natural, es cierta para todos los números naturales.

Ejemplo 1.1 *Probar que*

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Solución.- Para $n = 1$ es cierta, también lo comprobamos para $n = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \\ 1+2 &= 3 = \frac{2\,(2+1)}{2} \end{aligned}$$

supuesto cierta para $n = k$, que se le llama hipótesis de inducción, lo probamos para $n = k+1$.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k\,(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k\,(k+1) + 2\,(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)\,(k+1)}{2} \end{aligned}$$

la primera igualdad es consecuencia de la hipótesis de inducción y en la última hemos sacado factor común $(k+1)$.

Probamos ahora la segunda identidad:

Para $n = 1$ es cierta, también lo comprobamos para $n = 2$.

$$\begin{aligned} 1^3 &= \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right]^2 \\ 1^3 + 2^3 &= 9 = \left[\frac{2 \cdot (2+1)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

supuesto cierta para $n = k$, lo probamos para $n = k+1$.

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \left[\frac{k\,(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2\,(k+1)^2 + 4\,(k+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2\,[k^2+4\,(k+1)]}{2^2} = \frac{(k+1)^2\,[k^2+4k+4]}{2^2} = \\ &= \frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{2^2} = \left[\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1 *Probar que*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Ejercicio 1.2 *Probar que*

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Ejercicio 1.3 *Probar que*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

Ejercicio 1.4 *Si $n + \frac{1}{n}$ es un número natural, también lo es $n^a + \frac{1}{n^a}$.*

Ejercicio 1.5 *Hallar la ley general que simplifica el producto*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

y demostrarlo por inducción.

1.2. El simbolo Σ

El simbolo $\sum_{i=1}^{n}$, se lee suma desde $i=1$ hasta n, la letra i es el índice de sumación, y los números de abajo y arriba indican desde y hasta donde hemos de sumar. Así por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Observaciones:

A veces se usa el simbolo de sumación en un sentido más general, para representar la suma de todos los valores de una expresión, cuando varios índices que en ella figuran cumplen deterninadas condiciones.

Ejemplo 1.2

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=3} x^i y^j z^k &= xyz + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + \\ &+ xz^2 + yz^2 + x^3 + y^3 + z^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3

$$\sum_{i,j=1}^{2} x_i y^j = x_1y^1 + x_1y^2 + x_2y^1 + x_2y^2$$

La elección del índice carece de importancia, veamoslo con un ejemplo.

Ejemplo 1.4 *Expresar* $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$ *con el simbolo sumatorio, de varias formas.*

Solución.-

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} &= \sum_{i=2}^{6} \frac{1}{2^i} \\ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} &= \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2^{k+2}} \\ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} &= \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Propiedades

1. $$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

3.
$$\sum_{k=1}^{n} a = na$$

4. Telescópica
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Ejercicio 1.6 *Calcular*
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$
Sugerencia: $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$.

Ejercicio 1.7 *Calcular*
$$\sum_{k=1}^{n+r} a_k - \sum_{i=1+r}^{n+r} a_i$$

Ejercicio 1.8 *Razonar la veracidad o falsedad de las igualdades siguientes:*

1.
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(a_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^2}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^2$$

2.
$$\sum_{i=0}^{n} (2+i) = \frac{5n+n^2}{2}$$

3.
$$\sum_{j=1+n}^{2n} \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

1.3. Combinatoria

La combinatoria es el arte de contar, y cuenta con dos principios básicos: el de adición y el de multiplicación.

Antes de abordar esto principios, recordemos que contar es hallar el número de elementos de un conjunto, es decir, el cardinal de dicho conjunto. Y la primera forma de contar fue establecer correspondencias biyectivas entre los conjuntos a contar y los subconjuntos de $\mathbb{N}$, de la forma $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 1.5 *¿Cúantos números tiene el conjunto* $\{7, 8, 9, \ldots, 53\}$*?*

Solución.
$$\begin{array}{ccccc} 7 & 8 & 9 & \cdots & 53 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 53-6 \end{array}$$

Ejemplo 1.6 *¿Cúantos números hay entre m y n, con $m < n$?*

Solución.

$$\begin{array}{ccccc} m & m+1 & m+2 & \cdots & n = m + (n-m) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-m)+1 \end{array}$$

Ejemplo 1.7 *¿Cúantos números hay entre 597 y 3378?*

Solución. $3378 - 597 + 1$.

Ejemplo 1.8 *¿Cúantos números impares hay entre 597 y 3378?*

Solución.

$$\begin{array}{ccccc} 597 & 599 & 601 & \cdots & 3377 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 2\,(298)+1 & 2\,(299)+1 & 2\,(300)+1 & \cdots & 2\,(1688)+1 \end{array}$$

y entre 298 y 1688, hay $1688 - 298 + 1$.

Principio de adición.- Si se desea escoger un objeto que puede presentar r tipos distintos, y que para el primer tipo hay n_1 opciones, para el segundo tipo tenemos n_2 opciones, ..., y para el $r-$*ésimo* n_r; entonces para escoger un elemento tenemos $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ formas distintas.

Principio de multiplicación.- Si un suceso se realiza en k fases y para la primera fase tenemos n_1 posibilidades, para la segunda n_2, ..., y para la última n_k; entonces el número de formas en que se puede dar el suceso es $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

Ejemplo 1.9 *Si dispongo en mi armario de 5 camisas, 3 pares de pantalones, 6 pares de calcetines, y dos pares de zapatos. ¿De cuántas formas distintas puedo vestirme?*

Solución.- Por el principio de multiplicación serán:

$$5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 180$$

formas distintas.

Ejemplo 1.10 *¿Cuántos números distintos de cuatro cifras se pueden formar con unos y ceros?*

Solución.- Para elegir el primer número sólo tenemos una posibilidad, y es el 1, para la segunda tenemos dos posibilidades, al igual que para la tercera y la cuarta, luego el número es:

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Ejercicio 1.9 *¿Cuántos números de 5 cifras son pares?¿Cuántos empiezan por 5 y acaban en 8?*

Aunque con estos principios se pueden resolver gran cantidad de problemas, existen fórmulas que permiten hacer el conteo más rapidamente.

1.3.1. Variaciones ordinarias

Ejemplo 1.11 *¿Cuántas palabras distintas, tengan o no sentido, se pueden formar con las letras a, e, i, l, m, n, p, de manera que tengan cuatro letras distintas y la primera sea una vocal?*

Solución. *Para la primera letra tenemos 3 posibilidades, 6 para la segunda, 5 para la tercera y 4 para la cuarta, luego:*

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$$

Observación. Si en el enunciado anterior, nos piden que la vocal este en tercer lugar, comenzanmos la construcción por ahí, es decir, comenzamos por la casilla que tenga más restricciones. No tienen relevancia los lugares en los que se producen las restricciones, sino cuales son estas.

Ejemplo 1.12 *¿Cuántos números de tres cifras mayores que 500 y pares se pueden formar con los dígitos 2,3,4,5 y 6?*

Solución. *Para el primer lugar tenemos 2 posibilidades el 5 y el 6, para el segundo 5 y para el tercero 3, así el número de formas es:*

$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$$

Definición 1.1 *Una variación ordinaria (sin repetición) de n elementos de un conjunto A, tomados de m en m con $m \leq n$, es todo subconjunto ordenado formado por m elementos cualesquiera de A. Dos variaciones son distintas, cuando difieren en un elemento o en el orden de estos.*

Su número es:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-(m+1)) = V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Observemos que para elegir al primer elemento tenemos n posibilidades, $n-1$, para el segundo, y para el m-ésimo tenemos $n-(m-1)$ formas, y basta aplicar el principio de multiplicación.

Ejemplo 1.13 *Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ formar todas las variaciones ordinarias de esos cuatro elementos tomadas de tres en tres.*

Estas son

$$\begin{gathered} abc, abd, acb, acd, adb, adc \\ bac, bad, bca, bcd, bda, bdc \\ cab, cad, cba, cbd, cda, cdb \\ dab, dac, dba, dbc, dca, dcb \end{gathered}$$

la forma más comoda de obtenerlas es mediante un diagrama de árbol.

Ejemplo 1.14 *Si en la F1 participan 20 coches, y supuesto que todos acaban la carrera, ¿de cuántas formas distintas puede estar formado el podium?*

Solución. *El cajón está formado por tres escalones, y evidentemente no se pueden repetir, luego serían* $V_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$

Si $m = n$, las variaciones se denominan **permutacioes** (sólo se diferencian en el orden), se notan por P_n y su número es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

A este número se le denomina n factorial y se nota por $n!$.

Ejemplo 1.15 *¿De cuántas formas distintas se pueden sentar cinco personas en un banco?*

Solución. *Sólo importa el orden, ya que se sientan todas, luego se trata de una permutación*

$$P_5 = 5! = 120$$

Observemos que $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ y como $\frac{1!}{1} = 1 = 0!$, se define $0! = 1$.

1.3.2. Variaciones con repetición

Definición 1.2 *Si consideramos que los elementos pueden repetirse, se tienen las variaciones con repetición que se notan por RV_n^m y su número es n^m. Notemos que la restricción $m \leq n$, carece ahora de sentido.*

Observemos que para la primera posición tenemos n posibilidades, n para la segunda, n para la tercera, ..., y n para la m-émesima posición.

Ejemplo 1.16 *¿Cuántas quinielas hay que rellenar para asegurar un pleno?*

Tenemos tres elementos $1, x, 2$, que se pueden repetir y 15 partidos, por lo que son variaciones con repetición de tres elementos tomados de 15 en 15.

$$RV_3^{15} = 3^{15} = 14348907$$

1.3.3. Combinaciones

Definición 1.3 *Llamaremos combinaciones de orden m, de n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a todos los subconjuntos de m elementos que se puedan formar, de modo que dos combinaciones son distintas si difieren en algún elemento.*

Dada una combinación m-aria, ordenando sus elementos de todas las formas posibles, obtenemos variaciones distintas. Cada combinación m-aria da lugar a $m!$ variaciones distintas. Por tanto, si C_n^m es el número de combinaciones, tendremos que:

$$V_n^m = C_n^m \cdot P_m \Rightarrow C_n^m = \frac{V_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

1.3.4. Combinaciones con repetición

Definición 1.4 *A los grupos de m objetos, distintos o repetidos, elegidos de entre un grupo de n elementos, se llaman combinaciones con repetición. Se nota por RC_n^m y su número es:*

$$RC_n^m = \binom{n+m-1}{m}$$

para obtener este número se reducen las combinaciones con repetición a combinaciones ordinarias, de la siguiente forma:

Dada una combinación con repetición, por ejemplo, $a_2a_2a_3a_3a_3a_4a_5$, se le incrementa el índice tantas veces como elementos le preceden, es decir, el 1^o en 0, el 2^o en 1, el 3^o en 2, y así sucesivamete, obteniendo, $c_2c_3c_5c_6c_7c_9c_{11}$, así logramos que todos los índices resulten distintos y crecientes, ya que dos elementos consecutivos reciben índices que por lo menos difieren en 1.

Cada combinación con repetición de n elementos tomados de m en m, queda representada por una combinación ordinaria de $n+\overbrace{m-1}^{\text{índices}}$ elementos tomados de m en m.

Recíprocamente, toda combinación de orden m formada con los $n+m-1$ elementos, una vez reordenada por índices crecientes, determina una combinación con repetición sin más que rebajar los índices sucesivos en $0, 1, \ldots, m-1$ unidades.

Ejemplo 1.17 *¿De cuántas formas distintas se pueden repartir 100 bolas en 25 urnas?*

Solución.

$$\binom{100+25-1}{25-1}$$

Ejemplo 1.18 *¿De cuántas formas se pueden repartir 100 bolas en 25 urnas, de manera que no quede ninguna vacia?*

Solución. *Tenemos que colocar una bola en cada urna, luego nos quedan 75 bolas a repartir en 25 urnas.*

$$\binom{75+25-1}{25-1}$$

Ejercicio 1.10 *¿Cuántas diagonales tiene un exágono? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?*

1.3.5. Numeros combinatorios

Definición 1.5 *Se define el número combinatorio $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, que representa el número de subconjuntos de k elementos, que se pueden obtener de un conjunto de cardinal n.*

Propiedades

1. $$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

2. $$\binom{n}{1} = n$$

3. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

   Cada vez que escogemos un subconjunto de k elementos, dejamos univocamente determinado un subconjunto de $n-k$ elementos, y reciprocamente.

4. Identidad de Pascal
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de n elementos con el que queremos formar subconjuntos de k elementos. Nos fijamos en uno de ellos, por ejemplo, a_1. De todos los subconjuntos que hemos de formar algunos contendran a a_1 y otros no, así que podemos escribir:

Subconjuntos de k elementos = (subconjuntos de k elementos que contienen a_1)+(subconjuntos de k elementos que no contienen a a_1), es decir,

$$\binom{n}{k} = \overbrace{\binom{n-1}{k-1}}^{\substack{\text{elegido } a_1 \text{ nos quedan} \\ k-1 \text{ elementos por elegir}}} + \overbrace{\binom{n-1}{k}}^{\substack{\text{tenemos } n-1 \text{ elementos} \\ \text{y hemos de elegir } k}}$$

Esta propiedad permite calcular los números combinatorios mediante el triángulo de Tartaglia.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

1.3.6. Binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

La demostración se hace por inducción, y se deja como ejercicio.

1.4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.11 *Demostrar que*
$$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$
es múltiplo de 17.

Ejercicio 1.12 *Demostrar que para todo* $n \geq 1$, *se verifica:*
$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} < 2$$

Ejercicio 1.13 *Si* $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s} \\ \frac{p}{q} < \frac{pr+qs}{2qs} < \frac{r}{s} \end{cases}$

Ejercicio 1.14 *Calcular:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Ejercicio 1.15 *Calcular:*

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i}$$

Ejercicio 1.16 *Sumar:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}$$

Ejercicio 1.17 *Calcular*

$$\sum_{i+j=3} i^3 j^3$$

Ejercicio 1.18 *Desarrollar*

$$(a+b)^3$$
$$(a+b)^4$$

Ejercicio 1.19 *¿Qué es más fácil acertar el gordo de la loteria nacional, la loteria primitiva o una quiniela de 15?*

Capítulo 2

Trigonometría

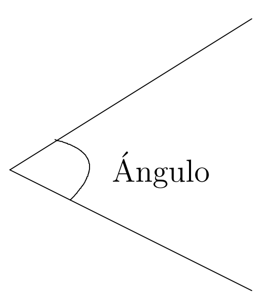
Sumario. Ángulos. Razones trigonométricas. Relaciones fundamentales en un triángulo. Funciones recíprocas. Resolución de triangulos. Fórmulas trigonométricas. Ejercicios.

2.1. Trigonometría

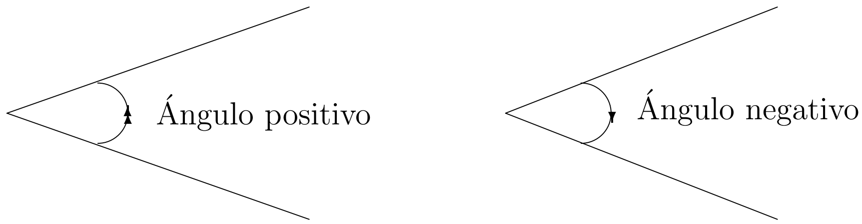
Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera. En esta sección nos centraremos en el estudio de los conceptos fundamentales de la trigonometría plana.

2.1.1. Trigonometría plana

El concepto de ángulo es fundamental en el estudio de la trigonometría. Así, un ángulo queda determinado por un par de semirrectas con origen en un mismo punto. Las semirrectas se llaman lado inicial y final. Al origen común se le denomina vértice del ángulo.



Teniendo en cuenta que las semirrectas son diferentes en cuanto a su identificación (lado inicial y final), se suele identificar ángulos de magnitud positiva si se generan con un radio que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj.

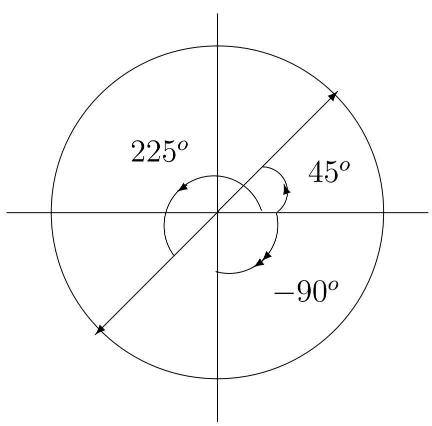


Por otro lado, existen diversas unidades a la hora de "medir" ángulos

- **Grado**. En trigonometría, un ángulo de amplitud 1 grado se define como aquel cuya amplitud es igual a 1/360 de la circunferencia de un círculo.

Las equivalencias son las siguientes:

- 360^o = un giro completo alrededor de una circunferencia
- $180^o = 1/2$ vuelta alrededor de una circunferencia
- $90^o = 1/4$ de vuelta
- $1^o = 1/360$ de vuelta, etc.



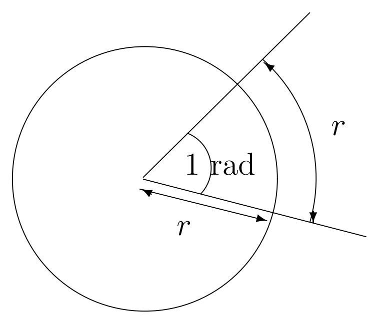
En ocasiones se utilizan los conceptos de minutos y segundos asociado como alternativa a la expresión "decimal" de ángulos. Así un grado se divide en 60 minutos, cada uno de los cuales equivale a 1/21.600 de la circunferencia de un círculo; cada minuto se divide en 60 segundos, cada uno de los cuales equivale a 1/1.296.000. Los grados se indican normalmente con el símbolo °, los minutos con ' y los segundos con ", como en 41°18'09", que se lee "41 grados 18 minutos y 9 segundos".

- **Radián.** Es la medida usual de ángulos en matemáticas. La medida, en radianes, de un ángulo se expresa como la razón del arco formado por el ángulo, con su vértice en el centro de un círculo, y el radio de dicho círculo. Esta razón es constante para un ángulo fijo para cualquier círculo.

La magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia, dividido por el valor del radio. El valor de este ángulo es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir una pizza en 10 partes iguales, el ángulo de cada pedazo permanece igual, independiente si la pizza es pequeña o familiar.

De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; solo basta multiplicar el radio por el ángulo en radianes.

$$Long.\_arco\_de\_circunferencia = [\acute{A}ngulo\_en\_radianes] \quad \cdot \quad [Radio\_de\_la\_circunferencia]$$



2.1.2. Relación entre estas medidas

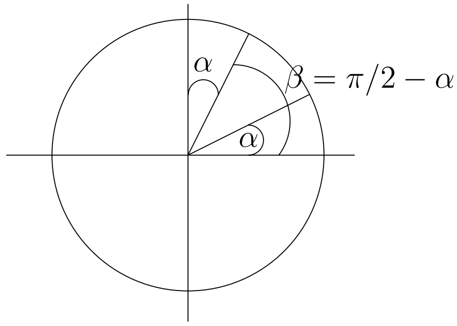
Teniendo en cuanta las relaciones anteriores se tiene sin dificultad la siguiente relación:

$$2 \cdot \pi \ rad = 360 \ grados$$

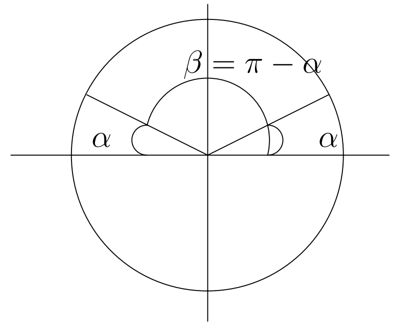
a partir de la cual se obtiene de manera inmediata la conversión entre ambas unidades de medida.

2.1.3. Angulos complementarios y suplementarios

En general dos ángulos se dicen complementarios si verifican que su suma es igual a $\pi/2$ rad. (90 grados), por otro lado,se dice que dos ángulos son suplementarios si su suma es igual a π radianes (180 grados)



Ángulos complementarios

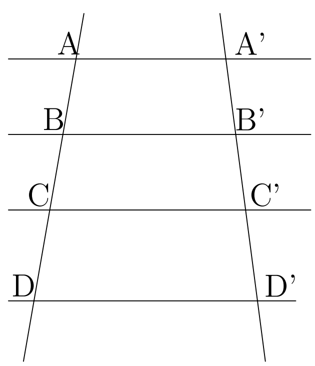


Ángulos suplementarios

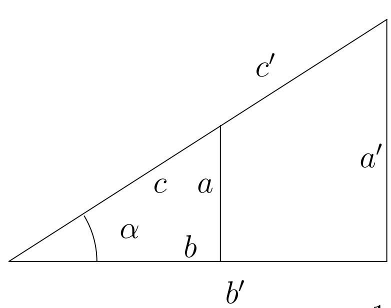
2.2. Razones trigonométricas

Dado un ángulo cualesquiera, realizando un giro de manera adecuada podemos llevarlo a un sistema de referencia cartesiana que tiene origen en el punto (0,0), y la semirrectas inicial la haremos coincidir con el eje de abscisas.

A partir del **teorema de Tales** que afirma que , "*Si se cortan varias rectas paralelas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.* "



Obtenemos el siguiente resultado de manera inmediata: "*Dado un ángulo α si trazamos perpendiculares paralelas a uno de los lados,* se *determinan sobre éstos segmentos proporcionales*".



lo que se traduce en que la siguiente relación es siempre constante:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Dicha constante recibe el nombre de coseno del ángulo α ($\cos\alpha$).

Utilizando el teorema de Pitágoras se obtienen relaciones análogas que recibe en nombre de seno y tangente asociado al ángulo α.

- $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$
- $sen(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$
- $tg(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

Obviamente, en función del teorema de Pitágoras, de las expresiones anteriores se obtienen las siguientes identidades:

- $sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

A las inversas de las anteriores razones se les llama *cosecante*, *secante* y *cotangente* del ángulo α.

- $co\sec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$
- $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$
- $\cot g(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$

2.2.1. Ángulos notables

Resulta conveniente conocer las razones trigonométricas de algunos ángulos notables. Así:

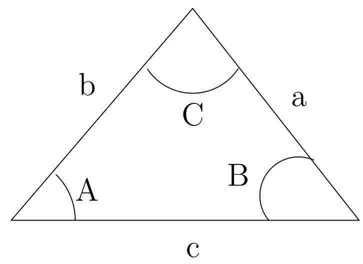
grados	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

2.2.2. Relación entre las razones trigonométricas de ángulos en distintos cuadrantes

	$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\theta = \pi \pm \alpha$	$\theta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$
$sen(\theta)$	$cos(\alpha)$	$\mp sen(\alpha)$	$-cos(\alpha)$	$-sen(\alpha)$
$cos(\theta)$	$\mp sen(\alpha)$	$-cos(\alpha)$	$\pm sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$
$tg(\theta)$	$\mp cotg(\alpha)$	$\pm tg(\alpha)$	$\mp cotg(\alpha)$	$-tg(\alpha)$

2.3. Relaciones fundamentales en un triángulo

Veamos una serie de resultados que serán útiles a la hora de trabajar con triángulos no necesariamente rectángulos. Así, sean A, B y C los ángulos de un triángulo y sean, respectivamente a, b y c sus lados opuestos.



Entonces se verifican las siguientes relaciones:

- **Relación fundamental entre los ángulos de un triángulo**
$$A+B+C=\pi\ rad$$
- **Teorema del seno**:
$$\frac{a}{sen(A)}=\frac{b}{sen(B)}=\frac{c}{sen(C)}$$
- **Teorema del coseno**:
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(C)$$
- **Teorema de las tangentes**:
$$\frac{a+b}{tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{a-b}{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

2.3.1. Funciones recíprocas

Hasta el momento, dado un ángulo nos proponemos obtener las razones trigonométricas asociadas a dicho ángulo. Podemos plantearnos la pregunta recíproca: Si conocemos el valor de la razón trigonométrica, ¿podemos conocer el ángulo con el que trabajamos?. La respuesta es afirmativa definiendo de manera adecuada el conjunto donde podemos definir de manera recíproca las funciones trigonométricas. Así, se definen las funciones arcoseno($arcsen$), arcocoseno ($arccos$) y arcotangente ($arctg$) de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} Arcsen: & [-1,1] & \rightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ & x & \rightsquigarrow & \alpha & \Leftrightarrow sen(\alpha)=x \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Arc\cos: & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \rightsquigarrow & \alpha & \Leftrightarrow \cos(\alpha)=x \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} Arctg: & (-\infty,\infty) & \rightarrow & [-\pi/2,\pi/2] \\ & x & \rightsquigarrow & \alpha & \Leftrightarrow tg(\alpha)=x \end{array}$$

Así, por ejemplo, tenemos:

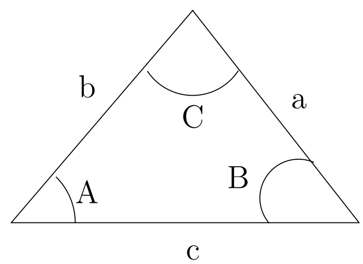
$$arcsen(\tfrac{1}{2})=\pi/6 \qquad arctg(1)=\pi/4 \qquad \mathrm{arc}\cos(\tfrac{1}{2})=\pi/3$$

$$arcsen(\tfrac{-\sqrt{3}}{2})=-\pi/3 \qquad arctg(-1)=-\pi/4 \qquad \mathrm{arc}\cos(\tfrac{-1}{2})=\tfrac{3\pi}{2}$$

2.3.2. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo es hallar todos los elementos de este, es decir, sus tres lado y sus tres ángulos.

A partir de los resultados vistos anteriormente, es posible encontrar todos los elementos de un triángulo cualesquiera conociendo tres de sus elementos, siendo alguno de los datos conocidos la longitud de uno de sus lados.



La siguiente tabla recoge los casos más comunes:

Datos			
a, A, B	$C = \frac{\pi}{2} - A - B$	$b = a\frac{sen(B)}{sen(A)}$	$c = a\frac{sen(C)}{sen(A)}$
a, b, A	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$	$B = arcsen\left(\frac{b}{a}sen(A)\right)$	$C = \frac{\pi}{2} - A - B$
a, b, c	$A = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$	$B = \arccos\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)$	$C = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

2.3.3. Fórmulas trigonométricas

- Fórmulas de los ángulos suma y diferencia:
  - $sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$
  - $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg(\alpha) \pm tg(\beta)}{1 \mp tg(\alpha)tg(\beta)}$
  - $cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- Fórmulas del ángulo doble y mitad:
  - $sen(2\alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$
  - $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$
  - $sen(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
  - $\cos(\frac{\alpha}{2})) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
  - $tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$

- Fórmulas de adición:

  - $sen(\alpha) \pm sen(\beta) = 2sen(\frac{\alpha\pm\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha\mp\beta}{2})$
  - $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  - $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2sen(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot sen(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  - $tg(\alpha) \pm tg(\beta) = \frac{sen(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}$

2.3.4. Ejercicios resueltos

1. Comprobar la siguiente identidad trigonométrica curiosa:

$$tg^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = tg^2(\alpha) \cdot sen^2(\alpha)$$

Solución:

En primer lugar desarrollaremos el primer término de la igualdad. Así:

$$\begin{aligned}
tg^2(\alpha) - sen^2(\alpha) &= \frac{sen^2}{\cos^2(\alpha)} - sen^2(\alpha) = \\
\frac{sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &= \frac{sen^2(\alpha)(1-\cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} = \\
\frac{sen^2(\alpha)\cdot(\overbrace{sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}^{1} - \cos^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} &= \frac{sen^2(\alpha)\cdot sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \\
&= tg^2(\alpha)\cdot sen^2(\alpha)
\end{aligned}$$

2. Sabiendo que $tg(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$ calcular $sen(x)$.

Solución:

Como vimos, utilizando la expresión de la tangente del ángulo doble tenemos::

$$tg(x) = tg(2\frac{x}{2}) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 - tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{2 * \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

Ahora bien, conocemos $tg(x)$ pero nos piden $sen(x)$. Este caso es típico, para ello partiremos de la relación fundamental:

$$\begin{aligned}
sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \Rightarrow \frac{sen^2(x)}{sen^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)} \\
1 + \frac{1}{tg^2(x)} &= \frac{1}{sen^2(x)} \Rightarrow 1 + \frac{1}{(4/3)^2} = \frac{1}{sen^2(x)} \\
sen^2(x) &= \frac{16}{25} \Rightarrow sen(x) = \pm\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Notar que tenemos dos valores (uno positivo y otro negativo) ya que la tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, pero no así en seno.

3. Conocidos los tres ángulos de un triángulo es posible resolver el triángulo?

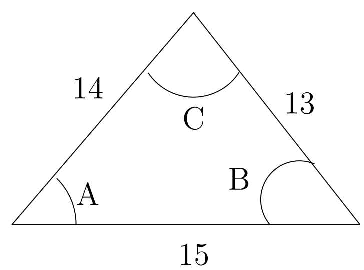
   Solución:

   La respuesta a esta cuestión es negativa, ya que existen infinitos triángulos semejantes a uno dado con idénticos ángulos. Lo que si sabremos es que los lados de todos ellos serán proporcionales.

4. Los lados de un triángulo miden respectivamente 13, 14 y 15 cm. Hallar sus ángulos así como es área del triángulo.

   Solución:

   A partir de los datos del problema debemos encontrar los valores de los ángulos.



Como nos dan sus tres lados podemos aplicar el teorema del coseno, de donde:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) \\ 15^2 &= 13^2 + 14^2 - 2 * 13 * 14 * \cos(C) \\ \cos(C) &= \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 * 13 * 14} \Rightarrow C = \arccos(0{,}3846) = 1{,}176 \text{ rad.} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A) \Rightarrow \cos(A) = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 * 13 * 15} \\ A &= \arccos(0{,}508) = 1{,}038 \text{ rad} \end{aligned}$$

Utilizando que la suma de los ángulos ha de ser π rad, tenemos:

$$B = \pi - 1{,}038 - 1{,}176 = 0{,}927$$

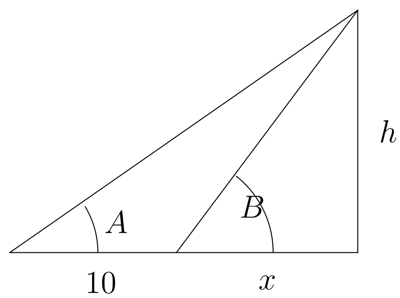
Por otro lado para calcular el área debemos notar que, por ejemplo:

$$sen(A) = \frac{h}{13} \Rightarrow h = 13 * \sin(1{,}038) = 11{,}198$$

de donde:

$$area = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{15 * 11{,}198}{2} = 83{,}985 \text{ cm}^2$$

5. Encontrar el valor de x y h a partir de los datos que se nos indican en el siguiente dibujo, sabiendo que $A = \pi/6$ y $B = \pi/3$.



Solución:

A partir de las tangentes de los ángulos A y B obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} tg(A) = \frac{h}{10+x} \\ tg(B) = \frac{h}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} tg(\pi/6) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ tg(\pi/3) = \sqrt{3} \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{h}{10+x} \\ \sqrt{3} = \frac{h}{x} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} h = 5\sqrt{3} \text{ unidades} \\ x = 5 \text{ unidades} \end{array}$$

6. Un aeroplano vuela a 170 km/s hacia el nordeste, en una dirección que forma un ángulo de 52° con la dirección este. El viento está soplando a 30 km/h en la dirección noroeste, formando un ángulo de 20^o con la dirección norte. ¿Cuál es la "velocidad con respecto a tierra" real del aeroplano y cuál es el ángulo A entre la ruta real del aeroplano y la dirección este?

Solución:

Indiquemos la velocidad del aeroplano relativa al aire como V, la velocidad del viento relativa a tierra como W, y la velocidad del aeroplano relativa a tierra U=V+W.

Para ejecutar la suma real cada vector debe descomponerse en sus componentes. Por tanto obtenemos:

$$Vx = 170cos(52°) = 104{,}6 \qquad Vy = 170sen(52°) = 133{,}96$$

$$Wx = -30sen(20°) = -10{,}26 \qquad Wy = 30cos(20°) = 28{,}19$$

de donde:

$$Ux = 94{,}4 \qquad Uy = 162{,}15$$

Entonces, por el teorema de Pitágoras, dado que

$$U^2 = Ux^2 + Uy^2 \Rightarrow U = 187{,}63km/h$$

Por otro lado

$$cos(A) = \frac{U_x}{U} = 0{,}503125 \Rightarrow A = \arccos(0{,}503125) = 1{,}0436 \text{ rad} = 59{,}8^0$$

2.3.5. Ejercicios propuestos

1. Calcular todos los ángulos $\alpha \in [0, 2\pi]$ tales que $2 \cdot \cos(\alpha) = 3 \cdot tg(\alpha)$ (**sol:** $\alpha = \pi/6$, $\alpha = 5\pi/6$)

2. Si α y β son ángulos comprendidos entre 0 *y* 2π radianes. ¿Qué relación hay entre ellos si se verifica que $sen(\alpha) = -sen(\beta)$ y $cos(\alpha) = \cos(\beta)$? (**sol:** $\beta = -\alpha$).

3. ¿Que relación existe entre las razones trigonométricas de $(\pi/4 - \alpha)$ y $(\pi/4 + \alpha)$? (**sol:** Al ser complementarios $sen(\pi/4 - \alpha) = \cos(\pi/4 + \alpha)$ y viceversa).

4. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 1/3$ y que $\alpha \in [0, \pi/2]$ determinar $\cos(\pi/2 - \alpha)$, $sen(3\pi/2 + \alpha)$ y $tg(\pi - \alpha)$ (**sol:** $\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $sen(3\pi/2 + \alpha) = -1/3$; $tg(\pi - \alpha) = 2\sqrt{2}$).

5. Sabiendo que $\cos(\alpha) = 3/5$ y que $\alpha \in [3\pi/2, 2\pi]$ determinar $sen(\alpha)$, $tg(\alpha)$ y $cos(\alpha/2)$ (**sol:** $sen(\alpha) = -4/5$; $tg(\alpha) = -4/3$; $\cos(\alpha) = -2/\sqrt{5}$).

6. Comprobar que las siguientes expresiones no dependen del valor de α y determinar su valor:

$$sen(\alpha)\cos(\pi/4 - \alpha) - \cos(\alpha)\cos(\pi/4 + \alpha) \quad (\textbf{sol:}\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\cos(\alpha)\cos(\pi/6 + \alpha) + sen(\alpha)\cos(\pi/3 - \alpha) \quad (\textbf{sol:}\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

7. Demostrar las identidades:

$a)$ $\cos(\alpha) = sen\,(\alpha + \pi/2)$ $\qquad$ $b)$ $1 + \cot g^2(\alpha) = \cos ec^2(\alpha)$

$c)$ $\sec^2(\alpha) = 1 + tg^2(\alpha)$ $\qquad$ $d)$ $tg(\alpha) + \cot g(\alpha) = \sec(\alpha) \cdot \cos ec(\alpha)$

8. Sabiendo que $tg(\alpha) = 2$ y que $4 \cdot sen(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$ hallar $tg(\beta)$ (**sol:** $tg(\beta) = 7/2$).

9. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \cdot \cos(x) = 3 \cdot tg(x) \ (\textbf{sol: } x = \pi/6 + 2k\pi \ ; \ x = 5\pi/6 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

10. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica sabiendo que $x \in [0, 2\pi]$:

$$3sen(2x) \cdot \cos(x) = 2sen^3(x) \ (\textbf{sol: } x = 0, \pi, \pi/6 \text{ ó } 7\pi/6 \text{ rad})$$

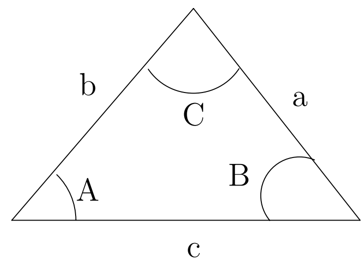
11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que x e $y \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \sin(x) + \cos(y) = \sqrt{2} \\ x + y = \pi/2 \end{cases} \quad (\textbf{sol: x=y=}\pi/4 \text{ ; x=}3\pi/4 \text{ y=-}\pi/4)$$

12. Resolver, si es posible, los siguientes triángulos:

$$\begin{aligned} a)\ a &= 100cm, B = 47^0, C = 63^0 \ (\textbf{sol :} b = 77{,}82cm, c = 94{,}81cm, A = 70^0) \\ b)\ A &= \pi/3, B = \pi/2, C = \pi/6 \ (\textbf{sol: } Infinitos\ triángulos) \\ c)\ a &= 25\ cm, b = 30cm, c = 40cm \ (\textbf{sol: } A = 0{,}67rad, B = 0{,}85rad, C = 1{,}62rad) \\ d)\ b &= 6cm, c = 8\text{ cm}, C = 57^0 \ (\textbf{sol :} a = 9{,}48cm, A = 84{,}03^0, B = 38{,}97^0) \end{aligned}$$

donde:



13. Sean A y B los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo. Probar que:

    a) $sen^2(A) + sen^2(B) = 1$
    b) $tg(A) \cdot tg(B) = 1$

14. Sean A, B y C los ángulos de un triángulo cualesquiera. Probar que

    a) $sen(A) = sen(B + C)$
    b) $cos(A) + cos(B + C) = 0$

15. Los lados de un paralelogramo miden 6 y 8 cm respectivamente y forman un ángulo de 0.5 rad. Calcular la medida de sus diagonales (**sol:** 13.46 cm y 4.31 cm).

16. Se desea calcular la distancia entre dos puntos A y B de un terreno llano que no son accesibles. Para ello, se toman dos puntos accesibles del terreno C y D y se determinar las distancias y ángulos siguientes:

$$\begin{array}{lll} CD = 300m & \alpha = ACD = 85^0 & \beta = BDC = 75^0 \\ & \alpha' = BCD = 40 & \beta' = ADC = 35^0 \end{array}$$

    Calcular la distancia de A a B (**sol:227.7 m)**

2.4. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son importantes no sólo por su relación con los lados de un triángulo, sino por las propiedades que poseen como funciones. Una de las más importantes es la periodicidad. Una función f se dice periódica, de periodo $T \neq 0$ si $\forall x$ de D se verifica que $x + T$ también esta en D y $f(x+T) = f(x)$ para todo x del dominio. Las funciones sin y cos son periódicas de periodo 2π.

2.4.1. Propiedades fundamentales

1. El dominio de las funciones sin y cos es R

2. $\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \pi = -1$

3. $\forall x, y \cos(x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

4. Para $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$

A partir de estas cuatro propiedades se pueden obtener las demás, así pues un método para introducir las funciones sin y cos podría ser el axiomático. Nosotros lo haremos geométricamente. Consideramos la circunferencia unidad, y observemos que la longitud de dicha circunferencia es 2π, así como que su área es π; por tanto cualquier sector circular de amplitud x radianes, tiene un arco de longitud x y su área es $\frac{x}{2}$
Desde el punto de coordenadas $U(1, 0)$ llevamos el segmentode longitud x sobre la circunferencia, y nos determina un punto P, de tal forma que el centro de la circunferencia O, el punto $U(1, 0)$ y P determinan un sector circular cuyo arco mide x y su área es $\frac{x}{2}$.

Definición 2.1 *Se define el* $\sin x$ *como la ordenada del punto* P *y el* $\cos x$ *como la abcisa.*

Observemos que si x es mayor que 2π el punto P, se enrrollará varias veces sobre la circunferencia y nos determinará un punto sobre ella cuyas coordenadas son su coseno y seno respectivamente, y dichas funciones son periódicas de periodo 2π, la longitud de la circunferencia.

Además $\cos 0 = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$ y $\cos \pi = -1$; y por el teorema de Pitágoras

$$\sin^2 x + \cos^2 = 1$$

Proposición 2.2 *Para cualesquiera* x, y *se verifica*

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Demostración.

Para demostrar esta proposición, basta aplicar el producto escalar a los vectores $(\cos y, \sin y)$ y $(\cos x, \sin x)$.

$$(\cos y, \sin y) \cdot (\cos x, \sin x) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Por otra parte, el producto escalar es el producto de los módulos (ambos valen 1) por el coseno del ángulo que forman $x - y$, es decir:

$$(\cos y, \sin y) \cdot (\cos x, \sin x) = \cos(x - y)$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Propiedades

1. El dominio de las funciones sin y cos es $\mathbb{R}$

2. La imagen es el intervalo $[-1, 1]$, por tanto:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

3. La función seno es impar y coseno es par, es decir,

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$cos(-x) = cosx$$

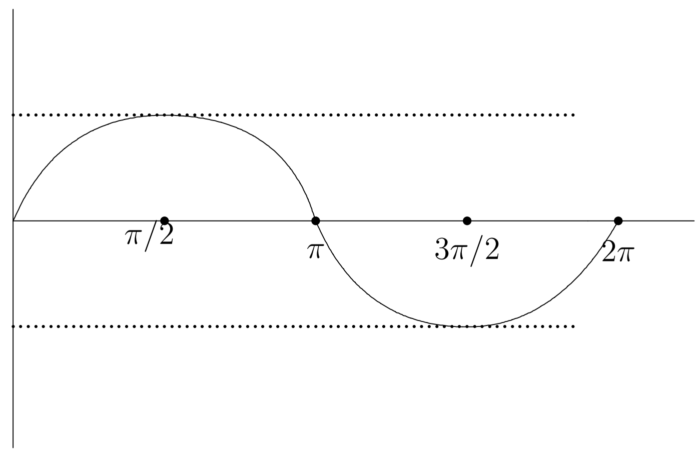
4.
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$$

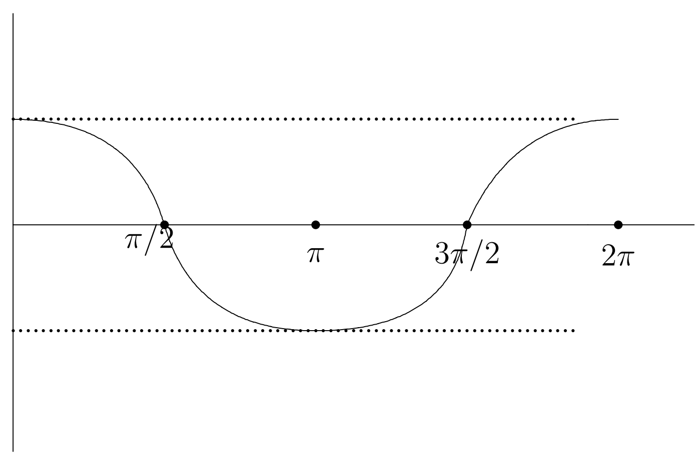
5.
$$\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$$

6.
$$\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$$

7. La gráfica del seno es:



8. La gráfica del coseno es:



2.4.2. La tangente, cotangente, secante y cosecante

Definición 2.3 *La función tangente tg, la función cotangente ctg, la función secante sec y la función cosecante cosec se definen a partir de las funciones seno y coseno mediante las fórmulas*

$$tgx = \frac{senx}{\cos x}\ , \qquad ctgx = \frac{\cos x}{senx}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \cos ecx = \frac{1}{senx}$$

Ejercicio 2.1 *¿Cuáles son los dominios de estas funciones?*

2.4.3. Funciones trigonométricas inversas

Se conocen con el nombre de funciones trigonométricas inversas las de una colección de funciones que son casi, pero no totalmente, inversas de las funciones tigonométricas.

La función seno no es inyectiva, por lo que no puede hablarse estrictamente de inversa de la función seno. Sin embargo, la restricción de la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ es estrictamente creciente, luego es inyectiva, y su conjunto imagen es el intervalo $[-1, 1]$

La inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ es, por definición, la función **arco seno:**

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2],$$

de manera que será una función estrictamente creciente, impar, acotada, y tal que dado $x \in [-1, 1]$

$$\boxed{\arcsin x = y \Leftrightarrow y \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ y } \sin y = x}$$

con lo cual $\sin(\arcsin x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$, mientras que $\arcsin(\sin x) = x$ para todo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Ejercicio 2.2 *Dado $n \in \mathbb{Z}$, sea $f : x \in [n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}2] \to f(x) = \sin x \in \mathbb{R}$.*

1. *Comprobar que f es inyectiva y expresar su inversa f^{-1} en términos de la función arco seno.*
2. *Dibujar las gráficas de las funciones* $\sin \circ \arcsin$ *y* $\arcsin \circ \sin$.

La restricción al intervalo $[0, \pi]$ de la función coseno, es estrictamente decreciente cuyo conjunto imagen es $[-1, 1]$. Podemos definir la función *arcocoseno*:

$$arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

como la inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$.

Es una función estrictamente decreciente y acotada, con el mismo dominio que la función arco seno, pero con distinto codominio. Dado $x \in [-1, 1]$, se tiene

$$\arc\cos x = y \Leftrightarrow y \in [0, \pi] \text{ y } \cos y = x,$$

con lo cual $\cos(\arc\cos x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$, mientras que $\arc\cos(\cos x) = x$, $x \in [0, \pi]$.

La función **arco tangente**

$$arctg : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

es por definición la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. Es una función estrictamente creciente, impar, acotada, y tal que dado $x \in \mathbb{R}$

$$arctgx = y \Leftrightarrow y \in (-\pi/2, \pi/2) \text{ y } tgy = x,$$

con lo cual $tg(arctgx) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mientras que $arctg(tgx) = x \leftrightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ejercicio 2.3 *Sea* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *con* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, *probar que* f *puede definirse como* $\cos \operatorname{arc} \cos x$.

Capítulo 3

Números complejos

Sumario. Introducción al cuerpo de los números complejos. Operaciones. Formas de representar un número complejo. Fórmula de Euler. Ejercicios.

3.1. Introducción

Aunque parezca que los complejos se introducen a partir de la resolución de la ecuación $x^2+1=0$, nada más lejos de la realidad, esta era rechazada así como $\log x = -1$, o $\sin x = 2$, eran irresolubles. Los complejos hacen su aparición a raiz de la ecuación cúbica. Supongamos que queremos resolver la ecuación $x^3 - 6x - 4$, la forma de proceder fue similar a la de la ecuación de segundo grado, es decir, una solución por radicales, obtenida por del Ferro en 1515.

Teorema 3.1 *Una solución de la ecuación cúbica reducida del tipo* $x^3 = mx + n$ *vine dada por*

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}-\frac{m^3}{27}}}$$

Demostración. Sea $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, elevando al cubo ambos miembros, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^3 &= p + 3\sqrt[3]{p^2}\sqrt[3]{q} + 3\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q^2} + q = p + q + 3\sqrt[3]{pq}\,(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}) = \\ &= p + q + 3x\sqrt[3]{pq} = mx + n \end{aligned}$$

igualando, se tiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p+q=n \\ 3\sqrt[3]{pq}=m \end{array} \right. \quad &\Rightarrow \quad pq = \left(\frac{m}{3}\right)^3; 4pq = 4\left(\frac{m}{3}\right)^3 \\ n^2 &= (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \\ n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3 &= p^2 + q^2 + 2pq - 4pq = (p-q)^2 \end{aligned}$$

y sumando y restando, las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} p+q=n \\ p-q=\sqrt{n^2-4\left(\frac{m}{3}\right)^3} \end{array} \right.$$

se tiene:

$$\begin{cases} p = \frac{n}{2} + \sqrt{n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3} \\ q = \frac{n}{2} - \sqrt{n^2 - 4\left(\frac{m}{3}\right)^3} \end{cases}$$

de donde, la solución es:

$$\sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}$$

□

Ejemplo 3.1 *Resolver* $x^3 = 6x + 9$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{9^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{9^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} = \sqrt[3]{8} + 1 = 3$$

Ejemplo 3.2 *Resolver* $x^3 = 6x + 4$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{6^3}{27}}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}} = \left(-1 + \sqrt{-1}\right) + \left(-1 - \sqrt{-1}\right) = -2 \end{aligned}$$

Solución que causo gran estupor en el siglo XVI, hasta que Argand y Gauss no dan una interpretación de los números complejos, se les calificaba como "anfibios entre el ser y no ser".

La solución de la ecuación cúbica completa $x^3 + ax^2 + bx + c$, se obtiene mediante el cambio de variable $x = \frac{1}{3}(z - a)$,y reduciendola a la anterior.

3.2. El cuerpo de los números complejos

Llamamos número complejo, a un elemento $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, diremos que dos números complejos (x, y) y (x', y') son iguales, cuando $x = x'$ e $y = y'$, a x se le denomina parte real y a y parte imaginaria, escribiremos $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$.

Definimos la suma

$$z + z' = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

y el producto

$$z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Con estas operaciones $\mathbb{C}$ tiene estructura de cuerpo.

3.3. Inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Consideramos el conjunto de puntos de la forma $(x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ y la aplicación:

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$$

definida por $p(x) = (x,0)$. Esta aplicación es un isomorfismo, es decir, es biyectiva y

$$\begin{array}{rcl} x+y & \mapsto & p(x+y) = p(x) + p(y) \\ x \cdot y & \mapsto & p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y) \end{array}$$

y podemos identificar $(x,0)$ con x.

Además $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1) = x + yi$, definiendo $(0,1) = i$.

Observemos que $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, es decir, i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

A $z = x + yi$ se le llama forma binómica. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ a z se le denomina imaginario puro y si $\mathrm{Im}(z) = 0$ a z se le llama real.

Ejemplo 3.3 *Efectúa* $\frac{i}{3+i}$, $\frac{1+i^7}{1-i}$ *y* $\frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i}$

$$\frac{i}{3+i} = \frac{i}{3+i}\frac{3-i}{3-i} = \frac{3i-i^2}{3^2-i^2} = \frac{3i-(-1)}{9-(-1)} = \frac{3i+1}{9+1} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

Observemos que:

$$i^0 = 1, i = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, \ldots$$

$$\frac{1+i^7}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1+3i-i(2-i)}{1+3i} &= \frac{1+3i-2i+i^2}{1+3i} = \frac{1+i-1}{1+3i} = \frac{i}{1+3i} = \\ &= \frac{i}{1+3i}\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{i-3i^2}{1^2-3^2i^2} = \frac{i+3}{1+9} = \frac{3}{10} + i\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4 *Resuelve la ecuación* $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \\ &= \frac{2\left(1 \pm \sqrt{-1}\right)}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \end{aligned}$$

Definición 3.2 *Se denomina conjugado de un número complejo* $z = a + bi$ *a* $\overline{z} = a - bi$.

Evidentemente $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Propiedades Si z y z' son dos números complejos cualesquiera.

$\overline{\overline{z}} = z$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

z es imaginario puro$\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

Observemos que $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \right)$

Ejercicio 3.1 *Comprueba que la suma* $z + \dfrac{1}{z}$ *nunca puede ser imaginario puro, salvo que* z *también lo sea.*

Sea $z = x + iy \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2} i$

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

para que sea imaginario puro, tiene que ser:

$$x + \frac{x}{x^2+y^2} = 0 = x \left(1 + \frac{1}{x^2+y^2} \right) \Leftrightarrow x = 0$$

Ejercicio 3.2 *¿Qué condiciones tiene que cumplir* z *para que* $z + \dfrac{1}{z}$ *sea real?*

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

para que sea un número real, tiene que verificar:

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 = y \left(1 - \frac{1}{x^2+y^2} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow 1 = x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

o z es un número real o bien su afijo se encuentra sobre la circunferencia unidad de centro $(0,0)$.

Ejercicio 3.3 *Dado el polinomio* $x^2 + 3x + 1 = p(x)$*, demuestra que* $p(z) = p(\overline{z})$ *cualesquiera que sean los* z *para los que* $p(z) \in \mathbb{R}$

Sea $z = a + bi$, por las propiedades de la conjugación, sabemos que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = p\,(z) \Leftrightarrow p\,(z) \in \mathbb{R}$, luego, $(a+bi)^2 + 3\,(a+bi) + 1 \in \mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 + 2abi + 3a + 3bi + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2ab + 3b = 0$$

Ejercicio 3.4 *Calcula el producto* $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100}$ *y la suma* $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$.

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \cdots \cdot i^{100} = i^{1+2+\cdots+100} = i^{5050} = i^{2+4\cdot1262} = i^2 \cdot \left(i^4\right)^{1262} = i^2 = 1$$

$$i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100} = \frac{i \cdot i^{100} - i}{i - 1} = \frac{i - i}{i - 1} = 0$$

3.4. Representación geométrica de los números complejos

Supongamos que en $\mathbb{R}^2$ tenemos un sistema de referencia. Consideramos la aplicación de $\mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$, que asocia a cada número complejo $z = a + bi$ el punto de coordenadas (a, b), a dicho punto se le denomina afijo del punto z.

Ejercicio 3.5 *Representa en el plano complejo los números que verifican:*

1. $z + \overline{z} = \frac{1}{2}$
2. $z - \overline{z} = \frac{1}{2}i$

1. $z + \overline{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + iy + x - iy = 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$
2. $z - \overline{z} = \frac{1}{2}i \Rightarrow x + iy - (x - iy) = 2yi = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

3.5. Módulo y argumento

Definición 3.3 *Se llama módulo de un número complejo $z = x + yi$ al número real positivo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*

De la definición se sigue que:

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
2. $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$
3. $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$

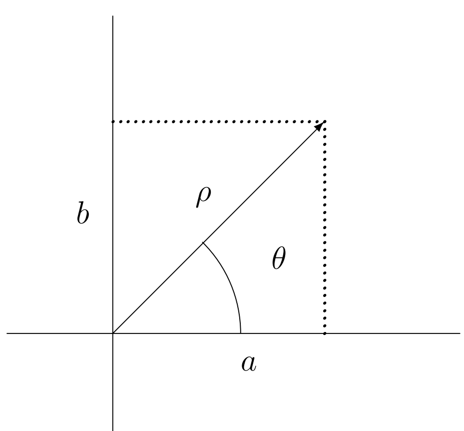
Propiedades Sean z y z' números complejos, se verifica:

P1 $|z| \geq 0$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

P2 $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

P3 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Definición 3.4 *Utilizando coordenadas polares, tenemos que:*



$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

$$a+bi = \rho\cos\theta + \rho i\sin\theta = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

donde $\rho = |z|$ *. Se define* $\arg(z) = \theta + 2k\pi$*, es decir,* $\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & si\ x = 0\ \ e\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & si\ x = 0\ \ e\ y < 0 \end{cases}$

La expresión $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ se denomina forma trigonométrica, y a ρ_θ se le llama forma módulo-argumental.

Teorema 3.5 *Fórmula de Euler.- Para todo número real* x*,se verifica:*

$$e^x = \cos x + i\sin x$$

Demostración. Tomamos $y = \sin x \Rightarrow \arcsin y = x$, de donde:

$$\begin{aligned} \arcsin y &= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \left\{ \begin{array}{c} y = iz \\ dy = idz \end{array} \right\} = \int \frac{idz}{\sqrt{1-i^2z^2}} = \\ &= i\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = i\log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) \end{aligned}$$

deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\begin{aligned} x &= ar\sin y = i\log\left(\frac{y}{i} + \sqrt{1+(iy)^2}\right) \Rightarrow ix = i^2\log\left(-iy + \sqrt{1-y^2}\right) = \\ &= -\log\left(-i\sin x + \cos x\right) = \log\left(\frac{1}{\cos x - i\sin x}\right) = \log\left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos^2 x - i^2\sin^2 x}\right) = \\ &= \log\left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x}\right) = \log\left(\cos x + i\sin x\right) \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i\sin x. \end{aligned}$$

□

Así, podemos escribir:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right)$$

donde, e^a es el módulo y b es el argumento del número complejo e^z.

Observación: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, e $i\pi$ es solución de la ecuación $e^x = -1$

Corolario 3.6

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \left(\cos n\theta + \sin n\theta\right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta}\right)^n &= e^{in\theta} \\ \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \end{aligned}$$

□

Corolario 3.7 *La función e^{ix} es periódica de periodo $2\pi i$.*

Demostración.

$$e^{ix+i2\pi} = e^{i(x+2\pi)} = \cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = \cos x + i\sin x$$

□

Observemos:

1. $\rho_\theta = \sigma_\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sigma \\ \theta - \varphi = 2k\pi \end{cases}$

2. $\rho_\theta \cdot \sigma_\varphi = \rho \cdot \sigma_{\theta+\varphi}$

3. $\dfrac{\rho_\theta}{\sigma_\varphi} = \left(\dfrac{\rho}{\sigma}\right)_{\theta-\varphi}$

4. **Fórmula de Moivre** $(1_\theta)^n = (1^n)_{n\theta} = 1_{n\theta}$, es decir:

$$[1(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = 1^n(\cos n\theta + \sin n\theta)$$

Ejercicio 3.6 *Describe el conjunto de puntos z tal que:*

1. $\mathrm{Re}(z) = 0$; $\mathrm{Re}(z) > 0$; $|z| = 1$; $|z| > 1$; $\mathrm{Im}(z) = 1$; $\mathrm{Im}(z) < 1$; $1 < |z| < 2$.

2. $|z-1| = 2$; $|z-1| < 2$; $|z-1| = |z+1|$

3. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1$; $|z-2| = \mathrm{Re}(z) + 2$; $|z-5| - |z+5| = 6$; $|z-3| + |z+3| = 8$

Solución.

1. Si $z = x + iy \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x = 0$ que representa una recta, el eje de ordenadas; $\mathrm{Re}(z) = x > 0$ es un semiplano.$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.$1 < |z| < 2$ es una corona circular de radios 1 y 2 respectivamente.

2. $|z-1| = 2$ es la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 2. $|z-1| < 2$ el circulo de centro $(1,0)$ y radio 2. $|z-1| = |z+1|$ es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, es decir, la mediatriz de ese segmento.

3. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1 = |x| + |y|$ es un cuadrilátero de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0)$ y $(0,-1)$. El conjunto dado por $|z-5| - |z+5| = 6$ lugar geométrico de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos $(5,0)$ y $(-5,0)$) es constante, es decir, una hipérbola. $|z-3| + |z+3| = 8$ es el lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) $(3,0)$ y $(-3,0)$ es constante, es decir, una elipse. $|z-2| = \mathrm{Re}(z) + 2$ lugar geométrico de puntos del plano equidistantes de un punto fijo y una recta, es decir, una parábola.

3.6. Raíces de números complejos

Nos proponemos resolver la ecuación $z^n - z_0 = 0$, es decir, hallar la raíz n-ésima de un número complejo; el problema tiene fácil solución en forma módulo-argumental.

Sea $z_0 = r_\varphi$, entonces, $z = x_\phi$ es solución, si verifica:

$$(x_\phi)^n = r_\varphi$$

pero

$$(x_\phi)^n = x^n_{n\phi} = r_\varphi \Rightarrow \begin{cases} x^n = r \\ n\phi = \varphi + 2k\pi \end{cases}$$

al ser x y r números reales positivos, siempre existe $x = \sqrt[n]{r}$; y $\phi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k \in Z$, de los cuales sólo son distintos aquellos que se obtiene para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo 3.5 *Resolver la ecuación $z^3 = 1$.*

$$1 = 1_0 \Rightarrow (x_\phi)^3 = x^3_{3\phi} = 1_0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ 3\phi = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \phi = \frac{2k\pi}{3}; k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

las soluciones son:

$$1_0, 1_{\frac{2\pi}{3}}, 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

observemos que

$$1_0 = 1, 1_{\frac{2\pi}{3}} = 1e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = w, 1_{\frac{4\pi}{3}} = 1e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = w^2$$

verificándose que $1 + w + w^2 = 0$ y que $w^3 = 1 \Rightarrow w^2 = \dfrac{1}{w} = \dfrac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \overline{w}$.

Veamos un ejemplo donde se hace uso de estas propiedades.

Ejemplo 3.6 *Demostrar que para cualquier número natural n el polinomio $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ es divisible por $(x^2 + x + 1)^2$.*

Vamos a demostrar que las raíces de $(x^2 + x + 1)^2$ dividen a $(x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$ con lo que estará probado.

$$(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = x^3 - 1$$

luego las raíces de $x^2 + x + 1$ son las raíces complejas de $z^3 = 1$, es decir, w y $\overline{w} = w^2 = \frac{1}{w}$, y las raíces de $(x^2 + x + 1)^2$ son w^2 y $w^4 = w^3 w = w$.

$$(w+1)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1 = \left\{w + 1 = -w^2\right\} = \left(-w^2\right)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1$$

y al ser

$$\begin{aligned} \left(-w^2\right)^{6n+1} &= -w^{12n+2} = -w^{12n} w^2 = -\left[w^3\right]^{4n} w^2 = -w^2 \\ w^{6n+1} &= \left(w^3\right)^{2n} w = w \end{aligned}$$

de donde

$$(w+1)^{6n+1} - w^{6n+1} - 1 = -w^2 - w - 1 = 0$$

Análogamente procedemos con la otra raíz, w^2.

3.7. Aplicación al cálculo trigonométrico

La fórmula de Moivre nos sirve para realizar cálculos trigonométricos, por ejemplo, expresar $\sin 2a, \cos 3a, \cos 4a, \ldots, \cos^2 a, \cos^3 a, \ldots$

En efecto, aplicando la citada fórmula, podemos escribir:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

y sólo tenemos que desarrollar por la fórmula del binomio el primer término.

Así tendremos, por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{aligned}
(\cos a + i \sin a)^2 &= \cos 2a + i \sin 2a \\
\cos^2 a + 2i \cos a \sin a + i^2 \sin^2 a &= \cos 2a + i \sin 2a \\
\cos^2 a - \sin^2 a + 2i \cos a \sin a &= \cos 2a + i \sin 2a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \\ 2 \cos a \sin a = \sin 2a \end{array} \right\} \\
\cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) &= \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ y } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}
\end{aligned}$$

También podemos obtener el seno de una suma o diferencia a partir de la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ia} \cdot e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

pero, por otra parte:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \sin acob)$$

igualando las partes reales e imaginarias obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b
\end{aligned}$$

Las transformaciones de productos de senos y/o cosenos, son muy utililes en el cálculo de primitivas, veamos un procedimiento sencillo basado en la fórmula de Euler.

Ejemplo 3.7 *Transformar* $\sin x \sin 2x$ *en sumas de senos y/o cosenos.*

Sea $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, y $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$.

Sumando y restando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ \sin 2x &= \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} \end{aligned}$$

y multiplicando

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} = \frac{1}{-4}\left(e^{3ix}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-3ix}\right) = \\ &= \frac{1}{-4}\left[\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)}{2}-\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{2}\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos 3x - \cos x\right] \end{aligned}$$

La importacia de los números complejos radica en que es un cuerpo cerrado, es decir, toda ecuación algebraica de coeficientes, reales o complejos, tiene por lo menos, una raíz real o imaginaria. A este resultado se le conoce como teorema fundamantal del Álgebra.

3.8. Ejercicios

Ejercicio 3.7 *Hallar* $z = \frac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{1-i}\right)^{50}}$

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{\left(\sqrt{1-i}\right)^{50}} = z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{25}}$$

Pasamos los número complejos a su forma polar

$$\begin{aligned} z_0 &= 1+i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \arg(z_0) = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \\ |z_0| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}^{100}_{100\frac{\pi}{4}} = 2^{50}{}_{25\pi} \\ z_1 &= 1-i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \arg(z_0) = \arctan\frac{-1}{1} = -\frac{1}{4}\pi \\ |z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_0^{100} = \sqrt{2}^{25}{}_{-25\frac{\pi}{4}} \\ z &= \frac{2^{50}{}_{25\pi}}{\sqrt{2}^{25}{}_{-25\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}^{75}_{75\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{75}_{\frac{3\pi}{4}} = 2^{37}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{37}\sqrt{2}\,(-1+i) \end{aligned}$$

Ejercicio 3.8 *Calcular* $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ *para* $n = 1,2,3,4$ *y probar que* $f(n+4) = -f(n)$ $(n > 0$ *entero)*

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n + \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^n = e^{\frac{n\pi}{4}i} + e^{-\frac{n\pi}{4}i} = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\
f(2) &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0 \\
f(3) &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \\
f(4) &= 2\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) = -2 \\
f(n+4) &= 2\cos\left(\frac{(n+4)\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\pi\right) = -2\cos\frac{n\pi}{4} = f(n)
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.9 *Girar 45^o el vector $z = 3+4i$ y extenderlo el doble.*

Girar una figura o un vector 45^o, equivale a multiplicarlo por el número complejo $z = 1_{45^o} = 1_{\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ y para extenderlo el doble basta con multiplicar por 2.

$$(3+4i)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)2 = -\sqrt{2}+7i\sqrt{2}$$

Ejercicio 3.10 *Calcular la suma* $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na$

Consideramos

$$\begin{aligned}
z &= \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na + i(\sin a + \sin 2a + \cdots + \sin na) = \\
&= \cos a + i\sin a + \cos 2a + i\sin 2a + \cdots + \cos na + i\sin na = \\
&= e^{ia} + e^{i2a} + \cdots + e^{ina} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{suma de n términos de} \\ \textit{una progresión geométrica} \end{array} \right\} = \frac{e^{ina}e^{ia} - e^{ia}}{e^{ia}-1} = \\
&= e^{ia}\frac{e^{ina}-1}{e^{ia}-1} = e^{ia}\frac{\cos na + i\sin na - 1}{\cos a + i\sin a - 1} = e^{ia}\frac{-1+\cos na + i\sin na}{-1+\cos a + i\sin a} = \\
&= e^{ia}\frac{-\sin^2\frac{na}{2} + i2\sin\frac{na}{2}\cos\frac{na}{2}}{-\sin^2\frac{a}{2} + i2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{na}{2} + i2\cos\frac{na}{2}}{-\sin\frac{a}{2} + i2\cos\frac{a}{2}} = \\
&= e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{-i\sin\frac{na}{2} + i^2 2\cos\frac{na}{2}}{-i\sin\frac{a}{2} + i^2 2\cos\frac{a}{2}} = e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{na}{2} - 2\cos\frac{na}{2}}{-\sin\frac{a}{2} - 2\cos\frac{a}{2}} = \\
&= e^{ia}\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{na}{2}-\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{na}{2}+\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot e^{i\frac{(n+1)a}{2}} = \\
&= \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\left(\cos\frac{n+1}{2}a + i\sin\frac{n+1}{2}a\right)
\end{aligned}$$

de donde, igualando la parte real y la imaginaria, tendremos:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos na = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}a$$

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \cdots + \sin na = \frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}a$$

Ejercicio 3.11 *Demostrar las fórmulas de Moivre:*

$$\begin{aligned} 1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n} &= 0 \\ \sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2\,(n-1)\,\pi}{n} &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.12 *Hallar las raices de la ecuación* $(1+i)\,z^3-2i=0$

Ejercicio 3.13 *Escribir en forma binómica* $e^{\sqrt{i}}$.

Ejercicio 3.14 *Resolver la ecuación* $z^4-16=0$.

Ejercicio 3.15 *Resolver la ecuación* $z^4+16=0$.

Ejercicio 3.16 *Resolver la ecución* $(z+1)^3+i\,(z-1)^3=0$.

Capítulo 4

Polinomios

Sumario. Operaciones con polinomios. Factorización de polinomios. Ejercicios.

4.1. Factorización de polinomios.

Teorema 4.1 ***Teorema fundamental del Álgebra.***- *Todo polinomio con coeficientes complejos, tiene por lo menos una raíz.*

Definición 4.2 *Una ecuación $P(x) = 0$, donde P es un polinomio, diremos que α es una raíz o cero de P si $P(\alpha) = 0$.*

Proposición 4.3 *Si α es una raíz de P, entonces $x - \alpha$ divide a $P(x)$.*

Proposición 4.4 *Si P es un polinomio con coeficientes reales y $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz, entonces $\overline{\alpha}$ es también raíz de P.*

Demostración. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overline{P(\alpha)} &= \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0} = \overline{0} = \\
&= \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} = 0 = \\
&= a_n \overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 = P(\overline{\alpha})
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.5 *Si P tiene grado impar con coeficientes reales, entonces P tiene al menos una raíz real.*

Demostración. Si α es raíz compleja, entonces $\overline{\alpha}$ también lo es, así que las raices complejas van de dos en dos, luego el número de raices complejas tiene que ser par.□

Corolario 4.6 *Todo polinomio con coeficientes reales se descompone en factores lineales y/o cuadráticos.*

Demostración. Sea $P(x) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$
Si dos raices son α y $\overline{\alpha}$, tendremos que:

$$\begin{aligned}
(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) &= (x-(a+bi))(x-(a-bi)) = \\
&= (x-a-bi)(x-a+bi) = \\
&= ((x-a)-bi)((x-a)+bi) = \\
&= (x-a)^2 - b^2 i^2 = (x-a)^2 + b^2 = \\
&= x^2 - 2ax + a^2 + b^2
\end{aligned}$$

□

Definición 4.7 *Si α es raíz de $P(x)$ entonces $(x-\alpha)$ divide a $P(x)$, es decir, $(x-\alpha)Q(x) = P(x)$. Si $(x-\alpha)^r$ divide a $P(x)$ y $(x-\alpha)^{r+1}$ no divide a $P(x)$, diremos que α es una raíz de P con multiplicidad r, o que α es una raíz de orden r y escribiremos:*

$$P(x) = (x-\alpha)^r (x-\beta)^s \cdots (x-\varrho)^z$$

con $r + s + \cdots + z = n$

Ejemplo 4.1 *Descomponer $x^4 + 1$ en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$*

Evidentemente en R no tiene raices $x^4 + 1$, así pues se tiene que descomponer en factores cuadráticos. Como también nos pide descomponer en C, hallamos las raices cuartas de -1

$$x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_\pi} = x_\alpha \Leftrightarrow 1_\pi = (x_\alpha)^4 = x^4_{4\alpha}$$

de donde:

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = 1$$
$$4\alpha = \pi + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{2k\pi}{4}$$

dando a k los valores $0, 1, 2, 3$, obtenemos que las raices son:

$$\begin{aligned}
1_{\frac{\pi}{4}} &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
1_{\frac{3\pi}{4}} &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
1_{\frac{5\pi}{4}} &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
1_{\frac{7\pi}{4}} &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

la descomposición en $\mathbb{C}$ sería:

$$\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

y en $\mathbb{R}$

$$= \left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$
$$= \left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

Si solamente lo hubiesen pedido en $\mathbb{R}$, se podría haber hecho más rápidamente:

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2= \\ &= \left(\left(x^2+1\right)-\sqrt{2}x\right)\left(\left(x^2+1\right)+\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

Nota 4.8 *En lo que sigue consideraremos polinomios con coeficientes reales.*

Teorema 4.9 *Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, si α es raíz de $P(x)\Rightarrow\alpha$ divide a a_0*

Demostración. Si α es raíz de $P(x)\Rightarrow a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0=0$ y $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha=-a_0=\alpha\left(a_n\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+a_1\right)\Rightarrow\alpha$ divide a $a_0\square$

Teorema 4.10 *Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, si α es raíz de $P(x)$ y ±1 no es raíz $\Rightarrow(\alpha+1)$ divide a $P(-1)$*

Proof

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)\Rightarrow P(-1)=(-1-\alpha)Q(-1)=-(1+\alpha)Q(-1)$$

$\square$

Teorema 4.11 *Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, si α es raíz de $P(x)$ y ±1 no es raíz $\Rightarrow(\alpha-1)$ divide a $P(1)$.*

Para saber si α es raíz o no de $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ debemos ver si:

1. α divide o no a a_0. Si no lo divide no es raíz.
2. $(\alpha+1)$ divide a $P(-1)$. Si no lo diivide no es raíz.
3. $(\alpha-1)$ divide a $P(1)$. Si no lo diivide no es raíz.
4. $P(\alpha)$ si es cero tenemos la primera raíz, si no, no lo es.

Ejemplo 4.2 *Calcular las raices de $P(x)=x^5-3x^4+6x^2-3x+8$*

$$\begin{aligned} P(1) &= 9 \\ P(-1) &= 13 \\ D(8) &= \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} \end{aligned}$$

Si α es raíz

$$\begin{array}{rll} (\alpha+1) & \text{divide a} & 13 \Rightarrow \alpha+1 = 13 \text{ o } \alpha+1 = \pm 1 \Rightarrow \alpha = -2 \\ (-2-1) & \text{divide a} & 9 \text{ y } P(-2) \neq 0 \end{array}$$

El polinomio no tiene raices enteras, ni racionales.

Teorema 4.12 *Los polinómios mónicos (coeficiente principal 1) con coeficientes enteros, si tienen soluciones racionales, estas son enteras.*

Proof Sea $\frac{p}{q}$ irreducible y solución de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces:

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_0 = 0$$

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n = 0 \Leftrightarrow p^n = q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)$$

de donde deducimos que p^n divide a q siendo p y q eran primos entre sí. $\square$

Ejemplo 4.3 *Probar que el polinomio $x^3 + 2x^2 - x + 1$ no tiene raices racionales.*

$$\begin{aligned} P(1) &= 3 \\ P(-1) &= 3 \end{aligned}$$

y ± 1 son los únicos divisores de 1, luego el polinómio no tiene raices enteras y al ser mónico no las tiene racionales.

Ejemplo 4.4 *Halla las raices racionales de $x^4 - 3x^3 + 2x - 2 = 0$*

$$\begin{aligned} P(1) &= -2 \\ P(-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & -2 & 0 \end{array}$$

y $P(x) = (x^3 - 4x^2 + 4x - 2)(x+1) = q(x)(x+1)$

$$\begin{aligned} q(1) &= -1 \\ q(-1) &= -11 \\ D(2) &= \{\pm 1, \pm 2\} \end{aligned}$$

Si α es raíz de $q(x)$ tendremos que:

$$(\alpha+1) \text{ divide a } -11 \Rightarrow \alpha + 1 = -1 \Rightarrow \alpha = -2 \text{ y } (-2-1) \text{ no divide a } -1$$

q no tiene raices enteras.

Ejemplo 4.5 *Halla las raices racionales de* $4x^3 + 8x^2 + x - 3$

Ejemplo 4.6 *Halla las raices racionales de* $x^5 + 9x^4 + 15x^3 - 45x^2 - 88x + 60$

Nota 4.13 *Si dado el polinómio* $P(x) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$ *queremos obtener las raices racionales* $\frac{p}{q}$ *(p divide a* a_0 *y q divide a* a_n*) lo mejor es probar las fracciones más sencillas y si no sale hacer el cambio* $x = \frac{y}{a_n}$ *y reducirlo a un polinómio mónico.*

Ejemplo 4.7 *Halla las raices racionales de* $8x^3 + 12x^2 - 2x - 3 = 0$

Las posibles raices son $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}\right\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 12 & -2 & -3 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 8 & 3 \\ \hline & 8 & 16 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 8 & 16 & 6 \\ -\frac{1}{2} & & -4 & -6 \\ \hline & 8 & 12 & 0 \end{array}$$

y

$$8x^3 + 12x^2 - 2x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(8x + 12) = (2x-1)(2x+1)(2x+3)$$

Capítulo 5

Funciones lineales y cuadráticas. Circunferencia y elipse

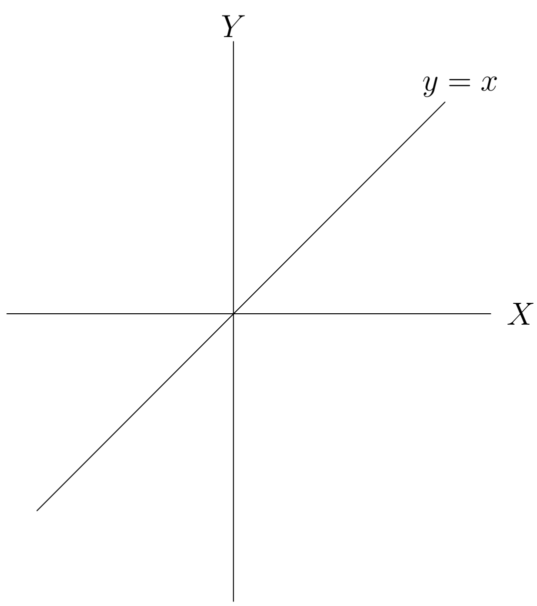
Sumario. Funciones reales de variable real. Grfica de una función. Funciones lineales y afines. Ecuación de una recta. Funciones cuadráticas. Parábolas. Circunferencia y elipse. Ejercicios.

5.1. Función lineal y cuadrática. Curvas de primer y segundo grado.

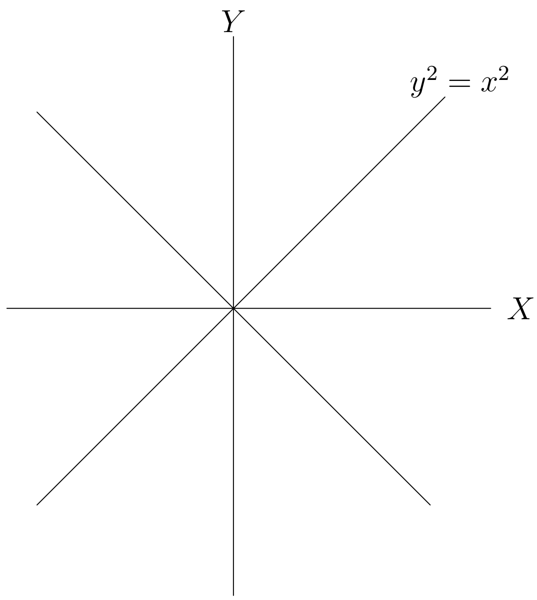
5.1.1. Ecuaciones en dos variables.

Una línea del plano es el conjunto de puntos (x, y), cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $F(x, y) = 0$, aquellos puntos que no satisfacen la ecuación no estan sobre la línea.

Ejemplo 5.1 $x - y = 0$



Ejemplo 5.2 $x^2 - y^2 = 0$



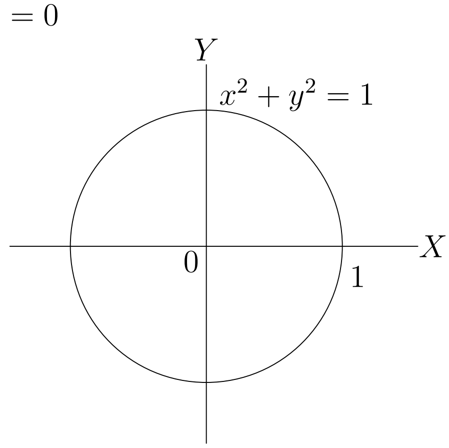
Ejemplo 5.3 $x^2 + y^2 = 0$

La solución es el punto $(0, 0)$

Ejemplo 5.4 $x^2 + y^2 + 1 = 0$

No tiene solución en el cuerpo de los número reales.

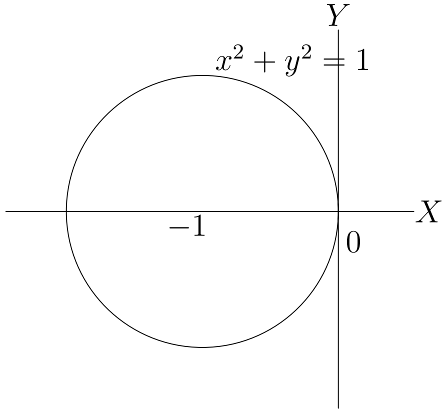
Ejemplo 5.5 $x^2 + y^2 - 1 = 0$



Ejemplo 5.6 *La ecuación* $x^2 + 2x + y^2 = 0$ *define una circunferencia. Hallar su centro y su radio.*

En la ecuación dada, completamos cuadrados para que "desaparezca" el término en x.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 &= 0 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$



Ejemplo 5.7 *Establecer el conjunto de puntos definidos por* $x^2+y^2 \leq 4x+4y$

El conjunto de puntos que verifican una desigualdad es una región del plano, el conjunto de puntos que verifican la ecuación $x^2+y^2=4x+4y$, es una curva, esta curva delimita la región del plano que buscamos.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq 4x+4y \\ x^2+y^2-4x-4y &\leq 0 \end{aligned}$$

que completando cuadrados, se transforma en:

$$\begin{aligned} x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-4+y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2-4 &\leq 0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2 &\leq 8 \end{aligned}$$

que representa el circulo y la circunferencia de centro $(2,2)$ y radio $\sqrt{8}$.

Ejercicio 5.1 *Dados los puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M que están a doble distancia de A que de B.*

5.1.2. Ecuación de primer grado. La recta.

Las líneas de ecuación más sencillas que podemos encontrar son de la forma:

$$Ax+By+C=0$$

donde A y B no pueden ser simultáneamente cero. Si $B=0$, representa una recta vertical, $x=-\frac{C}{A}$.

Si $B\neq 0$, podemos escribir:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=ax+b$$

que es una función de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si $b=0$, la llamaremos lineal, y si $b\neq 0$ afín, donde b es la ordenada en el origen y a es la pendiente.

A α se le denomina ángulo de incidencia, y su tangente es a, la pendiente. Notemos que si $\alpha=0$, entonces la recta es horizontal, y si $\alpha=\frac{\pi}{2}$ la recta es vertical.

Dado un punto $P(a,b)$ y la pendiente m, la ecuación de la recta es:

$$y-b=m(x-a)$$

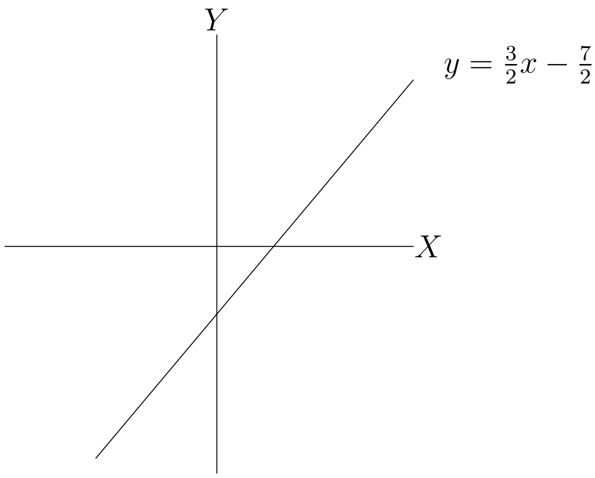
Ejemplo 5.8 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(3,1)$ *y* $(5,4)$.

Para obtener la ecuación de la recta, sólo hemos de sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación de la recta, $y = ax + b$, y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 1 = a3 + b \\ 4 = a5 + b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} 1 = 3a + b \\ 3 = 2a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} b = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{array}\right\}$$

la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$



También podemos observar, que la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{4-1}{5-3} = \frac{3}{2}$$

y la ecuación de la recta:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

Ejemplo 5.9 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto* $(2,1)$ *y forma con el eje* OX*, un ángulo de* $\frac{\pi}{4}$ *rad.*

La pendiente de la recta es, $m = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, por tanto,

$$y - 1 = 1(x - 2)$$

Ángulo de dos rectas

Dadas las rectas $\left.\begin{array}{c} y = ax + b \equiv r \\ y = cx + d \equiv s \end{array}\right\}$, sabemos que $\left.\begin{array}{c} a = \tan\alpha \\ c = \tan\beta \end{array}\right\}$ siendo α, β los ángulos de incidencia de las rectas r y s.

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha} = \frac{c - a}{1 + a \cdot c}$$

Nota 5.1 *Si $a = c$, entonces las rectas son paralelas, el ángulo que forman es 0.*

Nota 5.2 *Si $1 + a \cdot c = 0$, las rectas son perpendiculares, el ángulo que formas es $\frac{\pi}{2} rad$.*

También podemos obtener el ángulo entre dos rectas, a partir de sus vectores de dirección. Dadas las rectas $\left.\begin{array}{c} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C = 0 \end{array}\right\}$, sus vectores de dirección son $\left.\begin{array}{c} (-B, A) \\ (-B', A') \end{array}\right\}$; y el coseno del ángulo que forman es:

$$\cos\gamma = \frac{|(-B)(-B') + AA'|}{\sqrt{A^2 + (-B)^2}\sqrt{(A')^2 + (-B')^2}}$$

Ejemplo 5.10 *Hallar el ángulo que forman las rectas r y s de ecuaciones:*

$$\begin{array}{rcl} r & \equiv & y = 2x + 3 \\ s & \equiv & y = -3x + 2 \end{array}$$

La tangente del ángulo que forman es:

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha} = \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} = \frac{5}{-5} = -1$$

y el ángulo es $\frac{3\pi}{4} rad$.

Ejemplo 5.11 *Halla la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$*

La pendiente de la recta es $m = 2$, y la ecuación de la recta paralela:

$$y - 0 = 2(x - 0)$$

Ejemplo 5.12 *Halla la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $2x - y + 3 = 0$*

La pendiente de la recta es $m = 2$, y por tanto, la pendiente de la recta perpendicular verifica, $1 + 2m = 0$; y la ecuación de la recta perpendicular

$$y - 0 = \frac{-1}{2}(x - 0)$$

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P(a, b)$, a la recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$, se obtiene sustituyendo las ecuaciones del punto P, en el valor absoluto de la ecuación normal de la recta y, esta se obtiene dividiendo la ecuaión general por el módulo del vector normal.

$$\underset{\text{Ecuación general}}{Ax + By + C = 0} \rightsquigarrow \underset{\text{Ecuación normal}}{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0} \rightsquigarrow \underset{\text{Distancia}}{\left|\frac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = d(P, r)}$$

Ejemplo 5.13 *Hallar la distancia del punto $P(1, 1)$ a la bisectriz del segundo cuadrante.*

La ecuación de la bisectriz es, $y = -x$.

$$x + y = 0 \rightsquigarrow \frac{x + y}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0 \rightsquigarrow \frac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = d(P, r)$$

5.1.3. Líneas de segundo orden. Cónicas.

La ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (1), donde A,B y C no son simultáneamente cero, representa a una cónica en el plano.

La más sencilla de todas ellas es la **circunferencia**, lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de uno fijo llamado centro, y a la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia se le llama radio.

Ejemplo 5.14 *Hallar la ecuación de la circunferencia.*

Sea $C(a,b)$ las coordenadas del centro y sea R el radio. Si un punto $P(x,y)$ es de la circunferencia verifica:

$$\begin{aligned} d(P,C) &= R \\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} &= R \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2 \end{aligned}$$

que desarrollando, queda de la forma:

$$x^2+y^2-2ax-2ay+a^2+b^2-r^2=0$$

Nota 5.3 (1) *es la ecuación de una circunferencia si* $A=C$ *y* $B=0$.

Ejemplo 5.15 *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $(2,4),(6,2)$ *y* $(-1,3)$.

Sustituimos las coordenadas de los puntos en la ecuación de la circunferencia y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 2^2A+4^2A+2D+4E+F &= 0 \\ 6^2A+2^2A+6D+2E+F &= 0 \\ (-1)^2A+3^2A-1D+3E+F &= 0 \end{aligned}$$

la solución es: $\{D=-4A, E=2A, F=-20A, A=A\}$, dandole a A el valor 1, obtenemos:

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

Que podemos escribir, completando cuadrados, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+2y-20 &= x^2-4x+4+y^2+2y+1-25=0 \\ (x-2)^2+(y+1)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.16 *Hallar el centro y el radio de la circunferencia* $4x^2+4y^2+6x-3y=0$.

$$4x^2+4y^2+6x-3y=0=x^2+y^2+\frac{6}{4}x-\frac{3}{4}y=$$

$$= \quad x^2 + 2x\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + y^2 - 2y\frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2\right] =$$

$$= \quad \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{45}{64} = 0$$

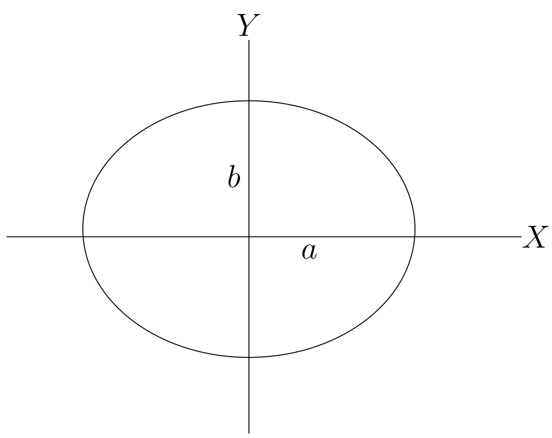
$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{45}{64}$$

La **elipse** es el lugar geométrico de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos $(F\,(c,0)$ y $F'\,(-c,0))$, llamados focos, es constante. La constante $2a$ es mayor que la distancia entre los focos $2c$.

La ecuación reducida de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y su gráfica:



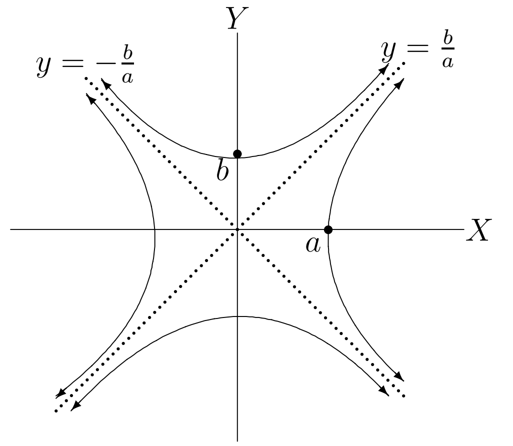
A la vista de la gráfica podemos decir que la ecuación de la elipse no representa una función.

Sustituyendo $y = 0$, en la ecuación obtenemos $x = \pm a$, y a los puntos $A\,(a,0)$ y $A'\,(-a,0)$ se les llama vértices y al segmento que determinan se le llama eje mayor y su distancia es $2a$. Análogamente, haciendo $x = 0$, obtenemos $y = \pm b$, b es la longitud del semieje menor de la elipse.

La **hipérbola** es el lugar geométrico de puntos del plano para los cuales el módulo de la diferencia a dos puntos dados, llamados focos, es constante.

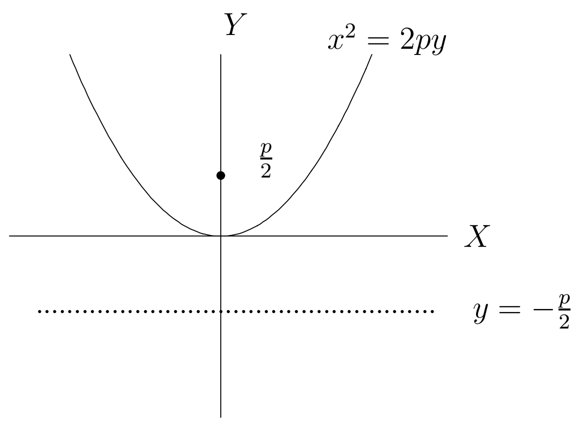
Su ecuación reducida es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta llamada directriz.

La ecuación reducida es $y^2 = 2px$. El punto F, situado sobre el eje OX y cuya abcisa es $\frac{p}{2}$, es el foco de la parábola, y la recta $x = -\frac{p}{2}$ es su directriz. Cambiando el lugar de x e y obtenemos la parábola $x^2 = 2py$, que es la única que es una función real y cuya gráfica adjuntamos. Para obtener la gráfica de la otra parábola basta girar los ejes.



Las cónicas se pueden definir como el lugar geométrico de púntos $P(x,y)$, cuya razón de distancias a un punto fijo F, llamado foco, y a una recta d, llamada directriz, es una constante ε, denominada excentricidad.

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = \varepsilon$$

Ejemplo 5.17 *Hallar la ecuación de la elipse de focos* $(0,1)$ *y* $(-1,2)$ *y semieje mayor* $a = \sqrt{2}$

Si el punto P de coordenadas (x,y) pertenece a la elipse, verificará:

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

ecuación irracional, que se resuelve despejando una de las raices y elevando al cuadrado;

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+2\sqrt{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}(x-0)^2+(y-1)^2 &= (x+1)^2+(y-2)^2+8+4\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\\ 2y+4-2x &= 4\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\end{aligned}$$

$$(y+2-x)^2=\left(2\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$y^2+4y-2yx+4-4x+x^2=8x^2+16x+40+8y^2-32y$$

$$-7y^2+36y-2yx-36-20x-7x^2=0$$

Ejemplo 5.18 *Encontrar la ecuación de la hipérbola de directriz $2x-y+3=0$, foco en el punto $(3,-1)$ y excentricidad 3.*

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)}=3$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}}{\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}}} &= 3\\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} &= 3\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{4+1}}\end{aligned}$$

y elevando al cuadrado:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=9\frac{(2x-y+3)^2}{5}$$

$$x^2-6x+10+y^2+2y=\frac{36}{5}x^2-\frac{36}{5}xy+\frac{108}{5}x+\frac{9}{5}y^2-\frac{54}{5}y+\frac{81}{5}$$

$$-31x^2-138x-31-4y^2+64y+36xy=0$$

Ejemplo 5.19 *Encontrar la ecuación de la parábola de foco $(1,1)$ y directriz la bisectriz del segundo cuadrante.*

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)}=1$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}}=1$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2-2x+2+y^2-2y=\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2$$

$$\begin{aligned}2x^2-4x+4+2y^2-4y-\left(x^2-2xy+y^2\right) &= 0\\ x^2-4x+4+y^2-4y+2xy &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo 5.20 *Encontrar la ecuación de la parábola de foco* $(1,5)$ *y vértice* $(2,2)$.

La directriz es la recta perpendicular al eje, este es la recta determinada por el foco y el vértice, pasando por el punto simétrico del foco con respecto al vétice.

La recta que pasa por el foco y el vértice tiene de ecuación:

$$y-2=\frac{5-2}{1-2}(x-2)=-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+8$$

El punto intersección del eje y la directriz, es el simétrico del foco con respecto al vértice, por tanto, si (x_0,y_0) son las coordenadas de dicho punto, se verifica:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x_0+1}{2}=2\\ \frac{y_0+5}{2}=2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x_0=3\\ y_0=-1\end{array}\right.$$

Así pues, la directriz es la recta perpendicular a $y=-3x+8$, pasando por el punto $(3,-1)$

$$y+1=\frac{1}{3}(x-3)\Leftrightarrow x-3y-6=0$$

La ecuación de la parábola, se obtiene de:

$$\frac{d\left((x,y),(1,5)\right)}{\frac{|x-3y-6|}{\sqrt{1+9}}}=1$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} &= \frac{|x-3y-6|}{\sqrt{1+9}}\\ (x-1)^2+(y-5)^2 &= \frac{(x-3y-6)^2}{10}\\ 10x^2-20x+260+10y^2-100y &= x^2-6xy-12x+9y^2+36y+36\\ 9x^2-8x+224+y^2-136y+6xy &= 0\end{aligned}$$

Capítulo 6

Funciones exponencial y logarítmica

Sumario. Función exponencial; propiedades. Propiedades de logaritmos. Función logarítmica. Ejercicios.

6.1. Función exponencial

Introducción Estamos familiarizados con las potencias de exponente natural, y utilizamos frecuentemente

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

y extender esta propiedad a los números racionales es fácil.

1. $$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n \Rightarrow a^0 = 1$$

2. $$a^{-n} a^n = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. $$\overbrace{a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}^{n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

   y como consecuencia de este último:

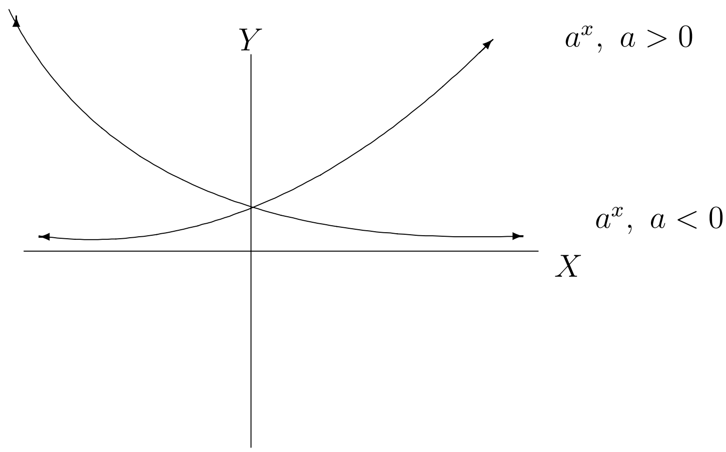
4. $$\overbrace{a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}^{m} = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Para definir a^x con $x \in \mathbb{R}$, es necesario recurrir al concepto de límite.
Dado un número real x, siempre existe una sucesión de números racionales,
$x_k = \dfrac{m_k}{n_k}$ $(m_k \in \mathbb{Z}, n_k \in \mathbb{N})$, que converge a x.
Sea x un número real y a un número real positivo , se define $a^x = \lim\limits_{k \to \infty} a^{x_k}$

Definición 6.1 *Se llama función exponencial de base a, siendo a un* ***número real positivo*** *a la función*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,$$
$$x\to a^x$$

Cuando $a>1$, es estrictamente creciente , si $a<1$, es estrictamente decreciente y si $a=1$, es la función constantemente igual a 1. Por lo que consideraremos $a\neq 1$,entonces a^x es inyectiva.



Propiedades . Sean los números reales $a>0$ y $b>0$; $n\in\mathbb{N}$ y $x,y\in\mathbb{R}$

1. $a^x=a^y\Rightarrow x=y$ (La aplicación exponencial es inyectiva)
2. El codominio de la función exponencial de base a es $]0,+\infty[$
3. $a^{nx}=a^x\cdot a^{(n-1)x}=\overbrace{a^x\cdot ....\cdot a^x}^{n}$
4. $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$
5. $a^x>0$
6. $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$
7. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
8. $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$
9. $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

Ejemplo 6.1 *Resolver* $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$ *.*

Escribimos $\frac{1}{8}$ como potencia de 2, es decir, $2^{-3}=2^{1-x^2}$, como la función es inyectiva, tendremos que $-3=1-x^2\Rightarrow x^2=4\to x=2$ y $x=-2$

Definición 6.2 *Se llama función exponencial* $f(x) = e^x = \exp(x)$.

Es decir la base es el número e, que es un número irracional; más todavía, es trascendente, lo que significa que no existe ningún polinomio con coeficientes enteros que se anule en e,este número aparece, por ejemplo, en el $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Sus primeras cifras decimales son

$$2,718281828459045235360287471352662497757 2...$$

Ejercicio 6.1 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1. $2^{1+x} = 4^{2-x}$
2. $3^x + 3^{1-x} = 4$
3. $6^{(x-2)^2} = 1296$
4. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$
5. $2^x + 4^x = 272$
6. $\begin{cases} 2^x - 3^y = 7 \\ 3 \cdot 2^{x-1} - 3^{y+1} = -3 \end{cases}$

6.2. Función logarítmica

La función exponencial es inyectiva y por tanto podemos definir su inversa, esta es la función logarítmica

$$\log :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$\log x = y \qquad \text{si y solo si} \qquad e^y = x.$$

Por tanto, $\log(e^x) = x$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$ y $e^{\log x} = x$ cualquiera que sea $x \in]0,+\infty[$.

Sus propiedades son consecuencia de las de la función exponencial.

Propiedades

1. $\log 1 = 0$
2. $\log e = 1.$
3. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in]0,+\infty[$
   a) $\log(x^n) = n \log x$
   b) $\log(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log x$
   c) $\log\frac{1}{x} = \log x^{-1} = -\log x$
4. Dados x , $y \in]0,+\infty[$
   a)
   $$\log(x \cdot y) = \log x + \log y.$$

b)

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

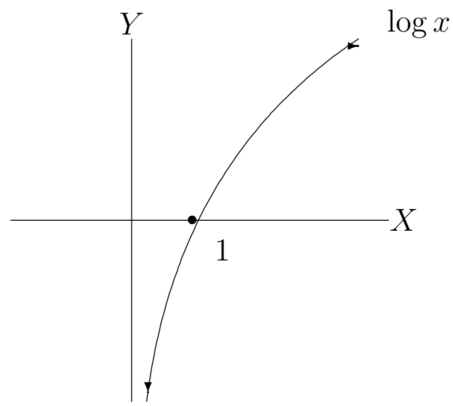
c)

$$\log x^z = z \log x$$

d)

$$x^y = e^{y \log x}$$

5. La gráfica de la función logarítmica se obtiene por simetría de la gráfica de la exponencial con respecto a la recta $y = x$,



La función logarítmica es estrictamente creciente. En particular, es inyectiva. Es una biyección de los reales positivos en $\mathbb{R}$.

6.2.1. Función logarítmica de base cualquiera

La función logarítmica de base $a > 0$ $a \neq 1$ se define en $]0, +\infty[$ como la inversa de la función exponencial de base a,

$$\log_a x = y \ \Leftrightarrow a^y = x$$

Por lo tanto,

$$\log x = \log_a x \log a \rightarrow \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Las propiedades son las mismas que para la función $\log = \ln = \log_e$

Observación.- Dado un número real $a > 0$, la función exponencial de base a se puede expresar mediante

$$a^x = e^x \log a$$

Ejemplo 6.2 *Resolver* $2 \log_{10} x = 1 + \log_{10}(x - 0,9)$

Aplicando las propiedades transformamos la ecuación en:

$$\log_{10} x^2 = \log_{10} 10 + \log_{10}(x - 0,9) = \log_{10}(10x - 9)$$

y como la función $\log_{10}$ es inyectiva tendremos:

$$x^2 = 10x - 9 \Rightarrow x = 9 \text{ y } x = 1$$

Ejercicio 6.2 *Resuelve:*

1. $\begin{cases} \log_{x+y} 36 = 2 \\ \log_{\pi} 1 = x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$

Ejercicio 6.3 *Calcula*

$$\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 \cdots \log_{1023} 1024$$

Capítulo 7

Límites y continuidad

Sumario. Concepto intuitivo de límite y continuidad. Propiedades de las funciones continuas. Ejercicios.

7.1. Límite de una función en un punto

Diremos que el límite cuando x tiende a a de f es L, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L, haciendo que x esté suficientemente cerca de a, sin coincidir con a.

Ejemplo 7.1 *Sea* $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, *queremos calcular* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *que es* 0.

¿Es posible hacer que $x \sin \frac{1}{x}$ esté tan cerca de cero tomando x suficientemente pequeño?

Probamos con $\frac{1}{1000}$, queremos que $f(x)$ esté a menos de $\frac{1}{1000}$ de 0,es decir,

$$-\frac{1}{1000} < x \sin \frac{1}{x} < \frac{1}{1000}$$

o lo que es equivalente

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{1000}$$

pero

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \frac{1}{1000}$$

para que $f(x)$ diste de cero menos de una milésima, basta con tomar $x \in]10^{-3}, 10^{3}[$

Podemos repetir el razonamiento tomando un número positivo cualquiera ε, así pues, para que $|f(x) - 0| < \varepsilon$ basta tomar $0 < |x| < \varepsilon$. y podemos escribir $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Ejemplo 7.2 *Sea* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. *Queremos calcular* $\lim_{x\to 0} f(x)$, *veamos que es* 0.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$ y queremos saber como hemos de tomar x, para que

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| < \varepsilon$$

En efecto:

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \left| x^2 \right| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \left| x^2 \right| < \varepsilon \Rightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

Definición 7.1 *Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ tine límite en x_0 punto de acumulación de X si*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta (\varepsilon) \;\; \textit{tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta (\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Que también se puede formular de la siguiente manera:

Para todo entorno de l, V_l existe un entorno de x_0, U_{x_0} tal que $f\left(U_{x_0}^* \cap X\right) \subset V_l$.

Si no es verdad que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se tiene que cumplir entonces:

Existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe algún x para el cual $0 < |x - x_0| < \delta$, pero $|f(x) - l| > \varepsilon$.

Aunque a veces es más fácil usar la siguiente proposición:

Teorema 7.2 *La condición necesaria y suficiente para que el* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *es que para toda sucesión* $\{x_n\} \subset X - \{x_0\}$ *tal que*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$$

Proof La condición necesaria es trivial, la suficiente se prueba por reducción al absurdo. Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe, ello quiere decir que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall \delta \text{ existe } x_\delta \in X - \{x_0\} \;\text{ con } 0 < |x_0 - x_\delta| < \delta \text{ y } \;|f(x) - l| \geq \varepsilon$$

Tomando $\delta = \frac{1}{n}$ obtenemos $x_n \in X - \{x_0\}$ con $0 < |x_0 - x_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x) - l| \geq \epsilon$, así pues, hemos encontrado una sucesión x_n de límite x_0 tal que la sucesión de sus imágenes no converge a l, en contra de la hipótesis.$\square$

Observación Esta caracterización del límite se utiliza sobre todo para demostrar que el límite de f no existe.

Ejemplo 7.3 *Sea* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. *Probar que no existe* $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Sea por una parte la sucesión $x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ cuya sucesión de las imágenes es

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = \sin \frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \sin(2\pi n) \to 0$$

Y sea por otra parte la sucesión $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ cuya sucesión de las imágenes es

$$f(y_n) = f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \to 1,$$

luego, hemos encontrado dos sucesiones que convergen a cero y cuyas sucesiones de imágenes tiene límites distintos; por el teorema anterior no puede existir $\lim_{x \to 0} f(x)$.

7.1.1. Propiedades

Sean f y g funciones definidas en $X \subset \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto de acumulación de X, supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$. Entonces se verifica:

1. $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = l \pm m.$
2. $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l \cdot m.$
3. $\lim_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$. Siempre y cuando sea $m \neq 0$ y $g(x) \neq 0$.
4. $\lim_{x\to x_0} b^f = b^{\lim_{x\to x_0} f}$ si $b > 0$.
5. $\lim_{x\to x_0} \ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$
6. $\lim_{x\to x_0} f^g = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)}$
7. El límite de f en un punto x_0 si existe, es único.
8. Si f tiene límite m en x_0 entonces f está acotada en un entorno reducido de x_0.
9. Si f tiene límite m en x_0 entonces $|f|$ tiene límite en x_0 y vale $|m|$.
10. Si $l = m$ y $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in U^*$, entonces existe $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$

Ejemplo 7.4 *Calcular* $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

y como $\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0} -|x| = 0$, resuta que el límite pedido existe y vale cero.

7.1.2. Límites laterales

Sea Γ un subconjunto del dominio de f, si la restricción de f a Γ tiene límite cuando $x \to x_0 \in \Gamma'$, se dice que f tiene límite en x_0 según Γ y se escribe $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Gamma}} f(x)$.

Consideramos dos subconjuntos del dominio, $\Gamma^+ = \{x \in X : x > x_0\}$ y $\Gamma^- = \{x \in X : x < x_0\}$, y calculamos en caso de que existan los límites según los subconjuntos Γ^+ y Γ^-.

Al límite

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Gamma^+}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

lo llamaremos límite por la derecha y lo denotaremos por $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Análogamente se considera el límite por la izquierda

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Gamma^-}} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Obviamente para que exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$ es necesario y suficiente que existan los límites laterales y que estos coincidan.

Ejemplo 7.5 *Calcular* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *donde* $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$ *para* $x \neq 0$.

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{2}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}{1 + \frac{1}{e^{\frac{2}{x}}}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

7.1.3. Dos límites fundamentales

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

   Sabemos por el tema anterior que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$

   $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

   además

   $$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \le 2\frac{x^2}{4}$$

   y

   $$\lim_{x\to 0} 2\frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

   se deduce de la regla del bocadillo que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Ejemplo 7.6 *Calcula los siguiente límites:*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{hacemos } x = \ln(1+t) \\ x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\ln(1+t)} - 1}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{a\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x} = 1$$

7.1.4. Funciones equivalentes en un punto.

Diremos que $f \sim g$ en el punto a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

- Sean f, g y h tres funciones tales que $f \sim g$ cuando $x \to a$, entonces $f \cdot h \sim g \cdot h$ en caso de que exista uno de los límites; y también $\dfrac{f}{h} \sim \dfrac{g}{h}$ cuando $x \to a$.
- Si $x \to 0$ entonces

$$\begin{array}{rr}
\sin x \sim x & \arcsin x \sim x \\
\tan x \sim x & \arctan x \sim x \\
\log(x+1) \sim x & e^x - 1 \sim x \\
(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x & k^x - 1 \sim x \log k \\
1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} &
\end{array}$$

Observación Los límites de la forma 1^∞, se resuelven de la siguiente forma:

$$A^B \to 1^\infty$$

$$A^B = e^{B \ln(1+(A-1))} \sim e^{B(A-1)}$$

Ejemplo 7.7 *Halla*

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

El límite es de la forma 1^∞

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{(\sin x)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{x\frac{1}{x}} = e^1$$

Ejemplo 7.8 *Calcular*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\cos 6x}{\log\cos 3x}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\cos 6x}{\log\cos 3x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+[-1+\cos 6x])}{\log(1+[-1+\cos 3x])} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos 6x - 1}{\cos 3x - 1} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{(6x)^2}{2}}{-\frac{(3x)^2}{2}} = 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.9 *Calcular*

$$\lim_{x\to +\infty} x \sin\frac{a}{x}$$

Podemos hacer el cambio $x = \dfrac{1}{t}$ $(x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0^+)$

$$\lim_{x\to +\infty} x \sin\frac{a}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\sin at = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} at = a$$

Ejemplo 7.10 *Calcular*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\log x}-\frac{1}{\log x}\right)$$

Hacemos el cambio $t = x-1\,(t\to 0 \Leftrightarrow x\to 1)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\log x}-\frac{1}{\log x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\log x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log\left(1+t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2 x\right]^{\tan^2 x}$$

El límite es de la forma 1^∞, y para poder aplicar lo visto anteriormente hemos de hacer un cambio de variable $-t = x-\frac{\pi}{2}$. Observemos que

$$x\to\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t\to 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2 x\right]^{\tan^2 x} &= \lim_{t\to 0}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^{\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to 0}\left(\cos^2 t\right)^{\cot^2 t}=\\ &= \lim_{t\to 0}e^L \text{ siendo } L=\lim_{t\to 0}\left(\cos^2 t-1\right)\cot^2 t\end{aligned}$$

ahora bien, como $\cos^2 t-1=\left(\cos t-1\right)\left(\cos t+1\right)\sim-\dfrac{t^2}{2}\cdot 2=-t^2$ y $\cot^2 t=\dfrac{1}{\tan^2 t}\sim\dfrac{1}{t^2}$ nos queda $L=\lim_{t\to 0}-t^2\dfrac{1}{t^2}=-1$ y el

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sin^2 x\right]^{\tan^2 x}=e^{-1}$$

Ejemplo 7.11 *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(a^x-1\right)\log\left(1-x^2\right)}{\left(\left(1-x^2\right)^h-1\right)\arcsin x}$$

Teniendo en cuenta que $\left(a^x-1\right)\sim x\log a;\log\left(1-x^2\right)\sim -x^2;\left(1-x^2\right)^h-1\sim -x^2h$ y que $\arcsin x\sim x$, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(a^x-1\right)\log\left(1-x^2\right)}{\left(\left(1-x^2\right)^h-1\right)\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\log a\left(-x^2\right)}{-x^2hx}=\frac{\log a}{h}$$

7.2. Funciones continuas

- Sea $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $a\in D$. Diremos que f es continua en a, si

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=f\left(a\right)$$

que es equivalente a:

- $$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) \ \text{ tal que si } x \in D \text{ y } |x-a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

  o a:

- Para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Que f sea continua en a, nos indica que podemos permutar la función f y el límite.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$$

por ello, para calcular un límite, lo habitual es sustituir "x por a"

Ejemplo 7.12 *Sea* $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \ \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ \ si \ x = 0 \end{cases}$. *Estudiar la continuidad de f en el punto $a = 0$.*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

ya que se trata de una función acotada $\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ por una función (x) que tiende a cero. Como $f(0) = 0$ la función es continua en cero.

Ejemplo 7.13 *El valor absoluto es una función continua en $a = 0$.*

$$|x| = \begin{cases} x \ \ si \ x \geq 0 \\ -x \ \ si \ x < 0 \end{cases} \quad y \ \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Ejemplo 7.14 *Estudiar la continuidad de* $f(x) = \begin{cases} 0 \ \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 \ \ si \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ *en el punto (esta función se llama de Dirichlet y es discontinua en todos los puntos).*

La función no es continua, pues no existe $\lim_{x\to 0} \lim f(x)$; para demostrarlo tomamos las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$ y $\left\{\frac{\sqrt{2}}{n}\right\} \to 0$, la primera de números racionales y la segunda de irracionales, y $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ mientras que $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1$.

Diremos que f es discontinua si:

1. Si existe el límite pero no coincide con $f(a)$, es decir, si $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq f(a)$. En este caso la discontinuidad se dice evitable.

2. No existe el límite.

   a) Los límites laterales existen y son distintos, la discontinuidad se llama de salto.

   b) Al menos uno de los límites laterales no existe, la discontinuidad se dice de segunda especie.

Ejemplo 7.15 *Sea $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ la función no es continua en cero, pero esta discontinuidad la podríamos evitar, definiendo $f(0) = 0$.*

Ejemplo 7.16 *La función de Dirichlet es discontinua de segunda especie en cada uno de sus puntos.*

7.2.1. Propiedades de las funciones continuas en un punto

1. Si f es continua en a, entonces f está acotada en un entorno de a.
2. Si $f(a) \neq 0$ siendo f continua en a, entonces existe un entorno de a donde f tiene el mismo signo que $f(a)$.
3. La suma, diferencia y producto de funciones continuas en a, es continua. Si g es continua con $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ también es continua en a.
4. Las funciones elementales son todas continuas en sus dominios de definición.
5. Si f es continua en a y g es continua en $b = f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.
6. Dadas las funciones f y g continuas en a, las funciones: $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ y $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ son continuas.

Ejemplo 7.17 *Estudiar la continuidad de*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1+e^{x-1}}{x-1-e^{x-1}} \ si\ x<1 \\ -1 \ si\ x=1 \\ \frac{1-\cos(x-1)}{x-1} \ si\ x>1 \end{cases}$$

Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1-\cos(x-1)}{x-1}$ es continua por diferencia, composición y cociente de funciones continuas. $(x-1 \neq 0)$

Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x-1+e^{x-1}}{x-1-e^{x-1}}$ y al ser $x-1-e^{x-1} < 0$ (no nulo) f es continua por suma, diferencia, composición y cociente de funciones continuas. Veamos que ocurre en 1. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\cos(x-1)}{x-1} = [x-1=t] = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{2}}{t} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1+e^{x-1}}{x-1-e^{x-1}} = [x-1=t] = \lim_{t\to 0^-} \frac{t+e^t}{t-e^t} = \frac{1}{-1} = -1$$

como los límites laterales son distintos, no existe el límite de f y no es continua, la discontinuidad es de salto.

f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

7.2.2. Funciones monótonas continuas e inversas

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ diremos que es monótona creciente en I, si para $x < z$ se verifica que $f(x) \leq f(z)$; y la diremos estrictamente creciente, si la última desigualdad es estricta.

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ diremos que es monótona decreciente en I, si para $x < z$ se verifica que $f(x) \geq f(z)$; y la diremos estrictamente decreciente si es $f(x) > f(z)$.

- Fácilmente se comprueba que la condición necesaria y suficiente para que f sea creciente en I, es que $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0$ para todo $x,z \in I$.

- Análogamente para funciones decrecientes. $\left(\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq 0\right)$

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona en I, entonces es inyectiva.

Demostración. Evidentemente si $x \neq z \Rightarrow f(x) \neq f(z)$, ya que si $x \neq z \Rightarrow x < z$ o $z < x$ de donde $f(x) < f(z)$ o al contrario, pero siempre distintos, y f es inyectiva.□Además f es biyectiva si restringimos el codominio a $\mathrm{Im} f$.

- En el caso anterior podemos definir $f^{-1} : \mathrm{Im} f \to I$ que también es estrictamente monótona.

Demostración. Sean $t,w \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists x,z \in I$ tales que $f(x) = t$ y $f(z) = w$. Para ver que es monótona hemos de estudiar el cociente $\dfrac{f^{-1}(t)-f^{-1}(w)}{t-w} = \dfrac{x-z}{f(x)-f(z)}$

y ambos cocientes tienen el mismo signo.□

Teorema 7.3 *Sea f estrictamente monótona y creciente, entonces f^{-1} es estrictamente monótona y continua.*

7.2.3. Ejercicios

Ejercicio 7.1 *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \frac{0}{0}$$

indeterminado, el numerador y el denominador tienen que ser divisibles por $x-1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

2. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot 2x}$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot 2x} = 1^{\infty} = e^{L}$$

$$L = \lim_{x\to 0} (\cos x - 1)\cot 2x = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\cos 2x}{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot 2x} = e^{0} = 1$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx}$

$$c \lim_{x\to 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\cos ax-1))}{\log(1+(\cos ax-1))} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1}{\cos ax - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(ax)^2}{2}}{-\frac{(bx)^2}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

4. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot 2x}$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot 2x} = 1^\infty = e^L$$
$$L = \lim_{x\to 0} (\cos x - 1)\cot 2x = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\cos 2x}{2x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot 2x} = e^0 = 1$$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1 - b^x + 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x x \log a}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{b^x x \log b}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} a^x \log a - \lim_{x\to 0} b^x \log b = \log a - \log b$$

6. $\lim_{\ x\to 0} (\cos x)^{\cot g 2x}$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot g 2x} = 1^\infty$$
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot g 2x} = \lim_{x\to 0} e^{(\cos x - 1)\cot g 2x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{\tan 2x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}} = e^0 = 1$$

7. $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

El límite no existe, cuando x tiende a cero, $\frac{1}{x}$ crece hasta infinito, y el seno va oscilando desde -1 hasta 1. Vamos a demostrar que en efecto no existe:

Tomamos dos sucesiones que tiendan a cero y que las sucesiones de las imagenes tengan límites distintos.

Sea $x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) = \cos(2\pi n) = 1$, que tiene por límite 1. Consideramos $y_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi+2\pi n}}\right) = \cos(\pi + 2\pi n) = -1$, cuyo límite es -1. Y el límite no existe.

8. $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -|x| \le \left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|$$

y como $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, por la regla del sandwich, el límite pedido es cero.

Ejercicio 7.2 *Calcular el valor de a y b para que la siguiente función sea continua en todos los puntos.*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+1)}{x+1} & si \quad x < -1 \\ ax + b & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{\log x}} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La función es continua en todos los salvo en $x = -1$ y en $x = 1$. Veamos que ocurre en dichos puntos:

$$\lim_{x \to -1} g(x) \begin{cases} \nearrow \quad \text{lím}_{x \to -1^-} = \text{lím}_{t \to 0^-} \frac{\sin t}{t} = 1 \\ \searrow \quad \text{lím}_{x \to -1^+} = \text{lím}_{x \to 0^+} ax + b = -a + b \end{cases} \qquad 1 = -a + b$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) \begin{cases} \nearrow \quad \text{lím}_{x \to 1^-} = \text{lím}_{x \to 1^-} ax + b = a + b \\ \searrow \quad \text{lím}_{x \to 1^+} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{\log x}} = 1 \end{cases} \qquad 1 = a + b$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{\log x}} &= \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\log x}} = \lim_{t \to 0^+} e^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)-1}{\log(1-t)}} = \\ &= \lim_{x \to 1^+} e^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)-1}{-t}} = \lim_{t \to 0^+} e^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-1}{-t}} = \\ &= \lim_{t \to 0^+} e^{\frac{\frac{-\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}{2}}{-t}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

resulta:

$$b = 1 \text{ y } a = 0$$

Ejercicio 7.3 *Estudiar la continuidad de*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \;\; si \;\; x < 0 \\ 0 \;\; si \;\; x = 0 \\ \sin^2 x \cos\frac{1}{x} \;\; si \;\; x > 0 \end{cases}$$

La función es continua en todo punto distinto del cero, por ser composición de funciones continuas (la función exponencial y una función racional con denominador no nulo, por una parte, por otra, es el producto de la función seno por una composición, una racional con denominador distinto de cero y la función coseno). Veamos que sucede en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \sin^2 x \cos\frac{1}{x} = 0 \text{ (función acotada por un infinitésimo)} \end{aligned}$$

Y la función es continua en todos los puntos.

Ejercicio 7.4 *Escribe una función que sea continua exactamente en dos puntos.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ \ x \in \mathbf{Q} \\ 3x-2 \ \ si \ \ x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

Veamos que es continua sólo en 1 *y* 2*. Calculamos el límite en un punto cualquiera* $a \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Tomamos dos sucesiones que converjan a a*. Supongamos que* $a \in \mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} x_n &= \left\{ \frac{an}{n+1} \right\} \subset \mathbf{Q} \ y \ f\left(\frac{an}{n+1}\right) = \left(\frac{an}{n+1}\right)^2 \to a^2 \\ y_n &= \left\{ \frac{an}{n+\sqrt{2}} \right\} \subset \mathbf{R}-\mathbf{Q} \ y \ f\left(\frac{an}{n+\sqrt{2}}\right) = \left(3\frac{an}{n+\sqrt{2}} - 2\right) \to 3a-2 \end{aligned}$$

el límite sólo existe si $a^2 = 3a-2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$*, cuya solución es :* $\{a=2\}, \{a=1\}$.

Análogamente se procede si $a \notin \mathbf{Q}$.

Ejercicio 7.5 *Estudiar la continuidad de*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left|\frac{1}{x}\right|} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \quad si \ x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, la función es continua por ser composición de funciones continuas. En el punto cero calculamos el límite.

$$\lim_{x \to 0} e^{-\left|\frac{1}{x}\right|} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{\left|\frac{1}{x}\right|}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

y la función es continua en todos los puntos

Ejercicio 7.6 *Estudiar la continuidad de*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} \ si \ x \neq \pm 1 \\ 0 \quad si \ x = \pm 1 \end{cases}$$

La función la podemos obtener como composición de la anterior y de $g(x) = x^2 - 1$, y por tanto es continua por ser composición de funciones continuas.

Capítulo 8

Derivabilidad de funciones

Sumario. Derivada de una función. Propiedades de la derivada. Ejercicios.

8.1. Derivada

Definición 8.1 *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *y* $a \in \overset{\circ}{I}$*, si existe el siguiente límite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

diremos que f *es derivable en el punto* a *y su derivada es* $f'(a)$*.*

De la unicidad del límite resulta que la derivada es única.

Para que exista dicho límite deben de existir los límites laterales $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a)$, $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a)$ y ser iguales, se les denomina derivada por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

Ejemplo 8.1 *Sea* $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$ *función que sabemos continua en* $a = 0$ *pero que no es diferenciable en ese punto. Calculamos las derivadas laterales*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_+(0) \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_-(0) \end{aligned}$$

como las derivadas laterales son distintas, la función no puede ser derivable en 0.

Sabemos que la interpretación gráfica de la derivada es que $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, es decir, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo 8.2 *Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $y = x \sin x$ en el punto de abcisa $x = 0$*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - 0 \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y - 0 \sin 0 = 0 (x - 0), \text{ es decir, } y = 0.$$

Teorema 8.2 *Si f es diferenciable en un punto a, entonces f es continua en a.*

Demostración. Para que f sea continua en a debe ocurrir que $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$. Al ser f diferenciable sabemos que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, luego

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

□

El recíproco es falso

Ejemplo 8.3 $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ *es continua en 0 y no es derivable en 0*

En efecto, f es continua, pues

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0^-} (-x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

es decir, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. En cambio, las derivadas laterales son distintas

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

y por tanto, no existe $f'(0)$.

8.1.1. Cálculo de derivadas

Definición 8.3 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en cada punto de I, diremos que f es derivable en I, y podemos considerar la función que asocia a cada $x \in I \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$, que llamaremos función derivada y la notaremos por f'.*

Si el intervalo I es cerrado, diremos que f es derivable en a extremo de I, si f tiene derivada lateral.

Al conjunto de las funciones derivables, las notaremos por $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ y se verifica

$$\mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \supset \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$$

y podemos escribir:

$$f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$$

Reglas de derivación Si $f, g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, entonces se verifica

$f+g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ y $(f+g)' = f' + g'$

$f \cdot g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ siendo $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, con $(\lambda f)' = \lambda f'$

Si $0 \notin f_*(I) \Rightarrow \dfrac{1}{f} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, resultando $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$

Regla de la cadena Si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{D}(f_*(I),\mathbb{R})$ entonces $g \circ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, y $(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Homeomorfismos diferenciables Si $f : I \to f_*(I)$ un homeomorfismo, tal que $f \in \mathcal{D}(I, f_*(I))$ y $0 \notin f'(I)$, entonces $f^{-1} \in \mathcal{D}(f_*(I),\mathbb{R})$ y $f^{-1} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Ejemplo 8.4 *Sea* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{ax+b}{(x+1)^2} & si\ x > 0 \end{cases}$. *Calcular a y b para que f sea derivable en todo punto. Hallar f'*

Para $x < 0$, $x - 1 \neq 0$, al no anularse el denominador de f, esta es derivable en todos los puntos, por ser cociente de funciones derivables.

Para $x > 0$, $x + 1 \neq 0$, y sucede lo mismo que en el caso anterior.

Estudiamos el caso $x = 0$. Para que f sea derivable, ha de ser continua, luego los límites laterales tienen que ser iguales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{ax+b}{(x+1)^2} = \frac{a \cdot 0 + b}{(0+1)^2} = b \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{0^2+1}{0-1} = -1 \end{aligned}$$

De donde deducimos que para $b = -1$, f es continua en 0. Supuesto que $b = -1$, pasamos a calcular las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{ax-1}{(x+1)^2}-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{ax-1+x^2+2x+1}{(x+1)^2}}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{ax+x^2+2x}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(a+x+2)x}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(a+x+2)}{(x+1)^2} = a+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}-(-1)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^2+1+x-1}{x-1}}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

la función será derivable en 0, si $a=-3$ y $b=-1$, siendo

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2} \ si \ x<0 \\ -1 \ si \ x=0 \\ \frac{-3(x+1)^2-2(x+1)(-3x-1)}{(x+1)^4} \ si \ x>0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 8.5 *Sea $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ y $f(0)=0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f. ¿Es f' continua?.*

La función es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^*$, pues es un producto de funciones, donde uno de los factores es una composición de funciones continuas (la función seno y la función $\frac{1}{x}$ donde el denominador no se anula) y el otro factor es una función polinómica. Veamos que ocurre en 0

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

por ser el producto de una función acotada $\left(\sin\frac{1}{x}\right)$, por una función que tiende a cero $\left(x^2\right)$, y f es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad en el 0, en los demás casos un razonamiento análogo al realizado en la continuidad resuelve la cuestión.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

y f es derivable en todos los puntos.

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{c} 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x=0 \end{array} \right.$$

y f' no es continua en cero, ya que el sustraendo de $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ no tiene límite para $x \to 0$.

Ejemplo 8.6 *Hallar la recta tangente a la curva de ecuación $f(x) = x^{\sin x}$ en el punto de abcisa $x = \frac{\pi}{2}$.*

Calculamos la derivada de f tomando logaritmos:

$$\begin{aligned}
\log f &= \sin x \log x \Rightarrow \frac{f'}{f} = \cos x \log x + \frac{1}{x}\sin x \Rightarrow \\
&\Rightarrow f' = f \cdot \left(\cos x \log x + \frac{1}{x}\sin x\right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \log x + \frac{1}{x}\sin x\right) \\
f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{\pi}{2}\log\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = 1
\end{aligned}$$

y la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ejemplo 8.7 *Hallar la derivada de* $\arcsin x$

Tenemos que $\arcsin x = z \Leftrightarrow x = \sin z$ e

$$y' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Capítulo 9

Integrales de funciones. Primitivas

Sumario. Concepto intuitivo de integral definida. Primitiva e integral indefinida de una función. Integrales inmediatas. Integración por partes. Integración por cambio de variables. Integrales racionales. Ejercicios.

9.1. Concepto de primitiva

Definición 9.1 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ llamaremos primitiva de f a toda función $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, talque $F'(x) = f(x)$.*

Notemos que si f admite una primitiva en I, entonces f admite infinitas primitivas.

Definición 9.2 *Al conjunto $\{F \diagup F$ es una primitiva de $f\}$, lo llamaremos integral indefinida de f y lo notaremos por $\int f(x)\,dx$.*

Como consecuencia inmediata de la definición se obtienen estas cuatro propiedades:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\int f'(x)\,dx = f(x)$
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \ \ \forall k \in \mathbb{R}$.
4. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

9.2. Integración de funciones elementales

$$\text{Si } n \neq -1 \Rightarrow \int f'(x)\, f^n(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\text{Si } n = -1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int f'(x)\, a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$$

$$\int f'(x)\, e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int f'(x) \cos\ f(x)\ dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin\ f(x)\ dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cosh\ f(x)\ dx = \sinh f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sinh\ f(x)\ dx = \cosh f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}} dx = \arg\cosh f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \arg\sinh f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+f(x)}{1-f(x)} + c$$

$$\int f'(x)\sec\ f(x)\tan f(x)\ dx = \sec f(x) + c$$

$$\int f'(x)\,co\sec\ f(x)\cot f(x)\ dx = -co\sec f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + c$$

Ejemplo 9.1 $\int \frac{3x}{(a+bx^2)^3}dx\ \ con\ (b \neq 0)$

$$\int \frac{3x}{(a+bx^2)^3}dx = \frac{3}{2b}\int \frac{2bx}{(a+bx^2)^3}dx = \frac{3}{2b}\frac{(a+bx^2)^{-3+1}}{-3+1} + c$$

Ejemplo 9.2 $\int \frac{\log^4 x}{x}dx$

$$\int \frac{\log^4 x}{x}dx = \frac{\log^5 x}{5} + c$$

Ejemplo 9.3 $\int \sqrt{\sin 4x}\cos 4x dx$

$$\int \sqrt{\sin 4x}\cos 4x dx = \frac{1}{4}\int (\sin 4x)^{\frac{1}{2}} 4\cos 4x dx = \frac{1}{4}\frac{\sin^{\frac{3}{2}} 4x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sin^{\frac{3}{2}} 4x + c$$

Ejemplo 9.4 $\int (2x+1)^3\,dx$

$$\int (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^3\,2dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)\,4}{4} + c$$

Ejemplo 9.5 $\int e^{-x^2}xdx$

$$\int e^{-x^2}xdx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

Ejemplo 9.6 $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\ln 2}2^{\arcsin x} + c$$

Ejemplo 9.7 $\int \cot x dx$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln(\sin x) + c$$

Ejemplo 9.8 $\int \tan x dx$

$$\int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln(\cos x) + c$$

Ejemplo 9.9 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = -2\cos\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 9.10 $\int \frac{x}{\cos x}dx$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx = \frac{1}{2}\tan x^2 + c$$

Ejemplo 9.11 $\int e^x \cos e^x dx$

$$\int e^x \cos e^x dx = \sin(e^x) + c$$

Ejemplo 9.12 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \arcsin e^x + c$$

Ejemplo 9.13 $\int \frac{x}{1+x^4}dx$

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$$

Ejemplo 9.14 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(1+(\sqrt{x})^2\right)} = 2\arctan\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 9.15 $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+1}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+1}} = \frac{1}{2}\text{arcsinh}\,(2x-1)+c$$

Ejemplo 9.16 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\log^2 x - 1}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\log^2 x - 1}} = \ln\left(\ln x + \sqrt{\left(\ln^2 x - 1\right)}\right) = \arg\cosh\log x + c$$

Ejemplo 9.17 $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{4}{5}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{5}\right)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{4}{5}x+c$$

9.3. Integración por descomposición

Cuando el integrando se puede descomponer como suma algebraica de otras funciones más elementales, aplicamos las propiedades 3^a y 4^a.

Ejemplo 9.18 $\int \frac{(4x+2)^2}{x}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{(4x+2)^2}{x}dx &= \int \frac{16x^2+16x+4}{x}dx = \int\left(16x+16+\frac{4}{x}\right)dx = \\ &= 8x^2+16x+4\ln|x|+c\end{aligned}$$

Ejemplo 9.19 $\int \frac{x+1}{x-1}dx$

$$\int \frac{x+1}{x-1}dx = \int\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = x+2\ln(x-1)+c$$

Ejemplo 9.20 $I = \int (\tan x + \cot x)^2\,dx$

$$\begin{aligned} I &= \int (\tan x+\cot x)^2\,dx = \int\left(\tan^2 x+\cot^2 x+2\right)dx = \\ &= \int\left(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\right)dx = \tan x - \cot x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 9.21 $I = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \tan x - \cot x + c \end{aligned}$$

9.4. Integración por sustitución

Supongamos que tenemos que calcular $\int f(x)\,dx$ y tomamos $x = g(t)$, g diferenciable, entonces, por la regla de la cadena, se verifica que:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int h(t)\,dt = H(t) + c = H\left(g^{-1}(x)\right) + c$$

Ejemplo 9.22 $\int \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} dx &= \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{t+1}{1+t^2} 2tdt = 2 \int \frac{t^2+t}{1+t^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2+1-1+t}{1+t^2} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \\ &= 2\left(t - \arctan t + \frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right)\right) = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + \ln(1+x) + c \end{aligned}$$

Ejemplo 9.23 $\int \sqrt{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \sinh t \\ dx = \cosh t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t dt = \\ &= \int \cosh^2 t dt = \int \frac{1+\cosh 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2t + c = \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} 2 \sinh t \cosh t + c = \frac{1}{2} x \sqrt{(1+x^2)} + \frac{1}{2} \text{arcsinh} x + c \end{aligned}$$

Ejemplo 9.24 $\int \dfrac{dx}{2x^2+2x+8}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2+2x+8} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+4} = \left\{ \begin{array}{r} x^2+x+4 = x^2 + 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \\ = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{2}{15} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{15} \sqrt{15} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{15}} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 9.25 $\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+27-12+12}{9x^2-12x+8}dx = \\ &= \frac{1}{9}\int \frac{18x-12}{9x^2-12x+8}dx + \frac{1}{9}\int \frac{27+12}{9x^2-12x+8}dx = \\ &= \frac{1}{9}\ln\left(9x^2-12x+8\right) + \frac{39}{9}\int \frac{dx}{9x^2-12x+8} = \frac{1}{9}\ln\left(9x^2-12x+8\right) + \frac{39}{9}I_1 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{9x^2-12x+8}$$

completamos cuadrados

$$\left\{9x^2-12x+8 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 2 + 4 + 4 = (3x-2)^2 + 4\right\}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(3x-2)^2+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}dx}{\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{6}\arctan\frac{3x-2}{2} + c$$

de donde

$$I = \frac{1}{9}\ln\left(9x^2-12x+8\right) + \frac{39}{9}\cdot\frac{1}{6}\arctan\frac{3x-2}{2} + c$$

Ejemplo 9.26 $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4+4-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \\ &= -\int \frac{-2x+4}{2\sqrt{4x-x^2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\sqrt{4x-x^2} + 4I_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \left\{ \begin{array}{c} 4x-x^2 = -\left(x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-4\right) = \\ = 4-(x-2)^2 = 4\left[1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right] \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}dx = \arcsin\frac{x-2}{2} + c \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I = -\sqrt{4x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-2}{2} + c$$

9.5. Integración por partes

Supongamos que $\int f(x)\,dx = \int u(x)\,v'(x)\,dx$ donde u, v, u', v', están definidas en el mismo dominio que f. Al ser

$$d(uv) = udv + vdu$$

e integrando esta expresión

$$\int d(uv) = uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

fórmula de integración por partes.

Si aplicamos la fórmula a $\int f(x)\,dx$, obtenemos:

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xdf(x) = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

Ejemplo 9.27 $\int \ln xdx$

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{1}{x} = x\ln x - x + c$$

Ejemplo 9.28 $\int \arctan xdx$

$$\int \arctan xdx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c$$

El método de integración por partes requiere la elección juiciosa de u y dv. Observemos que si clasificamos las funciones de la siguiente forma

Logarítmica
Inversa Trigonométrica
Algebraica
Trigonométrica
Exponencial

(**LIATE**) cada función de estas clases tiene su derivada en la misma clase o en la inferior, por lo que la clasificación **LIATE** nos da la regla para elegir u, de las dos funciones que aparecen en el integrando, debemos elegir u como aquella de ambas que primero aparezca en la clasificación **LIATE.**

Ejemplo 9.29 $\int x^2 \ln xdx$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \overbrace{\ln x}^{u}\,dx &= \int \ln xd\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}d(\ln x) = \\
&= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \\
&= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.30 $I = \int x\arctan xdx$

$$\begin{aligned}
I &= \int x\overbrace{\arctan x}^{u}\,dx = \int \arctan xd\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}d\arctan x = \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.31 $I = \int \ln^2 x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x d\left(\ln^2 x\right) = x \ln^2 x - 2 \int x \frac{1}{x} \ln x = \\ &= x \ln^2 x - \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2\left[x \ln x - x\right] + c \end{aligned}$$

Ejemplo 9.32 $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} dx &= \int \frac{x \arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)}} dx = \int \arcsin x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\left(\arcsin x\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x - \int \frac{1}{1-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x - \arg\tanh x + c \end{aligned}$$

Ejemplo 9.33 $\int x^2 e^x dx$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - \int 2x de^x = x^2 e^x - \left[2x e^x - 2 \int e^x dx\right] = \\ &= x^2 e^x - \left[2x e^x - 2e^x\right] + c = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Observemos que hemos integrado por partes dos veces, éste es un hecho que se produce frecuentemente, por ello, cuando la función a integrar es un producto, cuyos factores son una función polinómica y una función exponencial o una circular es conveniente ponerlos en forma de tabla, como sigue:

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ x^2 & & e^x \\ & \searrow^{+} & \\ 2x & & e^x \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & & e^x \\ & \searrow^{+} & \\ 0 & & e^x \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & e^x \end{array}$$

y $\int x^2 e^x dx = +x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 0e^x$.

Ejemplo 9.34 $\int (x^2+3x-1)\sin x dx$

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ x^2+3x-1 & & \sin x \\ & \searrow^{+} & \\ 2x+3 & & -\cos x \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & & -\sin x \\ & \searrow^{+} & \\ 0 & & \cos x \\ & \searrow^{-} & \\ & & \sin x \end{array}$$

$$\int \left(x^2+3x-1\right)\sin x dx = -\left(x^2+3x-1\right)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + c$$

Ejemplo 9.35 $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int x d(\tan x) = x\tan x - \int \tan x dx = \\ &= x\tan x + \ln\cos x + c \end{aligned}$$

9.6. Integración de funciones racionales

Tratamos ahora de integrar funciones racionales, es decir, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son funciones polinómicas.

Pueden ocurrir que $gr(P) \geq gr(Q)$ o $gr(P) < gr(Q)$. Donde se puede reducir el primer caso al segundo, para ello sólo necesitamos efectuar la división euclídea, $P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x)$, donde C y R son el cociente y el resto respectivamente. Y $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\cdot C(x)+R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Así supondremos que $\frac{P}{Q}$ es una fracción propia, es decir, $gr(P) < gr(Q)$. Y recordemos que si el polinomio Q tiene una raíz compleja, $a+bi$, entonces también tiene la raíz $a-bi$, y se verifica trivialmente la relación$(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = (x-a)^2+b^2$.

Supongamos que Q tiene las raíces reales $r_1, r_2, .., r_s$ con multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ respectivamente, y las complejas $a_1 \pm b_1 i, ..., a_t \pm b_t i$ con multiplicidades $\beta_1, ..., \beta_t$, es decir,

$$Q = (x-r_1)^{\alpha_1}\cdots(x-r_s)^{\alpha_s}\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)^{\beta_1}\cdots\left((x-a_t)^2+b_t^2\right)^{\beta_t}$$

y descomponiendo en fracciones simples,

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{A_1}{(x-r_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x-r_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1}}{x-r_1} + \\ &\quad + \frac{B_1}{(x-r_2)^{\alpha_2}} + \frac{B_2}{(x-r_2)^{\alpha_2-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_2}}{x-r_1} + \\ &\quad + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)^{\beta_1}} + \cdots + \frac{M_{\beta_1}x + N_{\beta_1}}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \cdots \end{aligned}$$

descomposición que es única, y $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., M_1, N_1, ...$ son constantes a determinar.

Ejemplo 9.36 *Descomponer en fracciones simples* $\dfrac{x-2}{(x-1)^2(1+x^2)}$

$$\frac{x-2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{1+x^2}$$

quitamos denominadores

$$x-2 = A\left(1+x^2\right) + B\left(1+x^2\right)(x-1) + (Mx+N)(x-1)^2$$

y le damos a x los valores 1, i y 0

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow -1 = 2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ x &= i \Rightarrow i-2 = (Mi+N)(i-1)^2 = (Mi+N)(-2i) = 2M - 2Ni \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M=-1 \\ N=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ x &= 0 \Rightarrow -2 = A - B + N \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

y

$$\frac{x-2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{-x-\frac{1}{2}}{1+x^2}$$

Una vez descompuesto en fracciones simples $\dfrac{P}{Q}$, se integran cada uno de los sumandos, pudiendo presentarse los siguientes casos:

- Existen raíces reales simples. Si r es una raíz simple de Q en la descomposición aparecerá un sumando de la forma $\frac{A}{x-r}$ que tiene por primitiva a $A\ln|x-r|$.

Ejemplo 9.37 $\int \dfrac{dx}{x(x+1)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 1 = A(x+1) + Bx = (A+B)x + A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 = A+B \\ 1 = A \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} B=-1 \\ A=1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + c$$

- Existen raíces reales múltiples.

Si r es una raíz de Q con multlicidad α, en la descomposición en fracciones simples, aparecen los sumandos $\dfrac{A_1}{(x-r)^\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-r)^{\alpha-1}} + \cdots + \dfrac{A_\alpha}{x-r}$ y su integral es:

$$\int \left[\frac{A_1}{(x-r)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-r)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-r}\right] dx = A_1 \frac{(x-r)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \cdots + A_\alpha \ln(x-r)$$

Ejemplo 9.38 $\int \dfrac{dx}{(x-1)^2(x+1)} = I$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2 \Rightarrow \\
si\ x &= 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\
si\ x &= -1 \Rightarrow 1 = 4C \Rightarrow C = \frac{1}{4} \\
si\ x &= 0 \Rightarrow 1 = A - B + C \Rightarrow B = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I &= \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right] dx = \\
&= -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{4}\ln(x+1) + c
\end{aligned}$$

- Q tiene raices imaginarias simples. (raices imaginarias multiples no se ve)

Si Q tiene la raíz $a+bi$, también tiene la $a-bi$ que las podemos agrupar, y se obtiene el sumando $\dfrac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$, cuya integral da a lugar a un logaritmo más un arco tangente.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \int \frac{Mx-Ma+Ma+N}{(x-a)^2+b^2}dx = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}dx + \frac{Ma+N}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}dx = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{Ma+N}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.39 $\int \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}dx$

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Mx^2+Nx}{x(x^2+1)} = \\
&= \frac{(A+M)x^2+Nx+A}{x(x^2+1)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 = A+M \\ 1 = N \\ 1 = A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -1 = M \\ 1 = N \\ 1 = A \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right] dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right] dx = \\
&= \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + c
\end{aligned}$$

9.7. Integración de funciones trigonométricas

Tratamos de resolver integrales de la forma $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ donde R es una función racional en $\sin x, \cos x$, aplicando un cambio de variable.

1. R es impar en $\sin x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = t \\ x = \arccos t \end{cases}$; $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ y $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
2. R impar en $\cos x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ x = \arcsin t \end{cases}$; $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ y $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
3. R par en $\sin x$ y $\cos x \Rightarrow \begin{cases} \tan x = t \\ x = \arctan t \end{cases}$; $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ y $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Ejemplo 9.40 $\int \dfrac{dx}{\sin x} =$

Hacemos $\cos x = t$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{-1}{1-t^2} dt = \\ I &= -\operatorname{arg\,tanh} t + c = -\operatorname{arg\,tanh} \cos x + c \end{aligned}$$

Ejemplo 9.41 $\int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx =$

Como el integrando es impar en cos$x$, hacemos el cambio $\sin x = t$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{-t^4 + 2t^2} dt$$

integral racional, se descompone en fracciones simples, integrando y deshaciendo el cambio, se obtiene:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx = -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sin x\sqrt{2} + c$$

Ejemplo 9.42 $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$

La función es impar en $\sin x$ y en $\cos x$,y también es par luego, el cambio a emplear puede ser cualquiera, veamos por ejemplo $\tan x = t$.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3 \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

simplificando e integrando, y deshaciendo el cambio se tiene que

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{2\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + 2\ln(\tan x) + c$$

Integración de productos de senos y cosenos de distinto arco

Recordemos que:

$$\begin{aligned}
2\sin A \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B) \\
2\cos A \cos B &= \cos(A-B) + \cos(A+B) \\
2\sin A \cos B &= \sin(A-B) + \sin(A+B) \\
\sin 2A &= 2\sin A \cos A \\
\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\
\cos^2 A &= \frac{1+\cos 2A}{2} \\
\sin^2 A &= \frac{1-\cos 2A}{2}
\end{aligned}$$

y también son muy útiles

$$\begin{aligned}
\sin Ax &= \frac{e^{Aix} - e^{-Aix}}{2i} \\
\cos Ax &= \frac{e^{Aix} + e^{-Aix}}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.43 $\int \sin 2x \cos 4x dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x \cos 4x dx &= \int \frac{1}{2}\left[\sin(2x-4x) + \sin(2x+4x)\right] dx = \\
&= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.44 $\int \sin 2x \sin 3x \sin 4x dx$

$$\begin{aligned}
\sin 2x \sin 3x \sin 4x &= \left[\frac{1}{2}(\cos 3x - 2x) - \frac{1}{2}\cos(3x+2x)\right]\sin 4x = \\
&= \frac{1}{2}\cos x \sin 4x - \frac{1}{2}\cos 5x \sin 4x =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[\sin(4x-x) + \sin(4x+x) - \{\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)\}\right] = \\
&= -\frac{1}{4}\sin 9x + \frac{1}{4}\sin 5x + \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x
\end{aligned}$$

de donde

$$\int \sin 2x \sin 3x \sin 4x dx = -\frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{36}\cos 9x - \frac{1}{4}\cos x + c$$

Ejemplo 9.45 $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^4 x &= (\cos x \sin x)^2 \sin^2 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \frac{1-\cos 2x}{2} = \\
&= \frac{1}{4}\frac{1-\cos 4x}{2}\frac{1-\cos 2x}{2} = \\
&= \frac{1}{16}\left(1-\cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(1-\cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 6x\right)\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x + c$$

- **Método alemán.-** Las integrales de la forma $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ donde P es un polinomio de grado n, se hacen por reducción.

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

siendo Q un polinomio de grado, una unidad inferior a P y coeficientes indeterminados.

Ejemplo 9.46 $\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = (ax+b)\sqrt{x^2+2x+4} + k\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+4}} &= a\sqrt{x^2+2x+4} + \frac{(ax+b)(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x+4}} + k\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 3x^2+1 = a\left(x^2+2x+4\right) + (ax+b)(x+1) + k = \\
&= 2ax^2 + 3ax + 4a + bx + b + k \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2a = 3 \\ 3a+b = 2 \\ 4a+b+k = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\{k = \frac{1}{2}, b = -\frac{5}{2}, a = \frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$I = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+4} + \frac{1}{2}\overbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx}^{I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \arg\sinh \frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$

y sólo nos falta sustituir en I.

- $\int \dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}}$

Las integrales de este tipo, se reducen al anterior mediante el cambio $x-1=\frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}} = \left\{ \begin{array}{c} x-1=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+2}} = \\
&= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+2\left(t^2+t\right)+2t^2}} = \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+4t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{5}t\right)^2+2\sqrt{5}t\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}} = \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{5}t+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{1}{5}}} = -\int \frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}t+\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{1}{5}}}\right)^2+1}} = \\
&= -\frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{5dt}{\sqrt{(5t+2)^2+1}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arg\,sinh}(5t+2)+c
\end{aligned}$$

9.8. Ejercicios

Calcular las siguientes integrales:

Ejercicio 9.1 $\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + c$

Ejercicio 9.2 $\int \dfrac{xdx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$ *con* $n \in \mathbb{N}^*$

Si $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\left(a^2+x^2\right)^n} &= \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\left(a^2+x^2\right)^n} = \frac{1}{2}\int 2x\left(a^2+x^2\right)^{-n}dx = \\
&= \frac{\left(a^2+x^2\right)^{-n+1}}{-n+1}
\end{aligned}$$

Si $n=1$

$$\int \frac{xdx}{\left(a^2+x^2\right)} = \frac{1}{2}\log\left(a^2+x^2\right)+c$$

Ejercicio 9.3 $\int x\sqrt{1+x^2}dx$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int 2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{\left((1+x^2)\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c= \\ &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+x^2)}\right)^3+c\end{aligned}$$

Ejercicio 9.4 $\int \frac{x^2}{x^3-a^3}dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3-a^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-a^3}dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-a^3\right|+c$$

Ejercicio 9.5 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx &= -\int -\sin x\cos^{-2} x dx = -\frac{\cos^{-2+1} x}{-1}+c= \\ &= \frac{1}{\cos x}+c\end{aligned}$$

Ejercicio 9.6 $\int x\left(a+bx^2\right)^3 dx$ *con* $b \neq 0$

$$\int x\left(a+bx^2\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(a+bx^2\right)^3 dx = \frac{1}{2}\frac{\left(a+bx^2\right)^4}{4}+c$$

Ejercicio 9.7 $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$

$$\frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{2}{9}\left(\sqrt{(1+x^3)}\right)^3+c$$

Ejercicio 9.8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan^2 x+c$$

Ejercicio 9.9 $\int \frac{(\ln x)^p}{x}dx$

Si $p \neq -1$

$$\int \frac{(\ln x)^p}{x}dx = \frac{\ln^{(p+1)} x}{p+1}+c$$

Si $p = -1$

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \log|\log x|+c$$

Ejercicio 9.10 $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{\left(x^2\right)^2-1}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{(x^4-1)}\right)+c$$

Ejercicio 9.11 $\int \frac{dx}{x\left(1+\ln x\right)^3}$

$$\int \frac{\left(1+\ln x\right)^{-3}dx}{x} = -\frac{1}{2\left(1+\ln x\right)^2}+c$$

Ejercicio 9.12 $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+5}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5} = \frac{1}{2}\ln\left|3x^2-2x+5\right|+c$$

Ejercicio 9.13 $\int \frac{dx}{x\left(ax^n+b\right)}$

Hacemos el cambio $\left\{x=\frac{1}{t}, dx=-\frac{1}{t^2}dt\right\}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\left(ax^n+b\right)} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\left(a\frac{1}{t^n}+b\right)} = -\int \frac{t^{n-1}dt}{\left(a+bt^n\right)} = \\ &= -\frac{1}{nb}\int \frac{bnt^{n-1}dt}{a+bt^n} = -\frac{1}{nb}\log\left|a+bt^n\right|+c\end{aligned}$$

Ejercicio 9.14 $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

Hacemos el cambio $x=t^{-1}\Rightarrow dx=-1t^{-2}dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t}-1}}dt = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{2}{t}-1}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\left(\frac{2}{t}-1\right)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}}\end{aligned}$$

Completando cuadrados

$$t^2-2t = \left(t^2-2t+1\right)-1 = \left(t-1\right)^2-1$$

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-\left(t-1\right)^2}} = -\arcsin\left(t-1\right)+c = -\arcsin\left(\frac{1}{x}-1\right)+c$$

Ejercicio 9.15 $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx = I$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{3 + 2 \sin x \cos x}$$

Hacemos el cambio $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{3 + 2\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \\ &= 2 \int \frac{1 + 2t - t^2}{3\left(1+t^2\right)^2 + 4t\left(1-t^2\right)} dt = 2 \int \frac{1 + 2t - t^2}{3 + 6t^2 + 3t^4 + 4t - 4t^3} dt \\ &= 2 \int \frac{1 + 2t - t^2}{\left(3t^2 + 2t + 1\right)\left(t^2 - 2t + 3\right)} dt = 2I_1 \end{aligned}$$

para integrar I_1, lo descomponemos en fracciones simples.

$$\frac{1 + 2t - t^2}{\left(3t^2 + 2t + 1\right)\left(t^2 - 2t + 3\right)} = \frac{Mt + N}{3t^2 + 2t + 1} + \frac{Pt + Q}{t^2 - 2t + 3}$$

$$1 + 2t - t^2 = (Mt + N)\left(t^2 - 2t + 3\right) + (Pt + Q)\left(3t^2 + 2t + 1\right) =$$

$$\begin{aligned} &= Mt^3 - 2Mt^2 + 3Mt + Nt^2 - 2Nt + 3N + 3Pt^3 + 2Pt^2 + Pt + 3Qt^2 + 2Qt + Q = \\ &= (M + 3P)t^3 + (-2M + N + 2P + 3Q)t^2 + (3M - 2N + P + 2Q)t + (3N + Q) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{cases} 1 = 3N + Q \\ 2 = 3M - 2N + P + 2Q \\ -1 = -2M + N + 2P + 3Q \\ 0 = M + 3P \end{cases}$$

cuya solución es : $\left\{N = \frac{1}{4}, P = -\frac{1}{4}, M = \frac{3}{4}, Q = \frac{1}{4}\right\}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}}{3t^2 + 2t + 1} dt + \int \frac{-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}}{t^2 - 2t + 3} dt = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2} \int \frac{2(3t + 1)}{3t^2 + 2t + 1} dt - \frac{1}{4 \cdot 2} \int \frac{2t - 2 + 4}{t^2 - 2t + 3} dt = \\ &= \frac{1}{8} \log\left(3t^2 + 2t + 1\right) - \frac{1}{8} \log\left(t^2 - 2t + 3\right) - \frac{1}{4 \cdot 2} \int \frac{4}{t^2 - 2t + 3} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \log\left(3t^2 + 2t + 1\right) - \frac{1}{8} \log\left(t^2 - 2t + 3\right) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2 + 2} dt = \\ &= \frac{1}{8} \log\left(3t^2 + 2t + 1\right) - \frac{1}{8} \log\left(t^2 - 2t + 3\right) - \frac{1}{2 \cdot 2} \int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{8} \log\left(3t^2 + 2t + 1\right) - \frac{1}{8} \log\left(t^2 - 2t + 3\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} \arctan\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

y sólo nos falta deshacer el cambio:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{8}\log\left(3\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2+2\tan\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{8}\log\left(\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2-2\tan\frac{x}{2}+3\right)- \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{2}}\right)+c \end{aligned}$$

Ejercicio 9.16 $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-2x^2+1}}dx$

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-2x^2+1}}dx = \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}}dx = \int \frac{x^2+1}{x\left|x^2-1\right|}dx$$

y tenemos que resolver las integrales

$$\begin{gathered} \int \frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}dx \\ -\int \frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}dx \end{gathered}$$

resolvemos la primera, la segunda es igual salvo el signo.

$$\frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)} = \frac{x^2+1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

quitando denominadores:

$$x^2+1 = A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+Bx\left(x+1\right)+Cx\left(x-1\right)$$

y dando a x los valores $0, 1, -1$ resulta:

$$\begin{aligned} 1 &= -A \\ 2 &= 2B \\ 2 &= 2C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}dx &= -\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\log|x|+\log|x-1|+\log|x+1|+c = \log\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+c \end{aligned}$$

Ejercicio 9.17 $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = I$

La integral es impar en seno, el cambio es:

$$\cos x = t \rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = -\int \frac{dt}{(1-t^2)\, t^2} = -\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)\, t^2}$$

procediendo como en el ejercicio anterior, tenemos:

$$\int \frac{dt}{(t-1)(1+t)\, t^2} = \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(1+t) + \frac{1}{t} + c =$$
$$= \frac{1}{2}\log(\cos x - 1) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x) + \frac{1}{\cos x} + c$$

9.8.1. Ejercicios propuestos

Ejercicio 9.18 $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x}\cos^4 x - \sin x \cos^2 x - 2\sin x + c$

Ejercicio 9.19 $\int \dfrac{dx}{1+\cos x} = \tan \frac{1}{2} x + c$

Ejercicio 9.20 $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{8}\sin x \cos x + \frac{1}{8}x + c$

Ejercicio 9.21 $\int \dfrac{dx}{4x^2+12x-27} = -\frac{1}{24}\ln(2x+9) + \frac{1}{24}\ln(2x-3) + c$

Ejercicio 9.22 $\int \dfrac{dx}{9x^2-30x+34} = \frac{1}{9}\arctan\left(x - \frac{5}{3}\right) + c$

Ejercicio 9.23 $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)\,x}} dx = \arcsin^2\sqrt{x} + c$

Ejercicio 9.24 $\int \dfrac{\sqrt{1-\ln x}}{x} dx = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1-\ln x)}\right)^3 + c$

Ejercicio 9.25 $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{4+25x^2}} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sqrt{(4+25x^2)} + c$

Ejercicio 9.26 $\int 2^x 5^x dx = \frac{1}{\ln 5 + \ln 2} 5^x 2^x + c$

Ejercicio 9.27 $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x}\sin x + \frac{2}{3\cos x}\sin x + c$

Ejercicio 9.28 $\int \sin 2x \cos 3x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c$

Ejercicio 9.29 $\int \cos ax \sin bx dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + c$

Ejercicio 9.30 $\int \ln^2 x dx = \left(\ln^2 x\right) x - 2x\ln x + 2x + c$

Ejercicio 9.31 $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2} e^{ax}\sin bx + c$

Ejercicio 9.32 $\int \sin 2x \sin 3x \sin 4x dx = -\frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{36}\cos 9x - \frac{1}{4}\cos x + c$

Ejercicio 9.33 $\int \cosh 2x dx = \frac{1}{2}\sinh 2x + c$

Ejercicio 9.34 $\int \cosh^2 2x dx = \frac{1}{4}\cosh 2x \sinh 2x + \frac{1}{2}x + c$

Ejercicio 9.35 $\int \dfrac{dx}{8 - x^2 - 2x} = \frac{1}{6}\ln(x+4) - \frac{1}{6}\ln(x-2) + c$

Ejercicio 9.36 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 - x^2 - 2x}} = \arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) + c$

Ejercicio 9.37 $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \sqrt{(x^2 + 2x + 2)} - \operatorname{arcsinh}(1+x) + c$

Ejercicio 9.38 $\int \dfrac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + \arctan\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) + c$

Ejercicio 9.39 $\int xe^x \sin x dx = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) e^x \cos x + \frac{1}{2}xe^x \sin x + c$

Ejercicio 9.40 $\int \arctan \frac{x}{2} dx = x \arctan \frac{1}{2}x - \ln\left(1 + \frac{1}{4}x^2\right) + c$

Ejercicio 9.41 $\int \frac{dx}{\cosh x} = 2\arctan(e^x) + c$

Ejercicio 9.42 $\int \dfrac{x^3 + 9x^2 + 23x + 17}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = x + \ln(1+x) + \ln(x+2) + \ln(x+3) + c$

Ejercicio 9.43 $\int \dfrac{x^2 + 3}{(x+1)(x-1)^2} dx = \ln(1+x) - \frac{2}{x-1} + c$

Ejercicio 9.44 $\int \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} dx = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) -$
$-\sqrt{3}\arctan \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3} + c$

Ejercicio 9.45 $\int \dfrac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{8}\sqrt{2}\ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2} + 1\right) +$
$+\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2} - 1\right) + c$

Bibliografía

[1] G. L. Bradley, *Cálculo de una variable,* Ed. Prentice–Hall.

[2] G. Thomas y R. Finney, *Cálculo de una variable,* Ed. Addison–Wesley.

[3] S. K. Stein, *Cálculo y geometría analítica,* Ed. McGraw–Hill.