1 – Introdução e Base Matemática

Introdução 2
Base Matemática 3

1.1 – O número imaginário 3
1.2 – Números complexos 4
1.3 – Operações com números complexos 9
1.4 – O seno e o co-seno 12
1.5 – A equação de Euler 15
1.6 – A tangente 17
1.7 – As inversas de seno, co-seno e tangente 19
1.8 – Exponenciais e logaritmos 22
1.9 – Derivadas 23
1.10 – Integrais 30
1.11 – Decibéis (dB) 38

Introdução

Quando se fala em *sinais* geralmente é associado à medição ou ao registo de algum fenómeno físico ou, em outras palavras, de um *sistema*. Portanto, *sinais* e *sistemas* são conceitos bastante interligados.

No presente capítulo 1 faremos uma breve revisão de diversos tópicos básicos da matemática que serão úteis para os capítulos seguintes. Recapitularemos vários resultados, expressões e fórmulas da álgebra, da álgebra linear, da análise, do cálculo diferencial e integral e da trigonometria que serão de certa forma usado neste texto.

Nos capítulos 2 e 3 trataremos da descrição e da terminologia dos *sinais* enquanto que no capítulo 4 trataremos de *sistemas*.

Nos demais capítulos trataremos de algumas ferramentas de *análise de sinais*: Transformadas de Laplace (capítulo 5), Transformadas z (capítulo 6), Séries e Transformadas de Fourier (capítulos 7 e 8, respectivamente) e Diagramas de Bode (capítulo 9).

Base Matemática

1.1 – O número imaginário

O número imaginário " j " é definido como:

$$j = \sqrt{-1}\,.$$

Na literatura de matemática é muito comum usar-se " i " (de "*imaginário*") para o número imaginário:

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Entretanto, em engenharia a letra " i " é normalmente reservada para a corrente eléctrica (medida em Ampères) enquanto que para o número imaginário usa-se a letra " j ".

Logo,

$$j^2 = -1 \qquad\qquad j^3 = -\sqrt{-1} \qquad\qquad j^4 = 1$$

Portanto,

$$j^5 = j^4 \cdot j^1 = j = \sqrt{-1}$$

$$j^6 = j^4 \cdot j^2 = j^2 = -1$$

$$j^7 = j^4 \cdot j^3 = j^3 = -\sqrt{-1}$$

$$j^8 = j^4 \cdot j^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

e assim por diante.

Além disso:

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{(-1)} = -j$$

ou seja,

$$\boxed{j^{-1} = -j}.$$

Semelhantemente,

$$j^{-2} = 1$$

$$j^{-3} = j$$

$$j^{-4} = -1$$

Alguns exemplos imediatos deste resultado $\boxed{\frac{1}{j} = -j}$:

$$\frac{2}{j} = -2j \qquad \frac{-3}{j^3} = -3j$$

$$\frac{1}{(2j)^2} = -\frac{1}{4} \qquad \frac{-5}{j^4} = -5$$

1.2 – Números complexos

Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ é expresso por:

$$z = \alpha + \beta j$$

onde α e $\beta \in \mathcal{R}$ (números reais) e j é o número imaginário puro conforme definido acima.

α e β são chamados de:

α = parte real de z, e

β = parte imaginária de z

e são representados por

$$\alpha = \text{Re}\,(z)$$
$$\beta = \text{Im}\,(z).$$

Um número complexo z ∈ ℂ escrito na forma acima é dito estar na forma “*cartesiana*” ou “*algébrica*”.

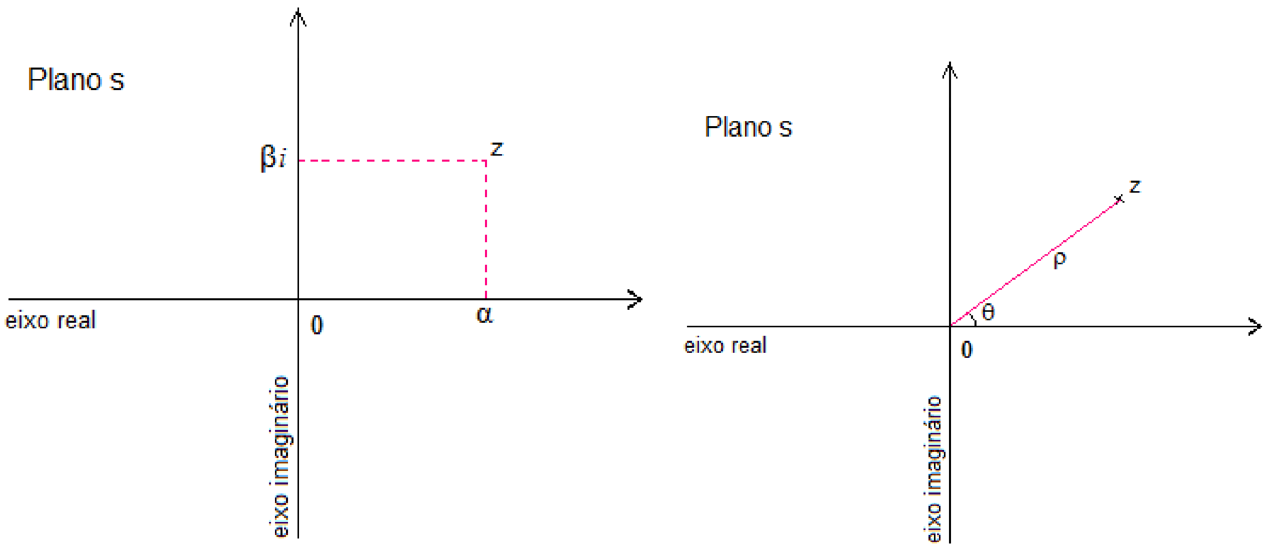

Fig. 1.1 – O *plano s*, a representação cartesiana (à esquerda) e a representação polar (à direita).

Um número complexo z ∈ ℂ pode ser escrito de forma equivalente como

$$z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

onde ρ e θ são números reais, sendo que $\rho > 0$ e θ (em *radianos*) é um arco.

A expressão acima é muito comummente abreviada (especialmente em textos de engenharia) para

$$z = \rho \cdot \angle\theta\,.$$

por uma questão de simplicidade. Além disso, neste caso, quando se usa esta notação para z, é comum se denotar o ângulo θ em *graus* em vez de *radianos*.

ρ e θ são chamados de:

ρ = *módulo* de z, e

θ = *ângulo* ou *fase* de z

e são representados por

$$\rho = |z|$$

$$\theta = \angle z.$$

Um número complexo z escrito nesta forma acima é dito estar na forma "*polar*" ou "*trigonométrica*".

A representação gráfica de um número complexo $z \in \mathbb{C}$ feita no plano complexo (ou *plano s*) em termos de α, β, ρ e θ é dada nas figuras 1.1 e 1.2.

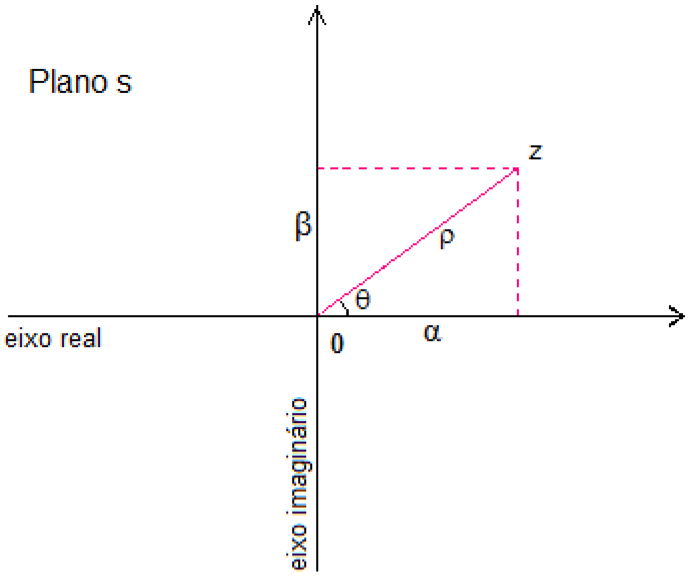

Fig. 1.2 – O *plano s*, as coordenadas cartesianas e polares

A transformação da forma cartesiana para polar assim como da forma polar para cartesiana são facilmente obtidas pelas relações básicas da geometria (teorema de Pitágoras) e da trigonometria (senos e co-senos).

As relações que permitem transformar da forma cartesiana para a forma polar são:

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \qquad \boxed{\theta = \angle z = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

e as relações que permitem transformar da forma polar para a forma cartesiana são:

$$\boxed{\alpha = \mathrm{Re}(z) = \rho \cdot \cos\theta} \qquad \boxed{\beta = \mathrm{Im}(z) = \rho \cdot \mathrm{sen}\,\theta}$$

Alguns exemplos:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 \cdot \angle 210^{\circ} \\
&= 2 \cdot \angle -150^{\circ} \\
&= 2 \cdot e^{-j2,618} \\
&= -1,732 - 1j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= 2 - 2j \\
&= 2\sqrt{2} \angle -45^{\circ} \\
&= 2\sqrt{2}\, \angle 315^{\circ} \\
&= 2\sqrt{2} \cdot e^{-j(\pi/4)} \\
&= 2,8284 \cdot e^{-j(0,7854)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= 1 \cdot \angle 45^{\circ} \\
&= e^{j0,785} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j \\
&= 0,707 + 0,707 j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_4 &= j \\
&= 0 + 1j \\
&= 1 \angle 90^{\circ} \\
&= e^{j(\pi/2)} \\
&= e^{j(1,57)}
\end{aligned}
$$

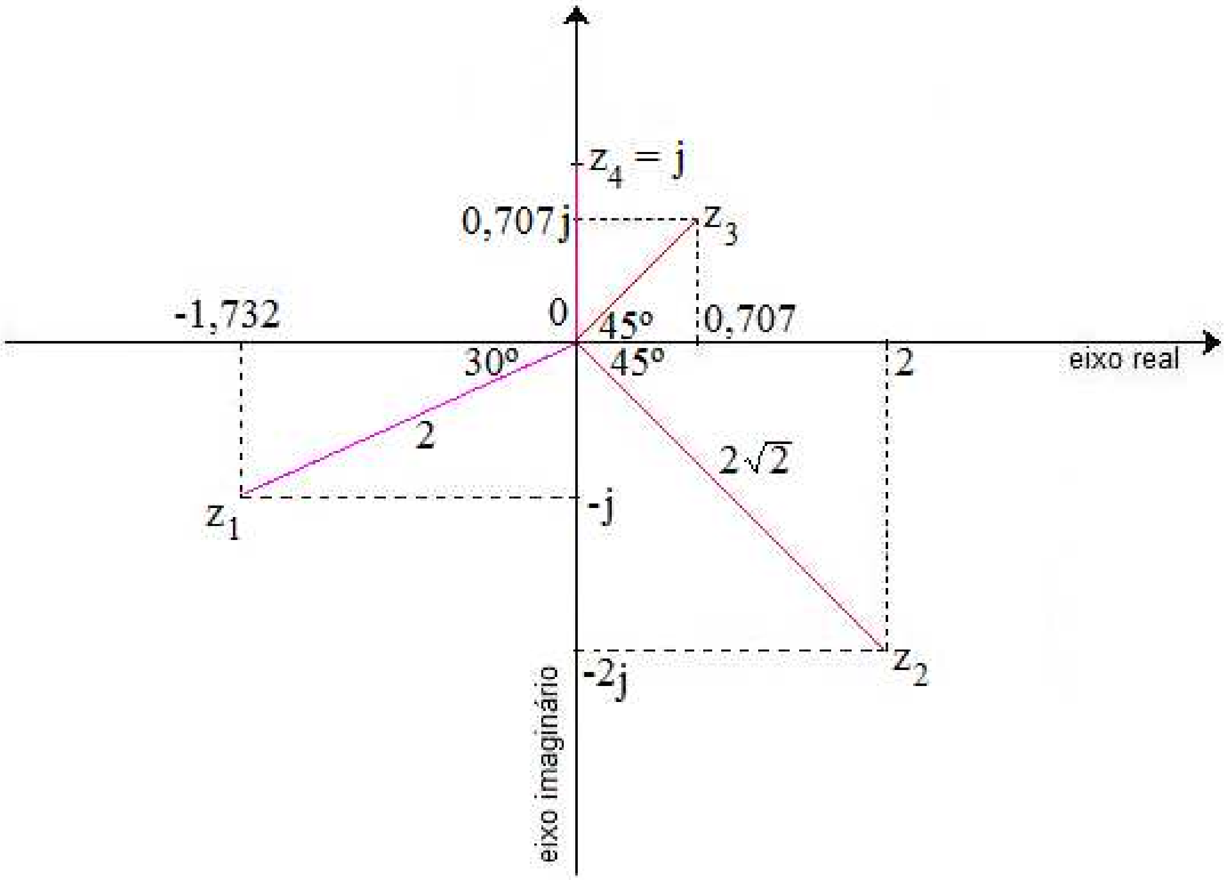

Fig. 1.3 – A representação gráfica dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4.

O conjugado de um número complexo $z \in \mathbb{C}$

$$z = \alpha + \beta\, j$$

é o número complexo $\overline{z}$ ou z^*

$$\overline{z} = z^* = \alpha - \beta\, j$$

ou seja, $\overline{z}$ ou z^* é o rebatimento do ponto z no plano s em relação ao eixo real.

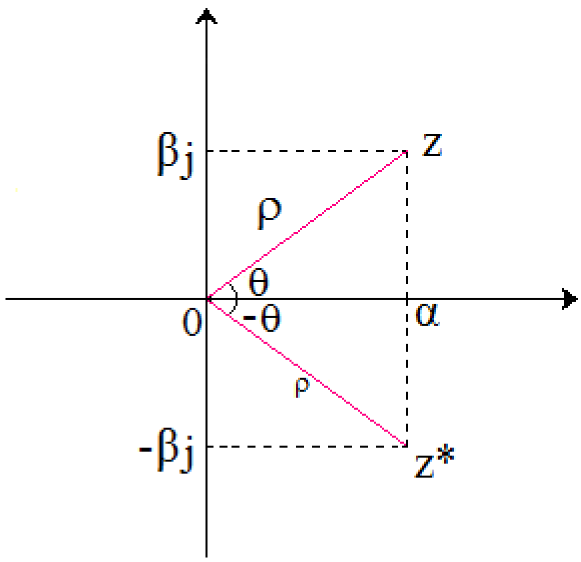

Fig. 1.4 – O conjugado $\overline{z}$ ou z^* de um número complexo z.

Em termos da forma polar o conjugado $\overline{z}$ ou z^* de um número complexo:

$$z = \rho \cdot e^{j\theta}$$

é dado por:

$$\overline{z} = z^* = \rho \cdot e^{-j\theta}\,.$$

Note que

$$\overline{\overline{z}} = (z^*)^* = z$$

e, além disso, se x é um número real ($x \in \mathcal{R}$), ou seja, x é um número complexo com a parte imaginária igual a zero, então:

$$\overline{\overline{x}} = (x^*)^* = x\,.$$

1.3 – Operações com números complexos

A forma cartesiana é mais apropriada para operações de *soma* ($z_1 + z_2$) e *subtracção* ($z_1 – z_2$) de números complexos,

$$(\alpha_1 + \beta_1 \cdot j) + (\alpha_2 + \beta_2 \cdot j) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \cdot j$$

$$(\alpha_1 + \beta_1 \cdot j) - (\alpha_2 + \beta_2 \cdot j) = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) \cdot j$$

enquanto que a forma polar é mais apropriada para operações de *multiplicação* ($z_1 \cdot z_2$) e *divisão* (z_1 / z_2) de números complexos:

$$\left(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}\right) \cdot \left(\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}\right) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j \cdot (\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{\left(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}\right)}{\left(\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{j \cdot (\theta_1 - \theta_2)}$$

ou, equivalentemente:

$$\left(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}\right) \cdot \left(\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}\right) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\left(\rho_1 \cdot e^{j\theta_1}\right)}{\left(\rho_2 \cdot e^{j\theta_2}\right)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Um resultado bastante útil é dado pela equação abaixo:

$$\boxed{(\alpha + \beta\, j) \cdot (\alpha - \beta\, j) = \alpha^2 + \beta^2}$$

ou seja, o produto $z \cdot \bar{z}$ de um número complexo z pelo seu conjugado $\bar{z}$ é um número real (um número complexo sem a parte imaginária) e cujo valor é a soma do quadrado da parte real de z com o quadrado da parte imaginária de z.

Este resultado permite que se escreva uma fracção z/z’, onde z e z’ são 2 números complexos

$$z = \alpha + j \cdot \beta \qquad \text{e} \qquad z' = \sigma + j \cdot \omega$$

na forma cartesiana A + j·B, ou seja,

$$\frac{z}{z'} = \frac{\alpha + j\beta}{\sigma + j\omega} = A + j \cdot B$$

Note que, multiplicando-se ambos o numerador e o denominador de z/z' pelo conjugado do denominador $\overline{z'}$ temos

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{(\alpha + j\beta)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)} = \frac{(\alpha\sigma + \beta\omega) + j\cdot(\beta\sigma - \alpha\omega)}{\sigma^2 + \omega^2}$$

ou seja,

$$\frac{z}{z'} = \frac{(\alpha\sigma + \beta\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)} + j\cdot\frac{(\beta\sigma - \alpha\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)}$$

e portanto,

$$A = \frac{(\alpha\sigma + \beta\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{(\beta\sigma - \alpha\omega)}{(\sigma^2 + \omega^2)}$$

Alguns exemplos:

a) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2 - j5}{-1 + j2}$

então, α = 2, β = –5, σ = –1, e ω = 2, logo

$$\frac{z}{z'} = \frac{(-2-10)}{5} + j\cdot\frac{(5-4)}{5} = -2{,}4 + j\cdot 0{,}2$$

b) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3 - 2j}{1 + j}$

então, α = 3, β = –2, σ = 1, e ω = 1, logo

$$\frac{z}{z'} = \frac{(3-2)}{2} + j\cdot\frac{(-2-3)}{2} = 0{,}5 - j\cdot 2{,}5$$

c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3}{j}$

então, α = 3, β = 0, σ = 0, e ω = 1, logo

$$\frac{z}{z'} = \frac{(0+0)}{(j)(-j)} + j\cdot\frac{(0-3)}{(j)(-j)} = 0 - j\cdot 3 = -3\,j$$

Neste último caso observe que seria mais simples e imediato se fosse utilizado o resultado

$$\frac{1}{j} = -j$$

que já vimos mais acima.

Outro resultado bastante útil é o seguinte:

$$\boxed{\left| e^{j\theta} \right| = 1, \qquad \forall\, \theta}$$

ou seja, $z = e^{j\theta}$ é um ponto da circunferência de raio 1 centrada na origem do plano s.

Na verdade $z = e^{j\theta}$ é o ponto desta circunferência cujo ângulo com o eixo real positivo é θ.

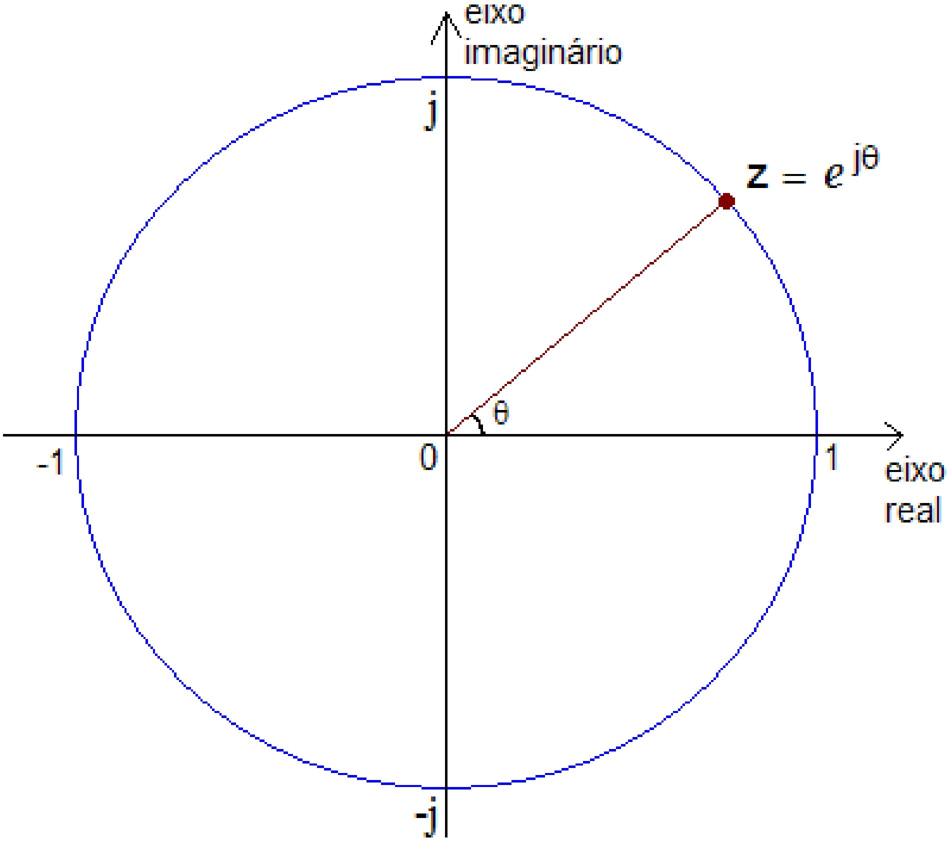

Fig. 1.5 – Circunferência de raio 1 centrada na origem do plano s.

Logo, é fácil de verificar que

$$e^{j0} = 1 \qquad\qquad e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$e^{j\pi} = -1 \qquad\qquad e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

1.4 – O seno e o co-seno

O seno e o co-seno de um ângulo θ de um triângulo rectângulo são definidos como:

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

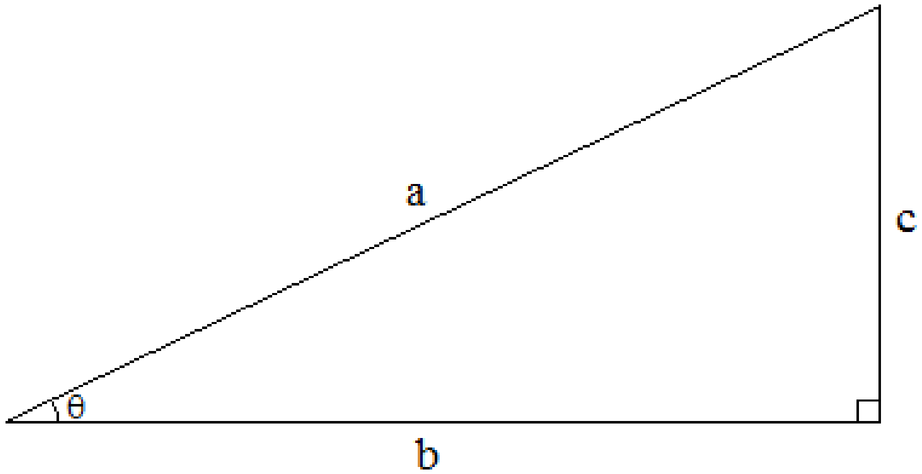

Fig. 1.6 – Triângulo rectângulo.

Usando o Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

pode-se facilmente encontrar os seguintes senos e co-senos conhecidos:

$$\mathrm{sen}(0^o) = \mathrm{sen}(0) = 0 \qquad \cos(0^o) = \cos(0) = 1$$

$$\mathrm{sen}(45^o) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(45^o) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(90^o) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \cos(90^o) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Outros senos e co-senos notáveis:

$$\operatorname{sen}(30^o) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cos(30^o) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(60^o) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(60^o) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Se $\theta = \omega t$, onde

$$-\infty < t < \infty, \qquad \text{e} \qquad \omega > 0,$$

então sen (θ) e cos (θ) se transformam em funções de t,

$$x(t) = \operatorname{sen}(\omega t)\,, \qquad \omega > 0$$

e

$$x(t) = \cos(\omega t)\,, \qquad \omega > 0$$

cujos gráficos pode-se ver abaixo nas figuras 1.7 e 1.8.

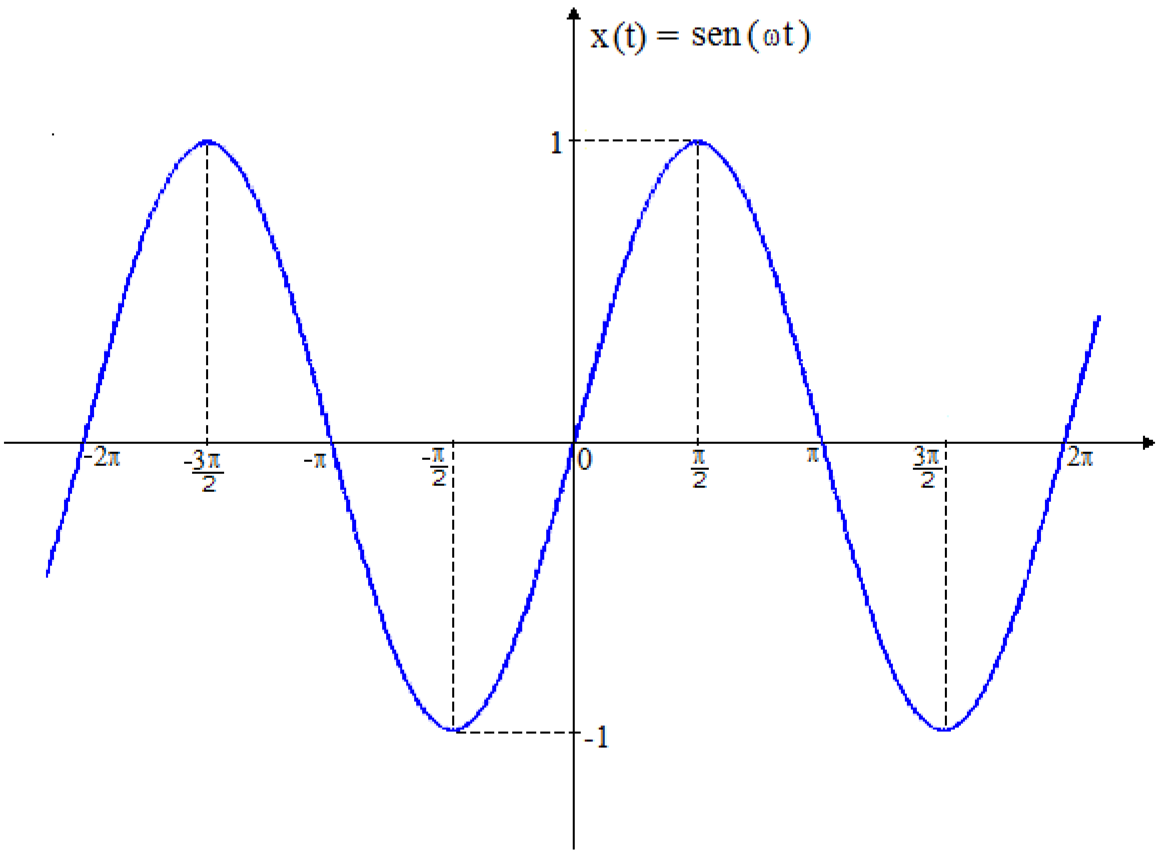

Fig. 1.7 – A função seno, $x(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $\omega > 0$.

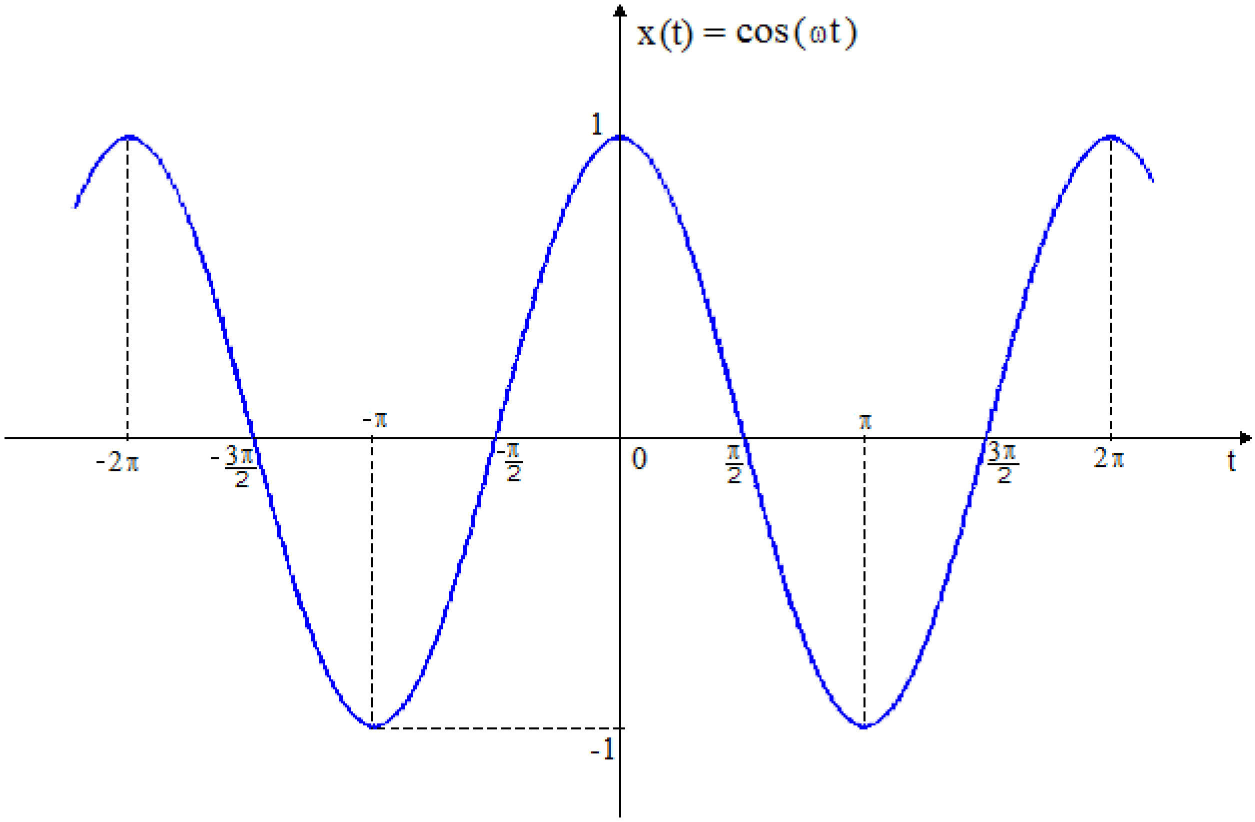

Fig. 1.8 – A função co-seno, x(t) = cos (ωt) , t∈(–∞, ∞), ω > 0.

Algumas relações que envolvem senos e co-senos:

Versão trigonométrica do Teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Relações do arco complementar (para o seno e para o co-seno):

$$\cos(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Relações do arco suplementar (para o seno e para o co-seno):

$$\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$$

Relações de paridade para o seno e para o co-seno:

$$\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta)$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

Seno e co-seno da soma de 2 arcos:

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)$$

Seno e co-seno do dobro de um arco:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$$

1.5 – A equação de Euler

O matemático e físico suíço *Leonhard* ***Euler*** (1707-1783) publicou o seguinte resultado em 1748:

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\cdot\operatorname{sen}\theta}$$

e por esta razão ele é chamado de "*equação de* ***Euler***".

Com a equação de Euler é fácil de se compreender a transformação da forma polar para cartesiana já vista acima. Se $z \in \mathbb{C}$ escrito na forma polar,

$$\begin{aligned} z &= \rho \cdot e^{j\theta} \\ &= \rho\cdot(\cos\theta + j\cdot\operatorname{sen}\theta) \\ &= (\rho\cdot\cos\theta) + j\cdot(\rho\cdot\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

logo,

$$z = \alpha + \beta\, j$$

onde

$$\alpha = \rho\cdot\cos\theta \qquad\qquad \beta = \rho\cdot\operatorname{sen}\theta$$

O seguinte exemplo serve para verificar as relações acima para e^{j0}, $e^{j\frac{\pi}{2}}$, $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ e $e^{j\pi}$

$$e^{j0} = \cos(0) + j \cdot \operatorname{sen}(0) = 1 + 0 \cdot j = 1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 \cdot j = j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 \cdot j = -j$$

$$e^{-j\pi} = \cos(\pi) + j \cdot \operatorname{sen}(\pi) = -1 - 0 \cdot j = -1$$

Da equação de Euler é fácil de obter-se as seguintes relações também bastante conhecidas:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$$

Como exemplo, vamos utilizar estas relações acima obtida da equação de Euler para verificar alguns senos e co-senos bastante conhecidos:

$$\cos(0^{o}) = \cos(0) = \frac{e^{j\cdot 0} + e^{-j\cdot 0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\operatorname{sen}(0^{o}) = \operatorname{sen}(0) = \frac{e^{j\cdot 0} - e^{-j\cdot 0}}{2j} = \frac{1-1}{2j} = 0$$

$$\cos(90^{o}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \frac{j + (-j)}{2} = 0$$

$$\operatorname{sen}(90^{o}) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} - e^{-j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2j} = \frac{j - (-j)}{2j} = 1$$

$$\cos(-90^o) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} + e^{j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \frac{-j+j}{2} = 0$$

$$\text{sen}(-90^o) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)} - e^{j\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{2j} = \frac{-j-j}{2j} = -1$$

$$\cos(180^o) = \cos(\pi) = \frac{e^{-j\pi} + e^{j\cdot\pi}}{2} = \frac{-1+(-1)}{2} = -1$$

$$\text{sen}(180^o) = \text{sen}(\pi) = \frac{e^{-j\cdot\pi} - e^{j\cdot\pi}}{2j} = \frac{-1-(-1)}{2j} = 0$$

1.6 – <u>A tangente</u>

A tangente de um ângulo θ de um triângulo rectângulo é definida como:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

e, pelas definições de seno e co-seno, facilmente obtém-se:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

e desta forma pode-se facilmente encontrar as seguintes tangentes conhecidas:

$$\text{tg}(0^o) = \text{tg}(0) = 0$$

$$\text{tg}(45^o) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{tg}(90^o) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

$$\text{tg}(30^o) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}(60^o) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Se $\theta = \omega t$, onde

$$-\infty < t < \infty, \qquad \text{e} \qquad \omega > 0,$$

então tg (θ) se transforma em uma função de t,

$$x(t) = \text{tg}\,(\omega t)\,, \qquad \omega > 0$$

cujo gráfico pode-se ver abaixo na figura 1.9.

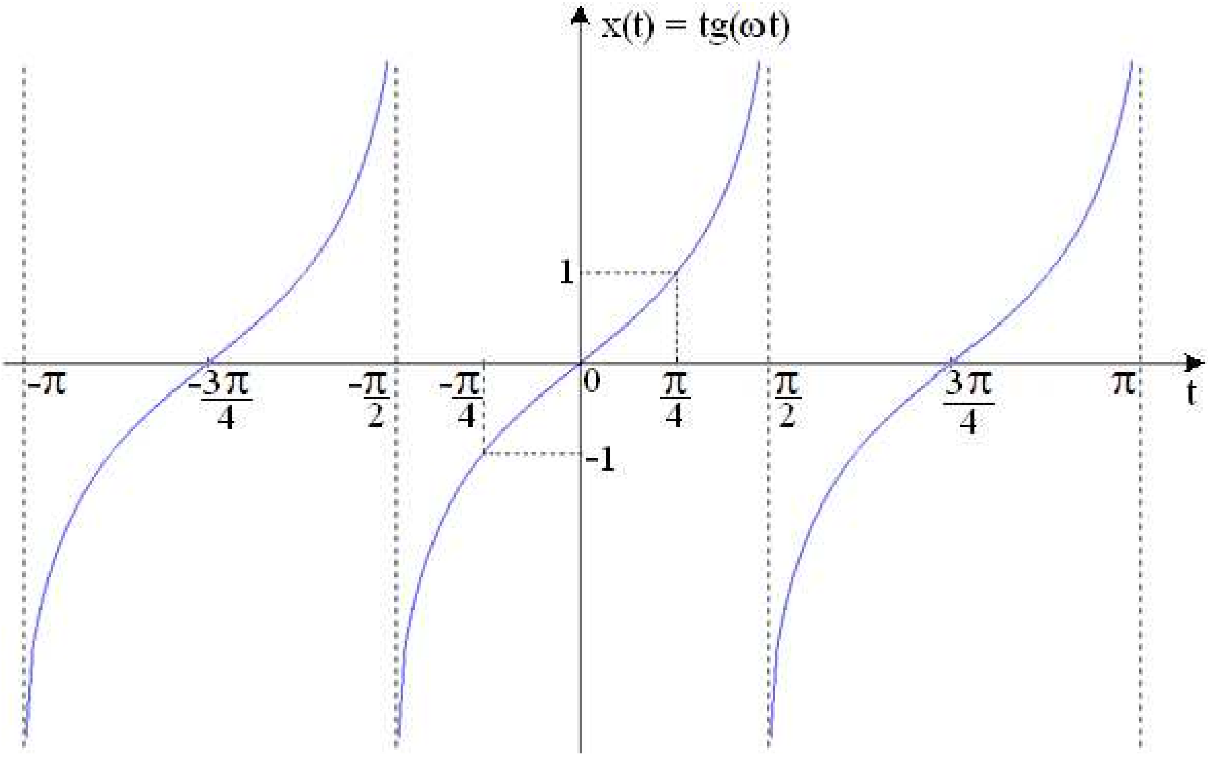

Fig. 1.9 – A função tangente, $x(t) = \text{tg}\,(\omega t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $\omega > 0$.

Assim como o seno e para o co-seno que se repetem a cada intervalo de 2π, a tangente se repete a cada intervalo de π. Logo,

$$\text{tg}(\theta) = \text{tg}(\theta + \pi) = \text{tg}(\theta - \pi).$$

ou melhor:

$$\text{tg}(\theta) = \text{tg}(\theta + k\pi), \qquad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

1.7 – As inversas de seno, co-seno e tangente

Nitidamente as funções seno, co-seno e tangente não são inversíveis. Pelo gráfico de $x(t) = \text{sen}(\omega t)$, $x(t) = \cos(\omega t)$ e $x(t) = \text{tg}(\omega t)$ vemos que se α e β forem valores no intervalo [0, 1], e γ for um valor real qualquer, ou seja,

$$\alpha \in [-1, 1],\ \beta \in [-1, 1],\ \gamma \in (-\infty, \infty),$$

então vão haver muitos valores de $t \in (-\infty, \infty)$ para os quais

$$x(t) = \text{sen}(\omega t) = \alpha$$

$$x(t) = \cos(\omega t) = \beta$$

$$x(t) = \text{tg}(\omega t) = \gamma$$

Portanto, para poder se achar a função inversa de seno, co-seno e tangente temos que limitar o intervalo destas funções.

No caso do *seno* limitamos ao intervalo $t \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$, no caso *co-seno* limitamos ao intervalo $t \in [0\ ,\ \pi]$, e no caso da *tangente* limitamos ao intervalo $t \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$. Os gráficos destas funções são apresentados nas figuras 1.10 e 1.11.

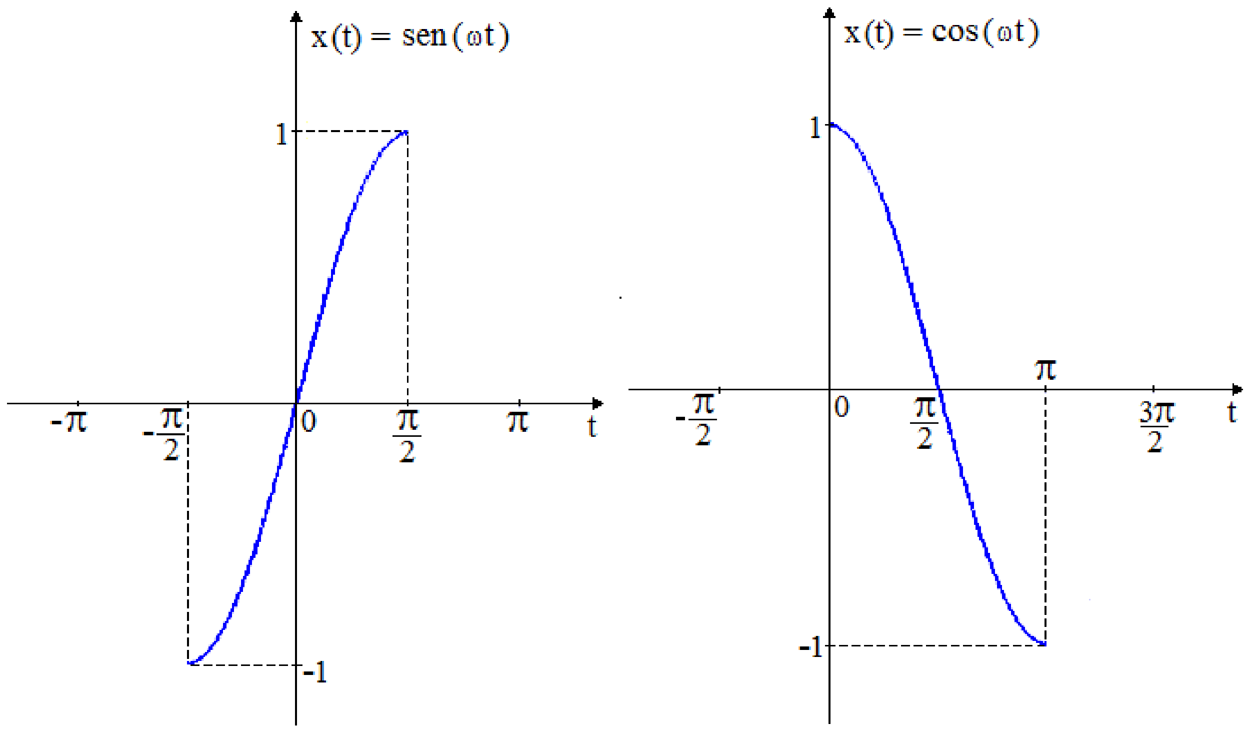

Fig. 1.10 – A função seno, $x(t) = \text{sen}(\omega t)$ limitada ao intervalo $t \in [-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ (1º e 4º quadrantes), e $\omega > 0$ (à esquerda), e a função co-seno, $x(t) = \cos(\omega t)$ limitada ao intervalo $t \in [0\ ,\ \pi]$ (1º e 2º quadrantes), e $\omega > 0$ (à direita).

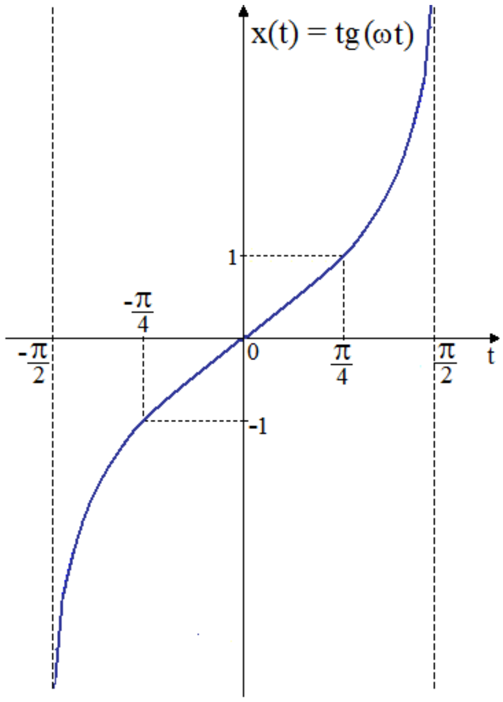

Fig. 1.11 – A função tangente, x(t) = tg (ωt) limitada ao intervalo $t\in[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ (1º e 4º quadrantes), e $\omega > 0$.

Esta é a norma geral adoptada pelas máquinas calculadoras e meios informáticos de cálculo modernos. Limita-se o arco a 2 quadrantes:

1º e 4º quadrante, no caso do seno ou da tangente;

e

1º e 2º quadrante, no caso do co-seno.

Desta forma é possível falar nas funções inversas do seno, do co-seno e da tangente:

arcsen (α), arccos (β) e arctg (γ).

Por exemplo, se $\gamma = 1$, o arco cuja a tangente é 1 é dado por

$$\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 45^{o}$$

embora, como já foi visto acima, existam muitos outros arcos θ cuja tangente também é 1. Na verdade as soluções possíveis são:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

ou seja:

$$\theta = 45^{o} \quad \text{e} \quad \theta = 225^{o}$$

são 2 possíveis soluções de arctg (π/4). E $\theta = 45^{o}$ está no primeiro quadrante e $\theta = 225^{o}$ está no terceiro quadrante.

No caso particular da inversa ser de uma fracção

arcsen (b/a), arccos (b/a) e arctg (b/a)

então podemos levar em consideração o quadrante do ponto (a, b).

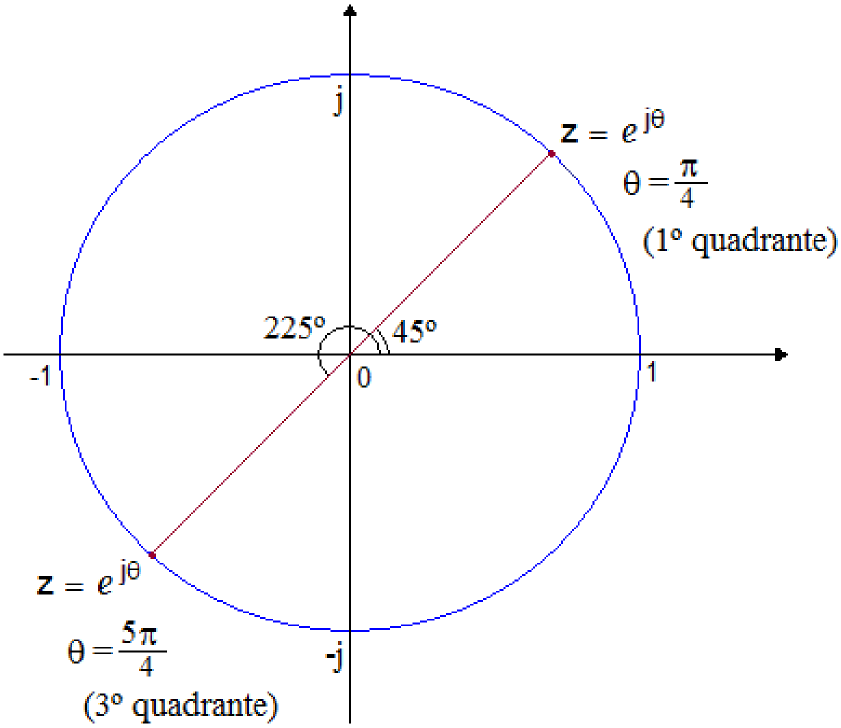

Fig. 1.12 – Dois arcos que têm a mesma tangente 1: 45º (ou π/4, 1º quadrante) e 225º (ou 5π/4, 3º quadrante).

Desta forma a inversa do seno, do co-seno ou da tangente não fica limitada ao intervalo [–π/2 , π/2] ou [0 , π] que representam apenas 2 quadrantes, pois temos informação suficiente para determinar o arco nos 4 quadrantes. Por exemplo:

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^o \qquad \text{(1º quadrante)}$$

$$\text{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5\pi}{4} = 225^o = -135^o \qquad \text{(3º quadrante)}$$

$$\text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-\pi}{4} = -45^o = 315^o \qquad \text{(4º quadrante)}$$

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4} = 135^o \qquad \text{(2º quadrante)}$$

1.8 – Exponenciais e logaritmos

O "*número neperiano e*" (devido ao matemático, astrólogo e teólogo escocês. *John Napier*, 1550-1617) vale aproximadamente

$$e = 2{,}7183$$

Mais precisamente, ele pode ser escrito como uma série infinita ou como um limite (esta última forma devido ao matemático suíço *Jakob Bernoulli*, 1654-1705):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad\qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

O "*número neperiano*" também é chamado de "*constante de Euler*" e é a base dos logaritmos naturais (ln). Portanto:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Algumas relações básicas de exponenciais e logaritmos:

$$e^{x}\cdot e^{y} = e^{x+y} \qquad \frac{e^{x}}{e^{y}} = e^{x-y} \qquad \left(e^{x}\right)^{y} = e^{x\cdot y}$$

$$\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x)-\ln(y) \qquad \ln\left(x^{a}\right) = a\ln(x)$$

$$e^{-\ln(x)} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$$

Transformação da base e para a base 10:

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{2{,}3} = 0{,}4343\cdot\ln(x)$$

Transformação da base 10 para a base e:

$$\ln(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)} = \frac{\log_{10}(x)}{0{,}4343} = 2{,}3\cdot\log_{10}(x)$$

Transformação de qualquer base "b" para a base "a":

$$\log_{a}(x) = \frac{\log_{b}(x)}{\log_{b}(a)}$$

1.9 – Derivadas

A teoria do cálculo diferencial é de autoria do físico e matemático inglês *Sir Isaac Newton* (1643-1727) e do filósofo e matemático alemão *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646-1716).

A notação das derivada de uma função f(t) pode ser

$$\frac{df}{dt} \qquad \text{(devido à \textit{Newton})}$$

ou

$$f'(t) \qquad \text{(devido à \textit{Leibniz}).}$$

A derivada de uma função f(t) no instante t nos dá a *inclinação* (ou *declive*) de uma recta tangente à curva naquele instante.

Se f(t) é crescente em t = a, então a derivada será positiva naquele instante

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=a} > 0 \, .$$

Isso é ilustrado na figura 1.13.

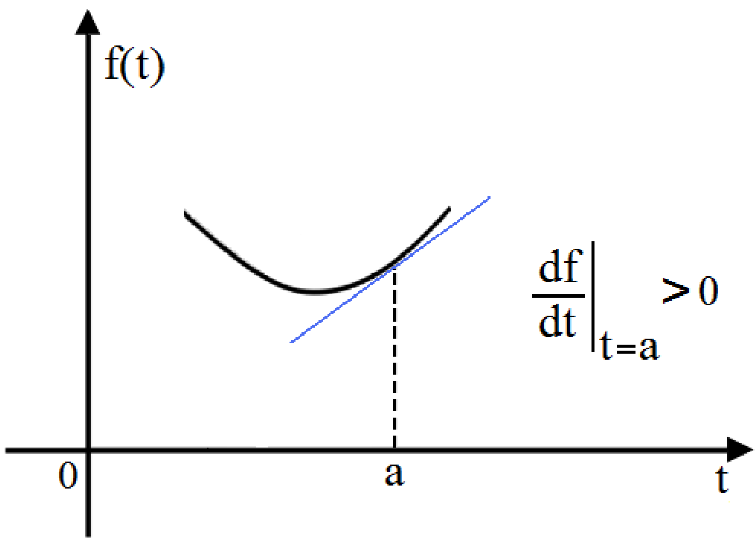

Fig. 1.13 – *Inclinação* positiva (ou *declive* positivo) da recta tangente à curva f(t) no instante t = a.

Por outro lado, se f(t) é decrescente em t = a, então a derivada será negativa naquele instante

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=a} < 0 \,.$$

Isso é ilustrado na figura 1.14.

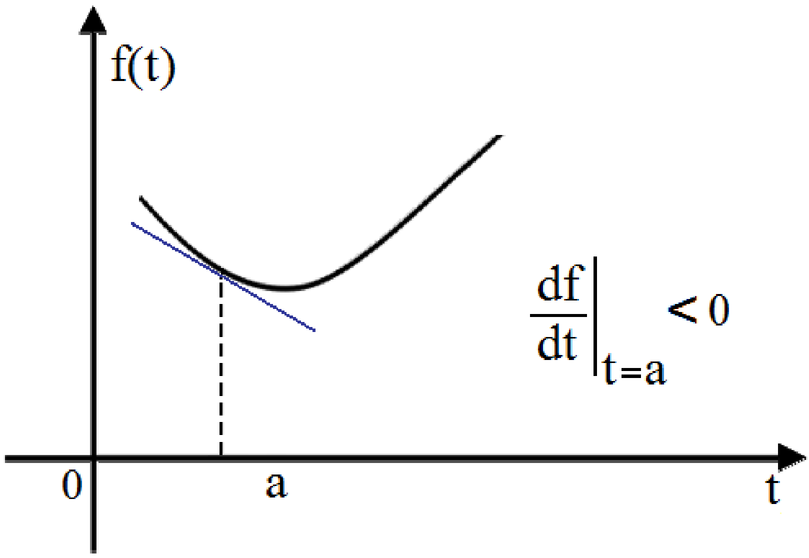

Fig. 1.14 – *Inclinação* negativa (ou *declive* negativo) da recta tangente à curva f(t) no instante t = a.

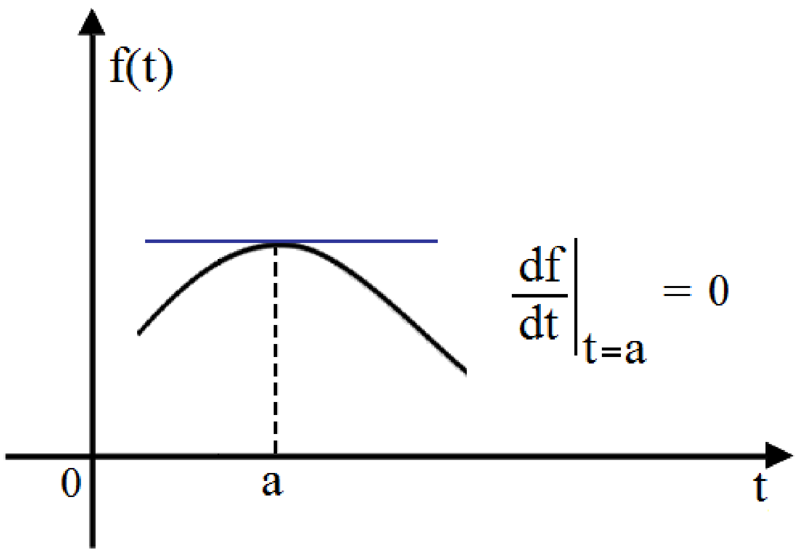

Fig. 1.15 – *Inclinação* nula (ou *declive* nulo) da recta tangente à curva f(t) no instante t = a. Caso de máximo local.

Finalmente, se f(t) não é crescente nem decrescente em t = a, então a derivada será zero naquele instante

$$f'(a) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=a} = 0 \,.$$

Neste caso pode-se ter um máximo ou um mínimo local, mas às vezes nenhum dos dois. Isso é ilustrado nas figuras 1.15, 1.16 e 1.17.

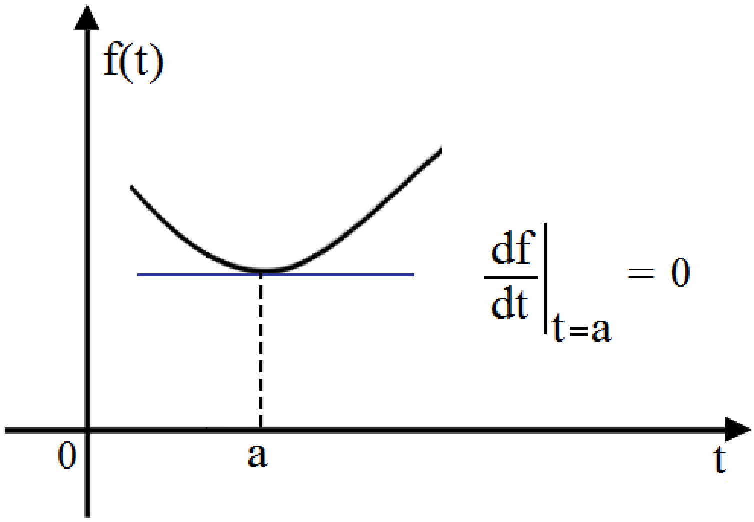

Fig. 1.16 – Inclinação nula (ou *declive* nulo) da recta tangente à curva f(t) no instante t = a. Caso de mínimo local.

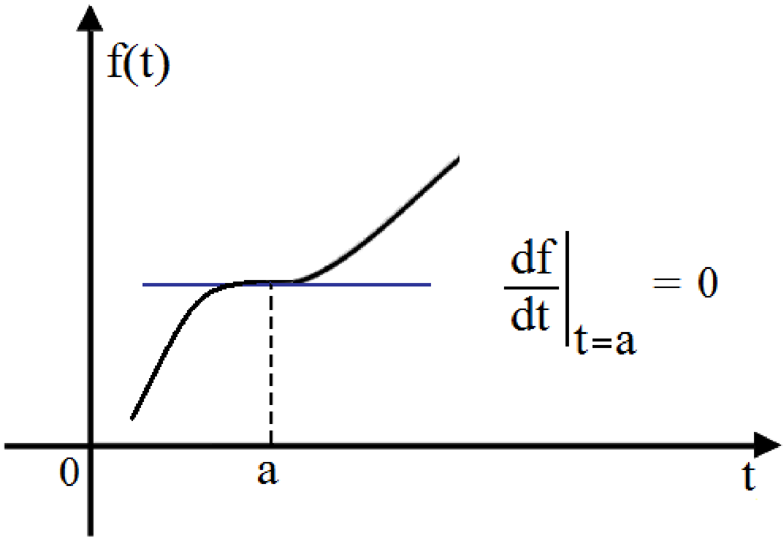

Fig. 1.17 – *Inclinação* nula (ou *declive* nulo) da recta tangente à curva f(t) no instante t = a. Caso de ponto de inflexão, não é máximo nem mínimo local.

Algumas propriedades e regras das derivadas:

- Linearidade:

$$\frac{d\big(c \cdot f(t)\big)}{dt} = c \cdot \frac{df(t)}{dt} = c \cdot f'(t) \qquad \text{(homogeneidade)}$$

$$\frac{d\big(f_1(t) + f_2(t)\big)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt} = f_1'(t) + f_2'(t) \qquad \text{(aditividade)}$$

- Regra do produto:

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\cdot g(t)\big) = \frac{df(t)}{dt}\cdot g(t) + f(t)\cdot\frac{dg(t)}{dt} = f'(t)\cdot g(t) + g'(t)\cdot f(t)$$

- Regra do quociente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)\cdot\frac{df(t)}{dt} - f(t)\cdot\frac{dg(t)}{dt}}{g^2(t)} = \frac{g(t)\cdot f'(t) - f(t)\cdot g'(t)}{g^2(t)}$$

- Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{df}{dt}\big(g(t)\big)\cdot\frac{dg(t)}{dt} = f'(g(t))\cdot g'(t)$$

Se definirmos

$$u(t) = f(t) \qquad \text{e} \qquad v(t) = g(t)$$

então,

$$\frac{df}{dt} = u' \qquad \text{e} \qquad \frac{dg}{dt} = v'$$

E as regras acima podem ser reescritas de forma mais compacta como:

$$(c\cdot u)' = c\cdot u' \qquad \text{(homogeneidade)}$$

$$(u+v)' = u' + v' \qquad \text{(aditividade)}$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \qquad \text{(regra do produto)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2} \qquad \text{(regra do quociente)}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dt} \qquad \text{(regra da cadeia)}$$

- Algumas derivadas de funções simples:

$$\frac{d}{dt} c = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^n\right) = n \cdot t^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt} t = 1$$ (caso particular, n =1)

$$\frac{d}{dt}(c \cdot t) = c$$ (aplicando a homogeneidade)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right) = -t^{-2} = \frac{-1}{t^2}$$ (caso particular, n = –1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^m}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-m}\right) = -m \cdot t^{-m+1} = -m \cdot \frac{1}{t^{m+1}}$$ (caso particular, n = –m)

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{1/2}\right) = \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ , \quad t \geq 0$$ (caso particular, n = 1/2)

$$\frac{d}{dt}\left| t \right| = \frac{\left| t \right|}{t} = \text{sign}(t), \quad t \neq 0$$

- Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas:

$$\frac{d}{dt} c^t = c^t \cdot \ln c$$

$$\frac{d}{dt} e^t = e^t$$ (caso particular, c = e, a única função que é igual a própria derivada)

$$\frac{d}{dt} \log_c t = \frac{1}{t \cdot \ln c}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t} = t^{-1}, \quad t > 0$$ (caso particular, c = e)

$$\frac{d}{dt} \ln\left| t \right| = \frac{1}{t} = t^{-1}$$

$$\frac{d}{dt} \ln t^t = t^t \cdot (1 + \ln t)$$

- Derivadas de funções trigonométricas:

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(t) = \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt}\cos(t) = -\operatorname{sen}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tg}(t) = \sec^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\sec(t) = \operatorname{tg}(t)\cdot\sec(t)$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{cotg}(t) = -\operatorname{cossec}^2(t) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{cossec}(t) = -\operatorname{cossec}(t)\cdot\operatorname{cotg}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arcsen}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\arccos(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arcsec}(t) = \frac{1}{|t|\cdot\sqrt{t^2-1}}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arccot} g(t) = \frac{-1}{1+t^2}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arccossec}(t) = \frac{-1}{|t|\cdot\sqrt{t^2-1}}$$

- Derivadas de funções hiperbólicas:

$$\frac{d}{dt}\,\text{senh}\,(t) = \cosh\,(t) = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\cosh\,(t) = \text{senh}\,(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{tgh}\,(t) = \text{sech}^{2}\,(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{sech}\,(t) = -\text{tgh}\,(t)\cdot\text{sech}\,(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{cotgh}\,(t) = -\,\text{cossec}\,\text{h}^{2}\,(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{csch}\,(t) = -\,\text{cotgh}\,(t)\cdot\text{cossech}\,(t)$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{arcsenh}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{2}+1}}$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{arccosh}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{2}-1}}$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{arctgh}\,(t) = \frac{1}{1-t^{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{arc}\,\text{sech}\,(t) = \frac{-1}{t\sqrt{1-t^{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{arc}\,\text{coth}\,(t) = \frac{1}{1-t^{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\,\text{arc}\,\text{sech}\,(t) = \frac{-1}{|\,t\,|\sqrt{1+t^{2}}}$$

1.10 – Integrais

A integral indefinida de uma função f(t) é representada como

$$\int f(\tau) \cdot d\tau$$

Por outro lado, a integral definida, representada como

$$\int_a^b f(\tau) \cdot d\tau\,, \qquad \int_{-\infty}^b f(\tau) \cdot d\tau \qquad \text{ou} \qquad \int_a^\infty f(\tau) \cdot d\tau$$

faz a Soma de Riemann que calcula a área sob a curva em m intervalo bem definido como por exemplo:

$$[\, a\,, b\,]\,, \qquad]\,-\infty\,,\ b\,] \qquad \text{ou} \qquad [\, a\,, \infty\, [.$$

Este nome acima é dado em alusão ao matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

A integral é um processo inverso do da derivada de funções pois,

$$\int f'(t)\, dt \;=\; \int \frac{df}{dt}(t)\ dt \;=\; \int \frac{df(t)}{dt}\ dt \;=\; \int df \;=\; f(t) \;+\; C$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(t) \cdot dt\right) \;=\; f(t)\,.$$

Mais precisamente:

$$F(t) = \int_a^t f(t) \cdot dt$$

é chamada de primitiva de f(t).

Este resultado é chamado de Teorema Fundamental do Cálculo e faz a interligação entre o Cálculo Diferencial (secção anterior) e o Cálculo Integral (desta secção).

Algumas regras de integração de funções em geral

$$\int a\, f(t)\, dt \;=\; a \cdot \int f(t)\, dt \;+\; C \qquad \text{(regra da homogeneidade)}$$

$$\int [\, f(t) + g(t)\,]\, dt \;=\; \int f(t)\, dt \;+ \int g(t)\, dt \;+\; C \qquad \text{(regra da aditividade)}$$

$$\int [\, f'(t) \cdot g(t)\,]\, dt \;=\; f(t) \cdot g(t) + \int f(t) \cdot g'(t)\, dt \qquad \text{(regra da integral por partes)}$$

Se definirmos

$$u(t) = g(t) \qquad \text{e} \qquad v(t) = f(t)$$

então,

$$du = g'(t) \cdot dt \qquad \text{e} \qquad dv = f'(t) \cdot dt$$

e a regra da integral por partes pode ser escrita doutra forma:

$$\boxed{\int u \cdot dv \; = \; uv \; - \int v \, du} \qquad \text{(regra da integral por partes)}$$

Por outro lado, se

$$u(t) = f(t) \qquad \text{e} \qquad du = f'(t) \cdot dt\,,$$

então a integral definida é calculada como:

$$\int_a^b du \; = \; u\Big]_a^b \; = \; u(b) - u(a)$$

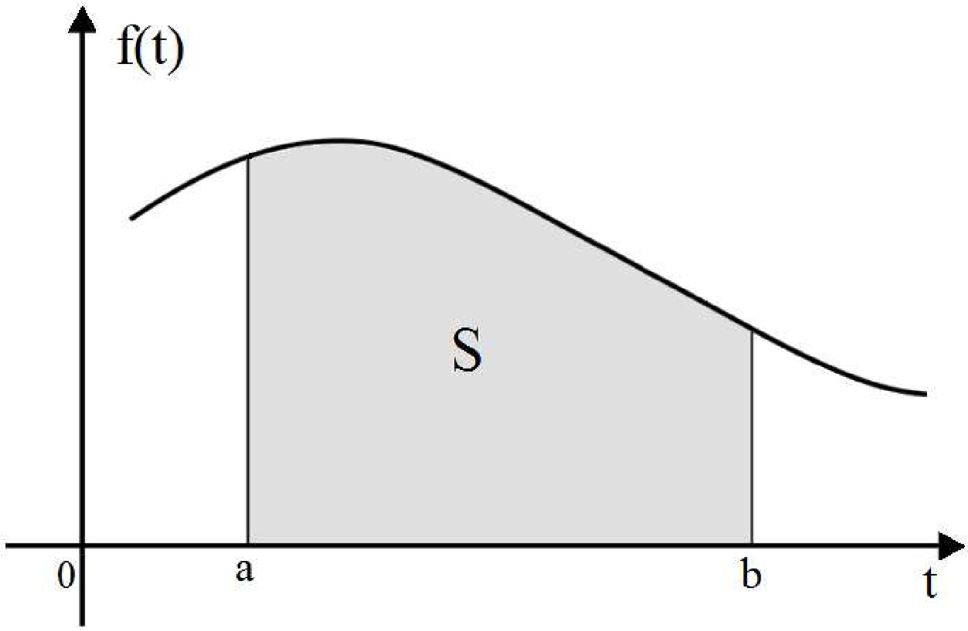

Fig. 1.18 – A área S sob a curva f(t) no intervalo definido [a, b].

A integral definida desde a até b da função f

$$\int_a^b f(\tau) \cdot d\tau = S$$

é a área S sob a curva, conforme ilustrado na figura 1.18.

A figura 1.19 mostra dois exemplos da integral definida desde a até b da função f, onde áreas abaixo do eixo das abcissas contam negativamente.

$$\int_a^b f_1(\tau)\cdot d\tau = S_1 - S_2$$

e

$$\int_a^b f_2(\tau)\cdot d\tau = S_1 - S_2 + S_3$$

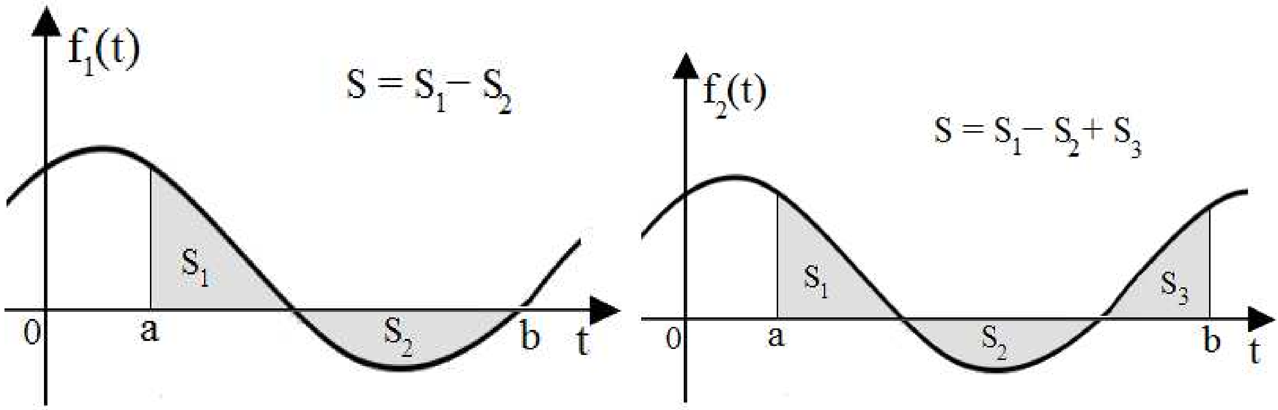

Fig. 1.19 – Dois exemplos da área sob a curva f(t) no intervalo definido [a, b]. As áreas abaixo do eixo das abcissas contam negativamente.

A figura 1.20 mostra dois exemplos da integral definida em intervalos infinitos como:] –∞, b] , [a, ∞ [.

$$\int_{-\infty}^b f_3(\tau)\cdot d\tau = S \qquad \text{e} \qquad \int_a^\infty f_4(\tau)\cdot d\tau = S$$

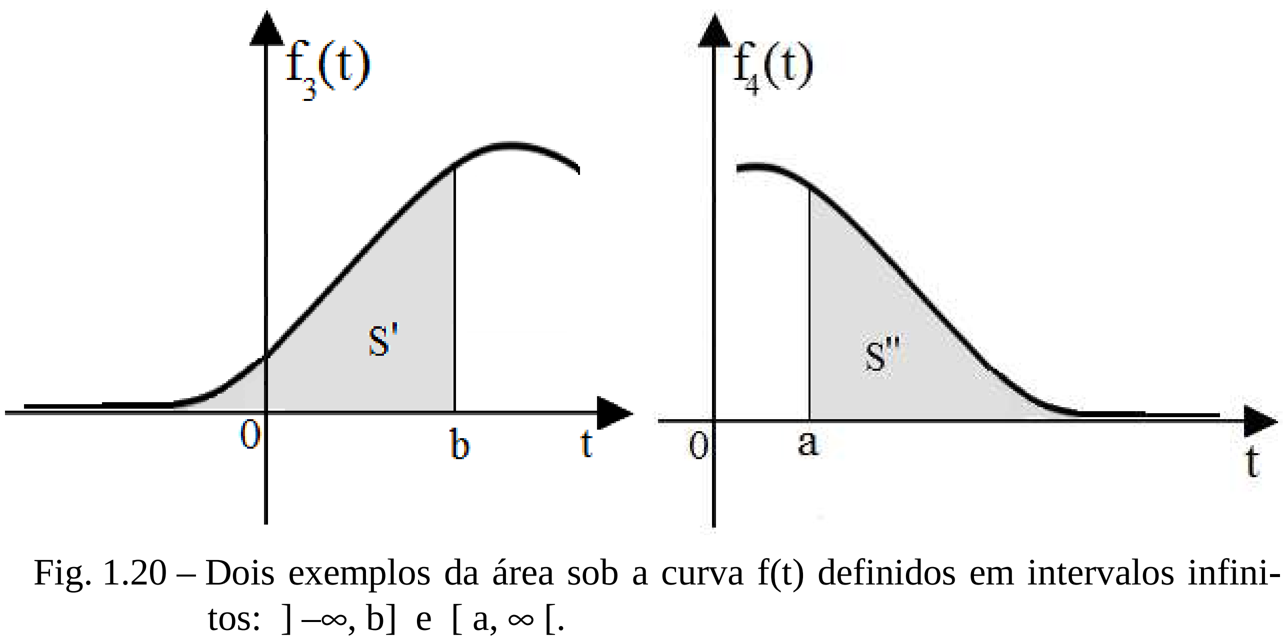

Fig. 1.20 – Dois exemplos da área sob a curva f(t) definidos em intervalos infinitos:] –∞, b] e [a, ∞ [.

Apresentamos agora uma tabela das integrais das principais funções.

- Integrais de funções racionais:

$$\int du = u + C$$

$$\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)} + C, \qquad n \neq 1$$

$$\int u^{-1} \cdot du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} \cdot dt = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} \cdot = \frac{1}{2a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C, \qquad u^2 > a^2$$

- Integrais de funções irracionais:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} \cdot = \ln\left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} \cdot = \ln\left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \cdot \sqrt{u^2 - a^2}} \cdot = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u^2 < a^2$$

- Integrais de logaritmos:

$$\int \log_b (a \cdot t)\, dt = t \cdot \log_b (a \cdot t) - t \cdot \log_b e + C \qquad (*)$$

$$\int \ln (a \cdot t)\, dt = t \cdot \ln (a \cdot t) - t + C$$

[caso particular <u>$b = e$</u> da integral (*) acima]

$$\int t^n \cdot \ln (a \cdot t)\, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot \ln (a \cdot t) - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \qquad n \neq 1$$

$$\int t^{-1} \cdot \ln (a \cdot t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot [\ln (a \cdot t)]^2 + C$$

$$\int \frac{dt}{t \cdot \ln(a \cdot t)} = \ln\left[\ln(a \cdot t)\right] + C$$

- Integrais de funções exponenciais:

$$\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C, \qquad a \neq 1, \quad a > 0 \qquad (**)$$

$$\int e^u \cdot du = e^u + C$$ [caso particular $a = e$ da integral (**) acima]

$$\int b^{at}\, dt = \frac{1}{a} \cdot \frac{b^{at}}{\ln(b)} + C \qquad (***)$$

$$\int e^{at}\, dt = \frac{1}{a} e^{at} + C$$ [caso particular $b = e$ da integral (***) acima]

$$\int t \cdot e^{at}\, dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at - 1) + C$$

$$\int t^n \cdot e^{at}\, dt = \frac{1}{a} t^n e^{at} - \frac{n}{a} \int t^{n-1} e^{at}\, dt$$

$$\int t^n \cdot b^{at}\, dt = \frac{t^n\, b^{at}}{a \cdot \ln(b)} - \frac{n}{a \cdot \ln(b)} \int t^{n-1} b^{at}\, dt\,, \qquad b > 0, \quad b \neq 1$$

$$\int e^{at} \cdot \mathrm{sen}(b\,t)\, dt = \frac{e^{at}}{\left(a^2 + b^2\right)} \left[a \cdot \mathrm{sen}(bt) - b \cdot \cos(bt)\right] + C$$

$$\int e^{at} \cdot \cos(b\,t)\, dt = \frac{e^{at}}{\left(a^2 + b^2\right)} \left[a \cdot \cos(bt) + b \cdot \mathrm{sen}(bt)\right] + C$$

- Integrais de funções trigonométricas:

$$\int \mathrm{sen}(u)\, du = -\cos(u) + C$$

$$\int \cos(u)\, du = \mathrm{sen}(u) + C$$

$$\int \mathrm{tg}(u)\, du = \ln(\sec(u)) + C$$

$$\int \mathrm{cotg}(u)\, du = \ln\left|\mathrm{sen}(u)\right| + C$$

$$\int \sec(u) \cdot du = \int \frac{1}{\cos(u)} \cdot du = \ln\left|\sec(u) + \mathrm{tg}(u)\right| + C$$

$$\int \operatorname{cosec}(u)\cdot du \;=\; \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\cdot du \;=\; \ln\left|\operatorname{cosec}(u)-\operatorname{cotg}(u)\right| \;+\; C$$

$$\int \sec(u)\cdot\operatorname{tg}(u)\cdot du \;=\; \int \frac{\operatorname{tg}(u)}{\operatorname{sen}(u)}\cdot du \;=\; \sec(u) \;+\; C$$

$$\int \operatorname{cosec}(u)\cdot\operatorname{cotg}(u)\cdot du \;=\; \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)\cdot\operatorname{tg}(u)}\cdot du \;=\; -\operatorname{cosec}(u) \;+\; C$$

$$\int \sec^2(u)\cdot du \;=\; \int \frac{1}{\cos^2(u)}\cdot du \;=\; \operatorname{tg}(u) \;+\; C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(u)\cdot du \;=\; \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u)}\cdot du \;=\; -\operatorname{cotg}(u) \;+\; C$$

$$\int \operatorname{sen}(a\,t)\,dt \;=\; \frac{-1}{a}\cos(a\,t) \;+\; C$$

$$\int \cos(a\,t)\,dt \;=\; \frac{1}{a}\operatorname{sen}(a\,t) \;+\; C$$

$$\int \operatorname{sen}^2(a\,t)\,dt \;=\; \frac{t}{2} \;-\; \frac{\operatorname{sen}(2a\,t)}{4a} \;+\; C$$

$$\int \cos^2(a\,t)\,dt \;=\; \frac{t}{2} \;+\; \frac{\operatorname{sen}(2a\,t)}{4a} \;+\; C$$

- Fórmula de recorrência para integrais de potências de funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}^n(a\cdot u)\,du \;=\; \frac{-\operatorname{sen}^{n-1}(a\cdot u)\cdot\cos(a\cdot u)}{n\cdot a} \;+\; \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \cos^n(a\cdot u)\,du \;=\; \frac{\cos^{n-1}(a\cdot u)\cdot\operatorname{sen}(a\cdot u)}{n\cdot a} \;+\; \frac{n-1}{n}\cdot\int \cos^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \operatorname{tg}^n(a\cdot u)\,du \;=\; \frac{\operatorname{tg}^{n-1}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} \;-\; \int \operatorname{tg}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \operatorname{cotg}^n(a\cdot u)\,du \;=\; -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} \;-\; \int \operatorname{cotg}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \sec^n(a\cdot u)\,du \;=\; \frac{\sec^{n-2}(a\cdot u)\cdot\operatorname{tg}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} \;+\; \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\int \sec^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

$$\int \operatorname{cosec}^n(a\cdot u)\,du \;=\; -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2}(a\cdot u)\cdot\operatorname{cotg}(a\cdot u)}{a\cdot(n-1)} \;+\; \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\int \operatorname{cosec}^{n-2}(a\cdot u)\,du$$

Integrais de outras funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}(a\,t)\cdot\cos(b\cdot t)\,dt = -\frac{\cos[(a+b)\,t]}{2\,(a+b)} - \frac{\cos[(a-b)\,t]}{2\,(a-b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}(a\cdot t)\cdot\operatorname{sen}(b\cdot t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)\,t]}{2\,(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}[(a+b)\,t]}{2\,(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos(a\cdot t)\cdot\cos(b\cdot t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}[(a-b)\,t]}{2\,(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}[(a+b)\,t]}{2\,(a+b)} + C, \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen}(a\cdot t)\cdot\cos(a\cdot t)\,dt = -\frac{\cos(2\cdot a\cdot t)}{4\cdot a} + C$$

$$\int \operatorname{tg}(a\cdot t)\;dt = \int \frac{\operatorname{sen}(a\cdot t)}{\cos(a\cdot t)}\,dt = -\frac{1}{a}\cdot\ln\left|\cos(a\cdot t)\right| + C$$

$$\int \operatorname{cot}g(a\cdot t)\;dt = \int \frac{\cos(a\,t)}{\operatorname{sen}(a\,t)}\,dt = \frac{1}{a}\cdot\;\ln\left|\operatorname{sen}(a\,t)\right| + C$$

$$\int t\cdot\operatorname{sen}(a\cdot t)\,dt = -\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}(a\cdot t) - \frac{t}{a}\cos(a\cdot t) + C$$

$$\int t\cdot\cos(a\,t)\,dt = \frac{1}{a^2}\cos(a\,t) + \frac{t}{a}\sin(a\,t) + C$$

$$\int t^n\cdot\operatorname{sen}(a\,t)\,dt = -\frac{t^n}{a}\cos(a\,t) + \frac{n}{a}\int t^{n-1}\cos(a\,t)\,dt$$

$$\int t^n\cdot\cos(a\,t)\,dt = \frac{t^n}{a}\operatorname{sen}(a\,t) - \frac{n}{a}\int t^{n-1}\operatorname{sen}(a\,t)\,dt$$

Integrais de funções hiperbólicas:

$$\int \operatorname{senh}(at)\,dt = \frac{1}{a}\cdot\cosh(at) + C$$

$$\int \cosh(at)\,dt = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{senh}(at) + C$$

$$\int \operatorname{senh}^2(at)\,dt = \frac{\operatorname{senh}(2at)}{4a} - \frac{t}{2} + C$$

$$\int \cosh^2(at)\,dt = \frac{\operatorname{senh}(2at)}{4a} + \frac{t}{2} + C$$

$$\int t\cdot\operatorname{senh}(at)\,dt = \frac{t}{a}\cdot\cosh(at) - \frac{1}{a^2}\cdot\operatorname{senh}(at) + C$$

$$\int t \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{t}{a} \cdot \operatorname{senh}(at) - \frac{1}{a^2} \cdot \cosh(at) + C$$

$$\int t^n \cdot \operatorname{senh}(at)\, dt = \frac{t^n}{a} \cdot \cosh(at) - \frac{n}{a} \cdot \int t^{n-1} \cdot \cosh(at)\, dt + C$$

$$\int t^n \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{t^n}{a} \cdot \operatorname{senh}(at) - \frac{n}{a} \cdot \int t^{n-1} \cdot \operatorname{senh}(at)\, dt + C$$

$$\int \tanh(at)\, dt = \int \frac{\operatorname{senh}(at)}{\cosh(at)}\, dt = \frac{1}{a} \cdot \ln\left[\cosh(at)\right] + C$$

$$\int \coth(at)\, dt = \int \frac{\cosh(at)}{\operatorname{senh}(at)}\, dt = \frac{1}{a} \cdot \ln\left|\operatorname{senh}(at)\right| + C$$

Integrais definidas:

$$\int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t} \cdot dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-a x^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} \cdot dt = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1} \cdot dt = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty t^{n-1} \cdot e^{-t}\, dt = \Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{[função gama]}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(t) \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \cdot dt = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{se n é inteiro par} \geq 2 \\[2ex] \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (n-1)} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{se n é inteiro ímpar} \geq 3 \end{cases}$$

1.11 – Decibéis (dB)

A unidade **Bell** (B) tem este nome em alusão ao escocês *Alexander Graham Bell* (1847-1922). O **deciBel (dB)** é um submúltiplo do **Bell** que corresponde a um décimo do **Bell**. Entretanto, o **deciBel** tornou-se uma unidade de uso muito mais comum que o **Bell**.

O **deciBel** (**dB**) é usado para uma grande variedade de medições, especialmente em acústica (intensidade de sons), mas também como medida de ganho ou intensidade relativa na física (para a *pressão* ρ) e na electrónica (para a *tensão eléctrica* v, para a *corrente eléctrica* i, ou para a *potência* P).

O decibel (dB) é uma unidade de medida adimensional assim como as medidas de ângulo: o radiano (rad) e o grau (º), ou a percentagem (%).

O decibel é portanto uma unidade de intensidade ou potência relativa (uma medida da razão entre duas quantidades, sendo uma de referência).

A definição do dB é obtida com o uso do logaritmo da seguinte forma: x em decibéis usualmente é definido como:

$$x\,\Big|_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(x)$$

que é a expressão que vamos utilizar neste texto, mas às vezes x em decibéis também pode ser definido como:

$$x\,\Big|_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log_{10}(x)$$

Como o **deciBell** é uma medida relativa de ganho relativo (em relação a um valor de referência) somente são calculados os decibéis de valores positivos. Não faz sentido calcular os decibéis de um valor negativo.

É fácil de se verificar que, $1\,\Big|_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(1) = 0\,\mathrm{dB}$, logo

$$1\Big|_{\mathrm{dB}} = 0\,\mathrm{dB}$$

Valores maiores que 1 se tornarão positivos ao serem transformados em dB. Eles representam um ganho de facto. Por outro lado, valores menores que 1 (i.e., valores entre 0 e 1) se tornarão negativos ao serem transformados em dB. Eles representam uma atenuação.

Outro detalhe:

$$x\,\Big|_{\mathrm{dB}} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{\mathrm{dB}}$$

Note que:

se $x > 1$ ==> $x\big|_{dB} > 0\,dB$

se $x = 1$ ==> $x\big|_{dB} = 0\,dB$

se $0 < x < 1$ ==> $x\big|_{dB} < 0\,dB$

se $x < 0$ ==> não existe $x\big|_{dB}$

Isso está ilustrado na figura 1.21.

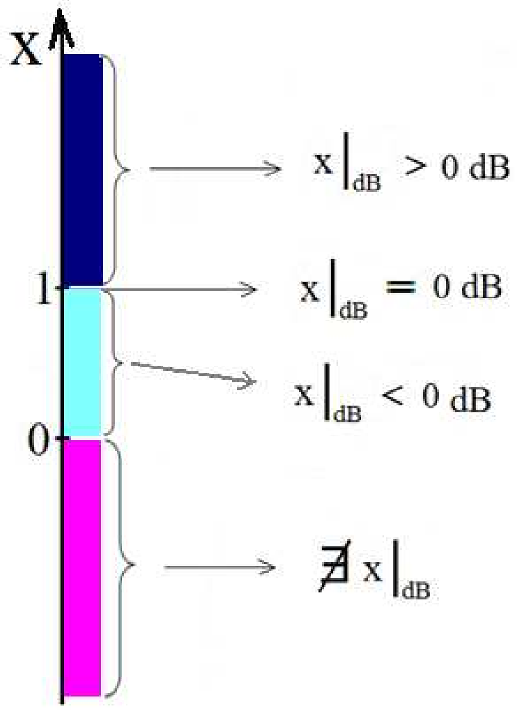

Fig. 1.21 – o valor de x em dB.

Alguns exemplos:

$$10\big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(10) = 20\,dB$$

$$\left.\frac{1}{10}\right|_{dB} = 0{,}1\big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(10^{-1}\right) = (-1) \cdot 20 \cdot \log_{10}(10) = -20\,dB$$

$$100\big|_{dB} = 10^2\big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(10^2\right) = 40\,dB$$

$$1000\big|_{dB} = 10^3\big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(10^3\right) = 60\,dB$$

$$2\big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(2) = 20 \cdot (0{,}3) = 6\,\text{dB}$$

$$\frac{1}{2}\bigg|_{\text{dB}} = 0{,}5\big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(2^{-1}\right) = (-1)\cdot 20 \cdot (0{,}3) = -6\,\text{dB}$$

$$\sqrt{2}\,\big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\sqrt{2}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(2^{1/2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 20 \cdot (0{,}3) = 3\,\text{dB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\bigg|_{\text{dB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bigg|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(2^{-1/2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 20 \cdot (0{,}3) = -3\,\text{dB}$$

$$200\big|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(2 \cdot 100) = 20 \cdot \left\{\log_{10}(100) + \log_{10}(2)\right\} = 20 \cdot (2 + 0{,}3) = 46\,\text{dB}$$

$$0{,}2\big|_{\text{dB}} = \frac{2}{10}\bigg|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{2}{10}\right) = 20 \cdot \left\{\log_{10}(2) + \log_{10}(10)\right\} = 20 \cdot (0{,}3 - 1) = -14\,\text{dB}$$

$$50\big|_{\text{dB}} = \frac{100}{2}\bigg|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{100}{2}\right) = 20 \cdot \left\{\log_{10}(100) - \log_{10}(2)\right\} = 20 \cdot (2 - 0{,}3) = 34\,\text{dB}$$

$$\frac{1}{50}\bigg|_{\text{dB}} = \frac{2}{100}\bigg|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{2}{100}\right) = 20 \cdot \left\{\log_{10}(2) - \log_{10}(100)\right\} = 20 \cdot (0{,}3 - 2) = -34\,\text{dB}$$

Resumindo os exemplos acima:

$$10\big|_{\text{dB}} = 20\,\text{dB} \qquad 0{,}1\big|_{\text{dB}} = -20\,\text{dB}$$

$$100\big|_{\text{dB}} = 40\,\text{dB} \qquad 1000\big|_{\text{dB}} = 60\,\text{dB}$$

$$2\big|_{\text{dB}} = 6\,\text{dB} \qquad 0{,}5\big|_{\text{dB}} = -6\,\text{dB}$$

$$\sqrt{2}\,\big|_{\text{dB}} = 3\,\text{dB} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\bigg|_{\text{dB}} = -3\,\text{dB}$$

$$200\big|_{\text{dB}} = 46\,\text{dB} \qquad 0{,}2\big|_{\text{dB}} = -14\,\text{dB}$$

$$50\big|_{\text{dB}} = 34\,\text{dB} \qquad \frac{1}{50}\bigg|_{\text{dB}} = -34\,\text{dB}$$