Fichero de actividades didácticas

Matemáticas

Educación secundaria

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

El *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria* fue elaborado en la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública

Supervisión técnico-pedagógica

Dirección General de Materiales y Métodos Educativos
de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal

Coordinación general

Hugo Balbuena Corro

Autores

Hugo Espinosa Pérez
Silvia García Peña
Marco Antonio García Juárez

Colaborador

Juan Carlos Xique Anaya

Coordinación editorial

Elena Ortiz Hernán Pupareli

Cuidado de la edición

José Manuel Mateo
Alfredo Ramírez Membrillo

Producción editorial

Alejandro Portilla de Buen

Diseño y formación

Leticia Dávila Acosta

Primera edición, 1999
Segunda edición, 2000
Primera reimpresión, 2001
Segunda reimpresión, 2004 (ciclo escolar 2004-2005)

Argentina 28, Centro,
06020, México, D.F.

ISBN 970-18-4428-9

Impreso en México

Presentación

La Secretaría de Educación Pública ha preparado este libro para los maestros de matemáticas que trabajan en las escuelas secundarias del país y lo entrega gratuitamente como un apoyo que la SEP está obligada a ofrecer a quienes tienen a su cargo la enseñanza.

El presente fichero de actividades didácticas para los maestros de matemáticas de educación secundaria contiene, para cada grado, un conjunto de actividades que contribuyen al fortalecimiento del trabajo docente.

Este libro desarrolla un enfoque didáctico para la enseñanza, el estudio y el aprendizaje de las matemáticas al destacar formas de participación del maestro, posibles estrategias de los alumnos y alternativas para que dichas estrategias puedan evolucionar. Su propósito esencial es ofrecer ejemplos claros de cómo los maestros pueden ayudar a sus alumnos en el estudio de algunos temas centrales de los nuevos programas.

El libro no pretende señalar al maestro lo que debe hacer en cada una de sus clases, pues se reconoce que el éxito de toda propuesta didáctica pasa por la aprobación, el estilo propio y el deseo de superación de quien la lleva a cabo. Por esta razón, las actividades que se incluyen en el fichero permiten amplias posibilidades de adaptación a las formas de trabajo de cada maestro, a las condiciones en que labora y a las posibilidades de aprendizaje de los alumnos.

Las subsiguientes ediciones de este libro deberán ser corregidas, mejoradas y aumentadas a partir de los resultados de su utilización en la práctica. Para lograr este propósito, se ruega a los maestros enviar a la Secretaría de Educación Pública sus observaciones y propuestas.

Índice

Introducción

El *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria* es un material de apoyo, dirigido a los maestros de este nivel educativo, en el que se sugieren actividades de estudio para realizarlas con los alumnos.

Para el diseño de las actividades se consideraron, como punto de partida, el enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, diversos problemas que se proponen en el *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, la propuesta presentada en la *Secuencia y organización de contenidos* y algunas sugerencias de otros materiales que se consultaron. El fichero consta de 18 fichas por cada grado, las cuales representan una base sólida para que los profesores de matemáticas, a partir de su experiencia, puedan incorporar otras fichas y organicen el trabajo con sus alumnos de manera creativa e interesante durante el año lectivo.

El enfoque didáctico actual revalora el trabajo profesional del maestro, en tanto que su labor no se limita a transmitir información y calificar el desempeño de los alumnos, sino que implica también analizar situaciones relacionadas con los contenidos, organizar secuencias que favorezcan la evolución de los procedimientos de los alumnos, plantear problemas, socializar diferentes estrategias de solución y evaluar diferentes aspectos del proceso de estudio. La realización de las actividades que se proponen en el fichero favorece la práctica de estas tareas, de manera que este material de apoyo es una contribución más para la actualización del maestro.

Con base en su creatividad, el profesor puede modificar, enriquecer y llevar a cabo en su salón de clases las actividades propuestas, a partir de las cuales podrá planear otras situaciones que aborden los contenidos señalados en los programas de estudio.

Estructura de las fichas

Cada ficha inicia con un recuadro en el que se anotan los propósitos, los contenidos y, en algunos casos, el material. Los dos primeros se tomaron de la propuesta oficial de *Secuencia y organización de contenidos*. Por lo general, las fichas constan de dos o tres actividades después de las cuales se sugieren algunas variantes. En cada actividad se describen las indicaciones que el profesor debe dar inicialmente a los alumnos.

Posteriormente se mencionan algunos posibles procedimientos para resolver las situaciones, aunque es muy probable que los alumnos generen otros. Es importante que el profesor favorezca la confrontación de las diferentes alternativas que proponen los alumnos, al margen de que conduzcan o no al resultado correcto.

Sugerencias metodológicas para trabajar con las fichas

Cada uno de los problemas que se presentan en las fichas ha sido seleccionado para que los alumnos lo resuelvan con sus propios medios. Los procedimientos que se describen son únicamente un apoyo para que el profesor tenga oportunidad de prever lo que se espera. En ocasiones, sólo después de que los alumnos hayan resuelto los problemas, conviene agregar alguna información.

Antes de trabajar con una ficha es conveniente que el profesor la lea y resuelva los problemas que se plantean. Seguramente se le ocurrirán nuevas preguntas que ayuden a enriquecer la actividad.

Conviene dar el tiempo suficiente para que los alumnos resuelvan los problemas, de acuerdo con los conocimientos, destrezas y habilidades que posean.

Es necesario que mientras los alumnos intentan resolver los problemas, el profesor observe atentamente el trabajo que desarrollan, y que analice las conjeturas, las estrategias, los conocimientos que ponen en juego y el tipo de errores que cometen. Esto le permitirá apreciar lo que saben hacer y, en función de esto, dar sugerencias, hacer preguntas para profundizar en los temas o quizás plantear otros problemas. Este trabajo también aportará elementos que le ayuden a evaluar de manera formativa y continua.

Cuando la mayoría de los alumnos termine, el profesor debe animar a los equipos para que expliquen sus conjeturas, estrategias y resultados. Hay varias maneras de lograr que esta fase de la actividad provoque interés, en lugar de que se convierta en una carga repetitiva y monótona. Por ejemplo, cuando haya resultados distintos conviene anotarlos en el pizarrón y animar a los alumnos a averiguar cuáles son los correctos.

Para culminar las actividades, el profesor debe hacer las precisiones necesarias, ya sea para formalizar los conocimientos generados por los alumnos, dar a conocer un procedimiento más o aclarar posibles confusiones.

Es posible que los alumnos no estén acostumbrados a trabajar en equipos, ni a expresar o escuchar puntos de vista, pero si de manera sistemática se crea un ambiente de libertad y respeto, así como de autonomía en el trabajo, en poco tiempo se notará una actitud muy positiva hacia el estudio de las matemáticas.

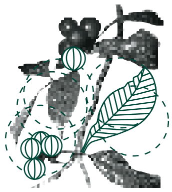
Es importante señalar la necesidad de que el profesor realice una evaluación de cada una de las fichas; esto es, llevar un registro en el que se anote, entre otras cosas, si los problemas planteados resultan un reto interesante para los alumnos, si los materiales didácticos fueron adecuados para las situaciones, si hubo necesidad de hacer modificaciones, cuáles fueron las dificultades para llevar a cabo las actividades, etcétera. Estas reflexiones serán útiles para el diseño de nuevas actividades acordes con el enfoque propuesto para la enseñanza de las matemáticas.

Los alumnos tienen la última palabra en cuanto al interés que despierten las actividades. Ojalá que este material anime a los profesores a elaborar otras fichas, así como a compartir experiencias con otros compañeros o compañeras, después de llevar a cabo las actividades con los alumnos.

1er grado

Tarjetas numéricas

Tema 1: Números naturales: lectura y escritura, orden y comparación, adición y sustracción



Propósito Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos.

Contenidos Lectura, escritura, orden y comparación de números naturales.

Material Seis tarjetas de cartulina de 7 cm x 4 cm por alumno.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos y pídales que preparen, por alumno, cinco tarjetas como las que se muestran.

millones | mil | seis | tres | ocho

Luego escriba en el pizarrón el siguiente problema:

> *Encuentren todos los números que puedan obtenerse combinando las cinco tarjetas y anótenlos en su cuaderno en orden de menor a mayor, con letra y con número.*

Los equipos empezarán a explorar las diferentes maneras en que pueden combinarse las tarjetas para escribir números que tengan sentido, por ejemplo:

seis | millones | tres | mil | ocho

Que se escribe:

6 003 008

Es probable que algunos equipos no encuentren todos los números que se pueden escribir con estos cinco nombres. Promueva un análisis colectivo para ver qué equipos encuentran más números distintos y cuáles tienen sentido y cuáles no.

Esta actividad permite que los alumnos exploren, conjeturen, validen ante sus compañeros la escritura y lectura de números, así como la comparación y el orden de los mismos. Además se inician en el trabajo con técnicas de conteo, aunque éstas no se hagan explícitas.

Enseguida, los representantes de equipo escribirán en el pizarrón (con cifras) los números hallados. Pida a los alumnos que determinen cuál es el número de menor valor y cuál el de mayor.

Si analizan los resultados escritos en el pizarrón notarán que existen doce números diferentes que pueden formarse.

Ocho millones seis mil tres	Tres millones ocho mil seis	Seis mil ocho millones tres
Ocho millones tres mil seis	Tres millones seis mil ocho	Seis mil tres millones ocho
Seis millones ocho mil tres	Ocho mil seis millones tres	Tres mil ocho millones seis
Seis millones tres mil ocho	Ocho mil tres millones seis	Tres mil seis millones ocho

De los doce números el de mayor valor es: 8 006 000 003

Y el de menor valor: 3 006 008

2 Pida a los alumnos que, nuevamente por equipos, reúnan las cinco tarjetas de la actividad 1 y agreguen una sexta con la palabra *ciento(s)*. Enseguida comente:

> *Encuentren la mayor cantidad posible de números que puedan formarse combinando de diferentes maneras las seis tarjetas y escríbanlos en su cuaderno con letra y número. Al finalizar veremos qué equipo encontró más números y cuál encontró el mayor y el menor posible.*

Aclare que los paréntesis indican que pueden usar el singular *ciento* o el plural *cientos*.

Resulta interesante que al agregar la tarjeta con la palabra *ciento(s)* el número de combinaciones posibles aumenta considerablemente. Por esta razón conviene establecer un tiempo límite para la actividad o bien establecer algunas restricciones como, por ejemplo, encontrar los mayores a mil millones o los menores a diez millones. Algunos números que construirán los alumnos son los siguientes:

seis	mil	ocho	cientos	millones	tres
tres	millones	ocho	mil	seis	cientos
ocho	mil	millones	seis	cientos	tres

Los alumnos podrán constatar que esta actividad da lugar a combinaciones con números del orden de los cientos de miles de millones, por ejemplo:

ocho	cientos	seis	mil	tres	millones

Éste es el número más grande que se puede formar con las seis tarjetas. Puede organizarse una competencia para ver qué equipo lo encuentra. Se sugiere que usted no valide las respuestas para que sean los alumnos quienes decidan cuál de los números propuestos por cada equipo es el mayor.

Variante

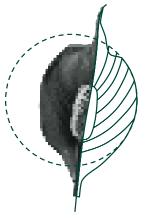
En vez de palabras, en las tarjetas pueden aparecer números. Por ejemplo:

8	7	5	6	0

Además de hallar las combinaciones posibles y el número de mayor valor, los alumnos pueden buscar el de menor valor, los números pares, los nones, los divisibles entre 5, entre 3, etcétera.

Dando tumbos

Tema 2: Dibujos y trazos geométricos



Propósitos Practicar trazos geométricos. Desarrollar la imaginación espacial.

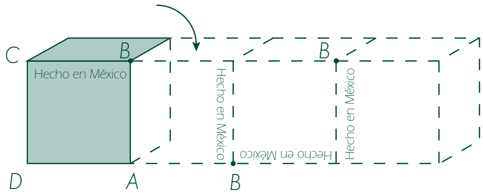
Contenidos Utilización de la regla graduada, compás y escuadras en la reproducción y trazo de diseños, patrones y figuras geométricas. Familiarización con el vocabulario y los trazos geométricos. Cálculo de áreas.

Material Juego de geometría, una caja en forma de cubo y colores.

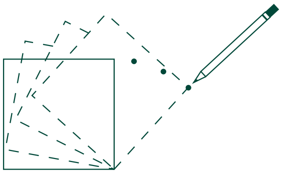
1 Organice al grupo en equipos de cinco integrantes y dibuje en el pizarrón la figura que se muestra en el planteamiento del problema. Explique a sus alumnos que la actividad consiste en encontrar y colorear diseños geométricos.

Luego plantee el siguiente problema:

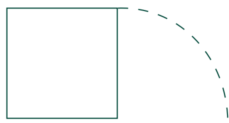
> *Hay que girar y trasladar una caja en forma de cubo de tal forma que en el primer movimiento la arista DC quede en la parte superior, en el segundo quede a la derecha, luego abajo, después a la izquierda y así sucesivamente. Observen la trayectoria que sigue el punto B en cada movimiento. Dibujen la trayectoria y remárquenla con color. Comparen las figuras que obtuvieron.*



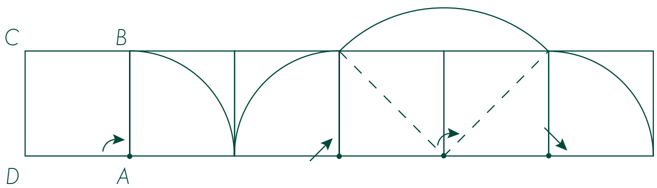
Mientras los estudiantes exploran el problema, observe sus acciones, cuestiónelos sobre la figura que están obteniendo y anímelos a continuar. Una vez que la mayoría haya terminado, confronte las diversas formas de solución.



Una estrategia de solución puede ser que recorten un cuadrado de papel o cartulina para representar la cara de la caja y lo hagan girar sobre una recta marcando con puntos la trayectoria del punto *B*.



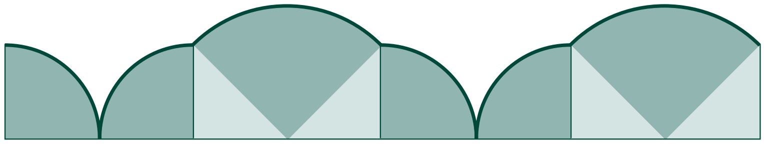
Otra estrategia de solución puede ser que los alumnos utilicen directamente escuadra y compás, considerando que todas las trayectorias están formadas por arcos de circunferencia debido a que la caja gira en todos los casos en función de una de sus aristas.



Lo importante es considerar las soluciones que aporten los estudiantes, sólo a partir de ellas introduzca los términos geométricos apropiados tales como circunferencia, centro, radio, ángulo, arista, puntos u otros que surjan.

2 Una vez obtenida la figura básica al trasladar el punto *B*, dibújela en el pizarrón y pida a los estudiantes que la reproduzcan varias veces en su cuaderno sobre una línea recta utilizando su juego geométrico y la coloreen a su gusto. Cuando la mayoría haya terminado pida que algunos estudiantes pasen al frente a mostrar su diseño y comenten cómo obtuvieron la figura.

Un ejemplo de estrategia de reproducción del diseño consiste en dibujar varios cuadrados y trazar después convenientemente con el compás los arcos como se muestra:



Lo importante es que a partir de las estrategias de reproducción, introduzca y precise la idea de regularidad o patrón geométrico, y que confronte las diversas maneras de utilizar las escuadras y el compás.

3 Una vez clarificada la idea de patrón o de regularidad geométrica escriba en el pizarrón este problema:

> Suponiendo que la caja siguiera dando tumbos en línea recta, ¿en qué posición quedará el letrero de la caja en el décimo tumbo? ¿Y en el centésimo tumbo? ¿Y en el milésimo primer tumbo?

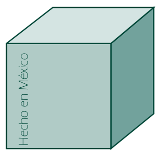
Indíqueles que individualmente intenten resolver el problema de la manera que quieran y después comparen y comenten sus resultados en el equipo. Finalmente deben elegir el procedimiento que consideraron más adecuado. Cuando la mayoría haya terminado, un representante de cada equipo pasará al frente a explicar su estrategia de solución. Por ejemplo, un equipo pudo haber observado que en las diferentes orientaciones del letrero existe una regularidad numérica: el letrero está a la derecha en los tumbos 2, 6, 10...

↑	→	↓	←	↑	→	↓	←	↑	→
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

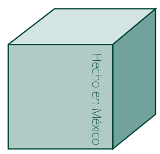
Otro equipo pudo haber representado la regularidad utilizando los puntos cardinales:

N	E	S	O	N	E	S	O	N	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

En ambas estrategias se puede apreciar que cuando el letrero está a la derecha aparecen múltiplos de cuatro más dos: 2, 6, 10... Mientras que cuando el letrero está a la izquierda aparecen múltiplos de cuatro: 4, 8, 12...



De tal manera que para saber la posición del décimo tumbo de la caja basta dividir 10 entre cuatro y ver el residuo, con lo que se determina que 10 es múltiplo de cuatro más dos, y por tanto el letrero está a la derecha.



4 Pida a los alumnos que calculen el área de la figura básica que se obtiene en la actividad 2.

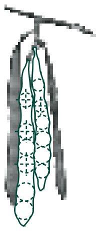
VARIANTES

Dependiendo del tiempo y las condiciones del grupo, proponga a los alumnos otras variantes de estas actividades aumentando el nivel de complejidad.

1. ¿Qué camino sigue el punto medio de la arista *AB*? Hagan lo mismo que en las actividades 1, 2, 3 y 4.
2. ¿Qué camino sigue el centro de la cara *ABCD*? Hagan lo mismo que en las actividades 1, 2, 3 y 4.
3. Construyan un pentágono regular. Investiguen la trayectoria que describe el punto medio de uno de sus lados al rotarla a lo largo de una línea recta.

¿Qué tan cerca?

Tema 3: Números naturales: multiplicación



Propósitos Enriquecer el significado de los números y sus operaciones. Utilizar la calculadora como auxiliar en la resolución de problemas y practicar el cálculo mental y la estimación de resultados.

Contenidos Practicar la estimación, el cálculo mental de resultados y los algoritmos, así como el uso de la calculadora.

Material Calculadora.

1 La actividad se realiza entre pares de equipos de cuatro alumnos cada uno. Solicite a dos alumnos (A y B), de dos equipos, que pasen al frente con su calculadora. Después explique la actividad.

A propone a *B* que estime el resultado de una multiplicación de cantidades de dos dígitos y que la anote en el pizarrón; por ejemplo 18 x 73.
Mientras *B* hace su estimación, *A* resuelve con la calculadora la operación (18 x 73 = 1 314). Si, por ejemplo, *B* considera que el resultado es 1 400, *A* efectúa con la calculadora la resta 1 400 – 1 314 = 86; esta diferencia se traduce en puntos a favor de *A*, quien propuso la operación.
Enseguida se invierten los papeles, es decir, ahora es *B* quien propone una multiplicación y *A* quien lleva a cabo la estimación; en este caso la diferencia entre el resultado exacto de la multiplicación propuesta y la estimación se considerará como puntos a favor de *B*. Después de que cada equipo proponga cinco operaciones, gana el que obtiene más puntos.
Una vez ejemplificada la actividad, los alumnos la realizarán por pares de equipos (uno contra otro).

Al inicio del juego las estimaciones de los alumnos estarán alejadas del resultado exacto, pero seguramente en el transcurso del juego afinarán sus estrategias para estimar.

Para hacer sistemático el desarrollo de la estimación pregunte a un alumno o al equipo cómo procedió. Si lo considera conveniente, primero los miembros de cada equipo pueden comentar entre sí sus estrategias y después los equipos que se enfrentan pueden comparar sus procedimientos. Posteriormente los equipos pueden comentar con todo el grupo la o las estrategias que siguieron para hacer su estimación; algunas estrategias posibles son:

Primero se redondea y luego se multiplica, es decir:

$$18 \times 73 \approx 20 \times 70 = 1\,400$$

Primero se redondea, se opera y luego se compensa; esto es:

$$18 \times 73 \approx 20 \times 70 = 1\,400;\ 1\,400 + 18 = 1\,418.$$

Agregan 18 porque disminuyen en 3 al 73 y aumentan sólo en 2 al 18.

2 Organice al grupo en equipos y comente que para esta actividad también se requiere una calculadora. Aclare que se enfrentarán pares de equipos. Explique:

Los equipos van a hacer estimaciones combinadas de resultados de multiplicaciones, sumas y restas.
El equipo que proponga las operaciones debe anotar la cadena de operaciones, por ejemplo:

$$23 + 78 \times 37, \text{ o bien } 23 - 78 \times 37.$$

El equipo que propuso las operaciones anotará como puntos a su favor la diferencia entre el resultado exacto y el estimado por el equipo contrario.
Después de cinco rondas, gana el equipo que obtiene más puntos.

Al igual que en la actividad 1, es conveniente que observe y cuestione a los equipos o alumnos para que expliquen los procedimientos utilizados para estimar.

Seguramente para estimar la cadena 23 + 78 x 37 algún equipo procederá como sigue:

$$23 + 78 \times 37 \approx 20 + 80 \times 30 = 100 \times 30 = 3\,000$$

También sucederá que una vez hecha la estimación se proceda a comprobar el resultado utilizando una calculadora que respete la jerarquía de las operaciones; se obtendrá:

$$23 + 78 \times 37 = 2\,909$$

Esta situación puede aprovecharse para mostrar la necesidad de usar los paréntesis a fin de que las expresiones no se presten a diferentes interpretaciones, de manera que la operación se escriba (23 + 78) x 37, para indicar que primero debe hacerse la suma, o bien 23 + (78 x 37) si se quiere hacer primero la multiplicación.

Algunos alumnos pueden estimar 23 + (78 x 37) como se indica a continuación.

Redondean todas las cantidades y luego operan:

$$23 + (37 \times 78) \approx 20 + (40 \times 80) = 3\,220$$

En otros equipos sólo redondean los números que intervienen en la multiplicación:

$$23 + (37 \times 78) \approx 23 + (40 \times 80) = 3\,223$$

En otros equipos redondean a cantidades que pueden operarse mentalmente:

$$23 + (37 \times 78) \approx 23 + (35 \times 80) = 23 + (2\,800) = 2\,823$$

3 Comente que para realizar esta actividad utilizarán la calculadora y que de nueva cuenta van a trabajar entre pares de equipos; después explique:

> Un equipo propone un número terminado en ceros, por ejemplo, 1300. El otro equipo debe estimar una multiplicación de dos o de tres factores de manera que al efectuar las operaciones el resultado se aproxime al número dado.
> La diferencia entre el número dado y el resultado de las multiplicaciones se adjudica como puntos a favor al equipo que propuso el número.

Para realizar esta actividad, los alumnos pueden utilizar diferentes estrategias; por ejemplo, para 1300 es posible que se den soluciones como las siguientes:

1 300 ≈ 700 x 2
1 300 ≈ 600 x 2
1 300 ≈ 800 x 2
1 300 ≈ 10 x 10 x 10
1 300 ≈ 100 x 13

En el desarrollo de esta actividad los alumnos se darán cuenta de que siempre es posible encontrar factores que den el resultado exacto. En el caso del ejemplo, pueden obtenerse a partir de multiplicaciones como las siguientes:

1 300 = 100 x 13
1 300 = 10 x 10 x 13

Variantes

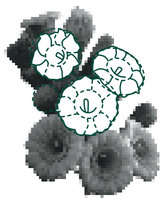
Las actividades se realizan entre pares de equipos:

1. Un equipo propone multiplicaciones como 23 x 45 x 72 y el otro equipo hace la estimación del producto.
2. Un equipo propone multiplicaciones como (23 + 36) x (45 + 72) y el otro equipo hace la estimación.
3. Un equipo dice: al multiplicar 27 por otro número resultó 950, ¿qué número es el que multipliqué por 27?

En cada una de las variantes, la diferencia entre el resultado exacto y el estimado se anotan como puntos para aquel equipo que haya propuesto la operación.

Múltiplos y divisores

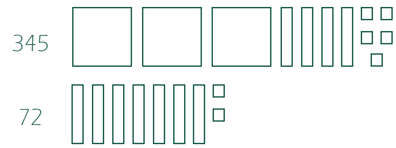
Tema 4: Números naturales: división, múltiplos y divisores



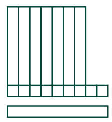
Propósitos	Enriquecer el significado de los números naturales. Uso de la calculadora.
Contenidos	Problemas para que los alumnos exploren la relación entre múltiplos y divisores.
Material	*Calculadora, cuadrados de 20 cm x 20 cm, rectángulos de 20 cm x 2 cm, cuadrados de 2 cm x 2 cm y rectángulos de 18 cm x 2 cm.

1 Organice el grupo en parejas y después explique la siguiente situación:

a) Representen con el material cantidades de tres cifras y dos cifras como las siguientes: 345, 178, 99, 38, 36, 17, 72..., como se indica:



b) Utilizando rectángulos de 9 cm x 1 cm, traten de cubrir los cuadrados, rectángulos y cuadrados pequeños que representa cada número; por ejemplo, el número 72 puede cubrirse así: para cubrir las decenas, se utilizan 7 rectángulos de 9 cm x 1 cm, con lo cual restan 7 cuadritos para llegar al número 70; utilizando otro rectángulo de 9 cm x 1 cm se completan las decenas hasta 70, y sobran 2 cuadritos. En consecuencia, el número 72 se cubre con 8 rectángulos de 9 cm x 1 cm.



¿Qué clase de números se pueden cubrir con los rectángulos de 9 cm x 1 cm? Encuentren una regla que les permita decir cuándo un número se puede cubrir sin necesidad de representarlo con material.

La idea central es que los alumnos observen que al cubrir una centena, ésta siempre se puede cubrir con 11 rectángulos de 9 cm x 1cm y sobra un cuadrito; asimismo al cubrir una decena también sobra un cuadrito.

Lo anterior llevará a los alumnos a tomar en cuenta el número de cuadritos que sobran y ver si estos pueden ser cubiertos con los rectángulos de 9 cm x 1 cm; por ejemplo, al cubrir con rectángulos el número 345, sobran 3 cuadritos (uno de cada centena); 4 cuadritos (uno de cada decena) y 5 cuadritos, lo que hace un total de 12 cuadritos. De estos sólo se pueden cubrir 9, por lo que 345 no se puede cubrir con los rectángulos de 9 cm x 1 cm.

Proponga varios números y solicite a los alumnos que hagan un registro de aquellos que se pueden cubrir, de esta manera al analizarlos podrán responder a la última pregunta.

Es posible que algunos alumnos consideren que los números que se pueden cubrir son los múltiplos de 3. Para mostrar que no es cierto, solicite que propongan varios múltiplos de 3 para que observen que esto no siempre es correcto, aunque sí sucede que todo número que es divisible entre 9 también es divisible entre 3.

Finalmente, si es que los alumnos no pueden expresar la regla que permite saber cuándo un número es divisible entre 9, oriéntelos para que lo hagan entre todo el grupo.

El mismo problema puede plantearse para que los alumnos encuentren la regla de divisibilidad entre 3, con la variante siguiente: determinar qué clase de números pueden cubrirse con rectángulos de 3 cm x 1 cm.

2 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos. Comente que van a utilizar una calculadora para resolver la siguiente situación:

a) Consideren números con cualquier cantidad de dígitos. Dividan a cada uno de estos números entre 2. ¿Qué características tienen los números cuyo residuo es cero al dividirse entre 2? Encuentren una regla que les permita saber cuándo un número es divisible entre 2.

b) Consideren números con cualquier cantidad de dígitos. Dividan a cada uno de estos números entre 5. ¿Qué características tienen los números cuyo residuo es cero al dividirse entre 5? Encuentren una regla que les permita saber cuándo un número es divisible entre 5.

* Si no es posible disponer del material, esta actividad puede llevarse a cabo proponiendo que la realicen con dibujos.

Cuando la mayoría de los equipos haya formulado sus reglas, anótelas en el pizarrón, analice con el grupo las diferencias y en caso necesario verifique si son correctas o no.

3 Con la misma organización de la actividad 2, plantee a los alumnos los siguientes problemas:

a) Si consideran números que son divisibles entre 2 y también son divisibles entre 3, ¿entre qué otro número también son divisibles esos números?
b) Si consideran números que son divisibles entre 3 y también son divisibles entre 5, ¿entre qué otro número también son divisibles esos números?
c) Si consideran números que son divisibles entre 2, entre 3 y entre 5 respectivamente, ¿entre qué otro número también son divisibles esos números?

Algunos equipos pueden hacer una lista de números que satisfagan las condiciones de cada uno de los incisos y analizarlos después para establecer alguna o algunas conjeturas.

Si lo considera conveniente, a los equipos que no propongan una manera sistemática de contestar las preguntas, puede proponerles que elaboren una tabla y en ella iluminen con algún color los números que cumplen con las condiciones. Lo anterior permitirá a los alumnos responder a cada una de las preguntas.

4 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos y a continuación proponga las siguientes preguntas:

En una tabla como la siguiente, anoten los cinco primeros múltiplos (distintos de cero) de 6 y de 8.

Número consecutivo	Múltiplos de 6	Múltiplos de 8
1	6	8
2	12	16
3		24
4		32
5		40

a) ¿Cuál es el décimo múltiplo de 6?
b) ¿Cuál es el décimo múltiplo de 8?
c) El 512 es múltiplo de 8, ¿en qué lugar aparecerá en la tabla?, ¿y qué múltiplo de 6 estará colocado en ese mismo lugar?
d) El 4 734 es múltiplo de 6, ¿en qué lugar aparecerá en la tabla?, ¿y qué múltiplo de 8 es el que aparecerá en el mismo lugar?
e) ¿Cuál es el menor múltiplo común de 6 y de 8?

Para responder las preguntas de los incisos *c)* y *d)*, los alumnos pueden multiplicar (con la calculadora o con lápiz y papel) el número 8 por otros números hasta dar con el 64, y después multiplicar éste por 6 para obtener el múltiplo que se pide.

Otros alumnos se darán cuenta de que si dividen 512 entre 8 obtienen el lugar en el que está colocado ese múltiplo de 8. Puede aprovechar esta situación para hacer la relación entre múltiplo y divisor.

La última pregunta lleva a los alumnos a la idea de mínimo común múltiplo. En este momento no se pretende que los alumnos lo obtengan mediante la descomposición en primos, sino a partir de una lista de los múltiplos de cada uno de los números. Si lo considera conveniente, puede proponer otros pares de números que tengan ciertas relaciones; por ejemplo, que uno sea múltiplo del otro, que sean primos relativos, etcétera.

VARIANTE

Puede proponer a los alumnos la siguiente actividad:

Digan si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas. En cada caso den ejemplos que confirmen o contradigan su respuesta.

a) Si un número es divisible entre 2, también es divisible entre 4.
b) Si un número es divisible entre 3, también es divisible entre 9.
c) Si un número es divisible entre 9, también es divisible entre 3.
d) Cualquier múltiplo común de 3 y 5 es divisible entre 15.
e) El menor múltiplo común de dos números siempre se obtiene multiplicando dichos números.

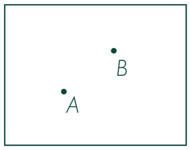
Geometría con papel

Tema 5: Figuras básicas y ángulos

Propósitos	Explorar las propiedades de las figuras. Apropiarse gradualmente del vocabulario básico de la geometría.
Contenidos	Actividades y problemas que lleven a utilizar las definiciones y a trazar figuras básicas. Uso de escuadras para verificar perpendicularidad y paralelismo.
Material	Dos hojas blancas tamaño carta, escuadras y compás (por alumno).

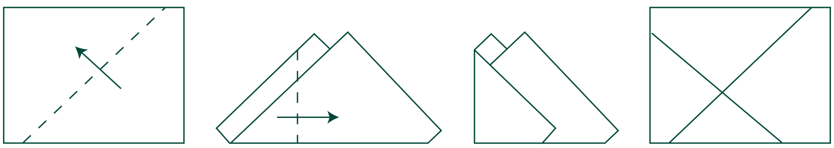
1 Organice al grupo en equipos de cinco alumnos y coménteles que en esta actividad realizarán trazos geométricos con sólo doblar hojas de papel. Luego escriba el siguiente problema en el pizarrón:

> *En la primera hoja marquen dos puntos cualesquiera, A y B. Sólo con dobleces construyan un rectángulo cuya base sea el segmento AB.*



Se sugiere dejar en completa libertad a los alumnos para que exploren el problema mientras usted observa el trabajo del grupo. Cuando la mayoría haya terminado, pasará al frente un miembro del equipo que haya encontrado el resultado y explicará a sus compañeros cómo procedieron. Cabe esperar más de un procedimiento.

Una condición necesaria para esta actividad es saber trazar rectas perpendiculares por medio del doblado de papel. Es posible que algún equipo haya encontrado la siguiente manera de hallar perpendiculares sólo con dobleces:



En este caso puede aprovechar la situación para explicar la idea de perpendicularidad y ángulo recto, así como el uso de escuadras para comprobar que los dobleces que han quedado marcados son perpendiculares.

Mientras los alumnos explican los procedimientos que utilizaron es conveniente que pregunte si la figura encontrada es realmente un rectángulo y en su caso comprobarlo (a los alumnos se les puede ocurrir, por ejemplo, hacerlo con ayuda de escuadras).

Cabe señalar que este problema tiene muchas soluciones (rectángulos con base *AB* y diferentes alturas).

Éste puede ser el momento para precisar lo que son rectas paralelas, rectángulo y algunas de sus propiedades y características.

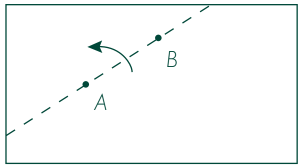
2 Para la segunda hoja, indique:

> *Marquen dos puntos cualesquiera (A y B) y hagan los dobleces necesarios para encontrar un cuadrado cuya diagonal sea el segmento AB.*

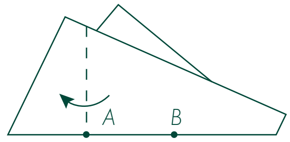
El tratamiento de este problema es el mismo que en la actividad anterior.

Existen varias formas para hallar el cuadrado; a continuación se muestra una de ellas:

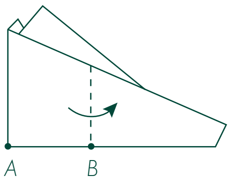
a) Se dobla el papel hacia atrás para marcar la recta que pasa por *A* y por *B*. Las letras deben quedar a la vista.



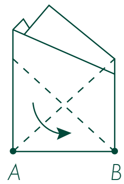
b) Se dobla hacia atrás por *A* para marcar una perpendicular.



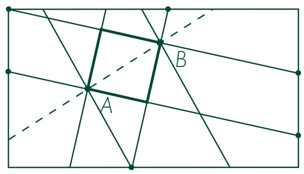
c) Se dobla por *B* para marcar otra perpendicular.



d) Se dobla para marcar la bisectriz del ángulo *A*. Se deshace este doblez y se marca la bisectriz del ángulo *B*.



e) Se desdobla toda la hoja. El cuadrado cuya diagonal es *AB* queda marcado como se muestra en la figura.



Nótese que esta construcción permite explorar los conceptos *bisectriz* y *diagonal* así como algunas propiedades del cuadrado. Es necesario insistir en que las soluciones propuestas por los alumnos (correctas o erróneas) serán las que guíen la introducción de conceptos.

Si se proponen otras soluciones habrá que analizar los términos, nociones, conceptos, etcétera, que se pueden retomar o introducir.

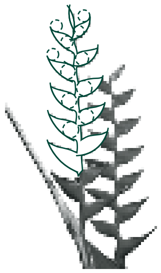
Los alumnos pueden cometer distintos errores, entre los que se encuentran el trazar *a ojo* las figuras (lo que sería equivalente, por ejemplo, a trazar paralelas sin un procedimiento que garantice que son paralelas), que los dobleces no se hayan hecho con precisión, o bien que siguiendo incluso una secuencia correcta no se llegue al resultado esperado, en este último caso usted debe animar a sus alumnos a obtener con mayor precisión las figuras.

VARIANTES

1. Puede solicitar a los alumnos que, con sus instrumentos de geometría, reproduzcan las figuras que encontraron con dobleces.
2. Cada alumno describe por escrito la secuencia que siguió para construir alguna de las figuras y uno de sus compañeros lleva a cabo la construcción siguiendo sus pasos. Debe verificarse que, efectivamente, se obtiene la figura deseada. De no ser así, se debe discutir en dónde estuvo la falla (en las instrucciones o en la ejecución de las mismas).

El corredor

Tema 6: Números decimales: Lectura y escritura, orden y comparación, adición y sustracción



Propósitos	Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Utilizar la calculadora como un auxiliar en la solución de problemas.
Contenidos	Orden y comparación de números decimales. Acotación de un número decimal entre dos naturales y entre dos números con una cifra decimal. Adición y sustracción de números decimales.
Material	Calculadora (opcional).

1 Organice al grupo en equipos de tres alumnos y proponga que resuelvan el siguiente problema:

> Carlos es un corredor que entrena diariamente; no sabe de manera exacta cuántos kilómetros corre, pero según cree:
>
> el lunes corrió entre 3.4 km y 4.1 km,
>
> el martes entre 2.9 km y 3.2 km,
>
> y el miércoles entre 3.1 km y 3.8 km.
>
> Contesta:
>
> a) Si sumas lo que corrió el lunes y el martes, ¿entre qué números estará el total?
>
> b) Y si sumas lo que corrió los tres días, ¿entre qué números estará el total?

Dé tiempo suficiente para que los alumnos comenten en equipo, hagan conjeturas, traten de hallar la respuesta a la pregunta *a)* y encuentren los intervalos que se piden en las dos preguntas.

Para la pregunta *a)*, los equipos notarán que existen varias respuestas correctas, debido a los datos con los que se cuenta.

Si a algún equipo se le ocurre considerar un número cualquiera, pero que esté entre los intervalos especificados, la respuesta no puede desecharse como incorrecta.

Por ejemplo:

3.5 km el lunes + 3 km el martes = 7.5 km

O bien:

4 km el lunes + 3.1 km el martes = 7.1 km

Ambas pueden ser correctas. Éste será un buen ejemplo de problemas en los cuales la solución no es única. Lo que se debe cuidar es que, cuando los alumnos pasen a confrontar sus resultados, argumenten ante sus compañeros que su respuesta es factible.

Para saber entre qué números está el total, posiblemente a uno o más equipos se les ocurra sumar los límites que se están dando y razonen así:

Lunes 3.4 km y 4.1 km

Martes 2.9 km y 3.2 km

Entonces lo que corrió lunes y martes es: (3.4 km + 2.9 km) y (4.1 km + 3.2 km).

Esto es, lunes y martes corrió en total una distancia de entre 6.3 km y 7.3 km. Lo cual es correcto.

Una forma de validar esta respuesta es comparándola con la de otros equipos.

También se pueden dar algunos ejemplos tomando números entre los intervalos señalados para los días lunes y martes.

Por ejemplo:

Lunes	Martes	Suma
3.5 km	3 km	6.5 km
3.8 km	3.1 km	6.9 km
4 km	3 km	7 km

Una vez comentada la solución a la pregunta *a)*, la pregunta *b)* constituye una extensión de la anterior y es casi seguro que los alumnos propongan que deben sumarse los límites dados para los tres días. La respuesta es:

(3.4 km + 2.9 km + 3.1 km) y (4.1 km + 3.2 km + 3.8 km)

Por lo tanto, la distancia que corrió en los tres días está entre:

9.4 km y 11.1 km

Durante el desarrollo de esta actividad, además de que el alumno explora, conjetura y argumenta sus respuestas, se practica la acotación de números decimales, así como el orden, la comparación y el algoritmo de la suma de este tipo de números.

2 Nuevamente, organizados en equipos, invite a sus alumnos a responder la siguiente pregunta, tomando como base los datos de la actividad 1.

> *¿Entre qué números estará la diferencia de lo que corrió Carlos el lunes con respecto a lo que corrió el martes?*

Como los alumnos se basan en los datos de la actividad 1 quizá crean que la diferencia está entre:

(3.4 km – 2.9 km) y (4.1 km – 3.2 km).

Es decir: 0.5 km y 0.9 km.

Bastará un ejemplo para demostrar que el razonamiento anterior es falso. Ayude a los alumnos a descubrirlo.

Por ejemplo, si suponemos que el lunes corrió 4 km y el martes 3 km (ambos números están en los intervalos de los datos) tenemos que:

Lunes	Martes	Suma
4 km	3 km	1 km

La diferencia (1 km) *no* se encuentra en el intervalo de 0.5 km y 0.9 km.

Una vez que se haya demostrado que la respuesta anterior no es correcta, dé más tiempo a los alumnos para que sigan explorando la solución.

Un buen razonamiento es el siguiente: si primero supongo que el lunes corrió el menor número de kilómetros (3.4) y el martes el mayor (3.2 km), restando ambos números encontramos la diferencia mínima (0.2 km); de la misma manera, si suponemos que el lunes corrió el mayor número de kilómetros (4.1 km) y el martes el menor (2.9 km) hallamos la diferencia máxima (1.2 km).

La diferencia que se pide está entre los números:

0.2 km y 1.2 km.

Variante

La misma actividad resulta interesante si se piden no sólo sumas y diferencias sino también productos, cocientes y combinación de estas operaciones (que se estudian en los temas 8 y 10).

Por ejemplo: *A* está entre 2.4 y 5.6
B está entre 3.1 y 7.6
Entre qué números están: *A* + *B*, *A* – *B*, *AB*.

¿Cómo es y dónde está?

Tema 7: Representación gráfica

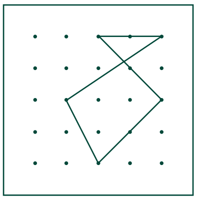
Propósitos Explorar algunas propiedades de las figuras. Apropiarse gradualmente del vocabulario básico de la geometría.

Contenidos Iniciación al plano cartesiano: coordenadas de un punto en el primer cuadrante.

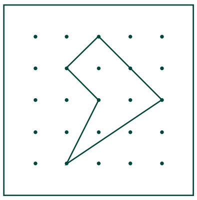
Material Geoplano y ligas (por alumno).

1 Organice al grupo en parejas o en equipos de cuatro y proponga la siguiente actividad:

> Uno de ustedes construirá en su geoplano un polígono irregular de más de cuatro lados e indicará, por escrito, la manera de construir la figura para que, sin verla, su compañero la reproduzca exactamente y en la misma posición en otro geoplano. Al finalizar la construcción compararán ambos polígonos. No se aceptan polígonos donde la liga se cruce, por ejemplo:



Es probable que los alumnos den indicaciones poco precisas, por lo que será difícil que su compañero reproduzca el polígono exactamente. Sin embargo, cabe la posibilidad de que algún alumno utilice expresiones parecidas a las coordenadas para ubicar los vértices del polígono. Por ejemplo: *Coloca la liga en el clavo que está arriba y al centro, llévala hasta el clavo que está en el extremo derecho y al centro, etcétera*.



Si alguna pareja logra que los polígonos sean iguales o muy semejantes, invítelos a que platiquen ante el grupo cuáles fueron las indicaciones.

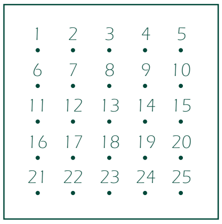
En esta actividad se promueve la habilidad de comunicación en matemáticas, lo que permite precisar el manejo del lenguaje propio de la geometría.

2 Nuevamente organizados por parejas, indique:

> Uno de ustedes construirá en su geoplano un polígono irregular de más de cuatro lados. Escribe las indicaciones para que tu pareja lo reproduzca exactamente y en la misma posición en su geoplano. Gana el que logre el mensaje más breve y que funcione.
> No se permite decir:
>
> - El nombre del polígono
> - El número de lados
> - La longitud de los lados
> - La posición de los lados

Se pretende que esto lleve al alumno a la localización de puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Es probable que algunas parejas numeren los puntos y utilicen el número que corresponde a cada punto para describir la posición en que se encuentra la figura.

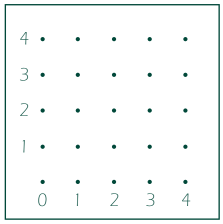


En este caso haga notar a los alumnos que este procedimiento sería difícil de aplicar si el geoplano fuera más grande, por ejemplo, de 11 x 11 puntos.

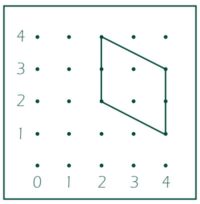
Otras parejas quizás utilicen expresiones como las siguientes, con un referente fijo o variable:

5 a la derecha
3 a la izquierda

Quizá algunos alumnos utilicen lo que saben sobre el plano cartesiano para llevar a cabo esta actividad.



De esta manera darán las indicaciones a partir de las coordenadas que determinan los vértices del polígono; por ejemplo, un vértice está en el punto (2, 4), el siguiente está en el punto (4, 3), el siguiente vértice se localiza en (4,1), etcétera.



Es importante que una vez que los alumnos hayan finalizado la actividad, confronten las diversas estrategias que utilizaron y discutan la funcionalidad de cada una. El propósito fundamental es que lleguen a ubicar los vértices de la figura y tracen la misma utilizando coordenadas cartesianas. Así podrán comparar este recurso con otros que tal vez resulten menos eficientes.

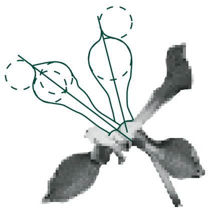
VARIANTES

Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades:

1. Escriban un mensaje con el que se pueda construir un polígono irregular de seis lados.
2. Escriban mensajes con los que no se pueda construir un pentágono irregular.
3. Escriban mensajes que produzcan una línea recta.

Magia con decimales

Tema 8: Números decimales: multiplicación



Propósitos Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Utilizar la calculadora como un auxiliar en la solución de problemas. Practicar los algoritmos de las operaciones, así como el cálculo y la estimación mental de resultados.

Contenidos Uso de la calculadora y revisión del algoritmo de la multiplicación. Problemas que conducen a multiplicar dos o más decimales, o bien a multiplicaciones combinadas con adiciones y sustracciones.

Material Calculadora (opcional).

1 Organice a los alumnos en parejas y proponga el siguiente problema:

Escriban los números 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 dentro de las casillas del siguiente cuadrado, de tal manera que la suma de cada columna, renglón o diagonal sea 21.

Puede sugerir a los alumnos que elaboren nueve tarjetas y escriban en ellas los números para que, de esta manera, puedan manipularlos fácilmente, esto ayudará a no estar borrando sus intentos de resolución (las tarjetas pueden ser de cualquier tamaño).

Espere un tiempo suficiente para que los alumnos exploren diferentes maneras de colocar los números hasta que den con la solución.

Una vez que hayan terminado, los equipos expondrán la solución encontrada al grupo. Algunos arreglos que pueden surgir son los siguientes:

4	9	8
11	7	3
6	5	10

6	11	4
5	7	9
10	3	8

8	3	10
9	7	5
4	11	6

Un análisis cuidadoso de las *diferentes respuestas* hará que los alumnos observen que en realidad se trata de la misma solución pero rotando los números que están en la superficie del cuadrado.

2 Organizados en parejas, como continuación de la actividad 1 y utilizando como base el cuadrado mágico construido, proponga a los alumnos la siguiente situación:

¿Qué sucederá si sumamos el mismo número a cada uno de los números de un cuadrado mágico? Tomemos como ejemplo el cuadrado que ya construimos.

10	3	8
5	7	9
6	11	4

Deje que los alumnos trabajen y descubran qué pasa. Lo más probable es que, para explorar, los alumnos hayan elegido sumar números naturales y hayan obtenido cuadrados como los siguientes:

(Sumando 2)

12	5	10
7	9	11
8	13	6

(Sumando 5)

15	8	13
10	12	14
11	16	9

(Sumando 10)

20	13	18
15	17	19
16	21	14

Se espera que los estudiantes observen que se genera otro cuadrado mágico. Será interesante que analicen cuál es la suma del nuevo cuadrado y qué relación guarda con la suma del cuadrado original.

Sería ideal que a algún equipo se le hubiera ocurrido sumar un número decimal, por ejemplo 0.5, y que obtengan:

10.5	3.5	8.5
5.5	7.5	9.5
6.5	11.5	4.5

Con lo cual ya estaríamos trabajando con los números que queremos tratar en este tema. Si a ningún equipo se le ocurre trabajar con decimales, entonces plantee la posibilidad:

- ¿El cuadro funcionará también sumando decimales?
- ¿Podremos generar cuadrados mágicos con números decimales?

Dé tiempo para que los alumnos exploren el problema, hagan conjeturas y discutan en grupo qué sucede con los números decimales en este problema.

3 Forme ternas. Los alumnos seguirán explorando la construcción de cuadrados mágicos. Ahora se tomará como base alguno de los cuadrados con números decimales que hayan resultado en la actividad 2. Invite a los alumnos a que investiguen:

- *¿Qué pasará si multiplicamos por un número decimal cada uno de los números de un cuadrado mágico con decimales?*

Cada terna escogerá cualquiera de los cuadrados mágicos que hayan surgido en la actividad anterior y también escogerá el número decimal que será el multiplicador.

En este proceso se dejará que los alumnos utilicen la calculadora para hacer las multiplicaciones y, en general, las operaciones necesarias; no obstante, se podrá aprovechar también para repasar el algoritmo.

Un ejemplo de lo que pueden hacer es el siguiente, que se ha obtenido tomando como base el cuadrado mágico que se ilustra arriba –resultado de sumarle un número decimal (0.5) al cuadrado original de la actividad 2– y multiplicando por 0.2 cada uno de los números.

2.1	.7	1.7
1.1	1.5	1.9
1.3	2.3	.9

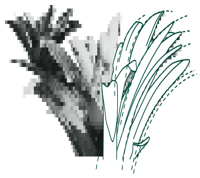
En este ejemplo también será interesante averiguar cuál es la suma en el nuevo cuadrado mágico (4.5 en este caso) y qué relación guarda con la suma en el cuadrado del cual se originó (22.5) y con el número que se escogió como multiplicador.

VARIANTES

1. Organice por parejas a los alumnos. Cada uno debe construir un cuadrado mágico sin que su compañero lo vea. Después cada alumno entrega a su compañero la lista de números utilizados y el cuadrado mágico, en el que sólo ha anotado algunos de ellos, para que su compañero lo complete y resuelva.
2. Después de que hayan estudiado fracciones (tema 16) los alumnos pueden expresar los cuadrados mágicos con decimales como fracciones comunes simplificadas, y de esa manera generar cuadrados mágicos con fracciones.

¿Cuántos ejes?

Tema 9: Simetría axial



Propósitos	Explorar las propiedades de las figuras y apropiarse gradualmente del vocabulario básico de la geometría. Practicar los trazos geométricos mediante el uso de instrumentos de dibujo.
Contenidos	Determinación y trazado de los ejes de simetría de una figura.
Material	Geoplano, ligas y espejo por cada equipo.

1 Organice a los alumnos en cuatro equipos. A manera de ejemplo, formen en el geoplano un triángulo con un solo eje de simetría y señalen el eje. Enseguida plantee una de las siguientes actividades a cada equipo.

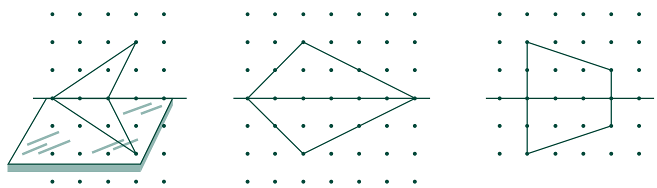
> Formen, en el geoplano:
> a) Triángulos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
> b) Cuadriláteros distintos que tengan sólo un eje de simetría.
> c) Pentágonos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
> d) Hexágonos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
>
> Después digan qué características tienen esas figuras.
> Pida que se busque el mayor número posible de figuras con esas características. Ganará el equipo que lo consiga.

El problema *a)* es el más sencillo, y seguramente la mayoría de los equipos trazarán triángulos isósceles acutángulos. Oriéntelos y anímelos para que encuentren triángulos rectángulos u obtusángulos que tengan sólo un eje de simetría.

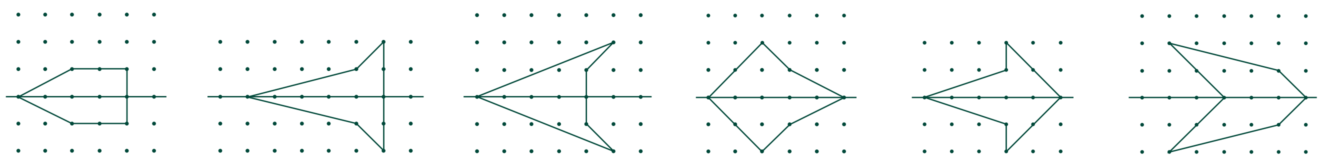
En el problema *b)* los alumnos tendrán algunas dificultades para encontrar cuadriláteros con sólo un eje de simetría. Algunos equipos, al azar, encontrarán que los trapecios isósceles cumplen con esa propiedad. Otros equipos quizás encuentren que los *papalotes* también cumplen con la condición.

Es poco probable que los alumnos descubran cuadriláteros cóncavos con un eje de simetría. Propicie una actitud de búsqueda para que los encuentren.

Así puede sugerirles que, una vez construida una determinada figura en el geoplano, coloquen el espejo de manera que observen que la figura es simétrica con respecto a la línea donde se coloca el espejo; esto ayudará a los alumnos a comprobar si la figura tiene un eje de simetría. A la derecha se muestran tres cuadriláteros que tienen un eje de simetría.



Si los alumnos han encontrado los tres tipos de cuadrilátero con un eje de simetría, es posible que encuentren alguna estrategia para construir pentágonos y hexágonos con un eje de simetría. Lo importante es que organice una discusión entre los equipos en la que se comente la estrategia seguida para construir figuras con sólo un eje de simetría. Las figuras que se muestran a continuación son pentágonos y hexágonos que tienen un eje de simetría.



Es importante que organice una discusión acerca de las propiedades de los triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos que cumplen con la condición (de tener un solo eje de simetría); por ejemplo: igualdad de lados, paralelismo, ángulos.

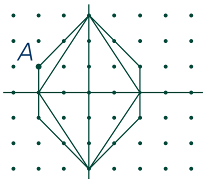
2 Indique a los alumnos que para resolver los siguientes problemas van a utilizar el geoplano. En el pizarrón anote:

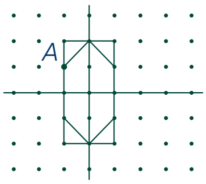
> *Construyan en el geoplano, al menos:*
> *a) Cuatro cuadriláteros que tengan sólo dos ejes de simetría. Después digan qué características tienen esos cuadriláteros.*
> *b) Cuatro hexágonos que tengan dos ejes de simetría. Después digan qué características tienen esos hexágonos.*
> *c) Cuatro octágonos que tengan dos ejes de simetría. Después digan qué características tienen esos octágonos.*

Aunque los alumnos hayan podido resolver los problemas de la actividad 1, algunos equipos tratarán por ensayo de encontrar los cuadriláteros que tengan dos ejes de simetría. Como una manera de ayudar a estos alumnos se les puede sugerir que utilicen el espejo, el cual les permitirá determinar si la figura es simétrica.

Algunos equipos tratarán de encontrar cuadriláteros cóncavos que tienen dos ejes de simetría. Esto puede dar lugar a que los alumnos descubran que no hay cuadriláteros cóncavos con dos ejes de simetría.

Si observa que los alumnos enfrentan dificultades para encontrar hexágonos y octágonos con dos ejes de simetría, puede sugerir que tomen como punto de partida figuras, como el rectángulo y rombo, para que a partir de ellas construyan los hexágonos u octágonos con dos ejes. A continuación se ilustra cómo se puede proceder:

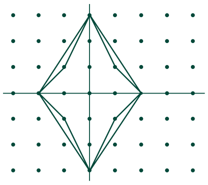


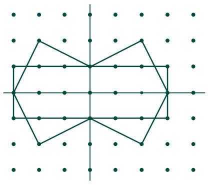


En el caso del primer hexágono se trazó primero un rombo; para determinar los cuatro puntos que no están sobre el perímetro del rombo se tomó un punto cualquiera y luego se colocó perpendicularmente el espejo sobre los dos ejes de simetría.

Para construir el segundo hexágono se trazó un rectángulo y luego se procedió como en el primer caso.

La construcción de los octágonos con dos ejes de simetría se hizo mediante el mismo proceso indicado anteriormente. Las siguientes figuras son algunas de las que se pueden obtener.





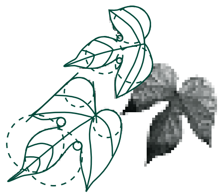
VARIANTES

Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades:

1. Encuentren al menos dos eneágonos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
2. Tracen con regla y compás las figuras construidas en las actividades 1 y 2.

¿Cuánto sobra?

Tema 10: Problemas de división



Propósitos	Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Utilizar la calculadora como un auxiliar en la solución de problemas. Practicar algoritmos de las operaciones, así como el cálculo y la estimación mental de resultados.
Contenidos	Problemas que conducen a una división con residuo. Problemas que requieren de un resultado decimal exacto o aproximado. Práctica de la división entre números naturales.
Material	Calculadora.*

1 Organice a los alumnos en equipos y propóngales el siguiente problema:

> Encuentren 10 divisiones que tengan como residuo 43.

Es probable que algunos alumnos usen su calculadora para resolver este problema, pero pronto se darán cuenta de que no es posible, ya que la máquina calcula el resultado con decimales y en ningún momento aparece el residuo.

De esta manera los alumnos empezarán a explorar el problema usando papel y lápiz y resolviendo diferentes divisiones para ver si el residuo es 43. En esa búsqueda *al tanteo* el estudiante se dará cuenta de que una primera condición para hallar las soluciones al problema es que el divisor debe ser mayor que el residuo.

Cuando lo considere pertinente solicite a varios equipos que escriban una o más de sus divisiones en el pizarrón:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \cline{2-2} 44 & 87 \\ & 43 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} & 21 \\ \cline{2-2} 57 & 1\ 240 \\ & 100 \\ & 43 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} & 2 \\ \cline{2-2} 100 & 243 \\ & 043 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} & 72 \\ \cline{2-2} 27 & 1\ 987 \\ & 097 \\ & 43 \end{array}$$

Pida a los equipos que expliquen ante el grupo cómo hallaron las divisiones tomando en cuenta la condición pedida. Un análisis del algoritmo de la división posiblemente los lleve a saber que si:

$$\begin{array}{r|l} & c \\ \cline{2-2} b & a \\ & r \end{array} \qquad \text{entonces: } a = bc + r$$

Es decir, multiplicando dos números (que serán el cociente y el divisor) y sumando 43 (residuo) a su producto, obtenemos el dividendo. Por ejemplo:

$$57 \times 21 = 1\ 197$$
$$1\ 197 + 43 = 1\ 240$$

Por lo que la división de 1 240 entre 57 —o entre 21— dará como residuo 43.

Nótese que en la resolución de este problema el alumno repasará los algoritmos de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. También será necesario aclarar a qué se le llama dividendo, divisor, cociente y residuo, así como sus significados y la relación entre ellos:

divisor x *cociente* + *residuo* = *dividendo*

2 Proponga a los alumnos el siguiente problema:

> Usen la calculadora para encontrar el cociente entero y el residuo de las siguientes divisiones:
>
> 98 ÷ 35
> 196 ÷ 39
> 819 ÷ 115
> 3 496 ÷ 47

* En caso de que algún alumno cuente con una calculadora de las que dan el cociente y el residuo, se le pedirá que no ocupe esas funciones para solucionar el problema.

Acláreles que *no* se permitirá hacer el algoritmo tradicional con papel y lápiz, sino que sólo usarán su calculadora y que deberán lograr que el residuo aparezca en la pantalla haciendo las operaciones necesarias.

Deje que los alumnos traten de hallar la solución explorando y conjeturando hasta que se den cuenta de la relación siguiente:

dividendo = *divisor* x *cociente* + *residuo*

Y que, despejando el residuo:

residuo = *dividendo* – *cociente* x *divisor*

Es decir, basta con multiplicar el divisor por la parte entera del cociente y restar ese producto del dividendo para obtener el residuo. Por ejemplo:

En la calculadora 98 ÷ 35 da como resultado 2.8; la parte entera es 2, por lo tanto:

residuo = 98 – (35 x 2)
residuo = 98 – 70
residuo = 28

Ésta no es la única forma de encontrar la solución; quizá algún equipo haya tenido la experiencia de tratar la división como una sucesión de restas; en este caso, otra forma de saber el residuo es restando 35 de 98, volver a restar 35 del resultado obtenido, y así sucesivamente hasta que quede un número menor que 35. Ese número es el residuo.

98 – 35 = 63
63 – 35 = 28

El número de veces que se restó 35 es, precisamente, la parte entera del cociente (en este caso, 2).

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: se hace la división con el algoritmo tradicional sólo para ver la relación que guarda el residuo con la parte decimal del cociente. Al hacer la división con papel y lápiz de 98 ÷ 35 se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & 2.8 \\ \hline 35 & 98 \\ & 280 \\ & 00 \end{array}$$

¿De dónde resultó el .8? El .8 es el resultado de dividir el residuo entre 35:

28 ÷ 35 = .8

Por lo que el residuo se puede calcular multiplicando la parte decimal del cociente por el divisor:

28 = .8 x 35

No es necesario volver a teclear la parte decimal, basta con que una vez que se tenga el cociente se reste la parte entera y lo que queda se multiplique por el divisor.

Cabe aclarar que el inconveniente de esta última solución es que si el cociente tiene más decimales que los que caben en la pantalla (por ejemplo 1 ÷ 3 = 0.333...), es posible que la calculadora no guarde todos en la memoria y entonces se obtenga una aproximación del residuo, pero no el residuo exacto (esto no pasa si la parte decimal sale completa en la pantalla).

Este problema permite a los alumnos el análisis de la división, el repaso de su algoritmo y el uso de la calculadora, así como explorar la relación entre las operaciones y repasar los nombres de los elementos de la división. No desaproveche la oportunidad de reafirmar los contenidos pertinentes.

VARIANTE

Una variante para la actividad 2 consiste en pedir el cociente hasta décimos y el residuo. Por ejemplo: Calculen el residuo al dividir 394 ÷ 37, una vez que el resultado se aproxima a décimos (con la calculadora).

Veamos lo que pasa al hacer la división con papel y lápiz (sólo con objeto de analizar el residuo, pues el problema pide que se realice con calculadora):

$$\begin{array}{r|l} & 10.6 \\ \hline 37 & 394 \\ & 0240 \\ & 018 \end{array}$$

El residuo no es 18, pues, fijándonos en la posición que ocupa el 18, realmente equivale a 1 entero 8 décimos.

Listones y varas

Tema 11: Fracciones y porcentajes

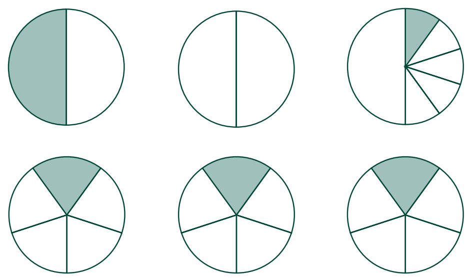
Propósito	Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas muy variados.
Contenidos	Revisión de los usos y significados de las fracciones en distintos contextos. Operaciones y problemas.
Material	Un carrete de cuerda y una cartulina (por grupo, para la actividad 2).

1 Proponga el siguiente problema para que los alumnos lo resuelvan individualmente:

> Se tienen tres pizzas para cinco niños. ¿Qué parte de pizza le toca a cada niño si se debe repartir toda la pizza y a cada uno le debe tocar lo mismo?

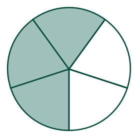
Los alumnos han resuelto problemas de este tipo en la escuela primaria, por lo que se espera que no encuentren ninguna dificultad. Una vez que lo considere pertinente invite a varios alumnos a que digan el resultado al que llegaron y sobre todo a que justifiquen y validen su respuesta ante el grupo.

Algunos alumnos procederán partiendo cada pizza en mitades. Darán una mitad a cada niño, la sexta mitad la dividirán en cinco partes y le darán la quinta parte de esa mitad a cada niño. A cada niño 1/2 + 1/10 de pizza.



Probablemente otros alumnos encuentren la solución partiendo cada pizza en cinco partes y dando una parte de cada pizza a cada uno, por lo que a cada niño le tocan 1/5 + 1/5 + 1/5 de pizza.

También es probable que algunos alumnos sepan de inmediato que a cada niño le tocan 3/5 de pizza.



De cualquier manera, lo interesante será que en la validación de resultados se verifiquen las equivalencias de las respuestas correctas, por ejemplo:

Un medio más un quinto de un medio equivale a tres quintos.

Pregunte: ¿Qué es un quinto de un medio?
Y repase la suma de fracciones al comprobar que: $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$

2 Organice al grupo en equipos de cuatro y plantee el siguiente problema:

> Cinco pedazos de listón del mismo tamaño unidos cabo a cabo miden tres varas. ¿Cuánto mide un solo pedazo de listón?

Si algún alumno pregunta cuánto mide una vara, indíquele que esa información no es necesaria, puesto que deben sacar la medida de un pedazo de listón tomando como unidad de medida la vara.

Mientras los equipos tratan de resolver el problema recorra el salón para observar el trabajo.

Es probable que los alumnos inicien la solución al problema por medio de estimaciones, usando expresiones como:

Un listón es más o menos tres cuartos de una vara.
Un listón mide un poco más de la mitad de una vara.

En estos casos pida que sean más precisos en sus respuestas.

A aquellos equipos que lo soliciten proporcióneles un trozo de listón y otro de cartulina (para representar las varas); déjelos en completa libertad para que ellos decidan de qué longitud cortar los pedazos de listón y las tiras de cartulina que simulen las varas. Es probable que en este proceso de elegir las medidas de listones y varas los alumnos lleguen a la respuesta correcta.

Otros equipos quizás prefieran trabajar haciendo representaciones de los listones y las varas con segmentos.

Algunos alumnos pueden razonar de la siguiente manera:

Un pedazo de listón es la quinta parte de tres varas, es decir: $\frac{1}{5}$ de 3 varas.

Que puede expresarse como:

$\frac{1}{5}$ de una vara + $\frac{1}{5}$ de una vara + $\frac{1}{5}$ de una vara

Lo que da: $\frac{3}{5}$ de vara

Y habrá quienes lo resuelvan directamente encontrando que la respuesta es 3/5 y, más aún, haciendo la división 3 ÷ 5 y dando la solución:

Un pedazo de listón mide 0.6 varas.

Se sugiere analizar la equivalencia de las respuestas correctas.

3 Organizados en equipos de cuatro alumnos, plantee el siguiente problema:

> *Un segmento tiene en el extremo izquierdo el número cero y en el derecho el número siete. El segmento ha sido dividido en cinco partes iguales, ¿qué número corresponde a la tercera marca de la división?*

De ser necesario, y para comprobar que todos los alumnos han comprendido el problema, sugiera que alguno de ellos pase al pizarrón a trazar el segmento con las características indicadas.

Usted puede notar que este problema es una extensión del anterior (en otro contexto) y que para resolverlo posiblemente las estrategias que surjan serán similares a las de la actividad 2.

Es probable que algunos equipos infieran que la quinta parte de siete es 7/5 y que, por lo tanto, el número que corresponde al punto pedido es:

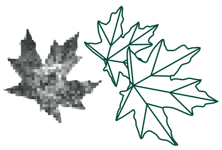
$$\frac{7}{5} + \frac{7}{5} + \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$$

Variante

En las actividades propuestas en esta ficha se ha manejado básicamente el significado de fracción como cociente. Otro problema interesante relacionado con el tema consiste en encontrar la medida del grosor de una hoja. Deje que los alumnos busquen la manera de resolverlo hasta que surja la idea de colocar muchas hojas encima de otras y medir su grosor. Una vez que se tiene la medida se divide entre el número de hojas.

La fiesta de cumpleaños

Tema 12: Cálculo de perímetros y áreas



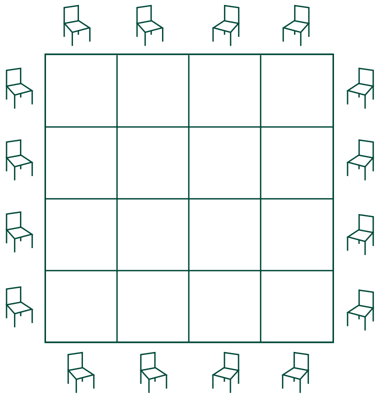
Propósito Resolver problemas que conduzcan implícitamente al cálculo de perímetros y áreas de figuras usuales.

Contenidos Revisión y enriquecimiento de las nociones de perímetro, área y sus propiedades. En particular, determinación del área en figuras regulares dibujadas sobre papel cuadriculado.

Material Papel cuadriculado, tijeras y pegamento.

1 Organice al grupo en equipos de cinco alumnos y pídales que resuelvan el siguiente problema:

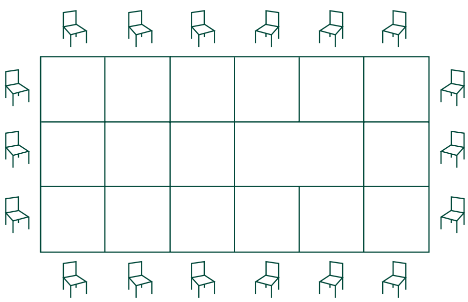
Ana Laura invitó a sus amigos a su fiesta de cumpleaños. Acomodó 16 pequeñas mesas cuadradas para que ella y sus 15 invitados pudieran tener lugar para sentarse.

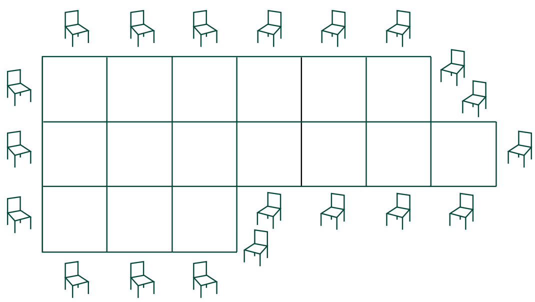


A la hora de la fiesta llegaron cuatro amigos más. ¿Cómo podrían colocar las 16 mesas pequeñas de tal manera que formaran otra mesa (sin huecos) para que todos pudieran sentarse sin que sobre espacio?

Es probable que algunos alumnos presenten respuestas erróneas como las siguientes:

Que dibujen arreglos rectangulares con huecos.





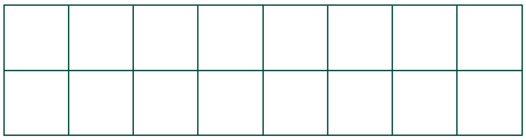
Que realicen arreglos no rectangulares.

Cuando esto suceda conviene propiciar la confrontación de resultados.

Observe cómo trabajan los equipos mientras exploran el problema. Cuando la mayoría haya terminado pida a los equipos que expongan ante el grupo sus resultados y los confronten.

En un equipo pudieron hacer, por ejemplo, dibujos de sus posibles arreglos con base en el ensayo-error.

Otro equipo pudiera recortar 16 cuadrados de papel y acomodarlos de tal manera que formaran diferentes rectángulos.



2 Escriba en el pizarrón el siguiente problema:

¿Cuál es el mayor número de personas que pueden sentarse en las 16 mesas colocadas de tal manera que formen una mesa rectangular?

Al explorar el problema de acuerdo con la experiencia de la actividad anterior, los alumnos se darán cuenta de que solamente hay tres posibles arreglos.

4 x 4 ; 2 x 8 ; 1 x 16.

A cada arreglo le corresponden, respectivamente, 16 personas, 20 personas y 34 personas. Esta última es la solución.

3 Escriba en el pizarrón el siguiente problema:

¿Cuáles serían los distintos grupos de personas que podrían sentarse en 24 mesas cuadradas colocadas de tal manera que formen otras mesas rectangulares? ¿Y en 36 mesas cuadradas?

Nuevamente propicie que los alumnos exploren el problema con las estrategias que ellos elijan. Se darán cuenta de que hay cuatro maneras de arreglar mesas rectangulares con 24 mesas cuadradas.

4 x 6	➡	4 + 6 + 4 + 6	➡	20 personas
3 x 8	➡	8 + 3 + 8 + 3	➡	22 personas
2 x 12	➡	2 + 12 + 2 + 12	➡	28 personas
1 x 24	➡	1 + 24 + 1 + 24	➡	50 personas

Hay cinco arreglos distintos para 36 mesas cuadradas formando mesas rectangulares.

6 x 6	➡	6 + 6 + 6 + 6	➡	24 personas
4 x 9	➡	4 + 9 + 4 + 9	➡	26 personas
3 x 12	➡	3 + 12 + 3 + 12	➡	30 personas
2 x 18	➡	2 + 18 + 2 + 18	➡	40 personas
1 x 36	➡	1 + 36 + 1 + 36	➡	74 personas

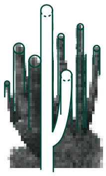
Variante

Invierta las condiciones del problema. Ahora permanecerá constante el número de personas (por ejemplo 40). Haga las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas mesas cuadradas se requieren?
b) ¿Cómo es el arreglo rectangular?

¿Es proporcional?

Tema 13: Proporcionalidad: primeros pasos



Propósitos Desarrollar el razonamiento proporcional. Utilizar tablas y gráficas para organizar y presentar información.

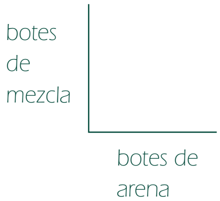
Contenidos Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades. Tablas de números que varían proporcionalmente.

1 La actividad se realiza en equipos. Proponga a los alumnos el siguiente problema:

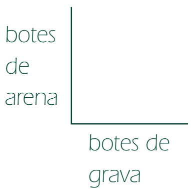
Un albañil sabe que con 4 botes de arena y 5 botes de grava hace una buena mezcla: ¿Cuántos botes de arena necesita para tener 27 botes de mezcla? ¿Y cuántos botes de arena y grava necesita si requiere de 3, 12, 18, 21, 27, 30, 33, 36 y 45 botes de mezcla? Para responder a las preguntas utilicen la tabla siguiente:

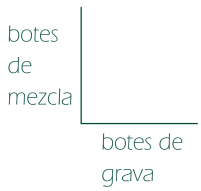
Botes de mezcla	3	9	12	18	21	27	30	33	36	45
Botes de arena		4								
Botes de grava		5								

a) Con los datos obtenidos hagan una gráfica como se indica:



b) Hagan las gráficas siguientes y compárenlas con la anterior. ¿Qué observan?





Para llenar la tabla algunos equipos pueden concluir que para obtener 18 botes de mezcla necesitan el doble de los botes de arena y el doble de los botes de grava, porque 18 es el doble de 9.

Para conocer el número de botes de arena y grava que se necesitan para tener 12 botes de mezcla, algunos equipos pueden primero llenar en la tabla los valores correspondientes a 27 y 36. Después considerar que como 12 es la tercera parte de 36, entonces necesitarán tomar la tercera parte de los botes de arena y de grava necesarios para tener 36 botes de mezcla, esto es, 16/3 (5 botes y 1/3 de bote) y 20/3 (6 botes y 2/3 de bote).

Es probable que otros equipos apliquen la regla de tres; por ejemplo: para conocer cuántos botes de arena y de grava se necesitan para tres botes de mezcla se establecen:

$$\frac{9}{4} = \frac{3}{x} \text{ y } \frac{9}{5} = \frac{3}{x}$$

(La regla de tres es un procedimiento que a los alumnos se les dificulta entender y utilizar, por esta razón conviene que primero participen quienes hayan utilizado otros procedimientos.)

Para elaborar las gráficas los equipos pueden utilizar escalas diferentes, sin embargo encontrarán que, si prolongan las semirrectas, éstas pasan por el origen.

2 Señale que la actividad se va a realizar en equipos de cinco alumnos. Anote en el pizarrón:

Cada cantidad es la medida del lado de un cuadrado: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm.

a) Calculen el perímetro y el área de cada uno de los siete cuadrados.

b) Escriban los resultados obtenidos en tablas como las siguientes:

Medida de un lado en cm	1	2	3	4	5	6	7
Perímetro en cm	4						

Medida de un lado en cm	1	2	3	4	5	6	7
Área en cm^2	1						

c) Con la información obtenida, elaboren dos gráficas como las que se muestran. ¿Serán similares a las gráficas obtenidas en la actividad anterior?

d) Con la información anotada en cada tabla, escriban todas las razones que se pueden establecer con los pares de números y compárenlas entre sí.

$\dfrac{\text{Medida de un lado}}{\text{Medida del perímetro}}$ $\dfrac{\text{Medida de un lado}}{\text{Medida del área}}$

e) ¿Qué relación encuentran entre las gráficas y las razones establecidas?

Antes de que tracen las gráficas puede ser interesante pedir a los equipos que propongan una hipótesis acerca de cómo resultarán, es decir, si al unir los puntos se trazará una recta o una línea curva, si la gráfica pasará por algún punto en particular, etcétera, para que después verifiquen sus hipótesis al hacer la gráfica.

Los equipos que expresan la razón en la forma *a/b* se enfrentarán con dificultades para compararlas. En esta situación pueden comparar las razones considerándolas fracciones, esto es, a través de la búsqueda de fracciones equivalentes, o bien se les puede sugerir que obtengan el cociente.

Otros equipos probablemente usen los productos cruzados para comparar. Es importante que finalmente haga las precisiones convenientes para que los alumnos aclaren sus dudas respecto de las nociones involucradas con la proporcionalidad directa.

VARIANTES

Puede proponer las siguientes actividades:

1. Consideren las siguientes tablas. Con los datos de cada tabla hagan una gráfica. ¿En qué casos se trata de una variación proporcional?

x	1	3	4	7	
y	1	9	16	49	

x	1	3	4	7	
y	2	6	8	14	

x	1	3	4	7	
y	3	9	12	21	

x	1	3	4	7	
y	4	6	7	10	

2. En las siguientes tablas hacen falta algunos datos: complétenlos, algunos son proporcionales. Después hagan una gráfica con los datos de cada tabla. Establezcan las razones entre los datos de cada tabla. ¿Cuáles son proporcionales?

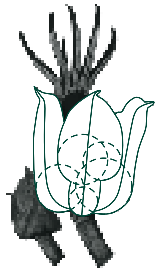
x	3	5	11	18	21
y	15		55		105

x	4	12	20	32	48
y		9		24	

x		11	17	27	
y	40		85		175

El mejor carril

Tema 14: Experimentos aleatorios



Propósitos Familiarizarse con la noción de azar. Registro y enumeración de resultados de experimentos aleatorios.

Contenidos Familiarización con algunas situaciones ideales de la probabilidad. Registro y tratamiento de los resultados de un experimento aleatorio que se repite varias veces.

Material Para cada equipo, un par de dados y un cuadro como el que se muestra abajo.

1 Organice al grupo en equipos de cinco o seis estudiantes. Entregue a cada equipo dos dados y un cuadro como el que se muestra a continuación:

1													
2													
3													
4													
5													M
6													E
7													T
8													A
9													
10													
11													
12													

Después explique en qué consiste la actividad:

Cada alumno debe elegir un carril y poner una ficha. Por turnos tirarán los dados; avanzará un cuadro quien se halle en el carril del número que coincida con:

- la diferencia de los puntos de los dados (cuando los puntos de los dados sean distintos),
- la suma de los puntos de los dos dados (cuando los dos dados marquen el mismo número de puntos).

Ganará el alumno que llegue primero a la meta. Realicen tres juegos. Después de cada juego pueden cambiar de carril si así lo consideran conveniente.
Hagan un registro del resultado de cada una de las tiradas, de manera que al final de los tres juegos cada equipo muestre, en un cuadro como el siguiente, el número de veces que avanzó cada carril.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

En un primer juego los alumnos escogerán el carril al azar, pero después seguramente elegirán alguno de los que tienen más posibilidades para ganar. En el transcurso de la actividad es conveniente que observe si los alumnos escogen el carril o los carriles que más convienen.

2 Cuando los alumnos hayan realizado los tres juegos, pídales que elaboren una gráfica con los datos obtenidos (en el eje vertical el número de veces que avanzó cada carril y en el eje horizontal el número del carril), y que con base en la información que proporciona la gráfica contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué carril o carriles conviene elegir para ganar?
b) ¿Hay algún carril que no conviene elegir si se quiere ganar? ¿Por qué?
c) Escriban las siguientes razones:

$$\frac{\text{Total de veces que un carril avanzó}}{\text{Total de veces que se tiraron los dados}}$$

Ordenen de menor a mayor las 12 razones.

d) Tomando en cuenta el resultado de la ordenación de las razones, contesten de nuevo las preguntas de los incisos a) y b). ¿Sus respuestas coinciden con las respuestas que dieron primero?

En el desarrollo de la primera de estas actividades, seguramente cada equipo elaborará la gráfica tomando distintas unidades en el eje vertical. Para efecto de la comparación, es conveniente que sugiera la utilización de una unidad común, por ejemplo de 5 en 5. Oriéntelos en el caso de que algún equipo tenga dificultad para elaborar la gráfica.

Una vez ordenados los cocientes, aproveche para indicar a los alumnos que, por ejemplo, la probabilidad frecuencial de obtener 1 al sumar o restar los puntos de los dos dados es precisamente la razón:

$$P(1) = \frac{\text{Total de veces que } \textit{salió} \text{ el } \textit{uno}}{\text{Total de veces que se tiraron los dos dados}}$$

3 Indique a los alumnos que van a obtener la probabilidad a partir de otro tipo de análisis. Para ello pídales que resuelvan las siguientes situaciones:

a) Se sabe que al tirar dos dados hay 36 eventos posibles. Encuéntrenlos.
b) Tomando como base las reglas del juego de la actividad 1, registren en una tabla como la que se muestra el número posible de eventos de cada carril. Por ejemplo, el carril 4 tiene 5 de 36 eventos posibles.

Número de carril	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia				5								

c) Con los datos obtenidos, elaboren una gráfica de manera que en el eje vertical anoten la frecuencia absoluta y en el eje horizontal el número del carril.
d) Comparen las gráficas elaboradas en esta actividad y en la actividad 2.

Es conveniente que algunos equipos muestren sus conclusiones, así encontrarán que las gráficas elaboradas en las actividades 2 y 3 son similares.

Para finalizar, explique que la probabilidad, por ejemplo, de obtener el número1, es la razón:

$$P(1) = \frac{\text{Eventos posibles de 1}}{\text{Total de eventos posibles}}$$

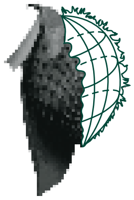
Variantes

Las variantes que se anotan a continuación pueden desarrollarse de manera similar a las actividades anteriores.

1. Tomen dos dados y elijan un carril. Avanzará un cuadro la ficha del carril cuyo número coincida con la suma de los puntos de los dos dados. Gana el que llegue primero a la meta.
2. Tomen un dado común y un *dado* en forma de tetraedro; elijan un carril. Avanzará un cuadro la ficha del carril que coincida con la suma de los puntos de los dados. Gana el que llegue primero a la meta.
3. Tomen dos *dados* en forma de tetraedro y elijan un carril. Avanzará un cuadro la ficha del carril que coincida con la suma de los puntos de los dos dados. Gana el que llegue primero a la meta.

Los hexaminós

Tema 15: Sólidos

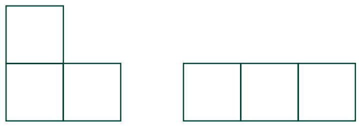


Propósito Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.

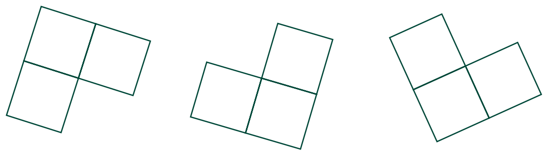
Contenidos Desarrollo, armado y representación plana de cubos. Construcción de modelos geométricos.

Material Hoja cuadriculada, tijeras y pegamento.

1 Organice al grupo en equipos de cinco y explique que en esta actividad van a buscar figuras en una cuadrícula al unir cuadrados lado con lado. Por ejemplo: ¿cuántas formas diferentes se pueden lograr al unir, lado con lado, tres cuadrados? Los alumnos encontrarán solamente dos:



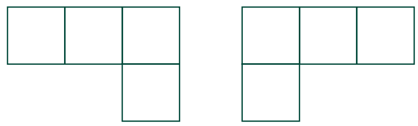
Las siguientes figuras son en realidad la misma, sólo hay que girarlas para darse cuenta de que coinciden:



Una vez aclarada la actividad, escriba en el pizarrón el siguiente problema:

> *¿Cuántas figuras diferentes se pueden lograr al unir lado con lado cuatro cuadrados?*

Algunos alumnos pueden trabajar con base en el ensayo. Otros buscarán alguna estrategia sistemática y otros combinarán el ensayo con distintas estrategias. En este proceso de búsqueda algunos alumnos pueden mostrar figuras que no cumplan con la condición de ser diferentes. Por ejemplo, las siguientes figuras son iguales. Una es el reflejo de la otra.



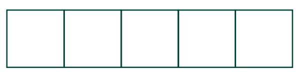
En estos casos no debe descalificar el trabajo de los alumnos, sino cuestionarlos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de que se trata de figuras iguales. Cuando la mayoría haya terminado, propicie la confrontación colectiva de resultados. En total encontrarán que hay sólo cinco figuras distintas.

2 Escriba en el pizarrón el siguiente problema:

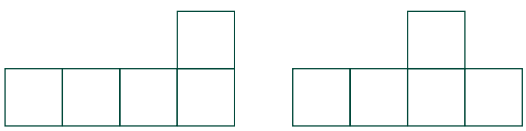
> *¿Cuántas formas diferentes se pueden lograr al unir lado con lado cinco cuadrados?*
> *¿Cuáles de estas formas se pueden doblar para formar una caja sin tapa?*

Con base en la experiencia de la actividad anterior, algunos alumnos dispondrán de alguna estrategia más sistemática y ordenada, otros continuarán utilizando el ensayo y el error e incluso es posible que se desanimen por no encontrar todas las figuras que cumplan con las condiciones del problema. Procure infundirles seguridad.

Una estrategia que implica orden puede ser la siguiente. Iniciar con cinco cuadrados en un renglón:

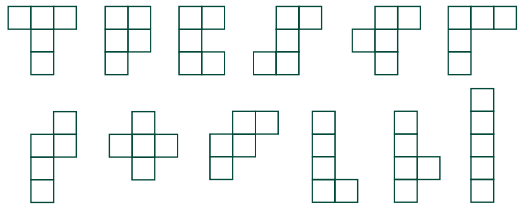


Después dejar cuatro cuadrados en el renglón y el faltante colocarlo en todas las posiciones posibles.



Luego dejar tres cuadrados en un renglón para ver dónde se pueden poner los dos cuadrados faltantes, etcétera.

Mediante la confrontación de resultados los alumnos llegarán a encontrar las 12 figuras (pentaminós).



Para encontrar cuáles de estas figuras forman una caja sin tapa, los alumnos pueden recurrir a múltiples procedimientos, pero el armado de las figuras permitirá corroborar sus hipótesis y se darán cuenta de que solamente ocho de ellas cumplen esta condición.

3 Escriba el siguiente problema en el pizarrón:

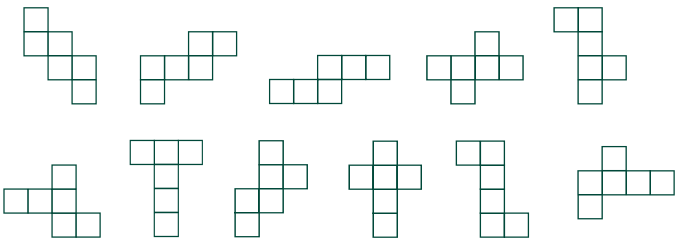
> *¿Cuántas figuras diferentes se pueden lograr al unir lado con lado seis cuadrados?*
> *¿Cuántas y cuáles de estas figuras se pueden doblar para formar una caja con tapa?*

Para encontrar todas las figuras (hexaminós) los alumnos tendrán que ser muy ordenados. Una manera ya sugerida es empezar con seis cuadrados en un renglón.

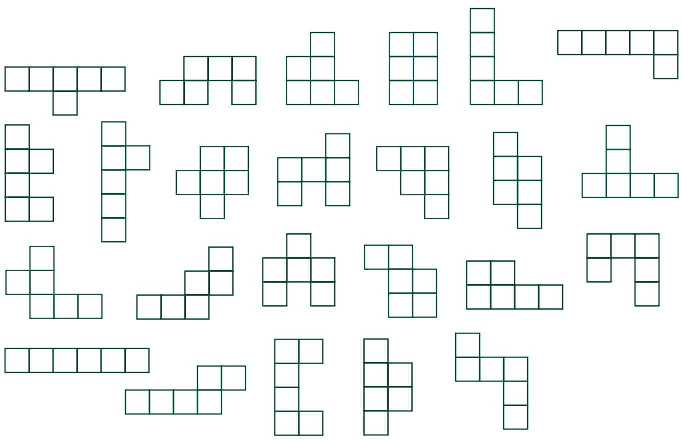
Después cinco cuadrados en un renglón y el faltante en todas las posiciones posibles. Luego seguir con cuatro cuadrados en un renglón para ver dónde se pueden poner los dos cuadrados faltantes, y así sucesivamente.

Hay 35 figuras (hexaminós), 11 de las cuales pueden formar una caja con tapa. Los alumnos pueden observarlas primero y luego corroborar con el armado del cubo.

Estos hexaminós forman un cubo:



Estos hexaminós no forman un cubo:



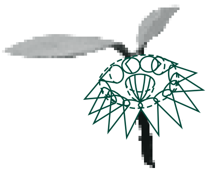
VARIANTES

Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades y preguntas:

1. Encuentren, entre todos los hexaminós, la(s) figura(s) de mayor, menor o igual perímetro.
2. Formen rectángulos con 2, 3, 4... hexaminós.
3. ¿Qué hexaminós tienen un eje de simetría? ¿Y dos ejes de simetría?

Las fracciones egipcias

Tema 16: Fracciones: simplificación, reducción a un común denominador, adición y sustracción



Propósito Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos.

Contenidos Adición y sustracción de dos fracciones previa reducción a un común denominador: aplicaciones y problemas.

Material Calculadora (opcional).

Puede iniciar la actividad comentando algunas de las ideas que se plantean a continuación.

Un aspecto interesante de la aritmética egipcia es el cálculo con fracciones. Todas las fracciones eran reducidas a sumas con fracciones unitarias; es decir, fracciones cuyo numerador es 1. El numerador era un punto arriba del denominador, como se muestra:

$10 = \cap$ $\qquad \frac{1}{10} = \dot{\cap}$

200 = 𓍢𓍢 $\qquad \frac{1}{200} =$ 𓍢̇𓍢

Las únicas excepciones eran 1/2 y 2/3, para las cuales existían símbolos especiales. Todas las demás fracciones eran expresadas como una suma de fracciones unitarias.

Por ejemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

No es claro el principio que sustenta esta reducción, ni se sabe por qué los egipcios preferían unas combinaciones en vez de otras.

1 Organice al grupo en equipos de tres alumnos y proponga la siguiente actividad:

Completen la tabla escribiendo en la columna derecha una suma de dos fracciones unitarias diferentes que dé como resultado la fracción de la columna de la izquierda.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{20}$
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{11}$	
$\frac{1}{12}$	
$\frac{1}{13}$	
$\frac{1}{14}$	

Es probable que algún equipo encuentre una regularidad o patrón numérico y, aunque no llegue a expresarla con literales, habrán descubierto que:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{n\,(n+1)} \qquad n = 2, 3, 4\ldots$$

Lo que permite encontrar la suma con las condiciones necesarias para cualquier fracción unitaria, por ejemplo:

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{(15 \text{ x } 16)}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{240}$$

Lo importante es que los alumnos, al tratar de verificar sus conjeturas, practiquen sumas y restas con diferente denominador. Por ejemplo, de acuerdo con la conjetura arriba mencionada, se tiene:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$$

Y al comprobarla:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

De esta manera, al hacer las comprobaciones, el alumno se verá en la necesidad de repasar el algoritmo de la suma de fracciones, las fracciones equivalentes y el común denominador.

2 A continuación proponga a los alumnos la siguiente actividad:

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{24}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10} + \frac{1}{40}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{60}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14} + \frac{1}{84}$
$\frac{1}{14}$	
$\frac{1}{16}$	
$\frac{1}{18}$	
$\frac{1}{20}$	
$\frac{1}{22}$	
$\frac{1}{24}$	
$\frac{1}{26}$	
$\frac{1}{28}$	
$\frac{1}{30}$	

Analicen la siguiente tabla. Traten de descubrir la regularidad que siguen los denominadores de los sumandos con respecto al denominador de la fracción de la izquierda y completen la tabla hasta 1/30.

Un análisis cuidadoso de la tabla nos lleva a descubrir que la relación entre la fracción y sus sumandos es:

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{(2n+2)} + \frac{1}{n\,(2n+2)} \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Es necesario que los alumnos, por sí mismos, perciban la relación pedida y, aunque no lleguen a la expresión anterior, sean capaces de explicitarla con palabras o bien aplicarla correctamente para el llenado de la tabla. Al confrontar resultados, los alumnos deben comprobar a sus compañeros que la suma propuesta efectivamente da como resultado la fracción unitaria que se está trabajando.

VARIANTES

Puede proponer a los alumnos los siguientes problemas:

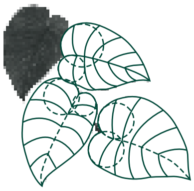
1. ¿Pueden escribir fracciones unitarias como la suma de tres o más fracciones unitarias diferentes? Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$$

2. Obtengan el número 1 como la suma de 3, 4 o más fracciones unitarias.

El perro guardián

Tema 17: Longitud de la circunferencia y área del círculo



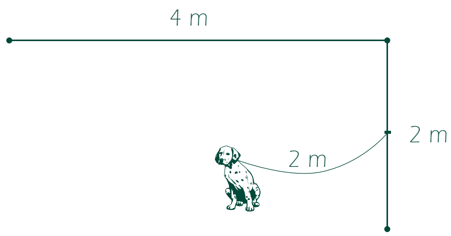
Propósitos Practicar los trazos geométricos como una forma de acostumbrarse y de perfeccionar el uso de los instrumentos de dibujo y medición. Resolver problemas que conduzcan al cálculo de áreas de figuras usuales.

Contenidos Área del círculo. Ejercicios y problemas sobre cálculo de áreas.

Material Escuadras y compás.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos y plantee el siguiente problema:

Un perro está atado a una cadena que le permite un alcance máximo de 2 m, unida a una argolla, que se desplaza en una barra en forma de ángulo recto cuyos lados miden 2 m y 4 m.

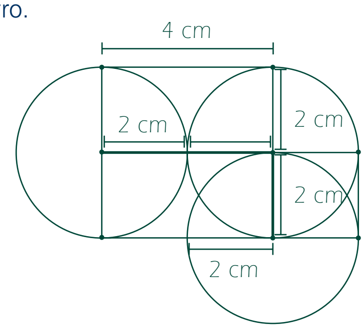


La argolla de la cadena puede desplazarse por toda la barra, en ambos lados.

Sombreen toda la región en la que el perro puede estar y contesten las siguientes preguntas:
¿Cuál es el área de la región que abarca el perro?

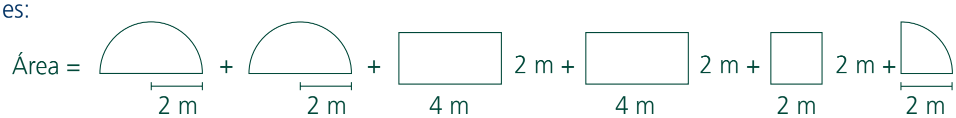
Los alumnos tratarán de resolver las cuestiones haciendo conjeturas y comentando en el equipo. Recomiende instrumentos geométricos para trazar a escala las regiones que abarca el perro.

Una buena escala es 1 cm : 1 m, sin embargo será el alumno quien lo decida. Si escoge 1 cm : 1 m el territorio de alcance resultará así:



El perro parado en alguno de los extremos de la barra, o en el vértice del ángulo, alcanza a cubrir regiones circulares de 2 m de radio. Y cuando la cadena se desliza por las barras cubre regiones rectangulares. Aproveche este momento para afirmar el uso correcto de los instrumentos geométricos en el trazado de estas figuras.

El área total es:



$$= \frac{(2)^2\,\pi}{2} + \frac{(2)^2\,\pi}{2} + (4)(2) + (4)(2) + (2)(2) + \frac{(2)^2\,\pi}{4}$$

$$= 2\pi + 2\pi + 8 + 8 + 4 + \pi$$

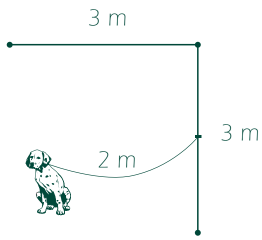
$$= 5\pi + 20$$

$$\cong 35.71\ m^2$$

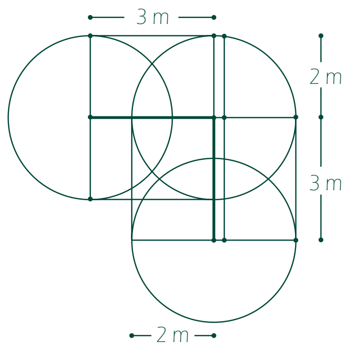
En el cálculo de áreas se podrá comentar lo que representa π (relación entre el diámetro y la circunferencia) y el redondeo de cantidades.

2 Organizados de la misma manera, plantee a los alumnos el siguiente problema:

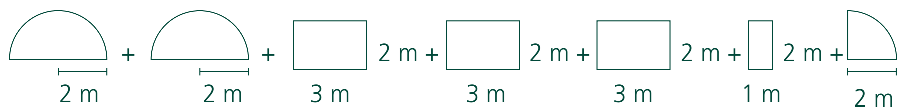
> Si se mantiene constante la cadena y la barra tiene la forma y medidas abajo indicadas (3 m x 3 m), la superficie que alcanza el perro ¿es mayor o menor que la anterior? ¿Por cuánto?



El área que cubre el perro es:



Área =



$$= \frac{(2)^2\,\pi}{2} + \frac{(2)^2\,\pi}{2} + (3)(2) + (3)(2) + (3)(2) + (1)(2) + \frac{(2)^2\,\pi}{4}$$

$$= 2\pi + 2\pi + 6 + 6 + 6 + 2 + \pi$$

$$= 5\pi + 20$$

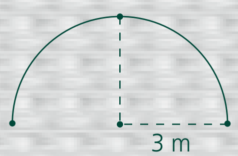
$$\cong 35.71\ m^2$$

De lo que se deduce que las áreas son iguales.

Al resolver esta parte del problema puede repasarse la noción de círculo como conjunto de puntos equidistantes de otro punto, así como la noción de recta paralela como conjunto de puntos equidistantes de una recta. Si los alumnos cometen errores en los cálculos es el momento para reafirmar los algoritmos de las operaciones.

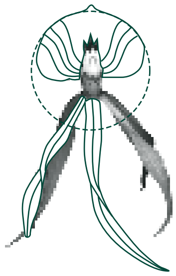
VARIANTES

1. Cambiando alguna de las variables del problema, como el largo de la cadena, las medidas de la barra o incluso su forma, se obtienen interesantes regiones de alcance. Por ejemplo: considerando una cadena de 2 m y una barra semicircular como la que se ilustra, ¿cuál es la región de alcance del perro? ¿Es mayor o menor que las anteriores?



2. Si se quiere repasar el cálculo de perímetros, pueden aprovecharse las figuras obtenidas.

Tema18: Números con signo



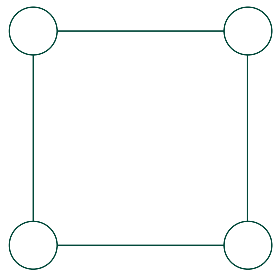
Propósito Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Practicar los algoritmos de las operaciones, así como el cálculo y la estimación de resultados.

Contenidos Orden y comparación de números con signo. Suma y resta de números con signo.

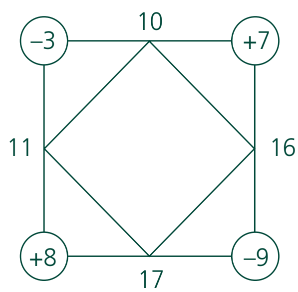
Material Juego de geometría, colores y dos tiras de cartulina (tira de sumar y restar números con signo). Dos regletas numeradas como la siguiente:

1 Organice al grupo en equipos de cinco y dibuje en el pizarrón la siguiente figura. Diga a sus alumnos que en esta actividad van a jugar con números con signo y a obtener figuras que colorearán a su gusto. Escriba en el pizarrón las instrucciones siguientes:

a) Dibujen la figura siguiente.
b) Escriban dentro de los círculos cualquier número entero positivo o negativo.
c) Sobre el punto medio de cada segmento escriban la diferencia de los números que están a los lados.
d) Unan con líneas de color rojo los puntos medios para formar un nuevo cuadrado.
e) Escriban sobre cada línea de color rojo la diferencia entre los números que están a los lados.
f) Continúen con este proceso hasta que las diferencias lleguen a ser cero.



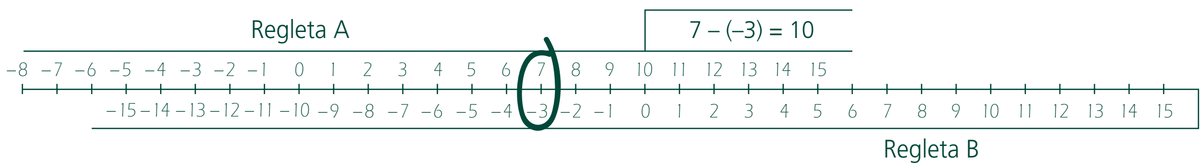
Para comprobar que las reglas del juego han sido comprendidas, pida a uno o dos niños que ejecuten los primeros pasos. Por ejemplo:



Si se consideran –3 y +7, el número 7 es mayor, por tanto la diferencia se plantea así: 7 – (–3), que puede ser resuelta de diferentes maneras.

En este momento puede recomendar el uso de las regletas (A y B) para restar los números enteros de la siguiente manera:

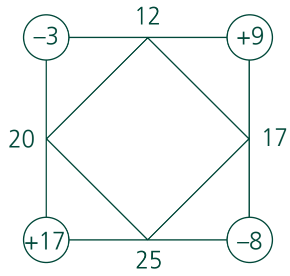
Colocar +7 de la regleta A sobre el –3 de la regleta B. Buscar el 0 (cero) de la regleta B y leer la respuesta sobre la regleta A, como se muestra en la figura siguiente:



Al explorar el problema los alumnos se darán cuenta de que, dependiendo de los números que se hayan escrito dentro de los círculos, repetirán el proceso 2, 3, 4 o más veces, hasta que obtengan una diferencia común de cero.

Una vez que la mayoría haya terminado, solicite que un representante por equipo pase al pizarrón a mostrar y defender sus hallazgos. Por ejemplo: un niño puede acompañar su figura con las operaciones que haya hecho.

En el primer paso se tendrá:



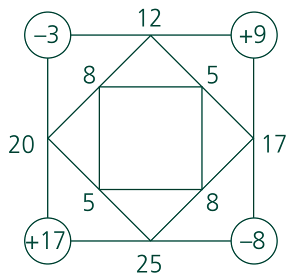
$9 - (-3) = 9 + 3 = 12$

$9 - (-8) = 9 + 8 = 17$

$17 - (-8) = 17 + 8 = 25$

$17 - (-3) = 17 + 3 = 20$

En el siguiente paso se tendrá:



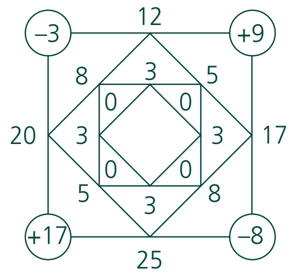
$20 - 12 = 8$

$17 - 12 = 5$

$25 - 17 = 8$

$25 - 20 = 5$

En el tercer paso se tiene:



$8 - 5 = 3$

$8 - 5 = 3$

$8 - 5 = 3$

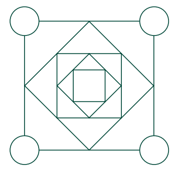
$8 - 5 = 3$

Centre la discusión sobre las siguientes cuestiones aprovechando los ejemplos de los alumnos:

- Usando este procedimiento para cualquier número con signo, ¿se obtendrá siempre una diferencia común de cero?
- ¿Cuántas veces se necesita repetir el proceso para obtener una diferencia común de cero?
- Qué tipo de números se obtienen al efectuar las diferencias: ¿negativos?, ¿positivos?, ¿positivos y negativos?

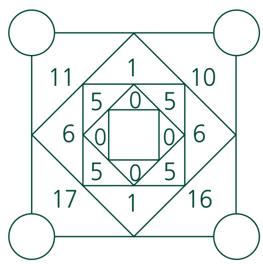
2 Escriba en el pizarrón el siguiente problema:

> Empleando el mismo procedimiento de la actividad 1, encuentren un grupo de cuatro números enteros (con signo), de manera que, en el cuarto paso, las cuatro diferencias sean cero.



Esta actividad se realiza de manera similar a la actividad 1, pero en este caso los alumnos son los que proponen los primeros cuatro números que se colocan dentro de los círculos.

Una manera de resolver el problema es proponiendo números al azar, luego obtener las diferencias y ver si se necesitan cinco pasos para que las cuatro diferencias sean ceros. Otro procedimiento que puede ser utilizado por algunos alumnos consiste en iniciar con las cuatro diferencias (ceros) y colocar los números convenientes hasta llegar a los círculos.



En el desarrollo de las actividades los alumnos pueden cometer diferentes errores, por lo que deberá estar atento para dar las orientaciones que considere convenientes; según el error que observe, puede proponerles ejemplos o contraejemplos. Algunas causas de los errores pueden ser:

- Que no sepan comparar números con signo.
- Que no entiendan el concepto de *diferencia*.
- Que no sepan restar números con signo.

VARIANTE

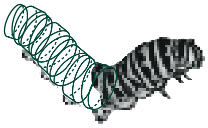
Dibuja un triángulo equilátero y en sus vértices anota tres números enteros (números con signo). Después realiza el mismo procedimiento que en el caso del cuadrado.

- ¿Qué regularidades encuentran?
- ¿En cuántos pasos?


2º grado

Puntos cercanos

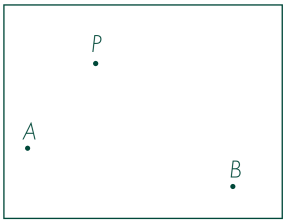
Tema 1: Trazos geométricos y figuras básicas



Propósitos	Practicar el dibujo y los trazos geométricos. Avanzar hacia la adquisición permanente del uso de instrumentos de dibujo.
Contenidos	Exploración de las propiedades de la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos *A* y *B*.
Material	Colores y una hoja en blanco por alumno.

1 Organice a los alumnos en parejas. Dibuje en el pizarrón tres puntos que no estén alineados y proponga resolver la siguiente situación:

Marquen al centro de una hoja en blanco tres puntos como los que he marcado en el pizarrón.



Observen que el punto *P* está más cerca del punto *A* que del punto *B*.

a) Marquen con rojo la mayor cantidad de puntos que estén más cerca del punto *A* que del punto *B*. Con azul marquen la mayor cantidad de puntos que estén más cerca del punto *B* que del punto *A*.
b) Iluminen con rojo la región de la hoja donde se encuentren *todos* los puntos que estén más cerca del punto *A* que del punto *B*. Marquen con azul la región de la hoja donde se encuentren *todos* los puntos que están más cerca del punto *B* que del punto *A*.
c) Encuentren 10 puntos que estén a la misma distancia del punto *A* que del punto *B*.
d) Si unen los 10 puntos, ¿qué observan?

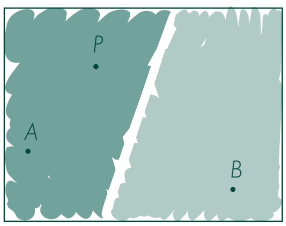
Los alumnos no tendrán dificultad alguna en marcar puntos que cumplan con la condición indicada en el inciso *a)*. El punto *P* sirve como referencia; los alumnos notarán que el punto *P* está más cerca del punto *A* que del punto *B*. Sin embargo usted puede proponer algún punto *R* que a simple vista no se pueda decir que cumple con las condiciones.

La situación anterior hará que los alumnos busquen alguna manera para comprobar; por ejemplo, pueden tomar la regla y medir la distancia de *R* con respecto a los puntos *A* y *B*.

Otros alumnos pueden utilizar el compás y con él tomar la distancia entre el punto *R* y el punto *A*, y después comparar la distancia respecto del punto *B* para verificar si está más cerca de *A* que de *B*.

Una dificultad que se puede presentar para realizar las indicaciones señaladas en el inciso *b)* es que los alumnos no comprendan lo que se entiende como región. Puede suceder que iluminen puntos que cumplen con la condición pedida, pero que en realidad no constituyen la totalidad de los puntos; en tal situación puede proponer que algunos alumnos expliquen lo que tomaron en cuenta para iluminar o dejar de iluminar ciertas partes de la hoja. A partir de ello, usted puede precisar lo que se entiende como región.

A continuación se muestra como podrían quedar iluminadas las hojas de los alumnos.

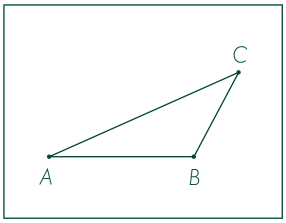


Las preguntas *c)* y *d)* tienen que ver con la localización de la mediatriz. Después de haber resuelto las primeras actividades, los alumnos no tendrán dificultad para localizar los puntos que se solicitan, asimismo se darán cuenta de que todos están sobre una misma recta. Aproveche esta situación para pedir a los alumnos que elijan otros puntos que estén sobre la recta y que comprueben que están a la misma distancia del punto *A* y del punto *B*.

Por otra parte, será conveniente que dé a conocer a los alumnos la terminología propia de la geometría, esto es, que la recta trazada es la mediatriz del segmento *AB*. Finalmente muestre cómo se traza la mediatriz utilizando regla y compás.

2 Explique a los alumnos que van a trabajar en parejas y plantee la siguiente situación:

Dibujen al centro de una hoja en blanco un triángulo como el que he marcado en el pizarrón.



a) Localicen los puntos que están a la misma distancia del punto *A* y del punto *B*.
b) Localicen los puntos que están a la misma distancia del punto *A* y del punto *C*.
c) Localicen los puntos que están a la misma distancia del punto *B* y del punto *C*.
d) Localicen un punto que esté a la misma distancia del punto *A*, del punto *B* y del punto *C* respectivamente.

Se espera que a través de estas actividades los alumnos observen que están localizando las mediatrices de un triángulo cualquiera, y que existe un punto, precisamente donde se intersectan las tres, que tiene la propiedad de que está a la misma distancia de los tres vértices del triángulo.

Para responder a las tres primeras indicaciones los alumnos no tendrán dificultades, ya que seguramente utilizarán los conocimientos adquiridos en la actividad 1.

Para localizar el punto que está a la misma distancia de los tres puntos, puede hacer reflexionar a los alumnos acerca de la propiedad que tiene el punto que es intersección de las tres mediatrices que los alumnos habrán trazado a partir de las actividades *a*), *b*) y *c*).

Finalmente, en una actividad en la que participe todo el grupo, indique a los alumnos que el punto encontrado se llama circuncentro.

Si lo considera conveniente, puede proponer a los alumnos que tracen otros triángulos y sus mediatrices, así, de manera empírica, observarán que las mediatrices de cualquier triángulo siempre se intersectan en un punto.

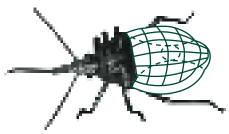
Variantes

Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades:

1. Tracen la mediatriz de un segmento *AB* que mida 6 cm, después elijan puntos sobre la mediatriz y únanlos con los extremos del segmento. ¿Qué tipo de triángulos observan? ¿Pueden elegir un punto sobre la mediatriz de manera que al unirlo con los extremos del segmento formen un triángulo equilátero?
2. Tracen la mediatriz de un segmento *AB* que mida 6 cm. ¿Pueden elegir un punto sobre la mediatriz de manera que al unirlo con los extremos del segmento formen un triángulo isósceles rectángulo?
3. Tracen la mediatriz de un segmento *AB* que mida 6 cm. Elijan dos puntos sobre la mediatriz de manera que al unirlos con los extremos del segmento formen un cuadrado, un *papalote* y un rombo.

Explorando con los divisores

Tema 2: Problemas de aritmética



Propósitos Enriquecer el significado de los números y explorar relaciones numéricas.

Contenidos Números primos y compuestos. Factorización en primos y ejemplos de aplicación.

Material Calculadora.

1 Organice al grupo en equipos de cinco alumnos. Escriba en el pizarrón la siguiente tabla y plantee la siguiente situación:

> En la tabla de la derecha se muestran los divisores de algunos números.
>
> Encuentren los divisores de los números 7, 8, 9… hasta el 40, y anótenlos en la tabla.

Número	Divisores del número
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	
8	
9	
10	

Para resolver esta actividad los alumnos pondrán en juego sus conocimientos acerca de la divisibilidad; podrán utilizar la calculadora o hacer las divisiones con lápiz y papel. Para verificarlos, los alumnos deben confrontar sus resultados.

2 Explique a los alumnos que van a seguir trabajando en equipo y, apoyándose en la tabla anterior, plantee el siguiente problema:

> Observen en la tabla que el número 4 tiene como divisores a 1, 2 y 4. Si quitan el 1, entonces todos los divisores que quedan son pares. Hagan una tabla como la siguiente y anoten ahí los números que cumplen con la condición de tener sólo divisores pares (si no consideran el 1).

Números que cumplen la condición	2	4	8		
Divisores del número	2	2, 4			

> ¿Qué clase de números son aquellos cuyos divisores son todos pares (sin tomar en cuenta el número 1)?

Seguramente los alumnos encontrarán diversas formas de resolver la situación, lo importante es que las confronten de manera que enriquezcan, afirmen o corrijan sus conocimientos. Algunos procedimientos pueden ser los siguientes:

Algunos equipos escribirán en la tabla los primeros cinco números (2, 4, 8, 16, 32) y considerarán que sólo esos cinco cumplen con la condición señalada. En este caso puede solicitar que encuentren otros números y que además traten de encontrar alguna característica común.

En otros equipos quizás identifiquen algunos números (por ejemplo: 2, 4, 8, 16, 32) cuyos divisores son pares y, con base en sus observaciones, concluyan que todos los números pares son los que cumplen con la condición. En esta situación puede solicitar o dar algunos contraejemplos (6, 24...) para que los alumnos observen que la caracterización no es correcta. Así, aunque 6 y 24 son números pares tienen a 3 como divisor, que no es número par.

Algunos equipos podrán identificar una sucesión más grande de números que cumplen con la condición y probablemente observen que cada número de la sucesión se obtiene duplicando el número que le precede. Los alumnos pueden comprobar que efectivamente es así, y pregúnteles si eso es independiente del número con el que se inició la sucesión, esto con el fin de que observen que se requiere partir del número 2.

En este caso puede pedir a los alumnos que encuentren la expresión algebraica que permite encontrar cualquier número que cumple con la condición del problema, es decir, 2^n, que representa a los números cuyos divisores, excepto el uno, son pares.

3 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos. Anote el siguiente problema en el pizarrón:

Los divisores del número 6 son 1, 2, 3 y 6. Observen que la mitad de estos divisores son pares (2 y 6) y la otra mitad son impares (1 y 3) Anoten en una tabla, como la que se muestra, los números que cumplan con la condición de que la mitad de sus divisores sean pares y la otra mitad sean impares.

Números que cumplen la condición		2	6			
Divisores del número	impares	1	1, 3			
	pares	2	2, 6			

¿Qué característica tienen aquellos números tales que la mitad de sus divisores son pares y la otra mitad son impares?

Al igual que en la actividad anterior, los alumnos llegarán a plantear distintos caminos para resolverla. Lo fundamental es que sean ellos mismos, guiados por las preguntas o sugerencias de usted, quienes validen o invaliden los resultados obtenidos (por ejemplo: 2, 6, 10, 14, 18).

Ciertos equipos encontrarán los primeros números que satisfacen las condiciones del problema y se concretarán a señalar que esos números son los que cumplen con lo pedido. Puede cuestionarlos para que encuentren otros números y que además los analicen para determinar alguna característica que tengan en común.

Otros equipos considerarán que los números que satisfacen la condición son números pares; un contraejemplo (8, 20, 50, etcétera) puede ayudar a los alumnos a observar que su caracterización no es suficiente, ya que los divisores de 8 son 1, 2, 4 y 8, los divisores de 20, son 1, 2, 4, 5, 10 y 20 y los divisores de 50 son 1, 2, 4, 5, 10, 25 y 50. En ningún caso el número de divisores pares es igual al número de divisores impares.

Es posible que otros equipos, después de observar una lista relativamente grande de números que tienen la mitad de sus divisores pares y la otra mitad impares, establezcan que la respuesta tiene que ver con aquellos números que van de 4 en 4. Nuevamente, un contraejemplo (3, 7, 11, 15...) ayudará a que los alumnos encuentren que se requiere partir de 2 y luego, efectivamente, ir de 4 en 4.

En este grado puede ser difícil que los alumnos encuentren que cualquier término de la sucesión de números que tienen la propiedad señalada en el problema se obtiene a partir de la expresión: $4x + 2$, donde x toma los valores 0, 1, 2, 3..., o de la expresión $4x - 2$, si x toma los valores 1, 2, 3, 4... Por lo que usted puede darla a conocer y, a partir de esto, los alumnos podrán obtener otros números y comprobar que, efectivamente, cumplen con la condición establecida.

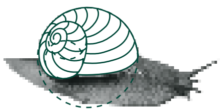
VARIANTES

Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades:

1. Observen que el número 2 tiene exactamente dos divisores: 1 y 2. ¿Qué números son aquellos que tienen exactamente dos divisores?
2. Observen que el número 9 tiene exactamente tres divisores: 1, 3 y 9. ¿Qué clase de números son aquellos que tienen exactamente tres divisores?
3. Observen que 8 tiene exactamente 4 divisores: 1, 2, 4 y 8. ¿Qué clase de números son aquellos que tienen exactamente 4 divisores?

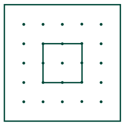
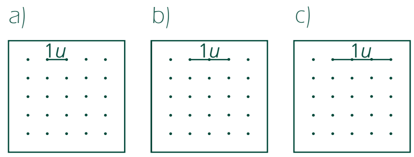
Cambiando la unidad

Tema 3: Fracciones: multiplicación y división



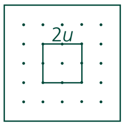
Propósito	Enriquecer el significado de los números y sus operaciones a través de la solución de problemas diversos.
Contenidos	Revisión de la adición de más de dos fracciones. Problemas asociados a la multiplicación de fracciones. Algoritmo de la multiplicación.
Material	Geoplano de 5 x 5 y ligas (por alumno).

1 Organizados los alumnos en equipos de cuatro, plantee la siguiente actividad:

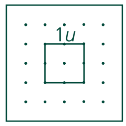
> Formen con ligas en su geoplano un cuadrado como éste:
>
> 
>
> Calculen su área y perímetro considerando como unidad de medida lo que se muestra en los siguientes incisos:
>
> 
>

Los alumnos notarán que para los incisos *a)* y *b)* sólo requieren trabajar con números enteros para el cálculo del perímetro y del área.

a) $P = 2u + 2u + 2u + 2u = 8u$
$A = (2u)\,(2u) = 4u^2$



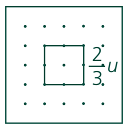
b) $P = 1u + 1u + 1u + 1u = 4u$
$A = (1u)\,(1u) = 1u^2$



No así para el inciso *c)*, en el que se requiere hacer uso de fracciones debido a que la unidad es mayor que la medida del lado del cuadrado. Se dejará que sean los alumnos quienes calculen el perímetro y el área. Después del tiempo que usted juzgue pertinente pasarán representantes de los equipos a exponer ante el grupo los resultados y procedimientos que utilizaron. Es probable que a algún equipo se le ocurra dividir la unidad en tercios y concluya que cada lado del cuadrado mide dos tercios de la unidad, por lo que se tiene:

c) $P = \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}u = \frac{8}{3}u$

$= 2\,\frac{2}{3}u$

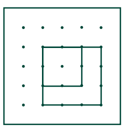


O bien, sabiendo que el perímetro del cuadrado se calcula multiplicando la medida de un lado por 4, se tiene: $P = 4 \times \frac{2}{3}u$

Y de ahí concluyan que 4 veces 2/3 es 8/3, es decir: $4 \times \frac{2}{3}u = \frac{8}{3}u = 2\,\frac{2}{3}u$

Para el área es probable que algún equipo, si marca con ligas el cuadrado cuyo lado es la unidad, logre apreciar los novenos en que éste queda dividido, de tal forma que el cuadro que nos interesa ocupa un área de cuatro de estos novenos, por lo que:

$$A = \frac{4}{9}u^2$$



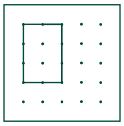
Por otro lado, como los alumnos saben que para calcular el área de un cuadrado se emplea la fórmula: $A = l \times l$.
Y para este cuadrado $l = 2/3\ u$, entonces: $A = l \times l = 2/3\ u \times 2/3\ u$.

Y el resultado se obtiene mediante la multiplicación: $\frac{2}{3}u \times \frac{2}{3}u = \frac{4}{9}u^2$

Propicie que los alumnos noten que el numerador es el producto de los numeradores de los factores, y el denominador es el producto de los denominadores de los factores.

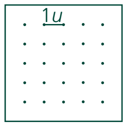
2 Organizados de la misma manera que en la actividad 1, plantee la siguiente situación:

- Formen con ligas en su geoplano un rectángulo como éste:

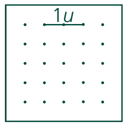


Calculen su área y perímetro considerando como unidad de medida:

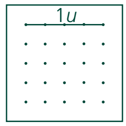
a)



b)



c)



Nuevamente otorgue tiempo suficiente para que los alumnos exploren y encuentren la solución del problema. Cuando lo considere pertinente, pase a algunos alumnos al frente para que den las respuestas a los tres incisos y platiquen cómo las encontraron. Como el problema es muy similar al de la actividad 1, los procedimientos serán parecidos y servirán para reafirmar y precisar nociones y procedimientos. Los alumnos notarán que para el inciso *a)* no es necesario emplear fracciones, y que la respuesta es:

$$P = 2u + 3u + 2u + 3u = 10u$$

$$A = b \times h = (2u)\,(3u) = 6u^2$$

Para el inciso *b)* el ancho mide una unidad, mientras que para expresar el largo se emplean fracciones. Quizá algunos equipos la consideren como 1 1/2 *u* y otros como 3/2 *u*. Los equipos podrán calcular el perímetro de varias maneras, por ejemplo:

$$P = 1u + \frac{3}{2}u + 1u + \frac{3}{2}u = 5u$$

$$P = 2 \times 1u + 2\,\frac{3}{2}u = 5u$$

Si algún equipo propone esta última forma, aproveche para recordar la multiplicación de un entero por una fracción.

El área puede calcularse de manera concreta: al formar con ligas el cuadrado que corresponde a una unidad se observará que el rectángulo tiene una unidad cuadrada de área y un medio de la misma, es decir, 1 1/2 u^2.

O bien, aplicando la fórmula: $A = b \times h = 1u \times \frac{3}{2}u = \frac{3}{2}u^2 = 1\frac{1}{2}u^2$

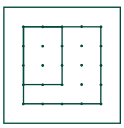
Lo que podrá ser aprovechado para repasar la manera en que se multiplica un entero y una fracción.

Finalmente, el inciso c) resulta interesante porque ambas dimensiones del rectángulo dan lugar a fracciones. Los cálculos para determinar el perímetro son:

$$P = \frac{1}{2}u + \frac{3}{4}u + \frac{1}{2}u + \frac{3}{4}u = 2\,\frac{1}{2}u$$

Esto se ve objetivamente en el geoplano contando cuántas veces *cabe* la unidad en el contorno de la figura. Puede notarse que, efectivamente, cabe dos veces y media.

Para el área, al formar un cuadrado de una unidad de lado, se tiene que el rectángulo ocupa 6/16 partes de la unidad cuadrada, por lo que su área es: 6/16 u^2, y simplificando, 3/8 u^2.



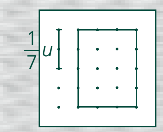
Si algún equipo resolvió el problema por fórmula, entonces obtuvo: $A = \frac{1}{2}u \times \frac{3}{4}u = \frac{3}{8}u^2$

La comparación de ambos procedimientos servirá para que el alumno vea la representación gráfica de la multiplicación de fracciones.

VARIANTE

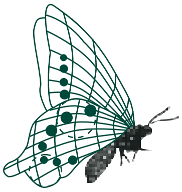
Es posible seguir cambiando las unidades (incluso estos cambios pueden ser propuestos por los alumnos). Por ejemplo:

- Calcular el área y el perímetro considerando que el segmento marcado es 1/7 de la unidad.



Las potencias

Tema 4: Uso de exponentes y notación científica



Propósito	Enriquecer el significado de los números y sus operaciones a través de la solución de problemas.
Contenidos	Potencias sucesivas de un número (construcción de una tabla de potencias de 2 o de 6).
Material	Calculadora.

1 Explique brevemente lo que significa elevar un número a una potencia, por ejemplo: 2^5, 2^{10}, etcétera. Después de organizar a los alumnos en equipos de tres o cuatro intregrantes, proponga el siguiente problema:

> Observen que al calcular 2^5 el número que se obtiene es 32, que termina en 2. Al calcular 2^{10} el número que se obtiene es 1 024, y este número termina en 4.
> a) ¿En qué cifra termina 2^{25}?
> b) ¿En qué cifra termina 2^{60}?
> c) ¿En qué cifra termina 2^{1999}?

En esta situación no se busca que los alumnos muestren su habilidad para operar con lápiz y papel, sino su habilidad para encontrar cierto tipo de patrones y, por esta razón, la calculadora es un instrumento que les permitirá agilizar los cálculos.

Dado el tipo de calculadora que normalmente utilizan, los alumnos podrán responder sin mucha dificultad el inciso *a),* ya que el número que se obtiene está formado por ocho dígitos y en consecuencia cabe en la pantalla de la calculadora. En cambio no podrán responder a los incisos *b) y c).* Una estrategia consiste en hacer una lista de las potencias de 2 hasta donde la calculadora dé el resultado, y después seguir con lápiz y papel hasta obtener el número correspondiente a 2^{60}. Ahora bien, este procedimiento ya no es adecuado para conocer en qué cifra termina 2^{1999}, pero a partir de la lista que los alumnos hagan usted puede formular algunas sugerencias, por ejemplo: que en una tabla como la que sigue anoten algunas de las potencias del número 2.

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
2	4	8	16	32	64	128					

Sugiera a los alumnos que observen la relación entre el exponente y la cifra en que termina la potencia de 2. Así, algunos alumnos observarán que si el exponente es par entonces el número termina en 4 o en 6, y si es impar el número termina en 8 o en 2. En consecuencia encontrarán que la última cifra al elevar 2^{1999} es 2 u 8, pero aún faltará encontrar un procedimiento que ayude a saber cuál de las dos es la cifra correcta. Otros alumnos se darán cuenta de que la sucesión de números 2, 4, 8 y 6, en que terminan las potencias de 2, se repite en el mismo orden y que, por ejemplo, los números 2^2, 2^6, 2^{10}, etcétera, terminan en 4, por lo que se darán cuenta de que no es necesario realizar las operaciones para saber en qué cifra terminan 2^{14}, 2^{18}, 2^{22}, ya que podrán contar los exponentes de 4 en 4 a partir de 2^2 para determinar que terminan en 4.

A partir de que los equipos expongan las distintas formas que utilizaron para determinar en qué cifra terminan 2^{60} y 2^{1999}, usted puede mostrar otro procedimiento:

Cuando los exponentes de 2^n son múltiplos de 4 (4, 8, 12...) el número que se obtiene termina en 6. Si el exponente es múltiplo de 4 más 1 (5, 9, 13...) los números terminan en 2. Si el exponente es múltiplo de 4 más 2 (6, 10, 14, 18...) entonces los números terminan en 4, y si es múltiplo de 4 más 3 (7, 11, 15, 19...) el número termina en 8. A partir de lo anterior, para saber en qué cifra termina 2^{1999} hay que determinar si 1 999 es de la forma: $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ o $4n + 3$.

Para ello se puede proceder de varias maneras, por ejemplo, dar valores a n hasta encontrar que: $4 \times 499 + 3 = 1\ 999$.

O bien, si los alumnos están en posibilidades, pueden resolver las siguientes cuatro ecuaciones y ver en cuál se obtiene un valor entero de n:

$$4n = 1\,999$$
$$4n + 1 = 1\,999$$
$$4n + 2 = 1\,999$$
$$4n + 3 = 1\,999$$

Así encontrarán que la última ecuación proporciona el resultado deseado y, por tanto, concluirán que $n = 499$.

2 Proponga trabajar en equipos de tres o cuatro alumnos. A continuación pida que resuelvan el siguiente problema:

> Observen que al elevar 6^4 el número que se obtiene es 1 296, cuyos dos últimos dígitos son 9 y 6. Y que al elevar 6^5 el resultado es 7 776, cuyos dos últimos dígitos son 7 y 6.
> a) ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 6^{27}?
> b) ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 6^{60}?
> c) ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 6^{1999}?

6^2	6^3	6^4	6^5	6^6	6^7	6^8	6^9	6^{10}	6^{11}
36	216	1 296	7 776						

Los alumnos se darán cuenta de que la calculadora no va a serles de mucha utilidad, por lo que tendrán que recurrir a otras estrategias. Sugiera nuevamente que recurran a una tabla como la anterior, y que en ella anoten algunas potencias de 6.

Con la finalidad de ayudar a los estudiantes, inicie esta tabla con 6^2 y no con 6^1, ya que es más fácil observar la sucesión que se genera con las dos últimas cifras, es decir, 36, 16, 96, 76, 56, 36...

Es importante que observe el trabajo de los diferentes equipos y, en caso necesario, les ayude a reflexionar sobre el problema. Pregunte por ejemplo: ¿Cómo van cambiando las dos últimas cifras de los resultados? Esas dos últimas cifras, ¿con qué exponentes están relacionados? Pídales que hagan una lista de aquellos exponentes de 6 que terminan en el mismo par de números.

Así, ciertos equipos encontrarán que los números formados con las dos últimas cifras de las potencias de 6 se van repitiendo de cinco en cinco. Al analizar la lista de números, ciertos equipos encontrarán que si elevan el 6 a cualquiera de los siguientes exponentes: 2, 7, 12, 17, 22... el número termina en 36, por tanto determinarán que 6^{27} termina en esa cifra.
Otros equipos encontrarán que al elevar 6 a alguno de los exponentes de la sucesión 3, 8, 13, 18... el número termina en 16.
Que al elevar 6 a alguno de los exponentes de la sucesión 5, 10, 15, 20... el número termina en 76.
Que al elevar 6 a alguno de los exponentes de la sucesión 4, 9, 14, 19... el número termina en 96.

En consecuencia determinarán en qué cifra terminan 6^{27} y 6^{60}. Además se darán cuenta de que para saber en qué cifra termina 6^{1999} necesitan saber en qué sucesión de exponentes va a aparecer 1 999.

Como un procedimiento más para contestar las preguntas del problema, puede dar a los alumnos (si es que no lo hacen por sí solos) la expresión algebraica que genera cada una de las cinco sucesiones de exponentes y, a partir de ellas, determinar a qué sucesión pertenece cada uno de los exponentes a que hace referencia el problema, es decir: 25, 90 y 1 999.

A continuación anote las expresiones para cada una de las sucesiones de los exponentes:

- Números que terminan en 36: $5n + 2$, si se empieza a evaluar en cero, y $5n - 3$ si se evalúa a partir de uno.
- Números que terminan en 16: $5n + 3$, si se empieza a evaluar en cero, y $5n - 2$, si se evalúa a partir de uno.
- Números que terminan en 96: $5n + 6$, si se empieza a evaluar en cero, y $5n + 1$ si se evalúa a partir de uno.
- Números que terminan en 76: $5n$.
- Números que terminan en 56: $5n + 7$, si se empieza a evaluar en cero, y $5n + 2$ si se evalúa a partir de uno.

VARIANTE

En qué dígito terminan las siguientes potencias: 8^{27}, 8^{90}, 8^{1999}.

El abecedario y la simetría

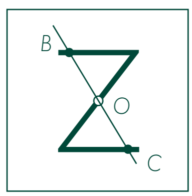
Tema 5: Reflexión respecto a una recta. Reflexión respecto a un punto

Propósitos	Practicar los trazos geométricos. Utilizar el lenguaje propio de la geometría.
Contenidos	Simetría axial: construcción del simétrico de un punto respecto a una recta. Simetría central: reflexión de un punto y de una figura respecto a un punto. Determinación, si existe, del centro de simetría de una figura.
Material	Hojas cuadriculadas, espejos y copias del anexo A (p. 122).

1 Organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos. Proporcione a cada equipo varias hojas cuadriculadas y una copia del anexo A. Dibuje en el pizarrón las letras A y Z y señale lo siguiente:

La letra A tiene simetría axial, porque si trazan la línea *m* (que es su eje de simetría) y doblan la letra sobre ese eje, las partes de la izquierda y de la derecha en que el eje divide a la letra A, coinciden una con otra.

Ahora observen la letra Z. Ésta no tiene simetría axial, pero *sí* tiene simetría central, esto es, el punto O tiene la siguiente propiedad: si escogen un punto *B* cualquiera sobre la letra y trazan una línea que pase por ese punto y el punto O, dicha línea tocará un punto C sobre la letra; si fijan el punto O y giran la letra 180º observarán que *B* pasará al lugar del punto C, y viceversa.



En hojas de papel cuadriculado tracen las letras mayúsculas del abecedario y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué letras del abecedario tienen *sólo* simetría axial? Compruébenlo.

b) ¿Qué letras del abecedario tienen *sólo* simetría central? Compruébenlo.

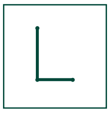
c) ¿Cuáles tienen simetría axial y central? Compruébenlo.

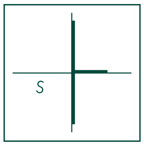
Los equipos no tendrán dificultades para encontrar las letras del abecedario que cumplen con las condiciones indicadas en el inciso *a)*. Quizá algunos equipos consideren que si una línea divide en dos partes congruentes cierta letra, esa línea es un eje de simetría. En este caso sugiérales que utilicen un espejo para que verifiquen si la línea es, o no, un eje de simetría.

Algunos alumnos pueden tener dificultades para determinar las letras que tienen simetría central. Oriente a esos alumnos indicándoles, por ejemplo, que copien otra letra igual, la superpongan a la original y la giren, de esta manera observarán si la figura tiene o no centro de simetría.

2 Indique a sus alumnos que van a seguir trabajando en equipos, con las mismas letras del abecedario. A continuación explique en qué consiste la actividad.

a) La letra L no tiene ejes de simetría. Observen cómo se procedió para construir una nueva figura que tiene un eje de simetría.



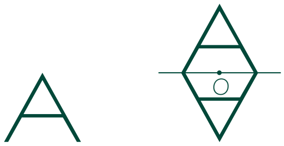


Se trazó la línea s, de modo que ésta fuera el eje de simetría de la figura.

Elige al menos cinco letras que no tengan eje de simetría y construye figuras de sólo un eje de simetría.

b) A partir de la letra L construye una figura con dos ejes de simetría.

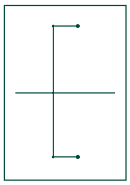
c) La letra A tiene un solo eje de simetría; con esta letra se puede construir otra figura que tenga simetría central y dos ejes de simetría. En la figura construida el centro de simetría es el punto O.



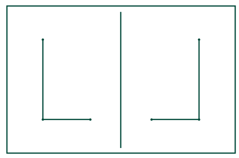
Construyan la figura y comprueben que tiene dos ejes de simetría, y que el punto O es el centro de simetría de la figura.

¿Qué letras del abecedario permiten construir otra figura que tenga dos ejes de simetría y además simetría central? Constrúyanlas y verifiquen que cumplen con las condiciones.

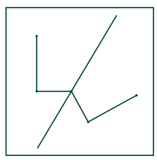
Ciertos equipos encontrarán que la línea que será eje de simetría de la letra L puede ser trazada en otra posición, por ejemplo:



Algunos equipos trazarán la línea de manera que tendrán como resultado dos figuras separadas por el eje de simetría. Esta situación puede llevar al grupo a discutir si la figura resultante, en su conjunto, es una sola o se trata de dos figuras.



Otros alumnos tal vez ensayen diferentes posiciones para colocar el espejo y trazar la línea de simetría para formar una nueva figura.

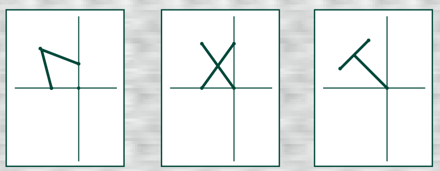


Para construir figuras con dos ejes de simetría y simetría central, es probable que ciertos equipos tracen al azar el segundo eje de simetría y en consecuencia la figura no cumplirá con las condiciones especificadas. En este caso ofrezca alguna orientación, por ejemplo, comente que pueden colocar el espejo sobre algún borde de la letra y comprobar si la figura resultante cumple con las condiciones especificadas.

Variantes

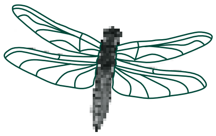
Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades:

1. En una hoja en blanco tracen una letra que tenga un eje de simetría. A partir de esta línea construyan con regla y compás una figura que tenga dos ejes de simetría.
2. En papel cuadriculado tracen las letras V, X y T como se indica. Consideren que cada línea es un eje de simetría. Construyan figuras simétricas respecto a cada una de las dos rectas.



Las ventanas del calendario

Tema 6: Ecuaciones lineales: uso de la incógnita (primeros ejemplos)



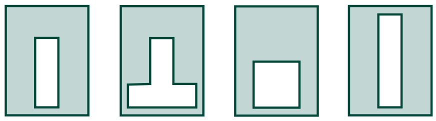
Propósitos Familiarizarse con diversos medios de expresión matemática: la escritura simbólica. Plantear y resolver problemas sencillos que conduzcan a ecuaciones lineales.

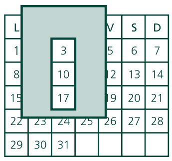
Contenidos Introducción y uso de la incógnita. Situaciones derivadas de diversos contextos.

Material Una hoja de calendario.

1 La actividad se realiza en equipos de tres o cuatro alumnos. Solicite previamente a cada equipo que lleve una hoja de un calendario; de preferencia todos los equipos deben llevar la hoja del mismo mes. Plantee a los alumnos la siguiente actividad:

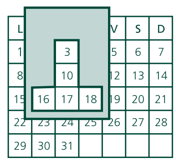
Recorten en tarjetas las siguientes cuatro ventanas que servirán para *mirar* una parte del calendario:





Cada tarjeta se colocará sobre la hoja de calendario. En el ejemplo anterior se ha colocado la tarjeta I. Por la ventana se pueden mirar los siguientes tríos de números: 3, 10, 17; 12, 19, 26; 8, 15, 22.

a) Encuentren la manera de obtener la suma de los tres números con una sola multiplicación, o una multiplicación y una suma.
b) Encuentren una expresión algebraica que les permita obtener la suma de los tres números que se ven por la ventana, conociendo sólo uno de ellos.
c) Coloquen la ventana II en cualquier lugar del calendario. Observen que abarca cinco números. Como si sólo conocieran uno de los números que se ven por la ventana, encuentren la manera de obtener la suma de los cinco números mediante una multiplicación y una suma.
d) Encuentren una expresión algebraica para obtener la suma de los cinco números, supongan que conocen sólo uno de los números.
e) Encuentren la expresión algebraica que les permita obtener la suma de los números que se ven por las ventanas III y IV, respectivamente; piensen que sólo conocen uno de los números de cada ventana.



Buscar la solución de los problemas planteados llevará a los alumnos a proponer estrategias aritméticas que los conducirán a la aplicación del álgebra. Por ejemplo:

Para resolver el primer problema algunos alumnos se darán cuenta de que basta con multiplicar el número que se encuentra en el centro de la ventana por 3, pero no podrán expresar algebraicamente ese hecho. Para ayudarlos, comente que si llaman x o z al número del centro encontrarán la manera de expresar algebraicamente el procedimiento para encontrar lo que se pide.

Algunos equipos encontrarán relaciones entre los números pero quizá no puedan expresarlas algebraicamente. Si colocan la ventana de manera vertical y consideran el número de arriba (3), verán que los otros dos números pueden obtenerse a partir de aquél, sumando 7 y 14; de la misma forma, si colocan la ventana horizontalmente, dejando el número 3 a la izquierda, se darán cuenta de que sumando a éste 1 y 2 obtienen los dos números restantes, es decir el que aparece en el centro y el de la derecha. De nuevo, ayude a los alumnos a expresar esta relación mediante unas preguntas: Si llaman b al número de arriba, ¿cómo se obtienen los otros dos? ¿Cómo obtendrán la suma de los tres números? En este caso, es posible que los alumnos lleguen a la expresión: $b + (b + 7) + (b + 14)$. Sugiera entonces que simplifiquen la expresión. Al simplificarla los alumnos obtendrán: $3b + 21$. Si se factoriza, la expresión será $3(b + 7)$.

Para encontrar la expresión algebraica que permite obtener la suma de los números de las ventanas II, III y IV, los alumnos pueden proceder de manera similar. Una dificultad que los propios alumnos pueden plantearse es la siguiente. Si en la ventana I, por ejemplo, llaman x al número que se encuentra en la parte inferior de la ventana, tendrán que operar con números negativos y llegarán a la expresión: $3x - 21$.

De manera que se obtienen tres expresiones distintas para la misma suma dependiendo del lugar en que se ubicó la incógnita. Esto es:

- $3x$ al ubicar x al centro.
- $3x + 21$ al ubicar x en la parte superior.
- $3x - 21$ al ubicar x en la parte inferior.

Esta situación dará lugar a una discusión que lleve a los alumnos a concluir que las expresiones dependen del lugar en que se ubicó a la incógnita. Si la ventana fue colocada horizontalmente, dos expresiones que se pueden obtener son:

- $3x + 3$ al colocar x en el extremo izquierdo.
- $3x - 3$ al colocar x en el extremo derecho.

De manera similar, se espera que los alumnos encuentren expresiones algebraicas para las ventanas II, III y IV. Por ejemplo:

- $5x + 49$, para la ventana II.
- $4x + 16$, para la ventana III.
- $4x + 42$, para la ventana IV.

2 Esta actividad se realiza en equipos de tres o cuatro estudiantes. Indíqueles que van a utilizar las mismas cuatro ventanas y plantee el siguiente problema:

> El número 63 corresponde a la suma que se obtuvo utilizando una de las cuatro ventanas, ¿cuál es la ventana que se utilizó?

Algunos equipos resolverán el problema mediante ensayo y error, es decir, tomarán cada una de las ventanas y las colocarán sobre el calendario hasta localizar la que sume 63. Otros equipos pondrán en práctica las expresiones algebraicas obtenidas y empezarán a probar con cada una, esto es, tomarán valores y los sustituirán en las expresiones hasta encontrar aquella en la que resulta 63. Otros equipos se darán cuenta de que cada expresión se puede igualar a 63 y obtener en consecuencia cuatro ecuaciones, pero sólo una de éstas tiene solución entera y corresponde a la ventana que se utilizó. Si no surgieran los dos últimos procedimientos es conveniente que usted los sugiera.

Una dificultad que se puede presentar a los alumnos es la manera de proceder para resolver una ecuación. Aproveche la situación para resolver ecuaciones de primer grado.

3 Indique a los alumnos que van a trabajar en equipos de tres o cuatro integrantes y plantee la siguiente situación.

> Inventen cinco ventanas diferentes a las cuatro que hemos utilizado hasta ahora. Encuentren las expresiones algebraicas que permitan conocer la suma de los números que se ven en cada ventana de acuerdo con el siguiente arreglo de números:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77

Dado que la situación es similar a las actividades 1 y 2, es probable que los alumnos no tengan dificultades para proponer las ventanas y encontrar las expresiones algebraicas.

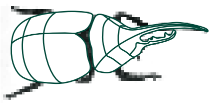
VARIANTES

Puede proponer a los alumnos las siguientes actividades:

1. Si en el arreglo de la actividad 3 colocan la ventana I, de la actividad 1, sobre los números 1, 8 y 15, la suma es 24; si la colocan sobre los números 2, 9 y 16, la suma es 27; si la colocan en los números 3,10 y 17, la suma es 30, etcétera. Si siguen colocando la ventana en el mismo orden, ¿cuál será la suma al colocar la ventana en el número 50? ¿Y si colocan la ventana en el lugar 100?
2. La expresión algebraica $5x$ corresponde a una ventana que se colocó sobre el arreglo de la actividad 3. Si x representa uno de los números que se ven en la ventana, ¿cuál es la forma de dicha ventana?

Diagramas y ecuaciones

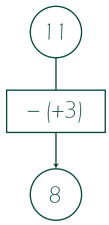
Tema 7: Números con signo



Propósitos Enriquecer el significado de los números y sus operaciones mediante la solución de problemas diversos. Plantear problemas sencillos que conduzcan a ecuaciones.

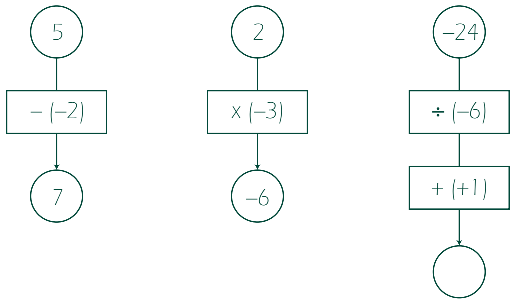
Contenidos Solución de ecuaciones de las formas $a + x = b$, $ax = b$, $ax + b = c$, donde a, b, c y la incógnita x representan números con signo.

1 Explique al grupo que iniciarán una actividad para la cual será necesario entender diagramas como el siguiente:



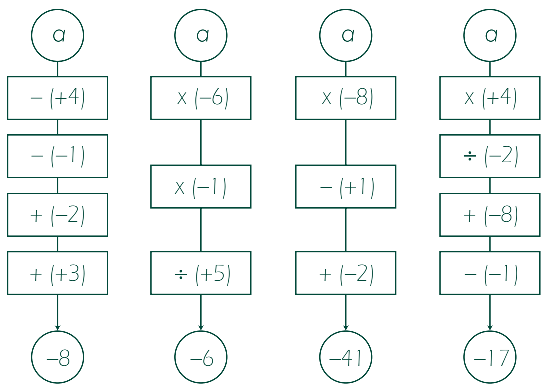
En el diagrama anterior se debe entender que el número 11 es la entrada, el – (+3) es una operación, y el número 8 aparece en la salida.

Podrán ponerse algunos ejemplos para ilustrar la forma en que se usarán estos diagramas. Es conveniente dejar que los alumnos llenen algunos valores de salida que se dejen en blanco (como en el tercer diagrama que se muestra a continuación).



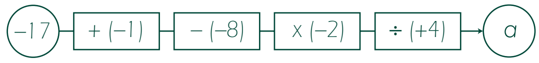
Después de esta breve explicación, organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos y proponga la siguiente actividad:

En cada diagrama, encuentren el valor de entrada (a).



En un primer intento es muy probable que los alumnos traten de encontrar los valores de entrada sustituyendo a por cualquier valor y haciendo las operaciones indicadas para verificar si llegan o no al valor de salida señalado. Podrán intentarlo varias veces hasta encontrar el valor correcto, lo cual, de no correr con suerte, les podría llevar mucho tiempo.

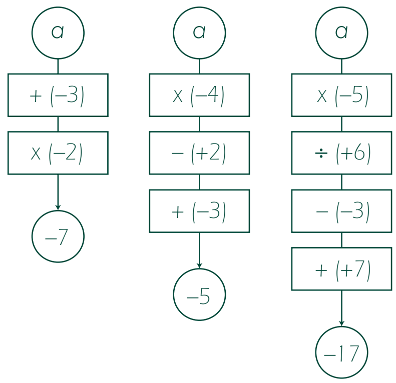
Se espera que a algunos equipos se les ocurra empezar por el valor de salida y aplicar las operaciones inversas. Por ejemplo, para el cuarto diagrama se puede hacer lo siguiente (mentalmente o por escrito):



Los alumnos presentarán sus ideas y soluciones ante el grupo y discutirán sobre las distintas estrategias usadas. Puede observarse que esta actividad permite repasar las operaciones de números con signo (suma, resta, multiplicación y división), así como practicar el cálculo mental y la idea de operaciones inversas (suma-resta, multiplicación-división).

2 Organice a los alumnos de la misma manera que en la actividad 1 y proponga el siguiente ejercicio:

Traten de escribir los siguientes diagramas como ecuaciones y encuentren el valor de *a* empleando los diagramas en la forma que ya conocen.



Después de dar el tiempo suficiente y dejar que los alumnos escriban como ecuaciones los diagramas, pase a representantes de los equipos para que:

a) Escriban en el pizarrón sus ecuaciones.
b) Encuentren el valor de la incógnita por dos métodos:

- Con operaciones inversas en el diagrama.
- Resolviendo la ecuación.

Lo interesante de escribir como ecuación lo que está en el diagrama es el uso correcto de la simbología algebraica; por ejemplo, para el primer diagrama, es posible que algún equipo escriba: $a + (-3) \times (-2) = -7$

Se espera que a través de la discusión los equipos analicen diferentes maneras de escribir la ecuación que corresponde a cada diagrama. Algunas posibles respuestas correctas son:

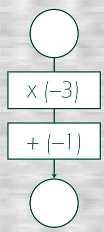
$$[a + (-3)] \times (-2) = -7$$
$$-2\,[a + (-3)] = -7$$
$$-2\,(a - 3) = -7$$

Esta será una excelente oportunidad para repasar el uso de signos de agrupación y la simplificación de ecuaciones.

VARIANTES

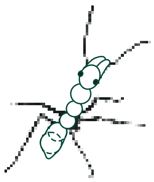
1. Pida a los alumnos que dada una ecuación elaboren su diagrama correspondiente.
2. Pida que llenen tablas dando valores diferentes de entrada a un diagrama y que grafiquen en un sistema cartesiano los pares de datos (entrada, salida).

Entrada	Salida
1	–4
2	–7
3	–10
4	–13



Balanza y ecuaciones

Tema 8: Ecuaciones lineales. Introducción a los métodos algebraicos de solución



Propósito Resolver ecuaciones lineales utilizando procedimientos algebraicos.

Contenidos El modelo de la balanza. Solución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$; $ax + bx + d = cx + dx + f$.

1 Organice al grupo en equipos. Después plantee el problema:

Observen las siguientes balanzas. ¿Cuál es el peso del objeto representado por el rectángulo en cada caso?

a)

b)

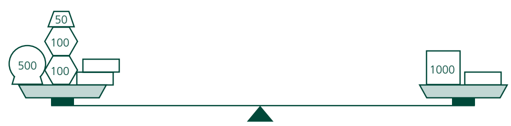
Encontrar el peso del objeto representado por el rectángulo en cada uno de los incisos anteriores es relativamente sencillo y quizá la mayoría de los equipos resuelva ambos problemas mentalmente.

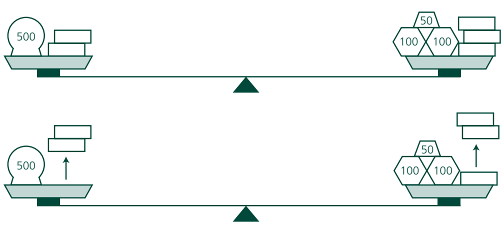
2 Plantee ahora los siguientes problemas. Señale que sólo se permite utilizar pesas de 50, 100, 500 y 1000 g.

¿Cuál es el peso de los rectángulos que se encuentran en las balanzas?

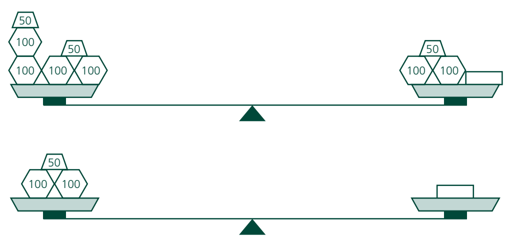
a)

b)





En estos problemas los alumnos, de manera intuitiva, empezarán a operar con las incógnitas, es decir, llevarán a cabo la eliminación de incógnitas en ambos platillos, representadas por los rectángulos.



Para resolver estos problemas algunos alumnos pueden utilizar un modelo de tipo algebraico que puede aprovecharse para introducir la notación usual del álgebra. Por ejemplo:

Modelo de los alumnos	Modelo algebraico
$500 + \cancel{\square\square} = 100 + 100 + 50 + \cancel{\square\square}\square$	$500 + 2x = 100 + 100 + 50 + 3x$
$500 = 100 + 100 + 50 + \square$	$500 + 2x - 2x = 250 + 3x - 2x$
$50 + \cancel{50} + 100 + 100 + \cancel{100} + \cancel{100} = \cancel{100} + \cancel{100} + \cancel{50} + \square$	$500 = 250 + x$
$50 + 100 + 100 = \square$	$50 + 50 + 100 + 100 + 100 + 100 = 100 + 100 + 50 + x$
$250 = \square$	$50 + 100 + 100 = x$
	$250 = x$

Los alumnos pueden proceder de manera similar para resolver el segundo problema. Es importante que usted permita que los alumnos expongan ante el grupo las estrategias que idearon para resolver los problemas.

3 Comente a los alumnos que el siguiente problema será resuelto en equipos.

Utilizando sólo pesas de 50, 100 y 500 g, encuentren el valor del trapecio que aparece en la balanza.

Este problema plantea el manejo de dos incógnitas representadas por el rectángulo y el trapecio, de las cuales una (el rectángulo) puede eliminarse. Para resolver el problema los alumnos procederán como en los problemas de la actividad 2, esto es, empleando un algún diagrama o alguna representación cercana al lenguaje algebraico.

Comente con el grupo los procedimientos que utilizaron los equipos para resolver el problema, y aproveche para mostrar un procedimiento algebraico relacionado con el modelo de la balanza; por ejemplo:

$$500 + \cancel{100} + \cancel{x} = \cancel{100} + 100 + 100 + 50 + \cancel{x} + y$$
$$500 = 100 + 100 + 50 + y$$
$$\cancel{100} + \cancel{100} + 100 + 100 + 100 = \cancel{100} + \cancel{100} + 50 + y$$
$$100 + 100 + 100 = 50 + y$$
$$100 + 100 + \cancel{50} + 50 = \cancel{50} + y$$
$$250 = y$$

Más adelante los alumnos se darán cuenta de que es posible simplificar el proceso.

Variantes

Puede plantear a sus alumnos los siguientes problemas:

1. Consideren que el signo igual (=) corresponde al fiel de la balanza cuando ésta mantiene el equilibrio, y que las expresiones algebraicas que están a su derecha e izquierda reposan sobre los platillos. En cada caso encuentren el valor que representa la incógnita x.

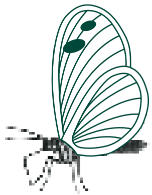
   $x + 5 = 20$
   $5x + 5 = 4x + 20$

2. Encuentren el valor de la incógnita utilizando el modelo de la balanza.

   $6x + y + 4 = 2x + y + 8$

Rompecabezas

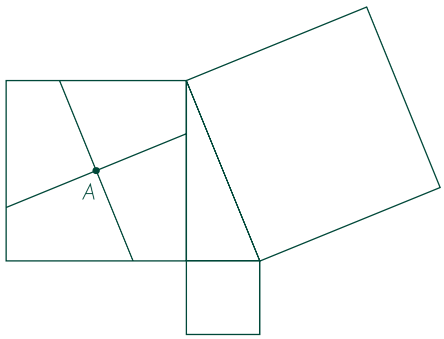
Tema 9: Descomposición de figuras y equivalencia de áreas



Propósitos	Resolver problemas que conduzcan a calcular el área de las figuras comunes y de otras formadas por su combinación. Iniciarse gradualmente en el razonamiento deductivo en situaciones escogidas por el profesor.
Contenidos	Demostración del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencia de áreas.
Material	Juego de geometría, un pliego de cartulina y tijeras.

1 Escriba en el pizarrón las siguientes instrucciones. Pida a los alumnos que las lleven a cabo usando un cuarto de cartulina.

- *Tracen la siguiente figura siguiendo las instrucciones.*



a) Tracen un triángulo rectángulo cualquiera.
b) Construyan sobre cada uno de sus lados un cuadrado.
c) Localicen el centro del cuadrado del cateto mayor (llamen *A* a este punto).
d) Tracen una paralela a la hipotenusa que pase por el punto *A*.
e) Tracen una perpendicular a la hipotenusa que también pase por el punto *A*.

Una vez que tengan la figura completa, recorten los cuadrados de los catetos. Corten el cuadrado del cateto mayor en las cuatro partes que quedaron marcadas. Con estas cuatro piezas y el cuadrado menor traten de cubrir el cuadrado de la hipotenusa.

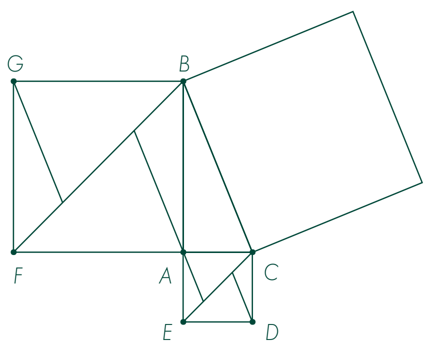
- ¿Se pudo formar el cuadrado de la hipotenusa?
- ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado de la hipotenusa y las áreas de los cuadrados de los catetos?

Una vez que tengan su figura armada puede pedir que la coloreen y la peguen en su cuaderno.

Mientras los alumnos trabajan, recorra el salón supervisando a los equipos: observe el uso correcto de los instrumentos geométricos y el seguimiento de las instrucciones. Al finalizar pida que comenten las respuestas de las preguntas. Durante la actividad precise los términos: triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa, cuadrado, área, paralela, perpendicular, centro de un cuadrado (y cómo encontrarlo), etcétera.

2 Organice a los alumnos en parejas; reparta después en fotocopia la siguiente figura o trácela en el pizarrón y pida a los alumnos que la reproduzcan en un cuarto de cartulina. Explique que por los puntos *A*, *G* y *D* se trazan paralelas a la hipotenusa del triángulo *ABC*.

- *Una vez que hayan terminado, recorten todos los triángulos en que quedaron divididos los cuadrados de los catetos y, a manera de rompecabezas, traten de cubrir el cuadrado de la hipotenusa*



Los alumnos notarán que:

- Se trata de un triángulo rectángulo cualquiera (de preferencia diferente al anterior).
- Se han trazado los cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa.
- En cada uno de los cuadrados de los catetos se ha trazado una de las diagonales (observar cuál).
- Por cada uno de los vértices que no se usaron para trazar la diagonal del inciso anterior, se traza una paralela a la hipotenusa.

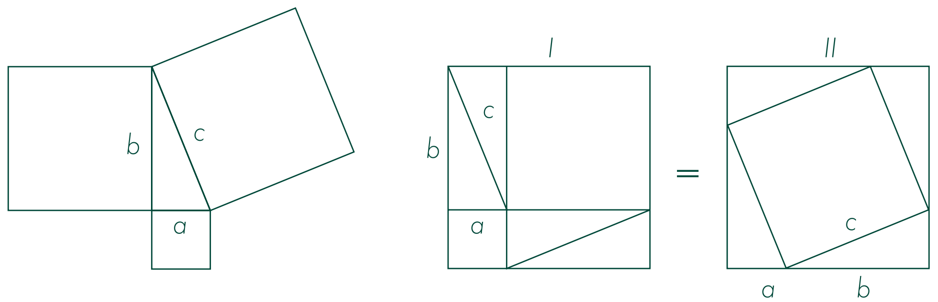
Serán los alumnos quienes tendrán que descubrir en la figura las propiedades arriba mencionadas. Al igual que en la actividad anterior, ésta permite practicar el uso correcto de los instrumentos geométricos para el trazo de paralelas, perpendiculares, el triángulo rectángulo, los cuadrados, etcétera, así como reafirmar algunas nociones como paralelismo, perpendicularidad, etcétera.

Plantee preguntas como las siguientes:

- ¿Fue posible armar con las piezas de los cuadrados de los catetos el cuadrado de la hipotenusa?
- ¿El triángulo rectángulo era diferente al de la actividad 1? ¿Son iguales los triángulos que construyeron las distintas parejas?
- ¿Esto se cumplirá en todos los triángulos? ¿Esto se cumplirá en todos los triángulos rectángulos? Como una manera de verificar, puede solicitarles que realicen la actividad anterior con otro triángulo rectángulo.

3 Los alumnos han tenido dos experiencias en las que, por medio de superposición de figuras, han verificado que "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Para esta actividad se sugiere que organice al grupo en equipos de cuatro; reparta la siguiente figura o reprodúzcala en el pizarrón y pida a los alumnos que sigan las instrucciones.

- *Analicen las siguientes figuras y busquen la manera de aprovecharlas para demostrar ante sus compañeros que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



Lo que se pretende es que sean los alumnos quienes, ayudándose con los cuadrados y triángulos rectángulos del material, busquen argumentos para verificar el teorema de Pitágoras por medio de la equivalencia de áreas.

En este caso, para el cuadrado I, el área es: $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Para el cuadrado II, el área es: $c^2 + 4\dfrac{ab}{2} = c^2 + 2ab$

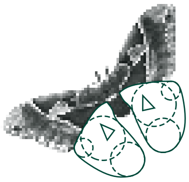
Y como ambos son iguales: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

De donde: $a^2 + b^2 = c^2$

Variantes

1. Otra actividad consiste en que los alumnos construyan triángulos rectángulos de medidas dadas (3, 4 y 5; 5, 12 y 13, etcétera), tracen los cuadrados sobre los lados y los cuadriculen para comprobar las relaciones entre las áreas.
2. Se puede hacer la actividad anterior con triángulos rectángulos de cualquier medida construidos en el geoplano, y calcular el área de los cuadrados construidos sobre sus lados por medio del conteo.

¿Cómo cortar?

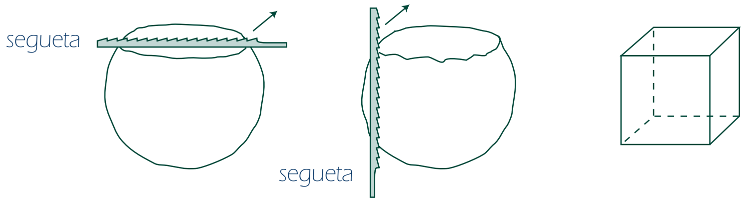


Propósito Desarrollar la imaginación espacial por medio de la observación de las secciones que se forman al cortar un sólido por un plano (casos sencillos).

Contenidos Actividades para explorar y observar las secciones que se forman al cortar un cubo o un paralelepípedo recto por un plano.

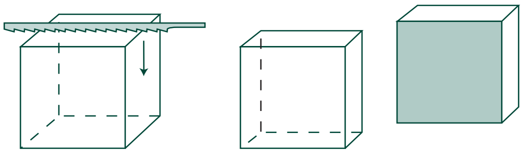
Material Plastilina, cartulina y una segueta.

1 Pida a sus alumnos que construyan dos cubos con cartulina y dos con plastilina. En caso de que se les dificulte construir los cubos de plastilina, muestre a los alumnos el procedimiento que se ilustra a continuación:



Una vez que los alumnos hayan elaborado los cubos, dibuje en el pizarrón la siguiente secuencia y plantee el problema:

Con una segueta corten un cubo en dos partes en la dirección que muestra el primer dibujo. Observen que al separar las dos partes en que se ha dividido el cubo, quedan a la vista dos cuadrados.



a) ¿De qué otra forma se puede cortar el cubo de manera que, al separar las dos partes en que queda dividido, las nuevas caras también tengan forma cuadrada? Primero analicen en el cubo hecho de cartulina dónde harían el corte; después háganlo en el cubo de plastilina.

b) ¿Cómo cortarían el cubo de manera que al separar las dos partes las caras tengan forma de rectángulo?* ¿Cómo harían el corte de manera que el rectángulo sea el de mayor área?

Al realizar estas actividades los alumnos desarrollarán su imaginación espacial, por lo que conviene dar un tiempo para que analicen en el cubo hecho en cartulina la manera de realizar el corte.

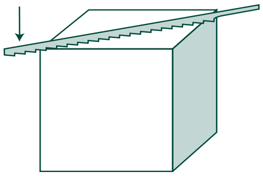
La primera actividad es relativamente sencilla y con seguridad los alumnos efectuarán cortes como el que se ha ilustrado. En este caso será conveniente que sugiera a los alumnos practicar cortes en otro lugar del cubo.

Una dificultad que puede presentarse en algunos equipos es que no coloquen la segueta de manera perpendicular a la cara por lo que al separar las partes no se verá exactamente un cuadrado. Si esto ocurre comente con el grupo acerca de la necesidad de colocar perpendicularmente la segueta.

La segunda actividad es más difícil porque los alumnos tendrán que hacer un análisis más cuidadoso para determinar cómo hacer el corte. Un primer procedimiento que los alumnos pueden seguir consiste en realizar un corte al azar y después ajustar poco a poco hasta obtener el rectángulo.

* Se considera rectángulo a la figura geométrica que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados contiguos no son congruentes.

Otros equipos se darán cuenta de que obtienen un rectángulo si la segueta pasa por dos puntos que estén a la misma distancia de uno de los vértices.



Al igual que en el caso del cuadrado, una dificultad que se puede presentar es que, al cortar, la segueta no se coloque perpendicularmente a la cara del cubo. Es conveniente que los alumnos expliquen al grupo cómo procedieron para resolver el problema.

2 Para realizar esta actividad se requieren tres o cuatro cubos de plastilina, uno de cartulina y una segueta. Plantee el siguiente problema:

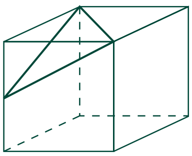
- a) ¿Cómo cortarían el cubo en dos, de manera que al separar las partes, las caras tengan forma de triángulo isósceles?
- b) ¿Cómo cortarían el cubo en dos, de manera que al separar las partes, las caras tengan forma de triángulo equilátero?
- c) ¿Cómo cortarían el cubo en dos, de manera que al separar las partes, las caras tengan forma de triángulo escaleno?

Tal vez la primera dificultad que los alumnos enfrenten sea la inclinación con la que deben colocar la segueta para hacer el corte. Los estudiantes se darán cuenta de que si colocan la segueta en forma perpendicular con respecto a la cara, al hacer el corte no obtendrán en ningún caso un triángulo. Será necesario que brinde a los alumnos alguna ayuda. Puede plantear, por ejemplo, algunas preguntas: Cuando obtuvieron un cuadrado y un rectángulo, ¿cuántas caras cortaron? Dado que se quiere ver una cara triangular, ¿cuántas caras será necesario cortar? Si colocan la segueta perpendicularmente, ¿podrán cortar tres caras? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

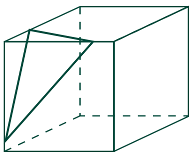
A partir de este tipo de consideraciones, puede pedir a los alumnos que analicen en el cubo de cartulina cómo hacer el corte y que después verifiquen en el cubo de plastilina si su análisis fue correcto o no.

Aunque en la primera pregunta se pide que obtengan triángulos isósceles al cortar el cubo, es posible que los alumnos obtengan otro tipo de triángulos. En cualquier caso se recomienda pedirles que den argumentos para verificar qué tipo de triángulos obtuvieron. Algunos posibles cortes son los siguientes:

Para el triángulo isósceles



Para el triángulo escaleno

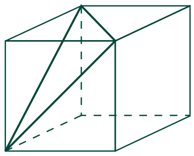


Una situación que se puede desprender del problema anterior es la siguiente:

- ¿Dónde y cómo cortar el cubo para obtener el triángulo equilátero de mayor área?

En este caso es necesario que la segueta se incline 45º con respecto a la cara en que se apoya.

Triángulo equilátero



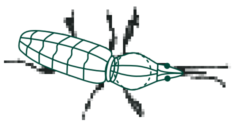
Variantes

Puede plantear a los alumnos las siguientes situaciones:

1. ¿Cómo cortarían el cubo en dos de manera que al separar las partes, las caras tengan forma de trapecio isósceles?
2. Consideren un paralelepípedo recto:
    - ¿Cómo cortarían el paralelepípedo en dos de manera que, al separar las partes, las caras tengan forma de rectángulo?
    - ¿Cómo cortarían el paralelepípedo en dos de manera que, al separar las partes, las caras tengan forma de triángulo?

Costo de los discos compactos

Tema 11: Uso de tablas, gráficas, porcentajes, promedios y densidades



Propósitos Conocer y acostumbrarse al uso de cantidades absolutas y relativas. Uso de tablas, gráficas y otras formas comunes de organizar y presentar la información.

Contenidos Ejemplos de interpolación gráfica.

Material Video 1 de la serie "El mundo de las matemáticas", escuadras, dos pliegos de papel bond (para trazar gráficas) y calculadora (opcional).

1 Inicie la clase viendo el video: *Costo de los discos compactos.*

Al terminar comente el contenido del video y organice al grupo en equipos de cuatro alumnos. Pídales que resuelvan el primer problema planteado.

Recuérdeles la tabla que se presenta en el video (si no cuenta con el video, presente la siguiente tabla comentando que se trata del reporte de costos de producción de una empresa de discos compactos):

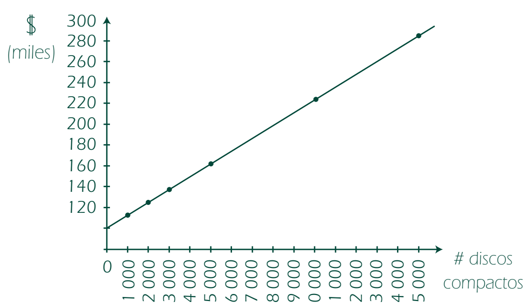
Número de discos	Costo (en dólares)
1 000	116 000
2 000	128 000
3 000	140 000
5 000	164 000
10 000	224 000
15 000	284 000

Pida que con estos datos construyan una gráfica en el plano cartesiano y que a partir de la gráfica encuentren el costo de 7 200 discos compactos.

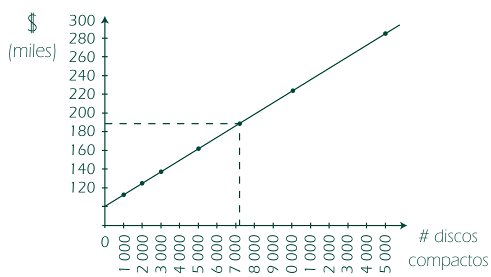
Se pretende que los alumnos empleen las escuadras para trazar la gráfica en papel bond y que después la muestren a sus compañeros. Es importante que sea el equipo el que resuelva libremente el problema y el que decida la escala para ambos ejes. Después de un tiempo suficiente, algunos equipos mostrarán su gráfica al grupo y comentarán sobre la escala usada y la manera en que hallaron el costo. Se espera que (tomando en cuenta lo que vieron en el video) la mayoría haya encontrado el resultado. Es probable que algunos sigan el procedimiento correcto pero no lleguen al resultado debido a que su gráfica no esté bien elaborada. Aproveche el momento para hacer notar la importancia de escoger una escala adecuada y de hacer el trabajo con el debido cuidado.

Puede aprovechar la misma gráfica para pedir a los alumnos costos que no están en la tabla, por ejemplo: el costo de 5 500 discos compactos, de 8 000, 12 000, 14 500, etcétera.

Una gráfica que algunos equipos pueden hacer es la siguiente: *



El costo de los 7 200 se puede investigar mediante *interpolación gráfica,* que consiste en localizar en el eje correspondiente el 7 200 y trazar una perpendicular a este eje. Desde el punto de intersección de esta perpendicular con la gráfica, se traza otra perpendicular al eje donde están determinados los costos, de manera que el pie de esta última perpendicular es el dato buscado.



* En estas gráficas, así como en otras que aparecen en el fichero, se han unido los puntos mediante una recta para facilitar la interpolación gráfica; sin embargo, las gráficas no son propiamente rectas ya que, por ejemplo, no tiene sentido hablar de 8.3 discos compactos.

2 Organizados nuevamente en equipos pida a los alumnos que den solución al segundo problema planteado en el video.

> Si cada disco compacto va a venderse a 20 dólares, ¿cuántos discos compactos necesita vender la compañía para cubrir sus gastos?

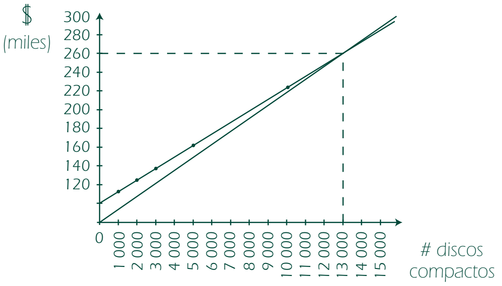
Deje en completa libertad a los alumnos para que busquen la solución. Es posible que algunos utilicen una tabla para comparar los gastos de producción con las ventas (utilizando la tabla que ya se tiene de la actividad 1); por ejemplo:

Número de discos	Costo de producción	Ventas ($20 c/u)
Inversión inicial	104 000	
1 000	116 000	20 000
2 000	128 000	40 000
5 000	164 000	100 000
10 000	224 000	200 000
15 000	284 000	300 000

Gracias a la tabla podrán observar que el resultado está entre 10 000 y 15 000 (vendiendo sólo 10 000 todavía tendrían pérdidas, con 15 000 ya tendrían ganancias). Los alumnos deben tener claro que el número de discos que están buscando es aquel donde el costo de producción es igual a lo ganado en las ventas.

La tabla no permite conocer el resultado exacto. Una forma de buscar la solución es trazando la gráfica correspondiente a las ventas sobre la de costos de producción (de la actividad 1) y encontrar el punto en que se cortan. Si los alumnos deciden hacer esto deben tener presente la importancia de una gráfica precisa.

Trazando una perpendicular desde el punto donde los costos y las ventas se cortan hasta el eje que indica el número de discos, se encuentra la solución (13 000).



Es probable que algunos alumnos se den cuenta de que la solución se encuentra en recuperar los $104 000 de inversión inicial y que, sabiendo que por cada disco:

$$\text{costo de venta} - \text{costo de producción} = \$8$$

Lo que tienen que encontrar es el número de discos que requieren vender para alcanzar la inversión inicial, es decir, cuántas veces cabe $8 en $104 000. Esto es:

$$\frac{104\,000}{8} = 13\,000$$

Habrán encontrado así la respuesta correcta.

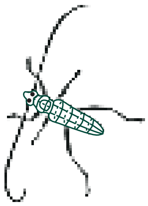
Tanto la actividad 1 como la 2 permiten al alumno practicar el manejo de tablas y gráficas, así como la presentación de datos y la búsqueda de información para resolver un problema.

Variantes

1. Otra pregunta interesante relacionada con el trabajo de estas gráficas es pedir a los alumnos que obtengan el porcentaje de ganancias en relación con los costos de producción. Por ejemplo: ¿Cuál es el porcentaje de ganancias en la venta de 15 000 discos? ¿Y en la de 20 000? Etcétera.
2. Pueden plantearse otras preguntas a los alumnos como: ¿Cuántos discos necesita vender la fábrica para obtener una ganancia mayor a cierta cantidad ($10 000, $20 000, etcétera)?
3. Cuando se estudie el tema 14 (Sistemas de ecuaciones lineales) podría retomar este problema y analizar cómo puede resolverse algebraicamente.

¡Atínale!

Tema 12: Noción frecuencial y noción clásica de la probabilidad



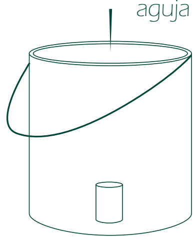
Propósito Explorar la noción frecuencial de la probabilidad.

Contenidos Situaciones que favorezcan el registro y el tratamiento de experimentos aleatorios. Ejemplos para ilustrar el uso de la probabilidad frecuencial.

Material Un recipiente (cubeta) con capacidad entre 15 y 20 litros y 50 agujas.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos. A continuación explique:

- Llenen la cubeta con agua hasta el borde y coloquen el vaso dentro de la cubeta, en la parte central, como se muestra:



a) Desde una posición vertical respecto al nivel del agua, y con la punta hacia abajo, tiren una aguja cada vez. Deben tirar las agujas siempre desde la misma posición, sin que toquen el agua antes de ser soltadas.

b) Antes de llevar a cabo el experimento hagan una predicción sobre el número de agujas que caerán dentro y fuera del vaso.

c) Realicen el experimento. A partir de la información obtenida hagan una nueva predicción sobre el número de agujas que caerán dentro y fuera del vaso al tirar de nuevo las 50 agujas.

d) Realicen otras ocho veces la experiencia. En una tabla anoten el número de agujas que cayeron dentro y fuera del vaso. En cada ocasión prevean cuántas agujas caerán dentro y fuera del vaso.

Experiencia	1	2	3	4	5	6	7	8
Agujas dentro del vaso								
Agujas fuera del vaso								

e) A partir de la información registrada, contesten las siguientes preguntas:

- Si tiran 100 agujas dentro de la cubeta, ¿cuántas caerán dentro del vaso y cuántas fuera?
- Y si tiran 150, 200, 300, 500, 1 000, 2 000, 3 000, 5 000… agujas?

Algunos alumnos creerán que al tirar la agujas todas entrarán en el vaso, sin embargo, al realizar la experiencia, se darán cuenta de que no es así.

En otros equipos creerán que el hecho de que la aguja caiga dentro del vaso tiene que ver con el lugar y la habilidad para tirarla. Por esta razón, para que los alumnos observen que la habilidad no interviene, recuérdeles que siempre deben tirar las agujas desde el mismo lugar y colocándolas en la misma posición.

Después de realizar la experiencia varias veces, los alumnos se irán dando cuenta de que se puede observar una cierta regularidad, es decir, siempre que se tiran las 50 agujas, aproximadamente la misma cantidad de éstas cae dentro del vaso y la diferencia cae fuera. Esta situación les permitirá afinar sus predicciones.

En cuanto a las últimas preguntas, algunos equipos notarán que los registros de la tabla les permiten responder para 100, 150, 500 o más agujas.

A partir de la situación anterior muestre a los alumnos la forma de obtener la probabilidad de un evento a partir del modelo frecuencial. Explique que la probabilidad de un evento se obtiene de la siguiente forma:

$$P(e) = \frac{\text{Número de casos que al ser observados fueron favorables}}{\text{Total de observaciones}}$$

VARIANTES

Cada situación se realiza al menos ocho veces, de manera que los alumnos pueden determinar de manera confiable la probabilidad de que una aguja caiga dentro del vaso, según las especificaciones que se dan a continuación.

1. Tiren 50 agujas, cada aguja se tira como se indicó en la actividad 1, pero ahora entra primero al agua el *ojo* de la aguja. Al igual que en la actividad 1 hagan un registro que les permita hacer predicciones. Finalmente establezcan la probabilidad de que una aguja que es tirada bajo estas condiciones caiga dentro del vaso.
2. Cambien el vaso por otro cuyo diámetro sea mayor al que se utilizó en la actividad 1 y realicen el mismo tipo de actividades.
3. Con la cubeta y el vaso utilizados en la actividad 1 realicen las mismas actividades, pero en esta ocasión disuelvan en el agua, previamente, medio kilo de sal.

Nota: Es conveniente solicitar a los alumnos que comenten con el profesor de física las razones que existen para que al tirar las agujas en el agua, éstas se desvíen de la vertical al ir cayendo.

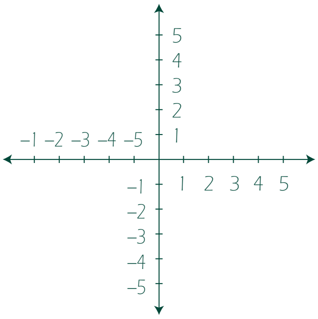
Adivina el punto

Tema 13: Actividades en el plano cartesiano

Propósito	Familiarizarse con los diversos medios de expresión matemática (la escritura simbólica, las tablas y las gráficas) y utilizarlos en la solución de problemas.
Contenidos	Representación en el plano cartesiano de regiones y conjuntos de puntos que satisfacen condiciones algebraicas sencillas.
Material	Escuadras para trazar ejes coordenados.

1 En el juego del *náufrago*, un alumno elige un punto en el plano cartesiano para ubicar al otro náufrago y trata de adivinar las coordenadas hasta que lo encuentra. Proponga a sus alumnos esta modalidad:

- Formen parejas. Cada uno trace en su cuaderno dos ejes de coordenadas como las siguientes:



Uno de ustedes, sin que su compañero vea, elija en el plano un punto cuyas coordenadas sean números enteros. Su compañero deberá encontrar el punto planteando el menor número de preguntas posible, que puedan responderse con un sí o un no. Una vez que encontró el punto, intercambien los papeles. Gana el juego quien haya utilizado menos preguntas para encontrar el punto del compañero.
(Preguntas como: "¿es el punto (4, 3)?", sí se contabilizan).

Se sugiere que el juego se lleve a cabo varias veces con el propósito de que el alumno construya estrategias y descubra las preguntas que permiten descartar el mayor número de puntos. Finalmente pida que hagan comentarios sobre las estrategias que utilizaron.

2 Esta actividad se trabajará con todo el grupo. Cada alumno trazará en su cuaderno dos ejes de coordenadas como los de la actividad 1 y usted hará lo mismo en el pizarrón. Pase al frente a un alumno y éste, sin que nadie lo vea, debe elegir en el plano de su cuaderno un punto cualquiera cuyas coordenadas sean números enteros.

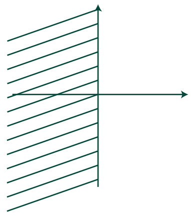
Pida a los demás alumnos que, en forma voluntaria, hagan las preguntas que quieran (siempre y cuando den lugar a las respuestas *sí* o *no*). El compañero que esté al frente contestará. Nuevamente se trata de encontrar el punto con el menor número de preguntas. Algunas preguntas que pueden surgir son:

- ¿Es el punto (4,3)?
- ¿Está en el primer cuadrante?
- ¿La abscisa es impar?
- ¿La ordenada es mayor que 5?
- ¿La abscisa es positiva?
- ¿El punto está en uno de los ejes?

Se recomienda que si los alumnos se refieren a las coordenadas como *el primer número* o *el segundo número*, usted repita las preguntas que hicieron diciendo *la abscisa o la* x, *la ordenada o la* y. Las preguntas se irán anotando en el pizarrón con sus respectivas respuestas y usted localizará en el plano cartesiano los puntos que satisfagan las preguntas y las respuestas. Cada alumno irá haciendo lo mismo en el plano que trazó en su cuaderno.

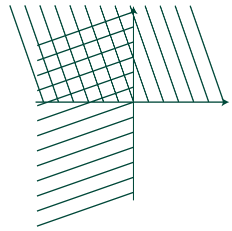
Ejemplo: *a)* ¿La abscisa es positiva?

Si la respuesta es *sí*, entonces el punto está en el semiplano derecho (se marca de alguna forma la región donde no está).



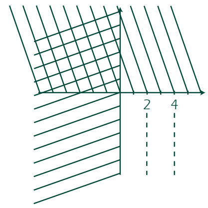
b) ¿La ordenada es positiva?

Si la respuesta es *no*, se tacha entonces la región en la que el punto no puede estar.



c) ¿La abscisa es par?

Si el alumno contesta que *sí*, entonces el punto se encuentra sobre una de las siguientes rectas punteadas:



Y así sucesivamente se eliminan puntos hasta llegar a las coordenadas que se buscan.

Como puede notarse, la idea es que el alumno identifique puntos que cumplan con una característica (la enunciada en cada pregunta). La primera vez usted puede localizar esos puntos, pero es recomendable que después sea un alumno quien lo haga. La actividad puede repetirse las veces que considere conveniente.

3 Explique a los alumnos que van a continuar el juego pero ahora tratando de localizar un conjunto de varios puntos que cumplen con una condición.

Escriba un mensaje en el pizarrón en el que aparezcan las *pistas* necesarias para que los alumnos encuentren los puntos que buscan.

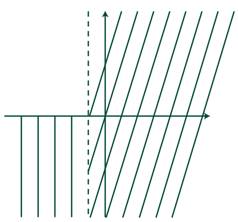
Puede escribir, por ejemplo, el siguiente mensaje:

$x < -1$
$y > 0$
y es múltiplo de 3
$x = -y$

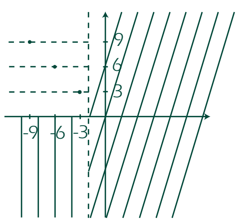
El problema para los alumnos será localizar los puntos que cumplen con esas características.

En este caso se tiene:

$x < -1$
$y > 0$



$x = -y$



Los puntos pueden ser: (–3, 3), (–6, 6). (–9, 9)...

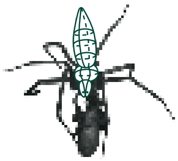
Después pida a los alumnos (organizados por parejas) que sean ellos mismos quienes elaboren mensajes, utilizando el menor número de palabras y sin escribir directamente las coordenadas, para que su compañero localice un punto.

VARIANTES

1. Puede utilizarse un plano cartesiano de 10 x 10, o bien pueden emplearse coordenadas fraccionarias o decimales y realizar el mismo tipo de actividades.
2. Otra variante es que, en vez de punto, un alumno elija una recta, un semiplano, una franja, etcétera, y que los demás, mediante preguntas, traten de encontrar la recta, semiplano o franja que el alumno haya elegido.

¿Cuánto pesa una manzana?

Tema 14: Sistemas de ecuaciones lineales: problemas y método de sustitución



Propósito Plantear problemas sencillos que conduzcan a ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos utilizando procedimientos algebraicos (sólo por sustitución en el caso de sistemas de ecuaciones lineales).

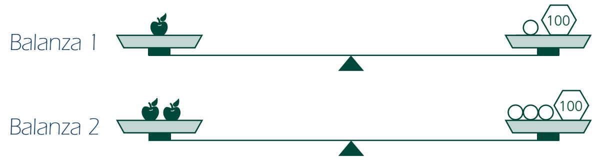
Contenidos Problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

1 Plantee el siguiente problema y proponga a los alumnos que lo resuelvan por parejas.

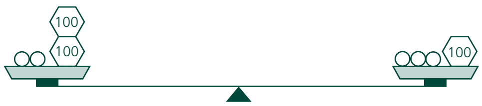
> El peso de una manzana es igual al peso de una naranja más 100 gramos. El peso de dos manzanas es igual al peso de tres naranjas más 100 gramos. ¿Cuántos gramos pesa una manzana y cuántos pesa una naranja?

Pida a los alumnos que busquen una manera de resolver el siguiente problema. Cuando termine la mayoría, pídales que expliquen sus procedimientos. En caso de que no usen el modelo de la balanza, proponga lo siguiente:

> Suponiendo que todas las manzanas tienen el mismo peso, y que sucede lo mismo con todas las naranjas entre sí, ¿cuánto pesa cada manzana y cada naranja?



Dé tiempo suficiente para que las parejas encuentren la solución al problema. Después pida a algunos alumnos que pasen a explicar ante el grupo el procedimiento que usaron. Es muy probable que los alumnos hayan deducido que si una manzana pesa lo mismo que una naranja más 100 g (balanza 1), este valor puede trasladarse a la balanza 2 para sustituir dos manzanas.



Enseguida pueden retirar pesos iguales en ambos platillos de la balanza, de tal manera que la balanza quede así:

Por lo que el peso de cada naranja es igual a 100 g.

Se sabe (balanza 1) que el peso de la manzana es igual al peso de la naranja más 100 g, de ahí se concluye que el peso de cada manzana es de 200 g. Lo que se ha hecho (sin evidenciarlo) es resolver un sistema de ecuaciones. Se sugiere que una vez que varias parejas hayan pasado al frente a explicar la forma en que calcularon los pesos, escriba algebraicamente la analogía entre lo que se hizo en la balanza y la resolución de un sistema de ecuaciones, repasando los contenidos y propiedades que surjan en el transcurso de la actividad. Para este caso podemos convenir:

$a \rightarrow$ peso de una manzana
$b \rightarrow$ peso de una naranja

Simbolizando algebraicamente lo que se tiene en cada balanza se llega al sistema de ecuaciones: Balanza 1: $a = b + 100$
Balanza 2: $2a = 3b + 100$

Al sustituir en la balanza 2 el valor de a de la primera ecuación, se tiene: $2\,(b + 100) = 3b + 100$
$2b + 200 = 3b + 100$

Y simplificando esta última ecuación se obtiene el valor de b: $100 = b$

El peso de una manzana (valor de a) se obtiene sustituyendo en la primera ecuación del sistema ($a = b + 100$) el valor de b.

$a = b + 100$
$a = 100 + 100$
$a = 200$

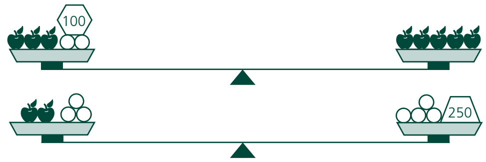
Los alumnos comprobarán que se obtiene el mismo resultado que ellos habían encontrado.

2 Nuevamente organice a los alumnos por parejas y plantee el siguiente problema:

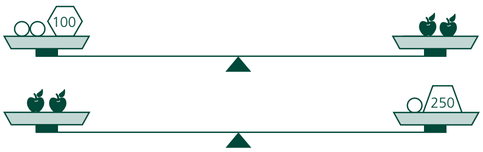
> *Tres manzanas más dos naranjas más 100 gramos pesan lo mismo que cinco manzanas. Por otro lado, dos manzanas más tres naranjas pesan lo mismo que cuatro naranjas más 250 gramos. ¿Cuántos gramos pesa una manzana y cuántos una naranja?*

Nuevamente deje en libertad a los alumnos para que resuelvan el problema. Una vez que encuentren algún resultado, proponga que utilicen el modelo de la balanza como se explica a continuación.

> *¿Cuánto pesa cada manzana y cada naranja, suponiendo que todas las naranjas tienen un mismo peso entre sí y las manzanas también?*



Los alumnos han trabajado ya el modelo de la balanza y es probable que para resolver el problema formulen las ecuaciones, aunque quizás tengan dificultades para resolverlas. Si después de un tiempo razonable los alumnos no saben qué hacer, sugiérales que primero simplifiquen cada balanza.



Después de simplificar las dos balanzas usted puede preguntar: ¿cómo podríamos representar en una sola balanza lo que hay en las dos anteriores?

Se espera que los alumnos infieran la siguiente representación:

Lo que resta es simplificar esta última balanza para encontrar el peso de una naranja. Podemos cambiar la pesa de 250 g por dos de 100 g y una de 50 g:

El peso de una naranja = 150 g.

Para calcular el peso de una manzana se deben sustituir las naranjas por su peso equivalente en gramos en cualquiera de las balanzas que tengan naranjas y manzanas. Por ejemplo:

Dos manzanas pesan 400 g, entonces:
el peso de una manzana = 200 g.

Es conveniente que nuevamente se haga la analogía de lo que se hizo en la balanza con el lenguaje algebraico; por ejemplo: $x \rightarrow$ peso de una manzana, $y \rightarrow$ peso de una naranja

1) Se tiene: Balanza 1. $3x + 2y + 100 = 5x$
   Balanza 2. $2x + 3y = 4y + 250$

2) Simplificando las ecuaciones se obtiene: $2y + 100 = 2x$ ......(1)
   $2x = y + 250$ ....(2)

3) Sustituyendo en la ecuación 2 el valor de $2x$ que se obtuvo en la ecuación 1, se obtiene: $2y + 100 = y + 250$

4) Restando y en ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene: $y + 100 = 250$

5) Y de ahí: $y = 150$

6) Para encontrar el valor de x, se sustituye el valor de y en la ecuación 2 que, al ser resuelta como se indica, de como resultado $x = 200$.

$$y = 150$$
$$2x = y + 250$$
$$2x = 150 + 250$$
$$2x = 400$$
$$x = 200$$

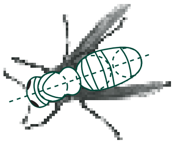
7) La naranja pesa 150 g y la manzana 200 g. Pida a los alumnos que comprueben estos valores en las balanzas originales.

VARIANTE

Una vez que hayan trabajado con el modelo de la balanza, plantee problemas a los alumnos y pídales que traten de resolverlos trabajando algebraicamente los sistemas de ecuaciones que resulten de los problemas.

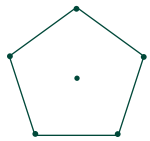
Geometría y azulejos

Tema 15: Ángulos entre paralelas

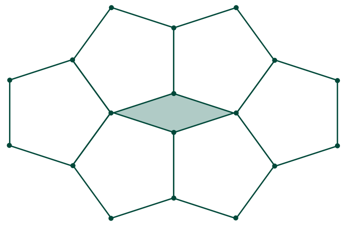


Propósito Practicar el dibujo y los trazos geométricos.
Contenidos Recubrimiento del plano con polígonos regulares e irregulares.
Material Juego de geometría, hojas blancas, cartulina, colores y tijeras.

1 Inicie la clase con el siguiente relato:

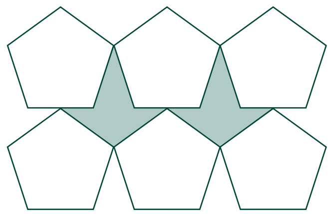
> A un fabricante se le ocurrió producir azulejos en forma de pentágonos regulares.
>
> 
>
> Una persona que visitó su establecimiento vio esos azulejos y le gustaron mucho. Compró los suficientes para cubrir las paredes de su baño, sin embargo, a pesar de que los azulejos eran de excelente calidad, regresó con el fabricante sumamente molesto y le dijo que sus azulejos no servían. El fabricante sorprendido le preguntó por qué.

Deje abierta la pregunta para que, en una lluvia de ideas, los alumnos digan los posibles motivos por los que los azulejos en forma de pentágono regular no sirvieron. Se espera que lleguen a la conclusión de que los pentágonos regulares, puestos uno al lado de otro, no permiten cubrir totalmente un plano. Se recomienda que hagan un pentágono regular en cartulina y que lo utilicen como plantilla para calcar varios pentágonos. Pídales que con los pentágonos traten de cubrir totalmente un plano y que ellos mismos vean lo que sucede.



Puede plantearles una nueva pregunta: ¿Qué tiene que hacer el fabricante para que su producción de azulejos pentagonales pueda utilizarse para cubrir paredes?

Mirando las figuras que formaron, los alumnos notarán que se requiere fabricar rombos o alguna otra figura para cubrir los huecos que dejan los pentágonos, por ejemplo:

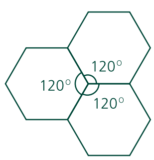


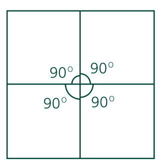
2 Para esta actividad organice a los alumnos en equipos de cuatro y plantee el siguiente problema:

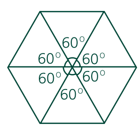
> Busquen *polígonos regulares* que puedan servir como moldes para fabricar azulejos que cubran totalmente una superficie, bajo las siguientes condiciones:
> a) Sólo se permiten figuras del mismo tipo.
> b) Se permiten figuras de varios tipos.
> En cada caso hagan dibujos que muestren cómo cubrieron la superficie.
> Contesten las preguntas:
> - ¿Qué característica común tienen los polígonos que dan solución al inciso a)?
> - ¿Qué característica común tienen los polígonos que no dan solución al inciso a)?

Se sugiere que por equipos utilicen su juego de geometría para trazar polígonos regulares en cartulina y usarlos como plantillas. De esta manera los alumnos seguirán practicando el trazo de figuras con sus instrumentos geométricos.

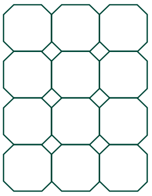
Después de un tiempo suficiente, un representante de cada equipo pasará a mostrar las figuras que dan respuesta a los incisos *a)* y *b)*. Los equipos encontrarán, después de explorar las posibilidades, que el inciso *a)* sólo tiene solución para tres figuras regulares: hexágono, cuadrado y triángulo equilátero.

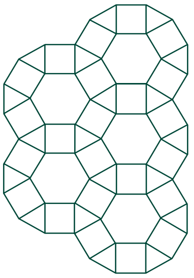






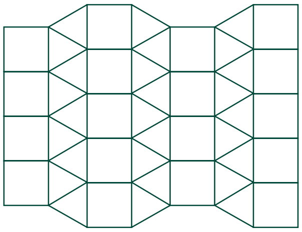
El inciso *b)* admite varias soluciones diferentes. A continuación se muestran algunos ejemplos de combinaciones que pudieran ser halladas por los equipos.





El análisis está determinado por la respuesta a las preguntas. Los alumnos tratarán de descubrir la característica común entre los hexágonos regulares, los cuadrados y los triángulos equiláteros. Es probable que al menos un equipo se dé cuenta de que la medida de un ángulo interno en cualquiera de estos tres polígonos regulares es un divisor de 360°, mientras que los demás polígonos regulares no cumplen con esta condición y, por lo tanto, no cubren el plano totalmente por sí solos.

Para cerrar esta actividad puede pedir a los alumnos que, individualmente, realicen un teselado* en una hoja blanca tamaño carta y lo coloreen a su gusto.



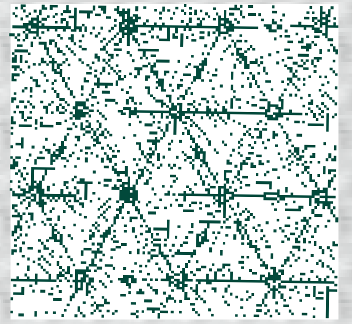
3 Pida a los alumnos que de manera individual encuentren diferentes figuras que no sean polígonos regulares y que cubran totalmente el plano. Pídales que realicen la siguiente actividad:

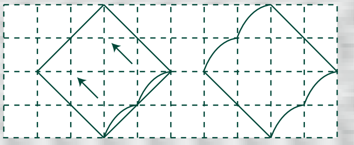
Hagan un teselado con algunas de las figuras encontradas para este problema y coloréenlo a su gusto.

Lo ideal es dejar que sean los alumnos, motivándolos a que sean originales, quienes en completa libertad encuentren sus teselados, de esta manera se darán cuenta de que se puede *teselar* con cualquier tipo de triángulo y cualquier cuadrilátero.

Variantes

1. Se sugiere platicar a los alumnos sobre Maurits Cornelius Escher (artista gráfico holandés) y de ser posible mostrar algunos de sus trabajos, como el que se muestra a la derecha.
2. A continuación se explica una técnica que permite encontrar figuras totalmente irregulares que teselan el plano. Decida si es conveniente darla a conocer a los alumnos para que encuentren otros teselados como los de Escher.



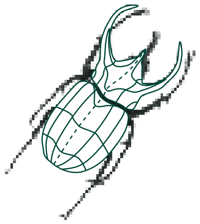


Se empieza con un polígono regular (hexágono, cuadrado o triángulo equilátero). Se quita un pedazo de uno de sus lados y se añade al lado opuesto; la acción se repite cuantas veces se quiera, de esta forma se obtiene una figura que también tesela el plano. La figura puede convertirse en el dibujo de un objeto, persona o animal.

* Teselado: Del latín *tessellatus*, nombre que daban los antiguos romanos a los azulejos que usaban para cubrir sus pavimentos y muros. Un teselado se hace repitiendo la misma forma una y otra vez.

Circulando

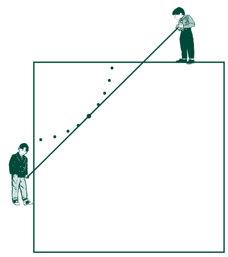
Tema 16: Primeras exploraciones en el círculo



Propósitos	Explorar algunas propiedades del círculo. Determinar la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.
Contenidos	Determinación de un círculo por su centro y su radio. Posiciones relativas de un círculo y una recta: cuerdas, tangente exterior al círculo.
Material	Juego de geometría.

1 Después de organizar al grupo en parejas, pida a los alumnos que tracen un cuadrado de 10 cm x 10 cm y plantee el siguiente problema:

> *Juan y Pedro sostienen por sus extremos una varilla. Del punto medio de la varilla cuelga un cordel, en cuyo extremo hay un metal con punta. Los dos niños caminan sobre el perímetro de un cuadrado. Al caminar, la punta del metal va dejando una huella.*
> *¿Qué forma tiene la huella cuando los niños recorren todo el perímetro?*

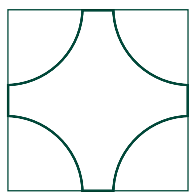


Algunos alumnos creerán que la forma de la huella es un cuadrado; otros considerarán que se forma un octágono. Otros alumnos pueden plantear por ejemplo, que dentro del cuadrado se forma una línea cuya curvatura está dirigida hacia el vértice del cuadrado.

En estos casos habrá que sugerir a los alumnos que modelen la situación en el cuadrado que trazaron. Pida que utilicen la orilla de una tarjeta que mida, por ejemplo, 6 cm, en vez de la varilla. Sugiera que coloquen la orilla de la tarjeta en diferentes posiciones, siempre haciendo coincidir los dos extremos con los lados del cuadrado. Pídales que marquen los puntos que coinciden con el punto medio de la orilla.

Es conveniente que usted propicie que diferentes equipos expliquen a sus compañeros lo que hicieron para verificar sus conjeturas.

Seguramente algunos equipos hallarán que la figura que se forma es como la que se muestra a continuación:



2 Organice en parejas a los alumnos y con base en la figura trazada en la actividad 1 plantee las siguientes preguntas:

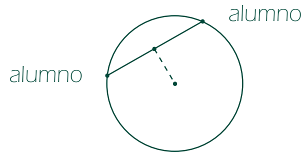
> *a) Si se completan los círculos, ¿en qué lugar se encuentra su centro?*
> *b) ¿Cuánto miden los radios de los círculos considerando una varilla de un metro?*
> *c) ¿De qué tamaño tiene que ser la varilla para que, al caminar los niños como se describió en la primera actividad, los cuartos de círculo sean tangentes en el punto medio de los lados del cuadrado?*

Después de haber realizado la primera actividad, los alumnos no tendrán dificultades para responder a las preguntas *a*) y *b*), es decir, contestarán que el centro de los círculos se encuentra en los vértices del cuadrado y que el radio es igual a la mitad de la longitud de la varilla.

La pregunta *c*) llevará a los alumnos a probar con distintas medidas de varillas (que dependerán del lado del cuadrado que propongan). De esta manera encontrarán que la medida de la varilla tiene que ser igual a la medida del lado del cuadrado.

3 Organice a los alumnos en parejas. Pídales que hagan un círculo de 5 cm de radio y después plantee la siguiente situación:

Supongan que sobre la circunferencia caminan dos alumnos que sujetan por sus extremos un instrumento como el de la actividad 1.

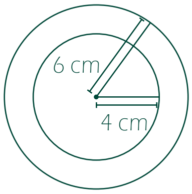


a) ¿Qué figura geométrica describirá la punta del metal cuando los niños hayan recorrido toda la circunferencia?
b) Indiquen el punto que es centro de la figura que describe la punta del metal.

Es conveniente que propicie que los alumnos comenten la manera que siguieron para darse cuenta de que la forma de la huella es una circunferencia. Si algunos alumnos tuvieran dificultades, puede sugerirles que modelen la situación de forma similar a la actividad 1; en este caso encontrarán que se forma una circunferencia y que su centro es el mismo que el de la circunferencia original.

4 Comente a los alumnos que van a seguir trabajando en parejas. Después plantee la siguiente situación:

Observen los siguientes círculos. El círculo menor es la huella que dejó el punto medio de una varilla que dos niños sostenían por sus extremos al ir caminando por la circunferencia del círculo mayor.



Tracen un segmento que tenga la misma longitud que la varilla que utilizaron los niños.

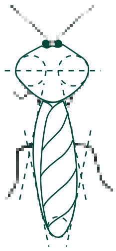
Trazar un segmento que tenga la misma longitud que la varilla que utilizaron los niños es el problema inverso a los que se plantearon en las actividades 1 y 3. Quizás algunos alumnos en un primer momento apliquen alguna estrategia de ensayo y error; probablemente tracen algunas cuerdas del círculo mayor cuyo punto medio *más o menos* toque al círculo menor, y después tracen un segmento que mida lo mismo que alguna de esas cuerdas. Otros alumnos pueden considerar un punto cualquiera del círculo menor y, como saben que es el punto medio de un segmento, unan este punto con otro del círculo mayor y después tracen el doble de ese segmento.

Es difícil que los alumnos tracen el segmento requerido, sin embargo, a partir de los procedimientos utilizados, usted puede proponer algunas preguntas que lleven a considerar las características que tiene el segmento que se quiere trazar; por ejemplo, ¿puede ser que dos puntos del segmento toquen a la circunferencia menor?; ¿puede ser que los segmentos sean de diferente tamaño?, ¿por qué sí? ¿por qué no?, etcétera. Como se observa, el problema se resuelve a partir de trazar tangentes a la circunferencia menor.

VARIANTES

Puede proponer a los alumnos los siguientes problemas:

1. Si la varilla que sostienen Pedro y Juan, como en la actividad 1, mide 2 m de largo, y el cuadrado sobre el que caminan mide 5 m de lado, calculen el área y el perímetro de la figura que se forma en el cuadrado.
2. En el caso del problema 3 ¿qué describiría el punto medio si la varilla mide 10 cm?



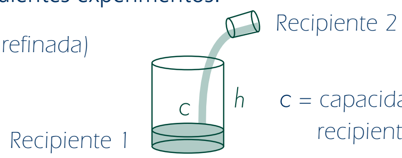
Propósito Familiarizarse con diversos medios de expresión matemática: la escritura simbólica, las tablas y las gráficas, y utilizarlos en la solución de problemas.

Contenidos Uso de una tabla y una gráfica para explorar si dos cantidades varían en forma proporcional (directa e inversa). Traducción de una situación de proporcionalidad a su expresión algebraica.

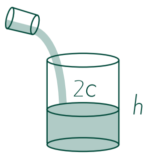
Material Por equipo:
Un recipiente cilíndrico transparente (es importante que sea exactamente un cilindro recto). Le llamaremos recipiente 1.
Un recipiente que tenga aproximadamente una quinta o sexta parte del volumen del recipiente 1 y cuya capacidad se conozca (250 ml, 200 ml, 100 ml, etcétera.). Le llamaremos recipiente 2.
Un envase de leche (de cartón).
Un clavo grueso.
Una regla graduada.
Agua (puede ser sustituida por arena cernida o sal refinada).

1 Organice al grupo en equipos y dé las instrucciones para llevar a cabo los siguientes experimentos.

Llenen el recipiente 2 con agua (o bien arena cernida o sal refinada) y vacíen el contenido en el recipiente 1. Midan la altura.



c = capacidad del recipiente 2.

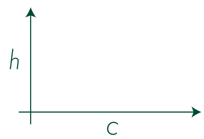


Vuelvan a llenar el recipiente 2 y vacíen su contenido en el recipiente 1. Nuevamente midan la altura alcanzada.

Repitan el procedimiento cinco o seis veces y anoten las mediciones en la siguiente tabla. Empiecen con capacidad 0.

c	0				
h					

Grafiquen los valores obtenidos.



Pida a los alumnos que contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tipo de relación existe entre *h* y c?
b) ¿Cómo es la gráfica que se obtuvo?
c) ¿Cuál es la relación matemática entre *h* y c?

Es necesario hacer notar que probablemente habrá errores de medición en las alturas que se vayan obteniendo. Mientras los alumnos trabajan es importante que usted supervise; en caso de que note errores (los podrá vislumbrar si observa que los datos que anotaron en la tabla no van en proporción directa), pídales que realicen nuevamente la medición, recordándoles que la lectura de la regla debe hacerse siempre desde la misma posición (para evitar lo que se llama error de paralaje) y que el recipiente 2 debe llenarse siempre con el mismo criterio.

Como los alumnos tienen ya algunas experiencias con proporcionalidad se espera que su respuesta a la pregunta *a)* sea precisamente que entre *h* y c hay una relación de *proporción directa*, sin embargo, son válidas respuestas como: *cuando* c *se duplica* h *también se duplica*, o bien, c *aumenta siempre en la misma cantidad y* h *también se comporta igual*, o algunas similares.

La respuesta a la pregunta *b)* es: *una línea recta que pasa por el origen*. Puede aprovechar esta situación para recordar a sus alumnos que la gráfica de una relación de proporcionalidad directa siempre da lugar a una línea recta que pasa por el origen.

La respuesta a la pregunta *c)* es, quizás, la más compleja, pues el alumno debe pasar de la tabla y la gráfica a la expresión algebraica. Además, como cada equipo ha llevado un recipiente de diferente capacidad (es decir, tienen valores diferentes para c y por consiguiente para h) la discusión de la respuesta a esta pregunta dará lugar a interesantes comentarios dentro de la clase.

Supongamos que un equipo tiene en su tabla los siguientes datos:

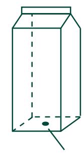
c	h
0	0
200	.8
400	1.6
600	2.4
800	3.2
1 000	4

Para ayudar a encontrar la expresión algebraica, podrá sugerir a los alumnos que, por ejemplo, dividan c/h (excepto en $h = 0$) y observen qué sucede. La expresión algebraica podrá ser dada como: $c/h = 250$, $c = 250\,h$, o bien $h = c / 250$.

La discusión a nivel grupal sobre el trabajo hecho en cada equipo será conveniente para establecer las conclusiones generales.

2 Organizados en equipos, proponga a sus alumnos la siguiente actividad:

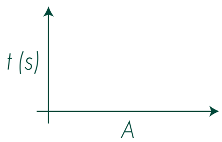
- Hagan un orificio con el clavo (de dentro hacia fuera) en la base del envase de leche.
- Llenen el envase de leche con agua (o arena cernida o sal refinada) tapando el orificio hecho.
- Dejen que el agua salga por el orificio y midan el tiempo (*t*) necesario para que el recipiente se vacíe.
- Con el mismo clavo hagan otro orificio. Vuelvan a llenar el envase (a la misma altura que en el paso 2) y midan el tiempo que tarda en vaciarse el recipiente por los dos orificios.
- Repitan el experimento haciendo que el envase se vacíe por tres, cuatro y cinco orificios respectivamente.


orificio

Con los datos obtenidos llenen la siguiente tabla, donde A es el área total por donde escurre el agua, a es el área de cada orificio y t es el tiempo (en segundos) que tarda en vaciarse el envase.

A	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
t (s)					

Hagan la gráfica correspondiente:



Con base en lo observado y registrado, contesten:

a) ¿Qué tipo de relación existe entre A y t?
b) ¿Qué tipo de gráfica se obtiene?
c) ¿Cuánto tardaría el contenido en vaciarse para $4.5a$?
d) ¿Cuál es la expresión matemática que relaciona A con t?

Las consideraciones para la supervisión y detección de errores son las mismas que para la actividad 1; en este caso, el error puede estar en la medición del tiempo, lo que dependerá de la persona que la haga (se recomienda que sea siempre el mismo alumno en cada equipo). Usted notará que en esta actividad se obtiene un ejemplo de proporción inversa, por lo que la gráfica corresponde a una rama de una hipérbola. Lógicamente los alumnos no sabrán el nombre y lo más probable es que la llamen simplemente curva (usted puede introducir el término hipérbola, y sus características, si lo considera pertinente).

La respuesta a la pregunta *c)* es un repaso de la interpolación gráfica que los alumnos ya estudiaron en el tema 11. Finalmente, en la respuesta a la pregunta *d)*, los alumnos tratarán de encontrar una expresión algebraica que relacione A con t. Podrá sugerir a los alumnos que observen los productos At para cada caso. Cuando los equipos hayan terminado se llevará a cabo una discusión en grupo para establecer conclusiones sobre la variación proporcional directa e inversa.

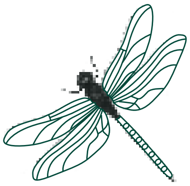
Variantes

Pueden planearse otros experimentos en los que se aprecie si existe o no proporción, y si es inversa o directa. Por ejemplo:

1. ¿Qué sucede si se vacía un envase a través de un círculo al cual se va aumentando la medida del radio?
2. ¿Qué sucedería en la actividad 1 si en vez de un cilindro recto se emplea un cono recto invertido?

Juegos con dados

Tema 18: Polinomios en una variable



Propósito Familiarizarse con los diversos medios de expresión matemática: la escritura simbólica, las tablas y las gráficas, y utilizarlos en la solución de problemas.

Contenidos Evaluación de un polinomio para valores dados de la variable. Construcción de una tabla de valores de un polinomio (uso de la calculadora). Primeras operaciones con polinomios.

Material Tres dados, 12 tarjetas (seis para la actividad 1 y seis para la actividad 2), papel, lápiz y calculadora (opcional).

1 Organice al grupo en parejas y pídales que hagan el siguiente material:

En seis tarjetas, escriban los polinomios:

$a^2 + b - c$	$a^2 - b^2 + 2c$
$a^2 - 2b - c^2$	$(a - b)^3 - 3c$
$a^3 - b^2 - c^2$	$(a + b)^2 - c^2$

Volteen las tarjetas y numérenlas al azar del 1 al 6.

1	2
3	4
5	6

Con tres dados y estas tarjetas, puestas con el número hacia arriba, realizarán el siguiente juego.

Por turno cada alumno:

a) Lanza un dado y, según el número que marque, toma la tarjeta correspondiente y la voltea para ver el polinomio que le tocó.

b) Después lanza los tres dados al mismo tiempo y elige cuál número (de los que marcan los dados) será el valor de a, cuál de b y cuál de c.

c) Con estos valores evalúa el polinomio que tiene en la tarjeta, cuyo resultado serán los puntos que se anotará en la jugada. Se sugiere llevar la anotación de puntos en una hoja con dos columnas, cada una encabezada con el nombre del alumno correspondiente.

d) Ganará el juego quien después de 10 tiradas haya acumulado más puntos.

Mientras juegan las parejas observe la actividad. En caso necesario reafirme lo que significa evaluar el polinomio. Promueva preferentemente el cálculo mental, pero si el alumno lo desea podrá hacer uso de lápiz y papel o, inclusive, calculadora. Es probable que al inicio algunos alumnos elijan sin pensar los valores de a, b, y c. Por ejemplo:

Un alumno obtiene en los dados 1, 2 y 4, respectivamente, y tiene que evaluar el polinomio de la tarjeta 5. Elige: $a = 1$
$b = 2$
$c = 4$

Entonces obtiene:
$$\begin{aligned} a^3 - b^2 - c^2 &= (1)^3 - (2)^2 - (4)^2 \\ &= 1 - 4 - 16 \\ &= -19 \end{aligned}$$

¡Con lo cual obtendría un puntaje negativo!

Sin embargo, después de algunas tiradas, se darán cuenta de que conviene detenerse un poco para elegir los valores que los hagan obtener el mayor puntaje posible. Para el ejemplo antes citado, al alumno le convendría tomar el 4 como el valor de a.

Este juego permite desarrollar el cálculo mental, las operaciones con enteros y la evaluación de polinomios.

2 Pida a los alumnos que preparen el siguiente material con las otras seis tarjetas:

En seis tarjetas escriban los polinomios:

$-3a^3 - a^2 + 7a$	$2a^3 + a^2 - 3a$
$-2a^3 - a^2 + 3a$	$a^3 - 2a^2 + a$
$-3a^3 - a^2 + 8a$	$3a^3 + 2a^2 - 4a$

Volteen las tarjetas y numérenlas al azar del 1 al 6.

1	2
3	4
5	6

Con los tres dados y este juego de tarjetas, colocadas con el dígito hacia arriba, los alumnos realizarán el siguiente juego.

Por turno, cada alumno:

a) Lanza los tres dados y de los tres números indicados elige uno para que sea el valor de a.

b) Los dos números restantes corresponderán a dos tarjetas que tomará. Sumará los dos polinomios correspondientes.

c) Una vez sumados los polinomios evaluará el polinomio resultante para el valor de a que eligió.

d) El resultado serán los puntos que se anote a su favor.

e) Gana el juego quien después de 10 tiradas haya acumulado más puntos.

Al igual que en la actividad anterior, supervise el trabajo de las parejas y, en caso necesario, disipe dudas sobre la suma y evaluación de polinomios. Los alumnos podrán usar papel y lápiz, o bien calculadora, para hacer sus operaciones.

Este juego permitirá a los alumnos reafirmar la suma y evaluación de polinomios, el cálculo mental y el uso de la calculadora.

3 Organice a los alumnos en parejas y explíqueles que van a realizar el mismo juego de la actividad 1 pero con dos variantes:

a) En vez de usar tres dados del mismo color para los valores de a, b y c, ahora usarán dos dados de un cierto color y uno blanco. Los valores que marquen los dados de color serán considerados como números negativos.

b) En vez de que gane el que acumule más puntos, ahora ganará el que al final tenga el número menor; este número puede ser un número negativo.

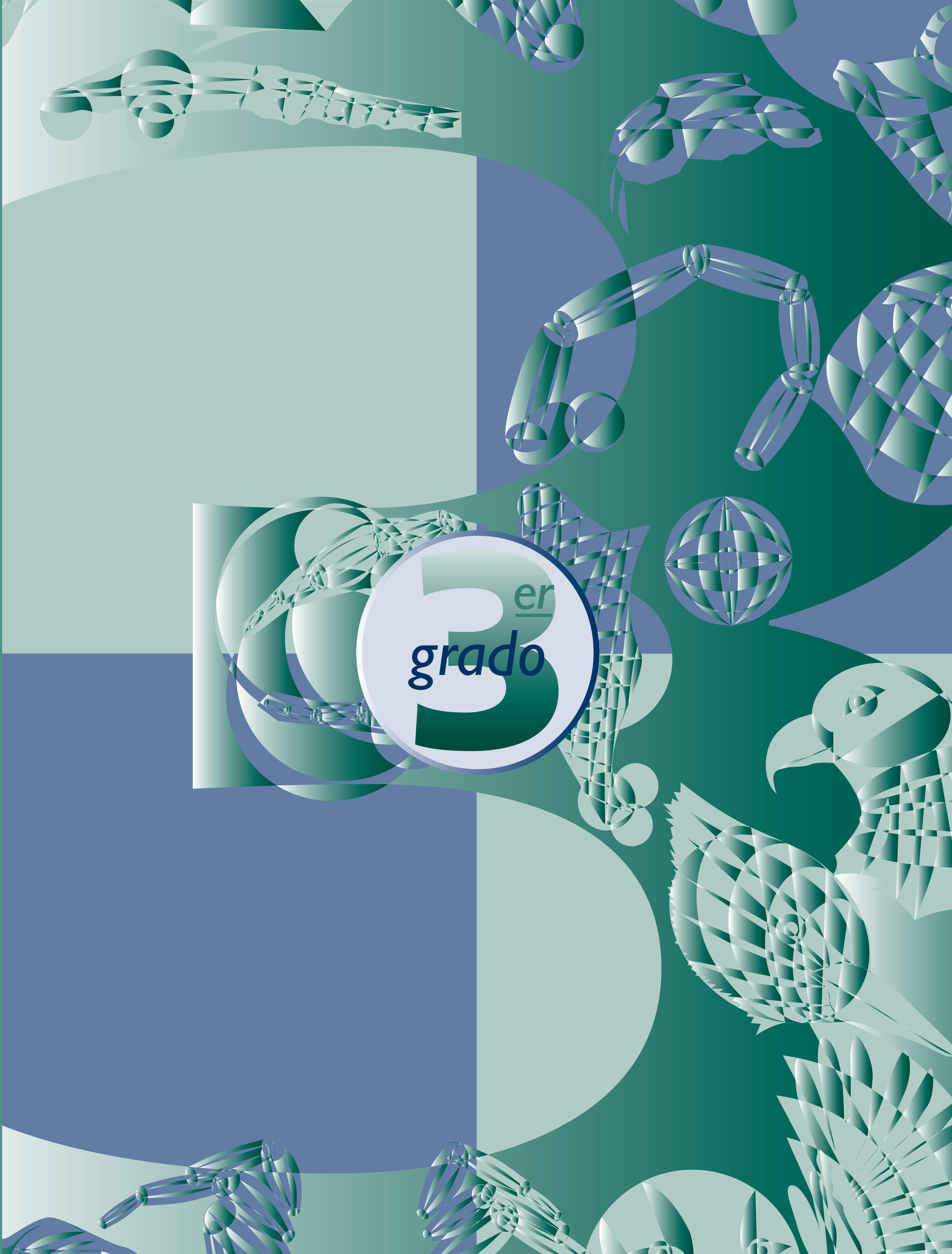
Se pretende que los alumnos evalúen polinomios con valores negativos para las variables y que además observen cómo se comportan los números negativos al elevar al cubo, al cuadrado, al multiplicar dos números negativos, etcétera, y de esta manera encuentren estrategias que les permitan ganar el juego.

VARIANTES

1. Los polinomios escritos en las tarjetas pueden variar en complejidad. Usted podrá decidir aquellos que considere pertinentes para trabajar con sus alumnos.
2. Una variante para la actividad 2 podría ser que la operación sea una multiplicación, cambiando las tarjetas por otras con los polinomios convenientes. Por ejemplo:

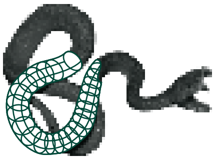
$a + 1$	$a - 3$

Para que los alumnos multipliquen las expresiones entre sí y evalúen el producto.


3er
grado

Los clavos y las áreas

Tema 1: Proporcionalidad y funciones lineales



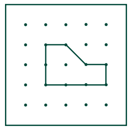
Propósito Utilizar constantemente los diversos medios de expresión matemática (lenguaje algebraico, tablas y gráficas) en el planteamiento y solución de problemas muy diversos y, en casos sencillos, desarrollar criterios para pasar de unos a otros.

Contenidos Ejemplos de variación lineal. Uso de una tabla y una gráfica para explorar si dos cantidades varían linealmente. En casos sencillos, paso de una tabla o gráfica a la expresión algebraica de una función.

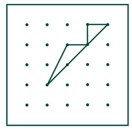
Material Un geoplano y ligas por cada alumno.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos y propóngales que realicen la primera parte de la siguiente actividad. Una vez que se haya discutido en grupo esta primera parte, lleve a cabo (con los mismos equipos) la segunda.

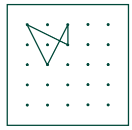
Primera parte:
Formen en el geoplano polígonos que cumplan con estas condiciones:
a) El polígono debe tener en su interior un clavo.
b) La liga *no* debe cruzarse consigo misma.



Aceptable



No aceptable



No aceptable

Cuando la mayoría de los equipos termine, pida que, por cada polígono construido, calculen el área* y cuenten el número de clavos que hay en el perímetro. Anote los datos en el pizarrón y destaque lo siguiente: Todos los polígonos tienen un clavo en el interior. No todos tienen el mismo número de clavos en el perímetro. No todos tienen igual área.

Segunda parte:
Con las mismas condiciones a) y b), formen en el geoplano polígonos con el número de clavos indicado por x en la tabla.

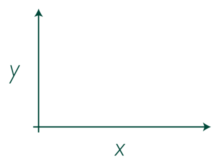
x	y
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

x = número de clavos en el perímetro
y = área del polígono resultante

Polígonos con un clavo en el interior.

Una vez que hayan completado la tabla, planteen y respondan lo siguiente:

- ¿Se reconoce algún patrón en la forma de variación de y cuando varía x?
- Localicen en un plano cartesiano los puntos de la tabla anterior.
- ¿Son colineales estos puntos?
- Construyan una expresión algebraica que relacione y con x.

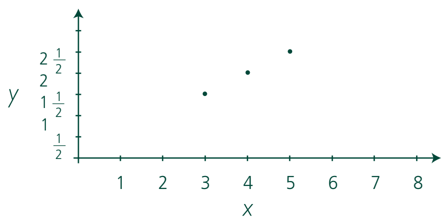


Los alumnos, al haberlo explorado en su geoplano, se darán cuenta de que a un determinado número de clavos en el perímetro le corresponde una cierta área. La tabla, ya completa, debe quedar así:

Polígonos con un clavo en el interior.

x	y
3	$1\frac{1}{2}$
4	2
5	$2\frac{1}{2}$
6	3
7	$3\frac{1}{2}$
8	4
9	$4\frac{1}{2}$
10	5

Localizando estos puntos:



---

* Se recomienda que, antes de llevar a cabo las actividades propuestas en esta ficha, los alumnos, si no lo han hecho, trabajen con el cálculo de áreas en el geoplano.

Si los alumnos han tabulado y graficado correctamente, observarán que los puntos son colineales (éste es un buen momento para repasar o explicar en qué consiste la colinealidad de puntos). Aproveche para mencionar que la relación entre x y y en este problema es una relación lineal.

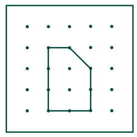
Finalmente promueva el análisis de la tabla y de la gráfica para que sean los alumnos quienes encuentren la expresión que relaciona ambas variables. Es probable que lleguen a alguna de las siguientes ecuaciones:

$y = \frac{x}{2}$	El valor de y es la mitad del valor de x.
$x = 2y$	El valor de x es el doble del valor de y.

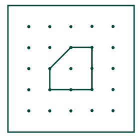
Es posible que algunos alumnos lleguen a expresiones que son válidas sólo para *alguna* pareja. En este caso propicie que los alumnos se den cuenta de que la expresión debe ser válida para *todas* las parejas.

2 En esta actividad se propone llevar a cabo un análisis semejante al de la actividad 1 pero cambiando una de las condiciones del problema. Planteélo así:

- El polígono debe tener en su interior dos clavos. Hagan lo mismo que se propone para la actividad 1, segunda parte (la tabla y gráfica correspondientes, etcétera), agregando la siguiente pregunta:
  - ¿Es lineal la relación? ¿Por qué?



Aceptable



No aceptable

La tabla correspondiente será ahora:

x	y
3	$2\frac{1}{2}$
4	3
5	$3\frac{1}{2}$
6	4
7	$4\frac{1}{2}$
8	5
9	$5\frac{1}{2}$
10	6
11	$6\frac{1}{2}$
12	7

Polígonos con dos clavos en su interior.

Analizando la tabla, y comparándola con la anterior, se espera que los alumnos noten que para cada valor de x el valor de y es uno más que en la tabla anterior, por lo que las expresiones correctas a las que pueden llegar los alumnos son:

$y = \frac{1}{2}x + 1$
$y = \frac{x}{2} + 1$
$y = \frac{x + 2}{2}$

Al localizar los puntos notarán que son colineales, por lo que podrá concluirse que la relación entre x y y es lineal.

Variante

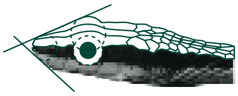
Si se quiere profundizar más en este problema, puede analizar con el grupo qué sucede si se pide que dentro del polígono queden 3 clavos, 4 clavos... o ningún clavo, y llegar a la generalización buscando la expresión para calcular el área con n clavos dentro. Esta expresión corresponde al teorema de Pick, según el cual el área de un polígono en el geoplano es igual a:

$$\frac{\textit{número de clavos que toca la liga}}{2} + \textit{número de clavos en el interior} - 1$$

Podrá observar que la fórmula de Pick es una función de dos variables; sin embargo, en cada una de las actividades propuestas en esta ficha, una de las variables se considera constante (el número de clavos en el interior).

Fórmulas

Tema 2: Ecuaciones y problemas



Propósitos	Despejar literales en diferentes tipos de fórmulas. Relacionar una fórmula con la tabla de datos que genera y con su gráfica.
Contenidos	Actividades sencillas de despeje de literales; por ejemplo: despejar y de $xy = c$; despejar x de $xy - 1 = 1$, etcétera.
Material	Hojas de papel milimétrico.

1 Señale que los siguientes problemas se van a resolver en equipos de tres o cuatro integrantes.

a) El perímetro de un cuadrado mide 6 m, ¿cuánto mide un lado del cuadrado?
b) Escriban la expresión algebraica que relaciona el valor de un lado del cuadrado con el valor del perímetro.
c) Una vez que hayan escrito la expresión, propongan al menos 10 valores para el perímetro: calculen el valor de un lado y registren los resultados en una tabla como la que se muestra.

Valor del perímetro	Valor que corresponde a un lado

d) Con los valores obtenidos construyan una gráfica en el plano cartesiano, en cuyo eje vertical anoten los valores de un lado del cuadrado y en el eje horizontal los valores del perímetro. ¿Qué pueden decir de la gráfica? ¿Qué tipo de relación representa la gráfica?
e) Realicen las actividades de los incisos a), b), c) y d) considerando polígonos regulares de 5, 6, 7, 8, 9... lados. ¿Qué observan?

Las actividades propuestas en los incisos *d) y e)* llevarán a los alumnos a observar que la relación que se establece es proporcional. Aproveche el momento para recordar las propiedades de este tipo de relación.

Las actividades del inciso *e)* permitirán a los alumnos observar que la expresión $l = P/k$ es siempre una relación proporcional, donde k representa el número de lados del polígono regular.

2 Organice a los alumnos en equipos y proponga las siguientes actividades:

Las expresiones °F = 1.8°C + 32, o bien, °F = (9/5)°C + 32, permiten calcular la temperatura en grados Farenheit si se conoce la temperatura en grados centígrados.

a) De las dos expresiones, elijan la que deseen y propongan al menos 10 valores distintos para los grados centígrados y, a partir de ellos, determinen los valores en grados Farenheit.
En cada caso registren los resultados en una tabla. Tomando en cuenta los datos obtenidos, ¿cómo creen que será la gráfica? ¿Qué tipo de relación representaría? Para verificar sus hipótesis, construyan la gráfica.
b) Escriban la expresión algebraica que permita obtener los grados centígrados en función de los grados Farenheit. Después propongan al menos 10 valores distintos para los grados Farenheit y determinen, a partir de ellos, su equivalencia en grados centígrados. En cada caso registren los resultados en una tabla. Si con los datos obtenidos trazan la gráfica, ¿cómo creen que será? ¿Qué tipo de relación representaría? Para verificar sus hipótesis, construyan la gráfica.

Las actividades que se pide realizar en el inciso *a)* pretenden llevar a los alumnos a que identifiquen que la relación corresponde a una función lineal. Si ningún equipo eligió la expresión que incluya 9/5, usted puede proponer que la usen para verificar que en ambos casos se obtienen los mismos resultados.

Una vez que los alumnos elaboren las gráficas correspondientes, es conveniente que expongan sus trabajos ante el grupo, de manera que observen la equivalencia de las expresiones algebraicas.

Puede resultar de interés que proponga a los alumnos que encuentren semejanzas o diferencias entre las gráficas obtenidas en la actividad 1 y las gráficas que se obtienen en esta actividad.

Al realizar las actividades del inciso *b)* quizá algunos alumnos que hayan elegido la expresión $°F = (9/5)°C + 32$ obtengan una expresión incorrecta cuando la despejen; por ejemplo: $°C = \dfrac{(5°F - 32)}{9}$

En estos casos conviene comparar las expresiones incorrectas, y sus resultados, con diferentes expresiones para que los alumnos descubran los errores.

Una vez que los alumnos hayan despejado adecuadamente, podrán proponer valores en grados Farenheit y obtener su equivalencia en grados centígrados, por lo que sin dificultades elaborarán la tabla y la gráfica correspondientes.

Es conveniente que los alumnos esbocen la gráfica que piensan obtener antes de marcar los puntos. Esto le permitirá a usted observar la comprensión que tienen de la relación entre la expresión algebraica, la tabla de datos que genera y su gráfica.

3 Organice a los alumnos en parejas y proponga el siguiente problema.

a) Consideren que conocen el área de un triángulo y la base del mismo. Escriban la expresión algebraica que les permita conocer la altura del triángulo.
b) Para un triángulo de 20 cm^2 de área, propongan al menos 15 valores distintos para la base y calculen la altura. En cada caso registren los resultados en una tabla.
c) Si con los datos obtenidos construyen una gráfica, ¿cómo creen que será? ¿Qué tipo de relación representaría? Para verificar sus hipótesis, constrúyanla.

Cuando la mayoría de los alumnos termine la actividad *a)*, puede solicitar que algunos expliquen cómo procedieron, de manera que esto ayude a corregir sus errores a aquellos que se equivocaron.

Las actividades y las preguntas propuestas en los incisos *b)* y *c)*, requieren el uso de la calculadora para simplificar los cálculos, así como el trazo adecuado de la gráfica. Si la gráfica se ve como una poligonal, puede solicitar a los alumnos que obtengan más puntos, así observarán que la gráfica es una curva continua.

Para responder a la última pregunta los alumnos tendrán que recordar las propiedades de la proporcionalidad inversa. Si hay dificultades puede plantear actividades como las siguientes:

- Elaboren una nueva tabla y coloquen en ella, de menor a mayor, los valores propuestos para la base del triángulo.
- Analicen los datos. ¿Cómo varían?
- Comparen los productos que se obtienen al multiplicar el valor de la base por la altura. ¿Qué observan?
- Lo anterior ayudará a los alumnos a establecer que se trata de una variación inversamente proporcional.

Si lo considera conveniente, puede proponer que realicen las actividades planteadas en los incisos *b)* y *c)* utilizando las expresiones que permiten calcular el área de un rombo, un rectángulo y un trapecio (en este caso se requiere fijar la base menor o la base mayor).

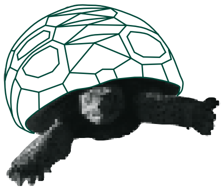
VARIANTES

La expresión $°K = °C + 273$ permite conocer la temperatura en grados Kelvin a partir de valores en grados centígrados.

1. ¿Cómo será la gráfica de la expresión $°K = °C + 273$ (propongan al menos 10 valores para los grados centígrados y calculen los valores en grados Kelvin)? ¿Qué tipo de relación representa la gráfica?
2. Escriban la expresión algebraica que permite conocer los grados centígrados en función de los grados Kelvin.
3. ¿Cómo será la gráfica de la expresión que permita conocer los grados centígrados en función de los grados Kelvin? ¿Qué tipo de relación representa la gráfica?

Los costos cambian

Tema 3: Regiones en el plano cartesiano y gráficas de funciones



Propósitos Utilizar constantemente los diversos medios de expresión matemática (lenguaje algebraico, tablas y gráficas) en el planteamiento y solución de problemas diversos y, en casos sencillos, desarrollar criterios para pasar de unos a otros.

Contenidos Ejercicios de graficación de funciones y su aplicación en la solución de problemas. Estudios de familias de la forma $y = mx + b$.

1 Organice a los alumnos en equipos de cuatro y propóngales la siguiente actividad:

El costo de impresión de un periódico escolar depende del número de ejemplares.

n	10	20	30	40	50
C	50	80	110	140	170

De acuerdo con la siguiente tabla, donde n es el número de ejemplares y C el costo en pesos:

a) ¿Cuándo cuesta menos producir un periódico: cuando se imprimen 10 o cuando se imprimen 20? ¿Por qué?

b) Calculen el costo de impresión para 80, 100, 500, 1 000 y n ejemplares.

c) Representen algebraica y gráficamente la función que relaciona n con C.

d) ¿Qué interpretación tiene en este problema la pendiente de la recta?

e) ¿Qué interpretación tiene en este problema la ordenada al origen?

Se dará tiempo suficiente para que los equipos lleven a cabo las actividades sugeridas y contesten las preguntas planteadas. Mientras tanto supervise el trabajo aclarando las dudas que surjan.

Como podrá notar, las respuestas al inciso *b)* presuponen que el alumno debe encontrar el patrón que genera la tabla. En este caso, observará que por cada 10 ejemplares el aumento es de \$30, por tanto, calcular el costo para 80 y 100 ejemplares puede hacerse continuando la tabla:

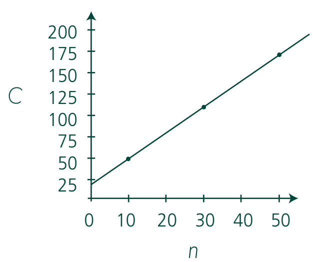
60	70	80	90	100
200	230	260	290	320

Sin embargo, para 500 y 1 000 ejemplares los alumnos tendrán que buscar otra estrategia que no sea la de tabular, ya que resultaría poco práctica. Se espera que, en equipo, los alumnos descubran que si por cada 10 ejemplares el aumento es de \$30, esto significa que el costo de cada ejemplar es de \$3. Ahora bien, ¿por qué se marcan \$50 para los primeros 10 ejemplares? Porque hay un costo inicial extra (gastos de producción del original del cual se derivan las copias) de \$20. Lo que responde al inciso *a)* de la actividad.

Por lo tanto, para 500 ejemplares: \$3 x 500 = \$1 500
Más \$20 de gasto inicial: \$1 500 + \$20 = \$1 520
Y para 1 000 ejemplares: \$3 x 1 000 = \$3 000
Más \$20 de gasto inicial: \$3 000 + \$20 = \$3 020
Para n: \$3 por n ejemplares = $3n$
Más \$20 de gasto inicial: $3n$ + \$20

De hecho, el cálculo para n ejemplares ya forma parte de la respuesta al inciso *c)*: $C = 3n + 20$.

Cuya gráfica es:



Para los incisos *d)* y *e)* es probable que usted tenga que intervenir recordando o dando a conocer lo que es la pendiente y la ordenada al origen y cómo, a partir de la ecuación algebraica, pueden identificarse. En este problema los alumnos notarán, por un lado, que la pendiente es el costo de cada ejemplar y, por otro, que la ordenada al origen representa el gasto inicial de producción. Es importante aclarar que todo el análisis anterior no debe ser explicado por usted (excepto para introducir nuevos términos como pendiente y ordenada al origen), sino que debe ser construido por los alumnos con auxilio de su asesoría.

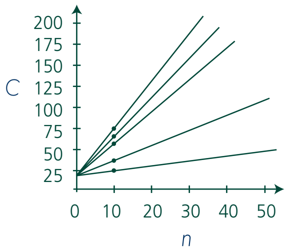
2 Organizados nuevamente en equipos de cuatro o cinco alumnos, y recordando lo que en la gráfica de la función $C = 3n + 20$ representa la pendiente (3) y la ordenada al origen (20), plantee las siguientes actividades:

a) Encuentren la expresión algebraica y grafiquen, en un mismo plano cartesiano, las funciones que representa la siguiente situación: Si se mantienen \$20 como costo inicial de producción, pero ahora varía el costo por ejemplar: \$1, \$2, \$4, \$5 y \$6, ¿qué tienen en común y en qué son diferentes las gráficas construidas?

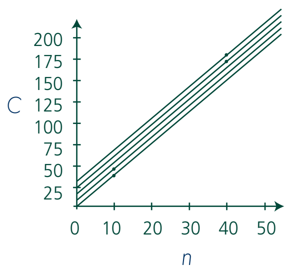
b) Encuentren la expresión algebraica y grafiquen, en un mismo plano cartesiano, las funciones que representa la siguiente situación: Si se mantiene fijo el costo de \$3 por ejemplar, pero varía el costo inicial: \$5, \$10, \$15, \$25 y \$30, ¿en qué se parecen y en qué son diferentes las gráficas construidas?

Los alumnos, al graficar (dependiendo de las escalas que hayan elegido), encontrarán gráficas como las siguientes:

Para el problema *a)*, las rectas obtenidas son concurrentes. Tienen en común la ordenada al origen (20) y varía su pendiente (inclinación):



Para el problema *b)*, las rectas obtenidas tienen todas la misma pendiente (3); es decir, son paralelas y varía su ordenada al origen:



Aproveche la ocasión para mencionar a sus alumnos que, en el primer caso, tiene una familia de rectas que pasan por un mismo punto y, en el segundo caso, se trata de una familia de rectas que tienen la misma pendiente. Una recta está determinada por dos valores (en este caso se habla de la pendiente y la ordenada al origen), cuando uno de esos valores varía mientras el otro se mantiene constante se dice que se tiene una familia de rectas.

VARIANTE

Muchas situaciones cotidianas pueden ser aprovechadas para estudiar, con este mismo tratamiento, funciones de la forma $y = mx + b$. Por ejemplo:

a) Costo por el uso del teléfono:

Costo = Precio de cada llamada x Número de llamadas + Renta fija.

b) Costo del servicio de taxi en la ciudad de México:

Costo = Precio por kilómetro x Kilómetros recorridos + Banderazo.
Costo = Precio por minuto x Número de minutos + Banderazo.

La velocidad y las matemáticas

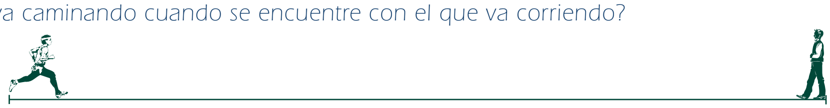
Tema 4: Ecuaciones y problemas (continuación)

Propósitos Practicar los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones 2 x 2 y ecuaciones cuadráticas. Aplicar los productos notables para factorizar polinomios de segundo grado.

Contenidos Planteamiento de problemas que conducen a un sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales simultáneas: su solución por el método de sustitución.

1 Organice a los alumnos en equipos de cuatro y plantee el siguiente problema:

> Dos muchachos se dirigen uno hacia el otro separados por una distancia de 50 m: uno corriendo y otro caminando. El que va corriendo lo hace a una velocidad constante de 2.5 m/s y el que va caminando lleva una velocidad de 1 m/s. ¿Cuántos metros habrá recorrido el compañero que va caminando cuando se encuentre con el que va corriendo?



Se sugiere que, antes de resolver el problema, hagan una estimación del resultado esperado. A continuación deje que los alumnos busquen un procedimiento para resolverlo.

Es probable que algunos alumnos intenten hacer un diagrama en el que se aprecie lo que cada persona avanza en cada segundo. Por ejemplo:

En el primer segundo:

En el segundo número 2:

En el segundo número 3:

Y así sucesivamente hasta obtener un diagrama como el siguiente:

Con ello se darán cuenta de que el muchacho que va caminando habrá recorrido poco más de 14 metros.

Otros equipos posiblemente elaboren una tabla para registrar lo que cada uno avanza en cada segundo y busquen aquel segundo en el que los recorridos de ambos sumen o se aproximen a 50 metros.

Tiempo (s)	Alumno que va corriendo	Alumno que va caminando	Distancia que han recorrido los dos
1	2.5	1	3.5
2	5	2	7
3	7.5	3	10.5
4	10	4	14
5	12.5	5	17.5
6	15	6	21
7	17.5	7	24.5
8	20	8	28
9	22.5	9	31.5
10	25	10	35
11	27.5	11	38.5
12	30	12	42
13	32.5	13	45.5
14	35	14	49
15	37.5	15	52.5

Con esta tabla podrán observar que cuando el que va caminando lleva 14 metros, el que va corriendo ha recorrido 35 metros, lo que representa 49 metros; es decir, los muchachos están a un metro de distancia y, por tanto, se encontrarán poco después. Como puede apreciarse, este método no permite encontrar la solución exacta, sólo una buena aproximación.

Un procedimiento menos laborioso es el que surge al plantearse la siguiente pregunta. En un segundo ambos compañeros avanzan 2.5 m + 1 m = 3.5 m, por tanto, ¿en cuánto tiempo cubrirán los 50 metros? De donde surge la operación:

$$50 \text{ m} \div \frac{3.5 \text{ m}}{\text{s}} = 14\ \frac{2}{7}\ \text{s}$$

En 14 2/7 segundos uno de los compañeros avanza 14 2/7 metros, mientras el otro compañero avanza 35 5/7 metros.

Este mismo procedimiento puede realizarse apoyándose en la fórmula para calcular la velocidad constante: $v = d/t$. Como se conoce la velocidad (3.5 m/s de ambos compañeros) y la distancia que deben cubrir (50 m), hay que despejar el tiempo:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{50 \text{ m}}{3.5 \text{ m/s}} = 14\ \frac{2}{7}\ \text{s}$$

Otra forma de encontrar el resultado es haciendo el siguiente planteamiento que hace uso de la fórmula: $v = \frac{d}{t}$

Tenemos que: $v_{\text{corriendo}} = \frac{2.5 \text{ m}}{\text{s}}$

$v_{\text{caminando}} = \frac{1 \text{ m}}{\text{s}}$

Si llamamos x a la distancia que ha recorrido el que va caminando y y a la distancia que ha recorrido el que va corriendo:

Sustituyendo, en la fórmula $v = d/t$, las velocidades y las variables x y y, tenemos: $2.5 = \frac{y}{t}$

$1 = \frac{x}{t}$

Despejando t en ambas: $t = \frac{y}{2.5}$

$t = \frac{x}{1}$

Y como el instante (t) en que se encuentran es el mismo, entonces podemos igualar: $\frac{y}{2.5} = \frac{x}{1}$, es decir, $y = 2.5\,x$

Con lo que obtenemos una relación entre x y y. La otra ecuación es la que marca la suma de las distancias que recorrieron ambos: $x + y = 50$. Resolviendo el sistema tenemos:

$$x = 14\ \frac{2}{7}\ \text{m}$$

Que es la distancia que ha recorrido el que va caminando en el momento de encontrarse con el otro compañero, quien habrá recorrido 35 5/7 metros.

VARIANTES

Existen muchos problemas relacionados con la velocidad que dan lugar a sistemas de ecuaciones. Pueden trabajarse en equipo o con todo el grupo.

1. Dos personas se dirigen de un pueblo a otro, entre los cuales hay una distancia de 40 km. Una de ellas va 2 km por hora más rápido que la otra y llega una hora antes. Calculen la velocidad y el tiempo que cada una de las personas invierte en su recorrido.
2. Durante un sismo las ondas primaria y secundaria viajan a una velocidad de 8 km/s y 4.8 km/s, respectivamente. Si a una estación sísmica la onda primaria llegó 15 segundos antes que la secundaria, ¿a qué distancia se encontraba el epicentro del temblor?

Triángulos con palillos

Tema 5: Triángulos y cuadriláteros

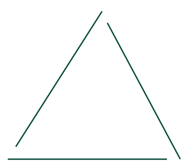
Propósito	Practicar el razonamiento deductivo en situaciones extraídas de la geometría y de otras partes de las matemáticas.
Contenidos	Aplicaciones del estudio de las propiedades de los triángulos.
Material	Una caja de palillos, un pliego de papel bond y tres dados (por equipo).

1 Organice al grupo en equipos de cuatro personas y proponga la siguiente actividad:

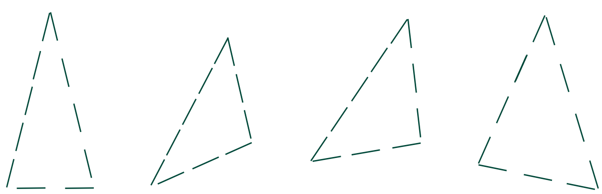
¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con un mismo número entero de palillos? Para saberlo, van a construir triángulos y a llenar la siguiente tabla. Los palillos serán usados en el perímetro todos a la vez.

Número de palillos	Número de triángulos diferentes que pueden formarse	Medidas de los lados (unidad: palillo)
1	0	
2	0	
3	1	1-1-1
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11	4	5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3
12		
13		
14		
15		

Los alumnos empezarán a explorar la forma de construir triángulos usando palillos. Notarán que con uno o dos palillos, por ejemplo, es imposible formar un triángulo, y que con tres palillos se puede formar sólo un triángulo:



Mientras que con 11 palillos pueden formarse cuatro triángulos diferentes.



Después de un tiempo suficiente, los representantes de algunos equipos pasarán al frente a mostrar sus resultados (pueden hacer sus tablas en pliegos de papel bond y pegarlas en el pizarrón). Una vez que se tengan varias tablas, deben compararlas, y en aquellos renglones donde haya resultados diferentes los equipos implicados validarán su solución ante el grupo.

Es probable que no todos los equipos encuentren todos los triángulos que pueden formarse con cierto número de palillos, pero de manera grupal pueden formar y completar llegando a formar una tabla como la siguiente:

Número de palillos	Número de triángulos diferentes que pueden formarse	Medidas de los lados (unidad: palillo)
1	0	
2	0	
3	1	1-1-1
4	0	
5	1	2-2-1
6	1	2-2-2
7	2	3-3-1, 3-2-2
8	1	3-3-2
9	3	4-4-1, 4-3-2, 3-3-3
10	2	4-4-2, 4-3-3
11	4	5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3
12	3	5-5-2, 4-4-4, 5-4-3
13	5	6-6-1, 6-4-3, 6-5-2, 5-5-3,5-4-4
14	4	6-6-2, 6-5-3, 6-4-4, 5-5-4
15	7	7-7-1, 7-6-2, 7-5-3, 7-4-4, 6-6-3, 6-5-4, 5-5-5

Además de la exploración de los diferentes triángulos, lo importante de la actividad es que los alumnos analicen cuándo es posible formar triángulos y cuándo no. Haciendo preguntas como: ¿por qué con 15 palillos no pudieron formar un triángulo cuyos lados midieran 8, 4 y 3?, se pretende que los alumnos lleguen a enunciar (con sus propias palabras) que *la suma de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que la medida del tercer lado*, o bien que *la suma de las medidas de los dos lados menores debe superar la medida del lado mayor*.

2 Con objeto de practicar los trazos con regla y compás pida a los alumnos que, de manera individual, realicen la siguiente actividad:

a) Escojan cinco triángulos de los que formaron para llenar la tabla 1 y trácenlos utilizando regla y compás (cambien la unidad de medida: si un lado mide 5 palillos, trácenlo de 5 centímetros).
b) Traten de trazar cinco de los triángulos que no se pudieron hacer en la actividad 1; demuestren que no existen triángulos con esas medidas (con 10 palillos por ejemplo, no existe un triángulo cuyos lados midan 6-3-1).

3 Para reafirmar la conclusión a la que se llegó en la actividad 1, se sugiere llevar a cabo el siguiente juego en equipos de cuatro o cinco alumnos.

a) Por turno cada alumno lanza los tres dados.
b) Si con los números de los dados es posible formar un triángulo, el jugador debe sumarlos y anotar ese puntaje a su favor. Si no es posible formar un triángulo, el puntaje para esa tirada es cero.
c) Gana quien haga más puntos en 10 tiradas.

Cuando haya discrepancia entre si es o no posible formar un triángulo con los números que indican los dados, invite a los alumnos a que traten de construirlo utilizando regla y compás o, en su defecto, con los palillos.

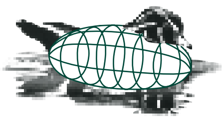
VARIANTE

Puede sugerir la siguiente actividad:

Clasifiquen los triángulos obtenidos en la actividad 1: por la medida de sus lados y por el número de ejes de simetría.

Raíz cuadrada

Tema 6: Raíz cuadrada y métodos de aproximación



Propósito Conocer la idea de aproximación a través del cálculo de la raíz cuadrada.
Contenidos Cálculo de la raíz cuadrada por diversos métodos.
Material Calculadora.

1 Organice a los alumnos en parejas. Explique que para llevar a cabo esta actividad van a emplear la calculadora pero sin utilizar la función *raíz cuadrada*. Plantee el siguiente problema:

> Las cantidades que aparecen en cada uno de los siguientes cuadrados representan su área. Calculen la medida de un lado de cada cuadrado.

361 m²

13 m²

Esta actividad presupone que los alumnos no utilizarán algoritmos para calcular la raíz cuadrada. El propósito es que traten de estimar la medida del lado de cada cuadrado y, con ayuda de la calculadora, prueben si la estimación es correcta o no.

Es relativamente sencillo determinar el lado del primer cuadrado, no así el segundo, cuya medida sólo puede aproximarse. Ésta es quizás la dificultad que enfrentarán los alumnos, ya que tendrán que aplicar sus conocimientos relacionados con los decimales para aproximarse al valor de la raíz.

Algunos alumnos encontrarán que la raíz de 13 se encuentra entre:

3 y 4, ya que: $3^2 < 13 < 4^2$; y que

$3.5 < \sqrt{13} < 3.8$ porque $(3.5)^2 < 13 < (3.8)^2$,

$3.6 < \sqrt{13} < 3.7$ porque $(3.6)^2 < 13 < (3.7)^2$, y así sucesivamente.

Otros alumnos serán menos sistemáticos para proponer el valor de un lado del cuadrado, en cuyo caso es necesario que usted formule preguntas que los acerquen cada vez más al valor de la raíz y a darse cuenta de que ningún número decimal será el valor exacto.

2 Organizados en parejas, comente a los alumnos que van a calcular la raíz cuadrada con otro procedimiento que consiste en proponer rectángulos que tengan como área el número cuya raíz cuadrada se quiere calcular, y que estos rectángulos se deben ir transformando hasta que resulte un cuadrado o lo más cercano a un cuadrado. Formule el siguiente problema:

> Calculen la medida de un lado del cuadrado siguiente proponiendo rectángulos que tengan igual área.

19 m²

Es recomendable que los alumnos pongan a consideración del grupo las estrategias que utilizaron para obtener la base y la altura de los rectángulos. Algunos equipos se darán cuenta de que basta con proponer la base o la altura y despejar cualquiera de ellas empleando la fórmula: $A = b \times h$.

Para calcular la medida del lado del cuadrado, los alumnos pueden enfrentar algunas dificultades que tienen que ver con la siguiente pregunta:

¿Cómo verificar que los rectángulos propuestos son cada vez *más cuadrados*?

Puede ayudar a los alumnos a clarificar la idea anterior preguntando, por ejemplo: ¿Cómo son las diferencias entre la base y la altura de los rectángulos propuestos? ¿Cuándo se parece más un rectángulo a un cuadrado?

Lo importante es que los alumnos observen que cuando la diferencia es *pequeña*, entonces el rectángulo se parece más a un cuadrado. Una tabla como la que se muestra a continuación puede ayudar a comprender mejor lo dicho anteriormente.

Medida de la altura (h)	Medida de la base $b = \frac{A}{h}$ en cm	Diferencia entre la base y la altura ($b - h$)
4	4.8	0.8
3.9	4.87179	0.97
4.5	4.22222	0.2777
4.3	4.41860	0.11860
4.35	4.36781	0.01781

A partir de esta información los alumnos podrán observar que la raíz que se quiere calcular está entre 4.35 y 4.36781.

Es posible que algunos alumnos utilicen la función *raíz cuadrada* de la calculadora (aunque la indicación haya sido la contraria). Esta situación puede servir para sugerirles que utilicen la información de la calculadora para ir verificando que las medidas del largo y ancho de los rectángulos propuestos se van aproximando al valor de la raíz que se busca.

3 Indique a los alumnos que van a seguir trabajando en parejas. Señale que van a obtener la raíz cuadrada de un número mediante un procedimiento propuesto por los babilonios.

- Observen la siguiente secuencia de rectángulos:

1) $A = 19\ u^2$; $h_1 = 1$; $b_1 = 19$

2) $A = 19\ u^2$; h_2; b_2

$$b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2} \qquad h_2 = \frac{A}{b_2}$$

3) $A = 19\ u^2$; h_3; b_3

$$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} \qquad h_3 = \frac{A}{b_3}$$

En cada rectángulo se muestra cómo obtener aproximaciones de la raíz cuadrada de 19. Escriban una expresión algebraica para calcular cada una de las siguientes aproximaciones de la raíz cuadrada de 19.

Para que los alumnos observen que la secuencia permite obtener una aproximación de la raíz de 19, puede pedirles que efectúen los cálculos.

19; h_2; b_2

$$b_2 = \frac{(b_1 + h_1)}{2} = \frac{(19 + 1)}{2} = 10$$

$$h_2 = \frac{A}{b_2} = \frac{19}{10} = 1.9$$

h_3; b_3

$$b_3 = \frac{(b_2 + h_2)}{2} = \frac{(10 + 1.9)}{2} = \frac{11.9}{2} = 5.95$$

$$h_3 = \frac{A}{b_3} = \frac{19}{5.95} = 3.193$$

A partir de este hecho los alumnos tendrán una cierta seguridad de que el procedimiento funciona y podrán obtener otras aproximaciones.

Dada la secuencia mostrada anteriormente, en un primer momento algunos alumnos pueden expresar oralmente el procedimiento; otros estudiantes pueden anotar expresiones como las siguientes:

$$b_4 = \frac{(b_3 + h_3)}{2} \qquad b_5 = \frac{(b_4 + h_4)}{2}$$

$$h_4 = \frac{A}{b_4} \qquad h_5 = \frac{A}{b_5}$$

Y así sucesivamente.

En cada paso puede invitar a los alumnos a que sustituyan los valores anteriores y efectúen los cálculos para comprobar si la expresión propuesta funciona o no.

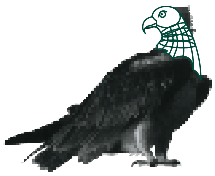
VARIANTE

Puede sugerir la siguiente actividad:

Calculen la raíz cuadrada de 6 241 y de 71 utilizando dos procedimientos distintos.

¿Qué te conviene?

Tema 7: Presentación y tratamiento de la información



Propósitos Conocer ejemplos de crecimiento exponencial o geométrico. Comparar este modo de crecimiento con el aritmético o lineal.

Contenidos Crecimiento exponencial o geométrico en comparación con el crecimiento aritmético o lineal. Ejemplos ilustrativos.

Material Calculadora.

1 Después de organizar al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos, plantee el siguiente problema:

> *Imaginen que han ganado un premio y tienen que elegir entre dos opciones: Recibir 1 000 pesos diarios durante 20 días, o bien, recibir 1 peso el primer día, 2 el segundo, 4 el tercero, 8 el cuarto y así sucesivamente hasta el día número 20. ¿Qué conviene más? Justifiquen su respuesta.*

Deje que los alumnos discutan en su equipo cuál es la mejor opción. Es muy común que piensen que la propuesta de $1 000 diarios conviene más, sin embargo, debe pedirles que traten de comprobar su resultado.

Cuando la mayoría de los equipos tenga una respuesta justificada, pida que algunos alumnos expliquen su procedimiento ante el grupo. Después, para visualizar la situación proponga que llenen una tabla como la siguiente:

	Opción 1		Opción 2	
Día	Reciben	Acumulan	Reciben	Acumulan
1	1 000	1 000	1	1
2	1 000	2 000	2	3
3	1 000	3 000	4	7
4	1 000	4 000	8	15
5	1 000	5 000	16	31
6	1 000	6 000	32	63
7	1 000	7 000	64	127
8	1 000	8 000	128	255
9	1 000	9 000	256	511
10	1 000	10 000	512	1 023
11	1 000	11 000	1 024	2 047
12	1 000	12 000	2 048	4 095
13	1 000	13 000	4 096	8 191
14	1 000	14 000	8 192	16 383
15	1 000	15 000	16 384	32 767
16	1 000	16 000	32 768	65 535
17	1 000	17 000	65 536	131 071
18	1 000	18 000	131 072	262 143
19	1 000	19 000	262 144	524 287
20	1 000	20 000	524 288	1 048 575

Para el caso de la segunda opción es posible que algunos alumnos noten que la suma acumulada por día es, precisamente, una unidad menos que la cantidad que se recibirá al día siguiente. Por ejemplo, para el día 12, la suma acumulada es $4 095, y la cantidad a recibir el siguiente día (13) es $4 096, lo cual facilitará el llenado de la tabla, ya que calculando la columna de la cantidad recibida pueden llenar la columna de la cantidad acumulada.

Con su ayuda los alumnos podrán deducir una fórmula que permite calcular la cantidad acumulada para cada día. Notarán que lo que se recibe el primer día es 2^0, el segundo es 2^1, el tercero es 2^2, el cuarto es 2^3, y así sucesivamente. Esto se puede expresar en una tabla como la siguiente:

Día	Recibe	Acumula	
1	$2^0 = 1$	1	$2^1 - 1$
2	$2^1 = 2$	3	$2^2 - 1$
3	$2^2 = 4$	7	$2^3 - 1$
4	$2^3 = 8$	15	$2^4 - 1$
5	$2^4 = 16$	31	$2^5 - 1$
n	2^{n-1}		$2^n - 1$

Así, para 20 días tenemos que se recibe: $2^{20-1} = 2^{19} = 524\ 288$,

y acumula: $2^{20} - 1 = 1\ 048\ 575$

Esta operación puede efectuarse fácilmente en una calculadora científica (aproveche la oportunidad para repasar el uso de exponentes en la calculadora). Por otro lado, puede comentar con los alumnos que algunas calculadoras no científicas permiten elevar a cualquier potencia tecleando.

$\boxed{n}\ \boxed{x}\ \boxed{n}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

Donde *n* es el número que se quiere elevar a una potencia. El signo *igual* se teclea las veces que sea necesario.

Al comentar en grupo el ejercicio insista en que los alumnos deben observar el crecimiento de las cantidades en cada una de las propuestas. Haga el comentario de que en la primera opción el crecimiento es lineal o aritmético, y en la segunda exponencial o geométrico.

2 Continuando el trabajo en equipos, plantee la siguiente situación:

> La siguiente tabla muestra la población aproximada (expresada en millones) de una colonia de bacterias. El registro se ha hecho cada hora.
>
> | hora | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | bacterias | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 | 192 |
>
> De acuerdo con esta información:
> a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 8 horas? ¿Y después de 10?
> b) ¿Cuántas bacterias habría una hora antes de la primera observación?
> c) Encuentren la función que les permita calcular el número de bacterias para cada hora.

Teniendo como antecedente la actividad 1, los alumnos notarán que se trata de una función que crece exponencialmente. La solución a la pregunta *a)* la encontrarán fácilmente al descubrir el patrón y continuar la tabla:

6	7	8	9	10
384	768	1 536	3 072	6 144

Lo mismo para la pregunta *b)*:

hora	1 hora antes	0
bacterias	3	6

Finalmente, para encontrar la respuesta al punto *c)*, requieren analizar cómo varía el número de bacterias. Debe ser paciente y permitir que sean los alumnos quienes, en equipo o en grupo, lleguen a la expresión de la función que se ha pedido. Podría ser que, vinculándola con la actividad anterior, intuyan que se trata de un número que se eleva a un cierto exponente. Es probable que piensen que es 6, pero fácilmente descubrirán que no es así (el crecimiento sería 6, 36, 216...).

Probablemente, al ver que son múltiplos de 6, noten que:

6 = 6; 12 = 6 x 2; 24 = 6 x 4; 48 = 6 x 8; 96 = 6 x 16; etcétera. Y que reconozcan a los factores 2, 4, 8, 16... como potencias de 2. De esta manera, encontrarán que la función pedida es:

$$y = 6 \times 2^n$$

Donde *y* es el número de bacterias y *n* la hora (los alumnos podrían usar otras letras).

VARIANTES

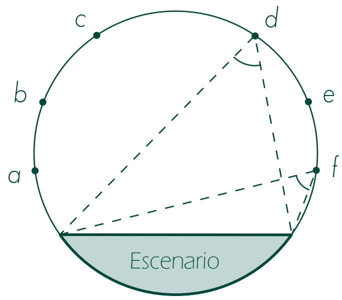
1. Se sugiere que los alumnos grafiquen en un mismo plano las funciones $y = 2^x$, $y = x^2$, $y = 2x$, para que noten sus diferencias.
2. El interés compuesto es otro ejemplo de función exponencial que pueden trabajar.

El círculo

Tema 8: El círculo

Propósito	Practicar el razonamiento deductivo en situaciones extraídas de la geometría.
Contenidos	Ángulo inscrito en una circunferencia. Ejemplos para ilustrar el lugar geométrico.
Material	Juego de geometría.

1 Organice a los alumnos en parejas, entrégueles un dibujo como el que aparece enseguida y comente lo siguiente:

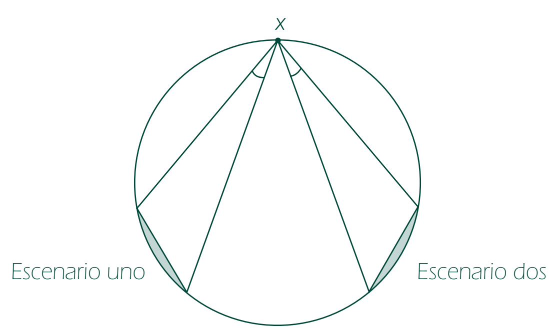
> El dibujo que observan es el croquis de un teatro. Las letras señalan algunos de los asientos y las líneas punteadas el ángulo de visión de los espectadores que ocupan esos asientos.
>
> 
>
>
> ¿Cuál de los espectadores (a, b, c, d, e, f) tiene mayor ángulo de visión?

Seguramente los alumnos trazarán los ángulos de visión de los espectadores y algunos medirán con el transportador cada uno de ellos. Otros alumnos utilizarán como auxiliar una hoja y copiarán en ella uno de los ángulos para superponerlo y compararlo con los otros. En cualquier caso concluirán que los ángulos de visión de cada uno de los espectadores son congruentes.

Una situación que usted puede plantear es la siguiente: ¿Qué sucede si el escenario (círculo) es más grande o más pequeño? A partir de los resultados que los alumnos encuentren, puede utilizar el lenguaje propio de la geometría para concluir que si los ángulos inscritos en el mismo círculo (aquellos que tienen su vértice en la circunferencia y sus dos lados son cuerdas) abarcan el mismo arco de circunferencia, entonces miden lo mismo.

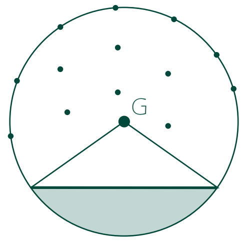
Una variante que puede proponer es la siguiente:

> ¿Cómo serán los ángulos de visión si un espectador x observa dos escenarios en los que la medida de los arcos que abarcan son iguales?, como se ve en el dibujo siguiente:



2 Nuevamente organizados en parejas, proponga a los alumnos resolver la siguiente situación:

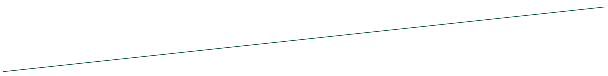
- Una persona se encuentra situada en el centro del teatro (que tiene la misma forma que el de la actividad 1). Localicen algún lugar del teatro en el que otro espectador tenga la mitad del ángulo de visión que la que se encuentra en el centro.



Seguramente los alumnos escogerán puntos al azar y medirán cada ángulo para ver si cumple con la condición que se ha solicitado. Observarán que si los puntos elegidos se encuentran cerca de la circunferencia, la medida del ángulo se va acercando a la mitad de la medida del ángulo central, y que si el punto elegido se encuentra sobre cualquier parte de la circunferencia, entonces la medida del ángulo cumple con la condición señalada.

3 Organizados en parejas, indique a sus alumnos que van a utilizar sus escuadras y propóngales la siguiente situación:

- Tracen un segmento de 8 cm de longitud.



Después tracen al menos 8 rectángulos diferentes en los cuales una de sus diagonales sea el segmento que trazaron.

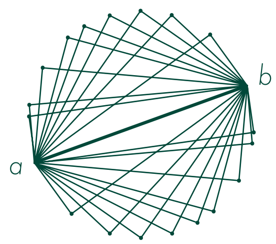
a) ¿Qué figura geométrica forman los vértices de todos los rectángulos que trazaron?

b) ¿Por qué se forma la figura geométrica que encontraron?

Es conveniente que observe el trabajo de los alumnos y, si es necesario, exponga las explicaciones pertinentes para que comprendan el problema y utilicen adecuadamente los instrumentos geométricos. Cuando la mayoría de los alumnos haya terminado, puede solicitar que algunos pasen al pizarrón para que indiquen:

- Cómo trazaron los rectángulos.
- Qué figura geométrica se forma con los vértices de los rectángulos.
- Qué relación tiene el segmento original con la circunferencia que se forma.
- ¿Cuánto mide un ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y abarca su diámetro?

Los trazos de los alumnos serán similares a los siguientes:



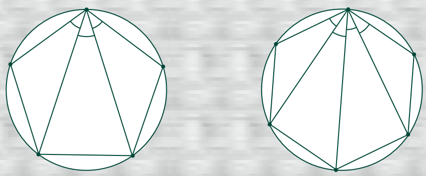
Variantes

Puede proponer actividades como las siguientes:

1. Tracen un segmento que mida 8 cm. Llamen *A* a uno de los extremos y *B* al otro. Tracen 10 rectas que pasen por el punto *A*. Tracen líneas perpendiculares a cada una de las 10 rectas, las cuales deben pasar por el punto *B*.

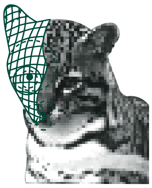
   - Si unen los vértices de los ángulos rectos que trazaron, ¿qué figura geométrica formarán?

2. Escriban los argumentos necesarios para mostrar que los ángulos marcados en los polígonos regulares siguientes son todos congruentes.



La magia de los polinomios

Tema 9: Operaciones con polinomios de una variable



Propósito	Utilizar adecuadamente diversos medios de expresión matemática: lenguaje algebraico.
Contenidos	Simplificación de términos semejantes. Extracción de un factor común. Evaluación de polinomios.
Material	Calculadora (opcional).

1 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos y después plantee la siguiente actividad:

- Observen la tabla que se muestra. Si se factorizan estas expresiones:

  a) ¿Cuál es el factor común a todas las expresiones?

$x^2 + 3x$	$x^2 - 4x$	$x^2 + x$
$x^2 - 2x$	x^2	$x^2 + 2x$
$x^2 - x$	$x^2 + 4x$	$x^2 - 3x$

Tabla 1

  b) Hagan en su cuaderno una tabla como la anterior, pero en ella anoten la factorización de cada una de las expresiones. Deben escribir cada expresión en el lugar que le corresponde de acuerdo con la tabla anterior.

  c) A partir de la tabla que elaboraron, construyan otra en la que ahora anoten la expresión que resulta de eliminar el factor que es común a todas las expresiones.

Se espera que los alumnos construyan, para el inciso *b)*, la siguiente tabla:

$x(x + 3)$	$x(x - 4)$	$x(x + 1)$
$x(x - 2)$	$x(x)$	$x(x + 2)$
$x(x - 1)$	$x(x + 4)$	$x(x - 3)$

Tabla 2

Tal vez el término x^2, por ser el único monomio, no les parezca que deba ser factorizado: la visión general de la tabla puede ayudar a que se factorice. Una vez que hayan construido la tabla 2, la construcción que se pide en el inciso *c)* resultará algo sencillo.

2 Indique que van a seguir trabajando en equipos. A continuación recuérdeles qué se entiende como un *cuadrado mágico* y plantee la siguiente situación:

- La tabla que se muestra es la que obtuvieron a partir del inciso c) de la actividad 1.

$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$

Tabla 3

  a) Comprueben que se trata de un cuadrado mágico.

  b) La tabla 1, ¿es un cuadrado mágico? Compruébenlo.

  c) ¿Qué relación existe entre la expresión que se encuentra en la casilla central y la suma de la tabla?

Las tablas 1 y 3 pueden ser consideradas como *cuadrados mágicos*. La suma de la tabla 1 es $3x^2$, y la de la tabla 3 es $3x$. Se espera que los alumnos descubran que la suma de las tres expresiones que se encuentran dispuestas diagonalmente así como la suma de las expresiones que se encuentran en la misma fila, horizontal o verticalmente, es el triple de la expresión colocada en el centro del *cuadrado mágico*.

3 Aprovechando las propiedades de los *cuadrados mágicos*, plantee la siguiente actividad:

- Consideren los cuadrados mágicos siguientes:

$x^2 + 3x$	$x^2 - 4x$	$x^2 + x$
$x^2 - 2x$	x^2	$x^2 + 2x$
$x^2 - x$	$x^2 + 4x$	$x^2 - 3x$

Tabla 4

$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$

Tabla 5

Construyan una tabla como las anteriores. En cada espacio anoten las expresiones que se obtengan de la suma de las casillas respectivas de las tablas 4 y 5; por ejemplo: $(x^2 + 3x) + (x + 3) = x^2 + 4x + 3$, lo cual se anota en:

$x^2 + 4x + 3$		

- ¿El cuadrado que resulta será mágico?

Deje que los alumnos trabajen y descubran qué es lo que sucede. Se espera que construyan la siguiente tabla:

$x^2 + 4x + 3$	$x^2 - 3x - 4$	$x^2 + 2x + 1$
$x^2 - x - 2$	$x^2 + x$	$x^2 + 3x + 2$
$x^2 - 1$	$x^2 + 5x + 4$	$x^2 - 2x - 3$

Tabla 6

Al realizar las sumas en forma horizontal, vertical y diagonal, el resultado será igual a $3x^2 + 3x$, lo cual quiere decir que la tabla 6 también es un *cuadrado mágico*.

Usted podrá seguir explotando las propiedades de los *cuadrados mágicos* para lograr que sus alumnos operen con una gran variedad de polinomios. Por ejemplo, puede pedirles que multipliquen cada expresión de la tabla 3 por el factor: $(3x + 2)$, con lo que obtendrán el siguiente *cuadrado mágico*.

$3x^2 + 11x + 6$	$3x^2 - 10x - 8$	$3x^2 + 5x + 2$
$3x^2 - 4x - 4$	$3x^2 + 2x$	$3x^2 + 8x + 4$
$3x^2 - x - 2$	$3x^2 + 14x + 8$	$3x^2 - 7x - 6$

Tabla 7

En este cuadrado mágico, el resultado de las sumas es $9x^2 + 6x$.

4 Organice a los alumnos en equipos e indíqueles que realicen la siguiente actividad:

Observen el siguiente cuadrado:

$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$

Tabla 8

Evalúen cada polinomio del cuadrado según los valores que se indican para x:

$$x = 3,\ x = -2,\ x = \frac{1}{2}.$$

a) Comprueben que en cada caso se obtiene un cuadrado mágico.
b) Asignen a x otros valores y comprueben que se obtienen cuadrados mágicos.
c) ¿Qué relación existe entre el número que se encuentra en la casilla central y la suma del cuadrado?

Dé tiempo suficiente para que cada alumno opere con los polinomios y construya sus tres tablas a partir de la tabla 8.

Cuando $x = 3$ se tiene que:

6	–1	4
1	3	5
2	7	0

Cuando $x = -2$ se tiene que:

1	–6	–1
–4	–2	0
–3	2	–5

Cuando $x = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{2}$

Posteriormente los alumnos realizarán las sumas necesarias para descubrir si se trata de *cuadrados mágicos* o no.

Si lo cree conveniente, puede tomar cualquiera de los *cuadrados mágicos* que se hayan construido con expresiones algebraicas y lleve a cabo la evaluación de los polinomios asignando valores a x que los mismos alumnos pueden proponer.

VARIANTES

Puede proponer alguna de las siguientes actividades:

1. Escriban las expresiones algebraicas que faltan para obtener un cuadrado que sea mágico.

$x^4 + x^3$		
		$x^4 - x^3$
$x^4 - 3x^3$	$x^4 + 3x^3$	$x^4 - 3x^3$

$x^2 + 4x + \square$	$\square - 3x + \square$	$x^2 + 2x + 1$
$x^2 + \square - 2$	$\square + \square$	$x^2 + 3x + 2$
$\square - 1$	$\square + 5x + 4$	$x^2 + \square - 3$

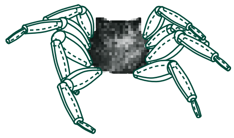
2. Anoten en los cuadros vacíos las expresiones que hacen falta para que el cuadrado sea mágico.

3. Comprueben que el siguiente cuadrado es mágico. Si multiplican cada expresión del cuadrado por $(x - 1)$, ¿se obtendrá un nuevo cuadrado mágico? Efectúen la multiplicación y comprueben su conjetura.

$x - 4$	$x + 10$	$x + 9$	$x - 1$
$x + 7$	$x + 1$	$x + 2$	$x + 4$
$x + 3$	$x + 5$	$x + 6$	x
$x + 8$	$x - 2$	$x - 3$	$x + 11$

Cuadrados algebraicos

Tema 10: Productos notables y factorización

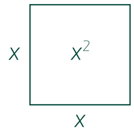


Propósito Aplicar los productos notables en la factorización de polinomios de segundo grado.

Contenidos Productos notables: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$; $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Material Copias, para cada alumno, de los anexos B (p. 123) y C (p. 124), tijeras, resistol y cartulina.

1 Entregue a los alumnos la fotocopia (si no es posible la fotocopia, puede pedirles que tracen los cuadrados y rectángulos indicándoles las medidas). Pídales que de manera individual:

> Calculen el área de cada figura y escriban el resultado en el centro de cada una. Por ejemplo:
>
> 
>
>
> Después recorten y peguen cada figura en cartulina.

Hágales saber que el objetivo es preparar el material que utilizarán en la siguiente actividad. Una vez que hayan terminado, invítelos a confrontar los resultados que obtuvieron al calcular el área de cada figura.

2 Organice por parejas a los alumnos y propóngales la siguiente actividad:

> Con ayuda de su material formen cuadrados (a manera de rompecabezas) cuyos lados sean los indicados, y calculen el área en cada caso.

a) $x + 1$	*f)* $y + 1$
b) $x + 2$	*g)* $y + 2$
c) $x + 3$	*h)* $y + 4$
d) $x + 4$	*i)* $2x + 1$
e) $x + y$	*j)* $2x + y$

Cabe mencionar que una vez que se haya construido un cuadrado, y calculado su área, éste puede desbaratarse para construir otros.

Mientras los alumnos trabajan recorra el salón y resuelva dudas. Deje que los alumnos registren el área de cada cuadrado como deseen. Es probable, por ejemplo, que para el primer inciso se obtengan resultados como:

$x^2 + x + x + 1$
$1 + x^2 + x + x$
$1 + 2x + x^2$
$x^2 + 2x + 1$

Cuando lo considere pertinente pida la confrontación de resultados de manera grupal. Si surgen diferentes maneras de expresar sus cálculos, éstos se analizarán para que los alumnos observen que se trata de expresiones equivalentes (reduciendo términos semejantes y ordenando los términos).

Se pretende que sean los alumnos quienes encuentren la siguiente regla, aunque no la expliciten de la misma manera:

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

En este momento puede pedir a los alumnos que exploren lo que sucede cuando, en vez de ser $x + 1$, el valor del lado del cuadrado es $x - 1$ (haciendo la multiplicación $x - 1$ por $x - 1$). Si es necesario puede probar con otras expresiones.

3 Pida a los alumnos que hagan lo que se indica a continuación (de manera individual):

> a) Piensen en un número del 1 al 10.
> b) Súmenle 2.
> c) Eleven el resultado al cuadrado.
> d) Réstenle cuatro veces el número que pensaron.

Pida a varios alumnos que digan el resultado al que llegaron y *adivine* el número que pensaron.

Proponga que, después de hacer la actividad varias veces, se organicen en ternas y sigan la siguiente instrucción:

> Encuentren el truco que permite adivinar el número.

¿Cómo hacerlo?

Llamemos *x* al número que piensa cada alumno.

Entonces:

a) Piensen en un número del 1 al 10.	x
b) Súmenle dos.	$x + 2$
c) Eleven el resultado al cuadrado.	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
d) Réstenle cuatro veces el número que pensaron.	$x^2 + 4x + 4 - 4x = x^2 + 4$

Para *adivinar* el número pensado bastará con restar 4 al resultado y después extraer su raíz cuadrada. Veamos un ejemplo numérico:

a) Piensen en un número del 1 al 10.	8
b) Súmenle dos.	10
c) Eleven el resultado al cuadrado.	100
d) Réstenle cuatro veces el número que pensaron.	$100 - 32 = 68$

Cuando un alumno diga que obtuvo 68, reste 4 a 68, cuyo resultado es 64, y extraiga su raíz cuadrada: 8.

El rango del 1 al 10 para pensar un número se deja a criterio de usted. Si el número fuera mayor, entonces puede permitir que los alumnos utilicen calculadora; los números incluso pueden ser negativos o racionales (aunque con estos últimos los cálculos podrían complicarse). También puede modificarse el paso *b)* (sumando o restando otro número), con lo cual debera cambiarse, obviamente, el paso *d)*.

Si a ningun alumno se le ocurre, puede sugerir que, como *el número pensado* no se conoce, pueden expresarlo con una letra. Se espera que con esta *pista* los alumnos harán un análisis similar al descrito que les permitirá saber por qué se puede adivinar el número pensado.

Si el tiempo lo permite y lo juzga conveniente, haga la siguiente sugerencia a los alumnos:

> Inventen otras secuencias de *Piensa un número* con las que se pueda adivinar el número pensado.

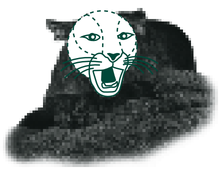
4 Para seguir trabajando con el cuadrado de un binomio se sugiere que los alumnos hagan tarjetas para elaborar un dominó y jugarlo en equipos de cuatro (fotocopie el anexo B de este fichero).

VARIANTES

1. Las actividades 3 y 4 pueden ser realizadas para estudiar el producto de dos binomios con un término común.
2. Se sugiere aprovechar los productos notables para actividades de cálculo mental.

¿Aprobar el examen sin estudiar?

Tema 11: Problemas de probabilidad



Propósito	Aplicar la simulación para resolver problemas.
Contenidos	Solución por simulación de problemas de probabilidad.
Material	Una caja (urna) y cuatro canicas del mismo material y tamaño: tres del mismo color (blancas) y una de otro color (roja). Una hoja que contenga números del 1 al 20 (en columna) y debajo de cada número los incisos *A*, *B*, *C* y *D*: los números designarán los reactivos y las letras las opciones.

1 Comente que en la zona metropolitana del Distrito Federal los alumnos deben presentar un examen para ingresar a una escuela del nivel medio superior, la cual es asignada a cada alumno en función del número de aciertos que obtienen en el examen. Después de organizarlos en equipos de tres o cuatro alumnos, entrégueles la hoja numerada y plantee el siguiente problema:

> Para ser aceptado en la escuela que prefiere, Juan necesita contestar correctamente 17 reactivos o más; para simplemente ser aceptado, aunque sea en otra escuela, necesita obtener al menos 10 aciertos; y si contesta correctamente nueve reactivos o menos, no podrá ingresar a ninguna escuela. El examen que Juan resolverá consta de 20 reactivos; cada reactivo tiene cuatro opciones, de las cuales sólo una es correcta. Considerando que contestará todo el examen al azar:
> a) ¿Entrará Juan en la escuela que prefiere?
> b) ¿Entrará aunque sea en otra escuela?
> c) ¿Juan no ingresará a ninguna escuela?

Una estrategia que los alumnos pueden utilizar es la siguiente: en cada reactivo elegirán la opción que consideran correcta, y después preguntarán a usted si las opciones elegidas fueron acertadas o no. Otra manera de investigar la *suerte* de Juan consiste en simular la situación utilizando las canicas y la urna. Si no se les ocurre la manera de utilizar ese material, puede dar algunas orientaciones; por ejemplo:

- ¿Cómo utilizarían las canicas y la caja para conocer la suerte de Juan?
- Si meten las cuatro canicas en la urna y extraen al azar una de ellas, ¿a qué conclusión podrían llegar si la canica es blanca?, ¿y si la canica extraída es roja?

Con las preguntas anteriores, los alumnos podrán concluir que el hecho de meter las cuatro canicas y extraer una al azar es equivalente a lo que Juan y ellos mismos hicieron al contestar el examen, sólo que ahora sabrán si la respuesta es correcta o no, esto es, si sale una canica blanca la respuesta será incorrecta, y si sale roja querrá decir que acertaron.

Conviene que los alumnos realicen la experiencia varias veces y registren en una tabla, como la que se muestra a continuación, los resultados obtenidos, de esta manera observarán que, al contestar al azar un examen de esa naturaleza, es muy probable que Juan no entre a estudiar a ninguna de las escuelas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
Reactivos correctos									
Reactivos incorrectos									

2 Organice a los alumnos en parejas y comente que para resolver el siguiente problema van a considerar que otro alumno (Luis) ha presentado el examen para ingresar a una escuela del Distrito Federal.

> Después de haber resuelto el examen, Luis comentó que está seguro de haber contestado acertadamente la mitad de los 20 reactivos, aunque reconoció que la otra mitad la había resuelto al azar. De acuerdo con lo anterior:
> a) ¿Entrará Luis a la escuela que prefiere?
> b) ¿Entrará aunque sea a otra escuela?

Después de haber realizado la primera actividad, seguramente los alumnos pondrán en juego el modelo de la urna para resolver el problema. Es conveniente que sugiera a los alumnos que anticipen una respuesta en torno a la probabilidad que tiene Luis de ingresar a la primera o la segunda opción, de manera que confronten su pronóstico con los resultados que obtengan.

Por otra parte, es conveniente que, en una tabla similar a la realizada en la actividad 1, con el control de los reactivos correctos e incorrectos, los alumnos registren los resultados que obtengan después de realizar varias veces la experiencia. Los resultados mostrarán que lo más probable es que Luis quede ubicado en la segunda opción.

A manera de conclusión, los alumnos seguramente observarán que lo mejor que pueden hacer para aprobar un examen de este tipo es estudiar mucho, ya que contestar al azar incrementa en gran medida las posibilidades de reprobar.

3 Organice al grupo en parejas y plantee el siguiente problema:

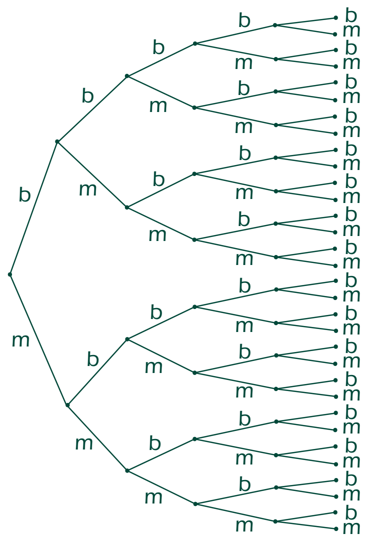
> Supongan que al contestar un examen de 10 reactivos, en el que cada reactivo tiene sólo dos opciones, están seguros de haber contestado bien cinco preguntas, mientras que las otras cinco fueron resueltas al azar.
> ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben el examen?

En esta situación, después de haber resuelto las actividades 1 y 2, los alumnos se darán cuenta de que el problema puede abordarse por medio de la simulación con la urna y, aunque en este caso sólo necesitarán una canica de cada color, procederán de manera similiar. Como en las actividades 1 y 2, es conveniente que los alumnos registren en una tabla los resultados que obtengan después de realizar en varias ocasiones la experiencia.

Es importante señalar que la probabilidad en este caso estará expresada en términos de la probabilidad frecuencial, es decir:

$$\frac{\text{Número de casos que al ser observados fueron favorables}}{\text{Total de observaciones}}$$

Sin embargo, puede orientar a los alumnos para que obtengan la probabilidad en términos del modelo clásico. Esto se puede hacer si primero pide que supongan que el examen tenía cinco reactivos, con dos opciones cada uno, y que fue contestado al azar.



Utilizando un diagrama de árbol, los alumnos podrán analizar diferentes casos.

Por ejemplo, la probabilidad de que los cinco reactivos se contesten correctamente es 1/32, puesto que sólo uno de los 32 caminos tiene cinco letras *b*.

La probabilidad de que tenga cuatro correctas y una incorrecta es 5/32, porque se presentan cinco casos de los 32:

b b b b m
b b b m b
b b m b b
b m b b b
m b b b b

La probabilidad de que apruebe el examen es 31/32, ya que hay un solo caso en el que puede reprobar, a saber: cuando las cinco se hayan contestado mal.

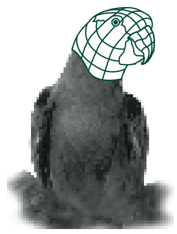
Variantes

Puede proponer a los alumnos los siguientes problemas:

1. Si un alumno no estudió y le dan a escoger entre resolver un examen que consta de cinco reactivos, cada uno con dos opciones, o resolver otro examen que consta de dos reactivos, cada uno con cinco opciones, ¿qué examen le conviene resolver, si suponemos que lo hará al azar? Fundamenten su respuesta.
2. La compañía *Chocolates baratos* tiene la siguiente promoción:
   Una de cada cuatro envolturas de chocolate tiene grabada en su interior una estrella: si juntas tres envolturas con estrella, puedes canjearlas por una pluma. ¿Cuál es el menor número de chocolates que hay que comprar para tener cierta seguridad de reunir tres estrellas?

El pantógrafo

Tema 12: Dibujo a escala y homotecias

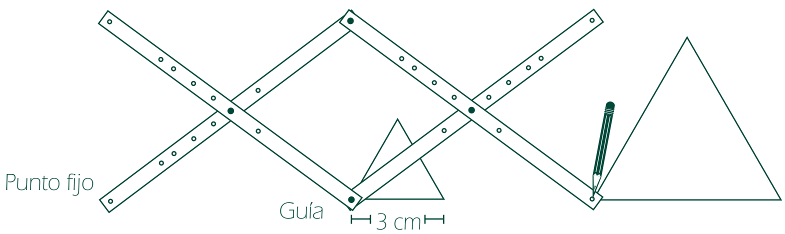


Propósito Desarrollar la imaginación espacial al realizar trazos a partir de homotecias y determinar algunas propiedades de las mismas, por ejemplo: paralelismo, congruencia de ángulos, etcétera.

Contenidos Estudio informal de las homotecias. Imagen bajo una homotecia de un triángulo, un cuadrilátero o un polígono.

Material Pantógrafo. Se anexa un instructivo para construir esta herramienta. Véase anexo C.*

1 Explique brevemente a los alumnos cómo utilizar el pantógrafo. Después plantee la siguiente situación, que realizarán en parejas:

> Tracen un triángulo equilátero de 3 cm por lado.
> Con el pantógrafo, armado a escala 2 a 1, tracen un segundo triángulo.
>
> 
>
>
> a) ¿Cómo es el triángulo resultante con respecto al triángulo original?
> b) ¿Cómo son entre sí los lados correspondientes de estos triángulos? ¿Cómo son entre sí los ángulos correspondientes de los triángulos? Verifiquen su respuesta.
> c) Considerando los vértices correspondientes de los triángulos, ¿están alineados respecto al punto fijo del pantógrafo?
> d) ¿Cómo son las razones de las distancias entre el punto fijo del pantógrafo y los vértices correspondientes?

Indique a los alumnos que tengan cuidado al momento de realizar el trazo, de esta manera la medida de los lados del triángulo resultante será el doble de la medida original.

Es posible que algunos alumnos observen a simple vista la semejanza de las figuras. En este caso invíteles a que den argumentos relacionados con las propiedades de la semejanza, a partir de la comparación de las razones de los lados correspondientes. Esta situación puede ser propicia para recordar a los alumnos las propiedades de la semejanza. Por otra parte, para que las razones de los lados correspondientes sean iguales, se requiere medir con cierta precisión, por lo que es posible que los cocientes sean distintos a 1/2 o 2; en este caso usted puede generar una discusión en torno a la medición, de manera que los alumnos noten que la medición directa siempre es aproximada y, en consecuencia, es necesario realizar varias mediciones para obtener el promedio y así lograr una aproximación más exacta.

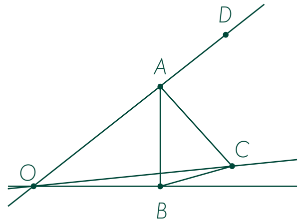
Para responder las preguntas del inciso *b)* los alumnos utilizarán diferentes estrategias. Algunos, por ejemplo, usarán las escuadras para determinar el paralelismo de los lados correspondientes, algunos determinarán la congruencia de los ángulos utilizando el transportador, en tanto que otros podrán aplicar sus conocimientos de la semejanza. Para responder la pregunta *d)* también se requiere precisión en la medición, por lo que usted debe estar atento y observar cómo se realiza. Las preguntas *c)* y *d)* pueden ser el punto de partida para que dé a conocer a los alumnos las propiedades básicas de la homotecia.

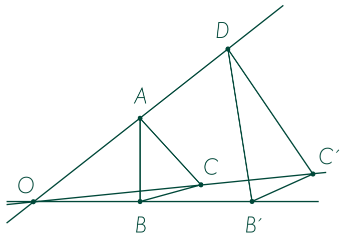
---

*El pantógrafo que se utilice *no debe tener anotadas las escalas*. Este instrumento fue inventado alrededor de 1603 por el astrónomo alemán Cristolph Scheiner.

2 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos y plantee la siguiente situación:

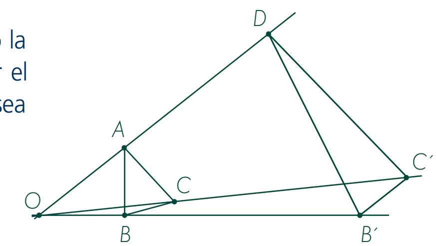
> Dibujen un triángulo isósceles (con medidas, respectivamente, de 3, 4 y 4 cm en sus lados). Marquen un punto O fuera del triángulo y tracen rectas, que unan el punto exterior con cada uno de los vértices del triángulo. Marquen un punto *D*, en una de las rectas, como se indica a continuación.
>
> El punto *D*, marcado en la línea, es uno de los vértices de un triángulo que es homotético al triángulo *ABC*:
>
> a) Utilicen sus instrumentos de geometría y tracen la figura geométrica que es homotética al triángulo *ABC*.
>
> b) ¿Cuál es la razón de homotecia?

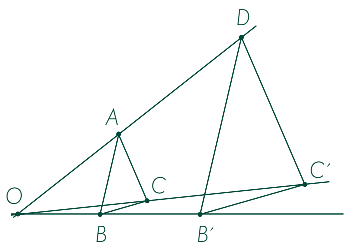




Construir un triángulo homotético al triángulo dado, de acuerdo con las indicaciones señaladas, plantea algunas dificultades: algunos alumnos, por ejemplo, podrían considerar que basta con medir la distancia que va del punto *A* al punto *D*, y luego llevar dicha distancia sobre cada una de las otras dos rectas tomando como punto de partida los vértices *B* y *C*. En este caso los alumnos se darán cuenta de que la figura que resulta no es semejante, ya sea porque se observe a *simple vista*, o bien porque las razones de los lados correspondientes al ser comparados, no serán iguales.

Otros alumnos considerarán que la figura homotética se consigue llevando la distancia *OD* a las otras dos rectas a partir de los vértices *B* y *C*; al trazar el triángulo los alumnos se darán cuenta de que la figura no es semejante, ya sea a *simple vista* o mediante la comparación de las razones.





Otros alumnos tomarán en cuenta los resultados obtenidos en la actividad 1, es decir, considerarán que en una figura homotética los lados son paralelos a los correspondientes de la figura original. Entonces, a partir del punto *D*, trazarán paralelas a los lados *AB* y *AC*, de manera que obtendrán los puntos *B´* y *C´* que se encuentran en la intersección de las otras dos rectas.

La razón de homotecia se puede obtener de dos formas:

- Estableciendo la razón de los lados homólogos de los triángulos, esto es: $\frac{DB'}{AB} = \frac{DC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$
- Estableciendo la razón entre la distancia del punto O al punto *A* y la distancia del punto O al punto *D*, es decir:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O'C'}{OC}$$

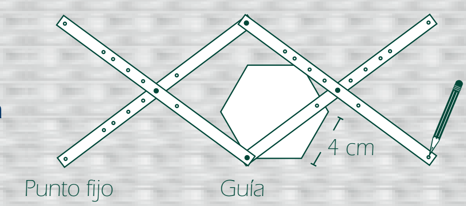
De cualquier manera es necesario considerar que, dado que el punto *D* se elige arbitrariamente, los alumnos obtendrán razones distintas. Por otra parte, es necesario que recuerde a los alumnos hacer una medición lo más exacta posible, de manera que en una misma figura las razones sean iguales.

Variante

Puede sugerir la actividad que se plantea a continuación:

Utilizando el pantógrafo, armado a escala 3 a 1, obtengan la figura homotética de un hexágono regular que mida 4 cm por lado. Después contesten la siguiente pregunta:

¿Cuál es la razón de homotecia?



Pitágoras en el geoplano

Tema 13: Semejanza y teorema de Pitágoras

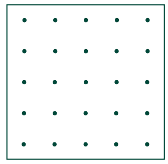
Propósito Utilizar las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, así como los teoremas de semejanza, de Pitágoras y la trigonometría para resolver numerosos problemas de cálculo geométrico.

Contenidos Aplicaciones de los teoremas de semejanza y de Pitágoras en la solución de problemas de cálculo geométrico.

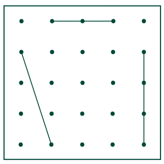
Material Calculadora, geoplano de 5 x 5 y ligas (por alumno).

1 Una vez que haya organizado en equipos de cuatro a los alumnos, propóngales la siguiente actividad:

> Encuentren en su geoplano todos los segmentos de diferentes longitudes que pueden formarse y calculen la longitud de cada uno redondeada a centésimos (tomen como unidad a la distancia horizontal o vertical entre dos clavos).



Se debe aclarar que los segmentos pueden estar en cualquier posición: horizontal, vertical o inclinada.



Se espera que los alumnos encuentren *todos* los segmentos y calculen sus longitudes. Dé el tiempo suficiente y, cuando lo considere conveniente, pida a los equipos:

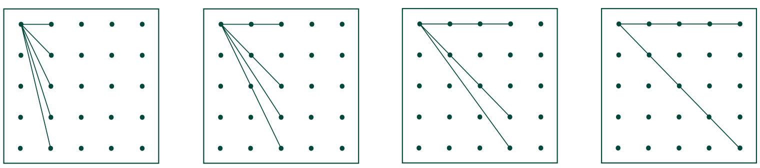
a) Que digan el número de segmentos de diferente longitud que encontraron.

b) Un representante del equipo que haya encontrado el mayor número de segmentos pasará a mostrarlos en su geoplano y anotará en el pizarrón las diferentes longitudes calculadas.

Los resultados se confrontarán con los encontrados por otros equipos y se discutirá hasta llegar a un acuerdo sobre el número de segmentos y sus respectivas longitudes calculadas correctamente.

En caso de que no se llegue a descubrir que son 14 segmentos, promueva que continúen con la discusión (mostrando, por ejemplo, si se afirma que son menos de 14, algún segmento que ningún equipo haya encontrado y si se dice que son más de 14, mostrando los segmentos con la misma longitud).

Una manera sistemática de hallar todos los segmentos pedidos es la siguiente:



Se podrá comprobar que cualquier otro segmento tiene la misma longitud que alguno de los 14 mostrados. Las longitudes, en orden ascendente y redondeadas a centésimos, son:

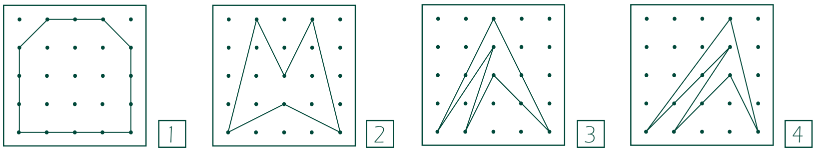
1, 1.41, 2, 2.24, 2.83, 3, 3.16, 3.6, 4, 4.12, 4.24, 4.47, 5 y 5.66.

La actividad permite practicar el cálculo de longitudes aplicando el teorema de Pitágoras, así como usar la calculadora para encontrar raíces cuadradas y redondear cantidades. Aproveche para reafirmar aquellos contenidos en los que los alumnos tengan deficiencias.

2 Con la misma organización y los materiales de la actividad 1, plantee lo siguiente:

Encuentren el hexágono de mayor perímetro posible en el geoplano de 5 x 5.

Los alumnos se darán cuenta de que pueden formar diferentes hexágonos en un geoplano de este tamaño:



Promueva una competencia para ver cuál equipo encuentra el hexágono de mayor perímetro. Para los hexágonos anteriores, los perímetros son:

Geoplano	Cálculo del perímetro (aproximado)	Resultado (aproximado)
1	1.41 + 2 + 1 + 1.41 + 3 + 4 + 3	15.82 *u*
2	4.12 + 2.24 + 2.24 + 4.12 + 2.24 + 2.24	17.2 *u*
3	4.47 + 4.47 + 2.83 + 2.24 + 3.16 + 3.61	20.78 *u*
4	5 + 4.12 + 2.24 + 2.83 + 3.61 + 4.24	22.04 *u*

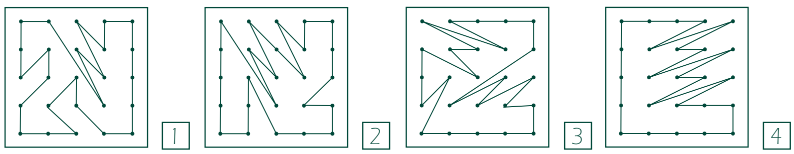
Con lo que se muestra que, de esos cuatro hexágonos, el que tiene el mayor perímetro es el número 4. Esto no significa que el hexágono 4 sea el de mayor perímetro que se puede formar, pues es probable que haya otros.

Esta actividad permitirá a los alumnos repasar el cálculo de perímetros, así como usar la calculadora para resolver operaciones, comparar números decimales, etcétera.

3 Nuevamente organizados en equipos de cuatro, proponga a los alumnos una extensión del problema anterior:

Encuentren el polígono de mayor perímetro posible que se puede formar en un geoplano de 5 x 5.

Es conveniente recordar a los estudiantes que la liga no debe cruzarse consigo misma. Al tratar de resolver el problema, los alumnos explorarán los diferentes polígonos que pueden formarse, por ejemplo:



Calculando el perímetro de los cuatro polígonos anteriores, tenemos:

Geoplano	Perímetro del polígono
1	32.97 *u*
2	34.62 *u*
3	38.84 *u*
4	38.90 *u*

El polígono que muestra el geoplano número 4 es el de mayor perímetro de los cuatro aquí mostrados, no obstante, es probable que los alumnos encuentren otros de mayor perímetro.

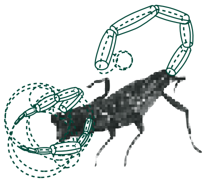
Al igual que la actividad anterior, ésta puede ser aprovechada para reafirmar lo que son los polígonos convexos y cóncavos, los ángulos convexos y cóncavos, así como para utilizar el teorema de Pitágoras en el cálculo de longitudes, usar la calculadora para resolver operaciones con decimales (básicamente raíz cuadrada y suma) y comparar números decimales.

VARIANTES

1. La actividad 2 puede plantearse con otro tipo de figuras: cuadriláteros, pentágonos, etcétera.
2. Para las actividades 2 y 3 puede pedir que calculen el área de los hexágonos o polígonos formados.

Patrones y ecuaciones

Tema 14: Ecuaciones cuadráticas completas



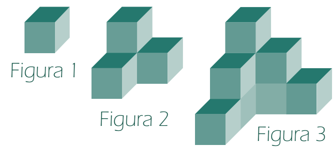
Propósito Obtener y resolver ecuaciones cuadráticas.

Contenidos Solución de ecuaciones cuadráticas de las formas: $ax^2 = 0$; $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$

Material Cubos, hojas que contengan la secuencia de cubos que se muestra en la actividad 1 y geoplano de 8 x 8.

1 Organice al grupo en equipos de tres o cuatro alumnos. A continuación propóngales que resuelvan el siguiente problema:

Observen la sucesión numerada de dibujos que se muestra a continuación.



a) Construyan (con los cubos o mediante dibujos) las figuras 4 y 5 que siguen en la sucesión.
b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 100 de la sucesión?
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión?
d) Si se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número corresponde a esa figura en la sucesión?

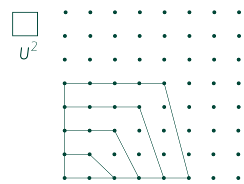
La pregunta *a)* tiene la finalidad de que los alumnos centren su atención en la manera como se construyó la sucesión, por lo que no tendrán dificultad para construir las figuras 4 y 5. Para las preguntas *b)* y *c)* tal vez sea necesario dar a los alumnos alguna orientación, por ejemplo, indicarles que elaboren una tabla como la que se muestra enseguida y pedir que en ella anoten el número de cubos que tienen las primeras figuras de la sucesión.

Número de la figura	1	2	3	4	5
Cubos que tiene la figura	1	4	9		

A partir del análisis de la tabla, algunos alumnos encontrarán que la sucesión se genera con la expresión n^2. El inciso *d)* es el caso inverso de la pregunta *b)*. Algunos alumnos podrán hacer uso de la estimación para encontrar que la figura 52 es la que tiene 2 704 cubos. Otros quizás se den cuenta de que la solución se obtiene al encontrar la raíz cuadrada de 2 704. Es conveniente que oriente a los alumnos para que observen que de una u otra forma están resolviendo la ecuación $n^2 = 2\,704$.

2 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos. Pídales que construyan en el geoplano la secuencia de trapecios que se observa a continuación y después plantee las siguientes preguntas:

a) Observen cómo se han construido los trapecios que se muestran en el geoplano. Construyan los dos trapecios que siguen en la sucesión.
b) Calculen el área de cada uno de los seis trapecios.
c) Si continúan con la construcción de los trapecios, ¿cuál será el área del trapecio que ocupe el lugar 100?
d) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el área de cualquier trapecio que esté en la sucesión?
e) Si se sabe que el área de uno de los trapecios es de 588 u^2, ¿qué número corresponde, en la sucesión, a ese trapecio?



A partir de los incisos *a)* y *b)*, los alumnos observarán la sucesión con la que se construyen los trapecios, y por otra parte encontrarán alguna estrategia para calcular su área. Los incisos *c)* y *d)* llevarán a los alumnos a la generalización, esto es, a partir del análisis de algunos casos tendrán que determinar un procedimiento algebraico. Así, es probable que ciertos alumnos descompongan el trapecio en dos figuras: un cuadrado, cuyo lado es la base menor del trapecio, y un triángulo, de altura b y de base una unidad (u), de manera que el área se puede calcular como: $A = b^2 + b/2$, donde b es la base menor del trapecio.

Posiblemente otros alumnos hallen una expresión equivalente si aplican la fórmula para calcular el área de un trapecio. Considerando que la base mayor es igual a la base menor más 1, y que la altura es igual a la base menor, la expresión quedaría:

$$A = \frac{(B + b)\,h}{2} \text{ sustituyendo } \frac{[(b + 1) + b]\,b}{2} = \frac{(2b + 1)\,b}{2} = \frac{2b^2 + b}{2}$$

El inciso *e)* es el caso inverso. La respuesta esencialmente tiene que ver con la solución de la ecuación: $b^2 + b/2 = 588$. Una estrategia que algunos alumnos pueden emplear es la estimación, es decir, propondrán un valor para b y, al sustituirlo en la expresión, lo ajustarán hasta obtener 588.

Posteriormente puede proponer algún otro procedimiento para resolver ecuaciones de ese tipo, por ejemplo, la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, o bien la factorización del trinomio.

3 Organice a los alumnos en equipos y plantee las siguientes preguntas.

a) Observen, a partir de la actividad 1, que en la figura 1 es posible ver tres caras del cubo, y que en la figura 2 se pueden ver nueve caras de los cubos que la forman. ¿Cuántas caras es posible ver en la figura 3? ¿Cuántas en la figura 4?
b) Si se continúa con la construcción de las figuras, ¿cuántas caras sería posible ver en la figura que ocupe el lugar 15?
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el total de caras será que es posible ver en cualquier figura que esté en la sucesión?
d) ¿Qué número corresponde en la sucesión a la figura en la que es posible ver 153 caras de los cubos que la forman?

Una manera que puede facilitar el conteo de las caras es que los alumnos construyan con cubos cada figura. Seguramente algunos alumnos, después de analizar los primeros términos de la sucesión de números que indican las caras que se ven, podrán anotar los siguientes términos, sin embargo será difícil que encuentren la expresión algebraica que genera la sucesión. Por esta razón es pertinente que los oriente, como se indica a continuación.

Señale que la expresión que se busca es una expresión de segundo grado, ya que la segunda diferencia de los términos de la sucesión es constante, como se muestra en la tabla siguiente:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Caras que se ven	3	9	17	27	39
Primera diferencia		9 – 3 = 6	17 – 9 = 8	27 – 17 = 10	39 – 27 = 12
Segunda diferencia			8 – 6 = 2	10 – 8 = 2	12 – 10 = 2

	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4	x = 5
Expresión que se obtiene al sustituir el valor de x	$a(1)^2 + b(1) + c =$ $a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c =$ $4a + 2b + c$	$a(3)^2 + b(3) + c =$ $9a + 3b + c$	$16a + 4b + c$	$25a + 5b + c$
Primera diferencia		3a + b	5a + b	7a + b	9a + b
Segunda diferencia			2a	2a	2a

A continuación demuestre que a partir de la expresión $ax^2 + bx + c$ van a generar una sucesión y a obtener las diferencias respectivas.

Combinando estas relaciones con los resultados obtenidos en la sucesión generada por el conteo de las caras que son visibles, pueden establecer cualquiera de los tres siguientes sistemas de ecuaciones:

I	II	III
$2a = 2$ $3a + b = 6$ $a + b + c = 3$	$2a = 2$ $5a + b = 8$ $4a + 2b + c = 9$	$2a = 2$ $7a + b = 10$ $9a + 3b + c = 17$

Al resolver el primer sistema de ecuaciones se obtiene: $2a = 2$, entonces $a = 1$.
$3a + b = 6$; $3(1) + b = 6$, entonces $b = 3$.
$a + b + c = 3$; $1 + 3 + c = 3$, entonces $c = -1$.

De manera que la ecuación buscada es: $x^2 + 3x - 1$.

Una vez que los alumnos conozcan la expresión algebraica que permite conocer el número de caras que se pueden ver, podrán abordar la última pregunta y, en consecuencia, aplicarán sus conocimientos para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = d$.

VARIANTE

Puede plantear a sus alumnos el problema que se expone a continuación:

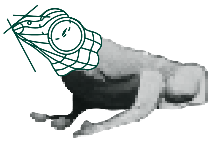
Observen la siguiente tabla, en ella se muestra una sucesión de números, así como el lugar que ocupa cada término.

Lugar que ocupa	1	2	3	4	. . .
Término de la sucesión	2	5	10	17	. . .

a) ¿Qué expresión algebraica permite obtener cualquier número que forma parte de la sucesión?
b) El número 730 forma parte de la sucesión, ¿qué lugar ocupa en dicha sucesión?

Sólidos de revolución

Tema 15: Sólidos



Propósito	Desarrollar la imaginación espacial mediante la generación de sólidos de revolución y el cálculo de volúmenes.
Contenidos	Cilindros y conos de revolución.
Material	Por equipos: un rectángulo de 12 x 6 cm (pueden ser otras medidas), un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 10 cm, y un triángulo rectángulo cuyos lados midan 9, 12 y 15 cm respectivamente.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro alumnos. Pídales que tomen el rectángulo y que lo giren como se muestra en las siguientes figuras. A continuación plantee el siguiente problema:

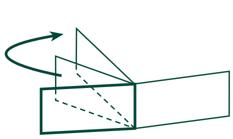


Figura 1

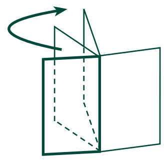


Figura 2

a) Al girar el rectángulo como se indica en la figura 1, ¿qué cuerpo se forma?
b) Al girar el rectángulo como se indica en la figura 2, ¿qué cuerpo se forma?
c) ¿Cuál de los dos cuerpos tiene mayor volumen? Anoten en su cuaderno lo que hayan considerado y después, para verificar su respuesta, calculen el volumen de cada uno de los cuerpos.

Para determinar que, al girar el rectángulo como se ha indicado, se genera un cilindro recto, los alumnos pondrán en juego su imaginación espacial.

El inciso *c)* seguramente deparará a los alumnos alguna sorpresa, pues muchos creerán que el cilindro más alto es el que tiene mayor volumen, y esto no es cierto.

El cálculo del volumen requiere de la determinación del radio del círculo y de la altura de cada cilindro: esta situación será una de las dificultades que los alumnos enfrenten. En un principio algunos considerarán que no se tiene suficiente información para calcular el volumen, pero seguramente se percatarán de que en el primer caso el largo del rectángulo corresponde al radio del círculo y el ancho a la altura del cilindro.

2 Para realizar esta actividad solicite a los alumnos que tomen el triángulo rectángulo isósceles y que lo giren como se indica a continuación:

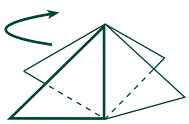


Figura 1

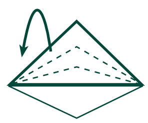


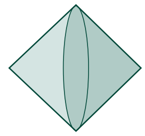
Figura 2

a) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 1, ¿qué cuerpo se forma?
b) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 2, ¿qué cuerpo se forma?
c) ¿Cuál de los dos cuerpos tiene mayor volumen? Anoten en su cuaderno lo que hayan considerado y después, para verificar su respuesta, calculen el volumen de cada uno de los cuerpos.

Como se puede observar, en el primer caso se genera un cono recto en el que la medida del cateto del triángulo corresponde a la altura del cono y también al radio de la base del mismo. Seguramente, a partir de la experiencia de la primera actividad, los alumnos observarán este hecho. Si algunos tuvieran dificultad para observarlo, puede proponer que tomen una escuadra de 45° y pedirles que la giren como se indicó, de esta manera podrán visualizar el cuerpo que se genera.

Para determinar el volumen del cono se requiere conocer la altura y el radio de la base, por lo que los alumnos no tendrán problemas para calcular el volumen.

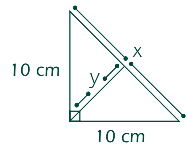
En el segundo caso, para reconocer el cuerpo que se genera al girar el triángulo, se requiere de una observación más cuidadosa. Quizás los alumnos tendrán dificultad para observar que se trata de dos conos que tienen una base común, como se muestra en la figura:



Si los alumnos no pueden reconocer el cuerpo, puede sugerirles, al igual que en el primer caso, que utilicen la escuadra de 45° y que la giren como se ha indicado.

El cálculo del volumen es una tarea que también puede complicárseles, ya que en este caso se requiere determinar, mediante algún procedimiento, el radio de la base común de los dos conos y la altura de los mismos. Si los alumnos no encuentran alguna estrategia, puede plantear algunas preguntas que los orienten. Por ejemplo: ¿Qué datos son los que requieren para calcular el volumen de los dos conos? ¿A qué medidas del triángulo corresponden la altura y el radio de la base de los conos? ¿Pueden calcular el área del triángulo? ¿Qué datos requieren para calcular el área del triángulo si consideran como base la hipotenusa del triángulo? ¿Pueden calcular la medida de la hipotenusa?, etcétera.

De esta manera algunos alumnos se darán cuenta de que como el triángulo es rectángulo, pueden calcular su área, pues conocen la base y la altura del mismo (medida del cateto), y que de igual manera pueden calcular la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.



Este conocimiento les permitirá calcular el radio de la base del cono (que corresponde a la altura del triángulo, si se considera como base la hipotenusa) de la siguiente manera:

$$A = \frac{(10 \cdot 10)}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

por lo que: $x = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.14$ cm (considerando hasta centésimos).

$$50 \text{ cm}^2 = \frac{(x \cdot y)}{2}$$

Al despejar y se obtiene: $y = \dfrac{2\,(50 \text{ cm}^2)}{x}$ (donde y representa el radio de la base de los dos conos).

Otros alumnos se darán cuenta de que y se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

$$y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

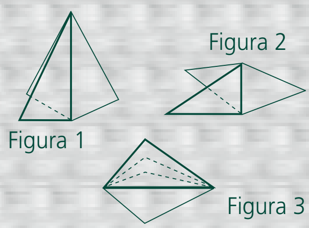
Otros observarán que la altura de cada cono tiene la mitad de la longitud de x, que corresponde al valor de la hipotenusa del triángulo. Esto se puede ver si se dobla el triángulo sobre la longitud y.

Una vez que los alumnos hayan respondido las preguntas de los dos primeros incisos, el inciso *c)* será respondido sin mayor problema. Sin embargo será conveniente que los alumnos confronten su respuesta con la estimación que anotaron al principio en sus cuadernos.

VARIANTE

Puede sugerir la siguiente actividad:

Consideren un triángulo rectángulo con medidas 9, 12 y 15 cm, y gírenlo como se indica. Contesten las preguntas que aparecen debajo de las figuras.



a) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 1, ¿qué cuerpo se forma?

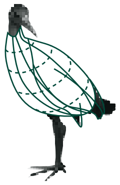
b) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 2, ¿qué cuerpo se forma?

c) Al girar el triángulo rectángulo como se indica en la figura 3, ¿qué cuerpo se forma?

d) ¿Cuál de los tres cuerpos tiene mayor volumen? Anoten en su cuaderno lo que consideren y después, para verificar su respuesta, calculen el volumen de cada uno de los cuerpos.

Rampas para patinetas

Tema 16: Trigonometría: razones trigonométricas de un ángulo agudo (cálculo y primeras aplicaciones)



Propósito	Utilizar la trigonometría para resolver problemas de cálculo geométrico.
Contenidos	Primeros ejemplos para motivar el estudio de la trigonometría. Tangente de un ángulo agudo.
Material	Juego de geometría y calculadora.

1 Organizados en equipos de cuatro o cinco alumnos, plantee el siguiente problema:

Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas:

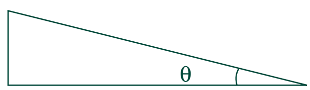
De acuerdo con las medidas especificadas, elijan aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

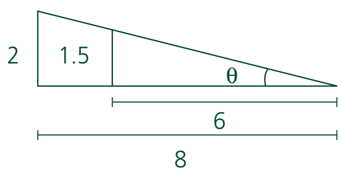
Dé tiempo suficiente a los alumnos para que elijan la rampa que consideren tiene mayor ángulo de inclinación en cada caso. Una vez que los equipos tengan las respuestas, pida que algún integrante pase al frente a darlas a conocer y que, además, explique el por qué eligieron tal o cual rampa.

Los equipos podrán hacer uso de diversas estrategias para resolver el problema. Una de ellas podrá ser el trazar los triángulos que representan las rampas a una escala adecuada, por ejemplo: 1 cm: 1 m.

Con lo que podrán notar (probablemente) la inclinación de cada rampa. Es posible que se les ocurra medir el ángulo de inclinación θ.



Otros equipos podrán notar que para los casos 1 y 2 es suficiente con analizar las medidas. Si a es igual en ambas rampas, la de mayor ángulo de inclinación es aquella en la que b es menor; si b es igual, entonces la de mayor ángulo de inclinación es aquella en la que el valor de a es mayor.



Para el caso 3 se espera que los alumnos hagan uso de lo visto en el tema 13 (semejanza) y noten que la inclinación de las rampas es la misma.

El caso 4 es el que ofrece mayor dificultad, incluso si se hace el trazo a escala. Posiblemente los alumnos lleguen por azar a la respuesta correcta, sin embargo, el hecho de que tengan que validar sus respuestas hará que busquen argumentos lógicos.

Lo ideal sería que a ciertos equipos se les ocurriera establecer la relación o razón que existe entre la altura de la rampa y la distancia horizontal recorrida:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{altura de la rampa}}{\text{distancia horizontal}}$$

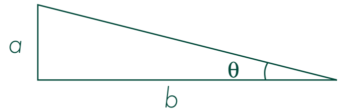
Y comparar estos cocientes para saber cuál rampa tiene mayor ángulo de inclinación. Por ejemplo, para el caso 4:

Rampa 1	Rampa 2
$\frac{1.6}{6.5} = 0.2461$	$\frac{1.7}{7} = 0.2428$

Con lo que se aprecia que la rampa 1 tiene mayor ángulo de inclinación.

Si no se les ocurriese, es conveniente que proponga este procedimiento y aproveche este momento para mencionar a los alumnos que esa razón se llama tangente del ángulo θ.

Tangente del ángulo $\theta = \frac{a}{b}$.



Y que ésta es una medida que permite calcular el ángulo de inclinación de la rampa. Dicho ángulo de inclinación puede calcularse, mediante la división a/b , haciendo uso de la calculadora o de las tablas para encontrar la medida del ángulo θ. Se sugiere que en este momento defina a sus alumnos la tangente de un ángulo agudo como la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente, y que les muestre cómo calcularla, así como ilustrar el caso de cómo calcular el ángulo dada la tangente.

El caso 3 y los conocimientos que sobre semejanza tienen los alumnos, pueden ser utilizados para que exploren el hecho de que el valor de la tangente es el mismo para ángulos con la misma medida, aun cuando pertenezcan a triángulos rectángulos con catetos de diferente medida (la razón se conserva).

2 Nuevamente organizados en equipos, plantee el siguiente problema:

Se quiere construir una rampa cuya altura sea de 2 m y que forme un ángulo de 40° con el piso. ¿Cuál será la distancia horizontal que tendrá la base de la rampa?

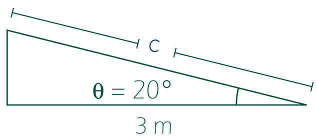
Esta actividad es una extensión de la anterior y supone que el alumno:

- Sabe que la tangente del ángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
- Sabe calcular la tangente de un ángulo dado haciendo uso de la calculadora o de las tablas.

Se trabajará bajo la misma dinámica que en el problema anterior: dé tiempo suficiente para que los equipos busquen la respuesta correcta, socialicen sus estrategias y validen los resultados en forma grupal.

3 Plantee a los equipos el siguiente problema:

Calculen la longitud c de la siguiente rampa:



Básicamente el tratamiento es análogo al de los problemas anteriores, pero en este caso los alumnos tendrán que hacer uso (además de la función tangente) del teorema de Pitágoras.

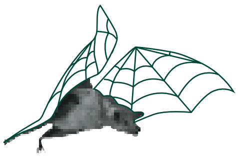
Este último problema puede ser aprovechado para introducir la función coseno.

VARIANTE

Se sugiere trabajar el problema 2 de la página 268 del *Libro para el maestro*, con el fin de complementar el uso de la tangente cuando se requiera determinar la pendiente o el ángulo de inclinación.

Para medir polígonos regulares

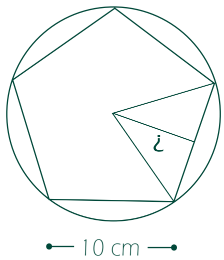
Tema 17: Problemas de trigonometría



Propósitos	Utilizar las relaciones trigonométricas para resolver problemas de cálculo geométrico. Estudio de los polígonos regulares.
Contenidos	Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones. Estudio de los polígonos regulares.
Material	Juego de geometría y calculadora.

1 Proponga al grupo resolver el siguiente problema en equipos de cuatro o cinco alumnos:

a) Calculen el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado.



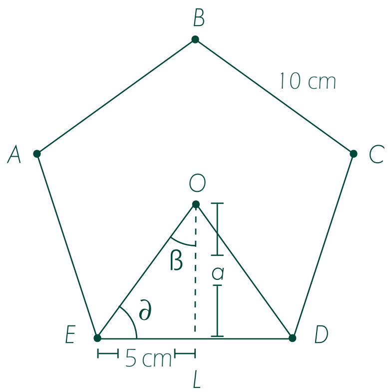
b) Utilizando funciones trigonométricas, calculen el perímetro y el área de un heptágono, un octágono, un eneágono, etcétera, cuyos lados midan 20 cm respectivamente.

El cálculo del perímetro del pentágono no representará dificultad para los alumnos, mas no así el cálculo del área.

Para calcular el área, algunos equipos pueden construir el polígono considerando las medidas reales. Una vez hecho lo anterior, obtendrán las medidas necesarias para efectuar los cálculos.

Otros equipos pueden construir a escala el pentágono y después, aplicando sus conocimientos relacionados con la semejanza, obtendrán el área.

A partir de las soluciones de los alumnos, puede orientarlos para resolver el mismo problema utilizando funciones trigonométricas, en particular la función tangente. Así, la apotema del pentágono se puede expresar en función de uno de los ángulos del triángulo rectángulo *OEL*, como se muestra enseguida:



$\tan \partial = \dfrac{a}{5}$, entonces:

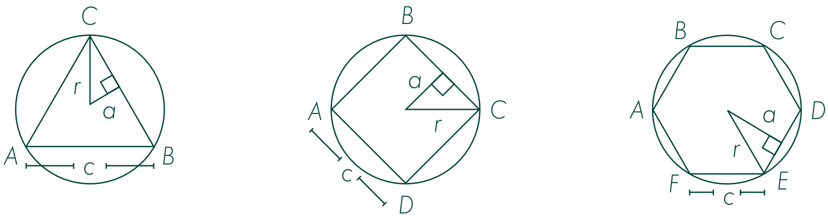
$a = 5\,(\tan \partial)$

Por otra parte, para calcular el valor de la tangente del ángulo ∂, que mide 54, pueden utilizar la calculadora o las tablas. Una vez que se obtiene el valor de la apotema, el área se calcula utilizando la fórmula correspondiente.

Para responder el inciso *b)*, los alumnos tendrán que aplicar sus conocimientos de geometría para determinar el ángulo central o el ángulo interno de los polígonos. Si los alumnos tienen dificultades, puede hacer un breve recordatorio o dar algunas orientaciones para salvar este obstáculo. Por otra parte, quizás sea necesario que los oriente en el uso de las funciones trigonométricas para encontrar el área de cada polígono.

2 Para resolver los siguientes problemas, organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos.

Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°, en función del radio (r) expresen: el valor de un lado (c), la apotema (a) y el área (S) de los polígonos regulares siguientes:



Al igual que en los problemas anteriores, los alumnos deben determinar el valor del ángulo central o interior de cada uno de los polígonos.

Es conveniente que observe el trabajo de los alumnos, de manera que, en caso necesario, haga las orientaciones que considere convenientes.

En el caso del triángulo, si se considera el ángulo de 30°, las siguientes son expresiones que los alumnos podrán encontrar:

$$c = 2r\,(cos\ 30);\ a = r\,(sen\ 30);\ S = 3r^2\,(cos\ 30)(sen\ 30).$$

Con la finalidad de que los alumnos observen que las expresiones encontradas son correctas, puede asignar un valor al radio y pedir que determinen la medida de un lado, la apotema y el área utilizando las expresiones encontradas. Después pida que calculen dichas medidas con otro procedimiento.

VARIANTES

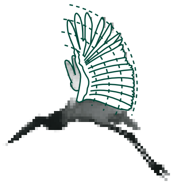
1. En la tabla que se muestra a continuación están dadas las medidas de un lado, así como la apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de tres lados (triángulo equilátero) y seis lados (hexágono regular) inscritos en un círculo que tiene 10 cm de radio. Completen la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados que también están inscritos en un círculo que mide 10 cm de radio. ¿Qué relaciones descubren después de que han completado la tabla? Coméntenlo con sus compañeros y escriban sus conclusiones.

Número de lados	Lado	Apotema	Perímetro	Área
3	17.32	5.00	51.96	129.90
6	10.00	8.59	60	258.58
12				
24				
48				

2. Un polígono regular de 12 lados tiene de área 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto miden los radios de los círculos inscrito y circunscrito? ¿Y si el polígono regular tuviera 8, 9, 10, 18... lados?

Calculando áreas

Tema 18: Fracciones algebraicas

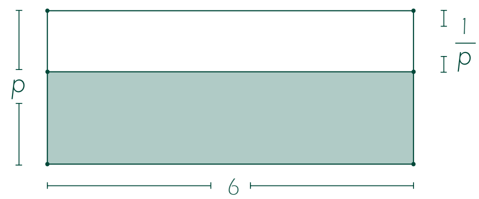


Propósitos Practicar procedimientos algebraicos. Usar el lenguaje algebraico al operar con literales.

Contenidos Revisión y expresión simbólica de operaciones con fracciones algebraicas (casos sencillos: multiplicación, división y suma).

1 Organice a los alumnos en parejas y plantee el siguiente problema:

Observen la siguiente figura:



Calculen el área de la parte sombreada, considerando que el valor de p es mayor a 1.

Para determinar el área de la parte sombreada, los alumnos pueden proceder de dos formas.

Algunos encontrarán primero el área del rectángulo completo ($6p$), después el área del rectángulo blanco, y finalmente las restarán para obtener el área sombreada.

Otros alumnos primero obtendrán la medida del ancho del rectángulo sombreado y después calcularán su área.

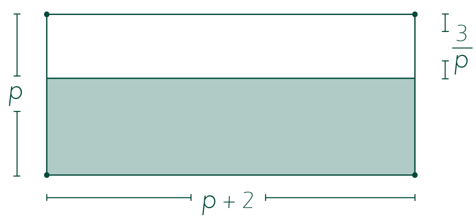
En cualquiera de los dos procedimientos es posible que algunos alumnos se equivoquen al efectuar las operaciones. Si es así, usted y los propios alumnos pueden dar algunas ideas para corregir los errores.

El área de la parte sombreada es igual a:

$$\left(\frac{(6p^2 - 6)}{p}\right)$$

2 Plantee a los alumnos el siguiente problema. Pídales que lo resuelvan en parejas y advierta que deben tener cuidado al realizar las operaciones.

Calculen el área de la parte sombreada.



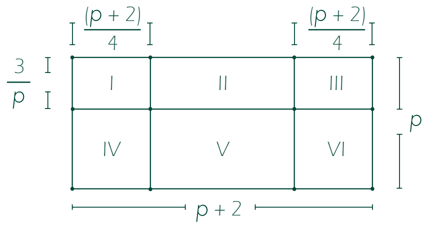
Al igual que en la actividad anterior los alumnos pueden seguir dos procedimientos para encontrar el área de la parte sombreada. En cada caso pueden cometer errores que será necesario analizar con ayuda de usted.

Cualquiera que sea el procedimiento que utilicen, encontrarán que el área de la parte sombreada es igual a:

$$p^2 + 2p - \frac{6}{p} - 3$$

3 Organice al grupo en parejas y proponga el siguiente problema:

> Calculen el área de los rectángulos I, II, III, IV, V y VI. Comprueben que la suma corresponde al área total del rectángulo.



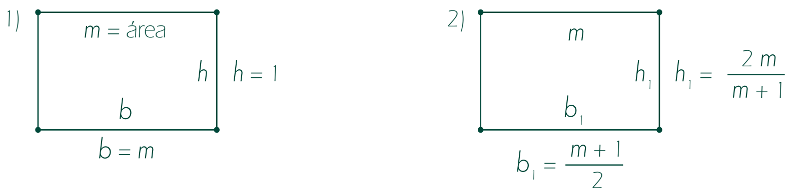
El problema es similar a los dos anteriores, sin embargo ahora los alumnos tendrán que efectuar mucho más operaciones y esto aumenta la probabilidad de que se equivoquen.

Una gran ventaja de este problema es que los alumnos por sí solos pueden controlar el resultado, puesto que la suma de las áreas parciales debe coincidir con el resultado de multiplicar $p\,(p + 2)$, que es muy fácil de obtener.

Una tarea importante de usted en esta actividad es animar a los alumnos para que no desistan de efectuar los cálculos.

4 Una vez que los alumnos se encuentren organizados en equipos, proponga la siguiente situación:

> A continuación se ilustra otra manera de calcular aproximaciones de la raíz cuadrada de un número *m*, utilizando el método babilónico. Escriban las dos siguientes aproximaciones. Tomen en cuenta que para escribir la siguiente aproximación deben considerar las expresiones del segundo rectángulo.



Si lo considera conveniente, explique a los alumnos cómo se procedió para determinar la segunda aproximación, esto es, dado que el área del rectángulo se calcula con la expresión $m = bh$, en el segundo rectángulo la base es el promedio de la base y la altura del primer rectángulo, es decir: $b = (m + 1) / 2$.

Al sustituir este valor en la expresión $m = bh$, resulta $m = (m + 1) / 2(h)$, y al despejar h, se obtiene el valor correspondiente en el segundo rectángulo.

Para obtener las siguientes dos aproximaciones, los alumnos tendrán que operar con fracciones algebraicas. Es necesario que observe el trabajo de los alumnos para que detecte las dificultades y errores que cometan.

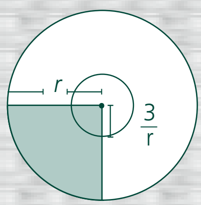
Una vez que los alumnos hayan obtenido las expresiones algebraicas que se requieren, es conveniente que tome en cuenta casos particulares para verificar que las expresiones obtenidas permiten calcular la raíz cuadrada correspondiente.

La calculadora es un buen auxiliar para verificar las aproximaciones que se hagan.

Variante

Puede proponer a los alumnos la siguiente actividad:

Consideren que *r* es una medida mayor o igual a 2. Calculen el área de la parte sombreada.



Anexo A

A B C D E F

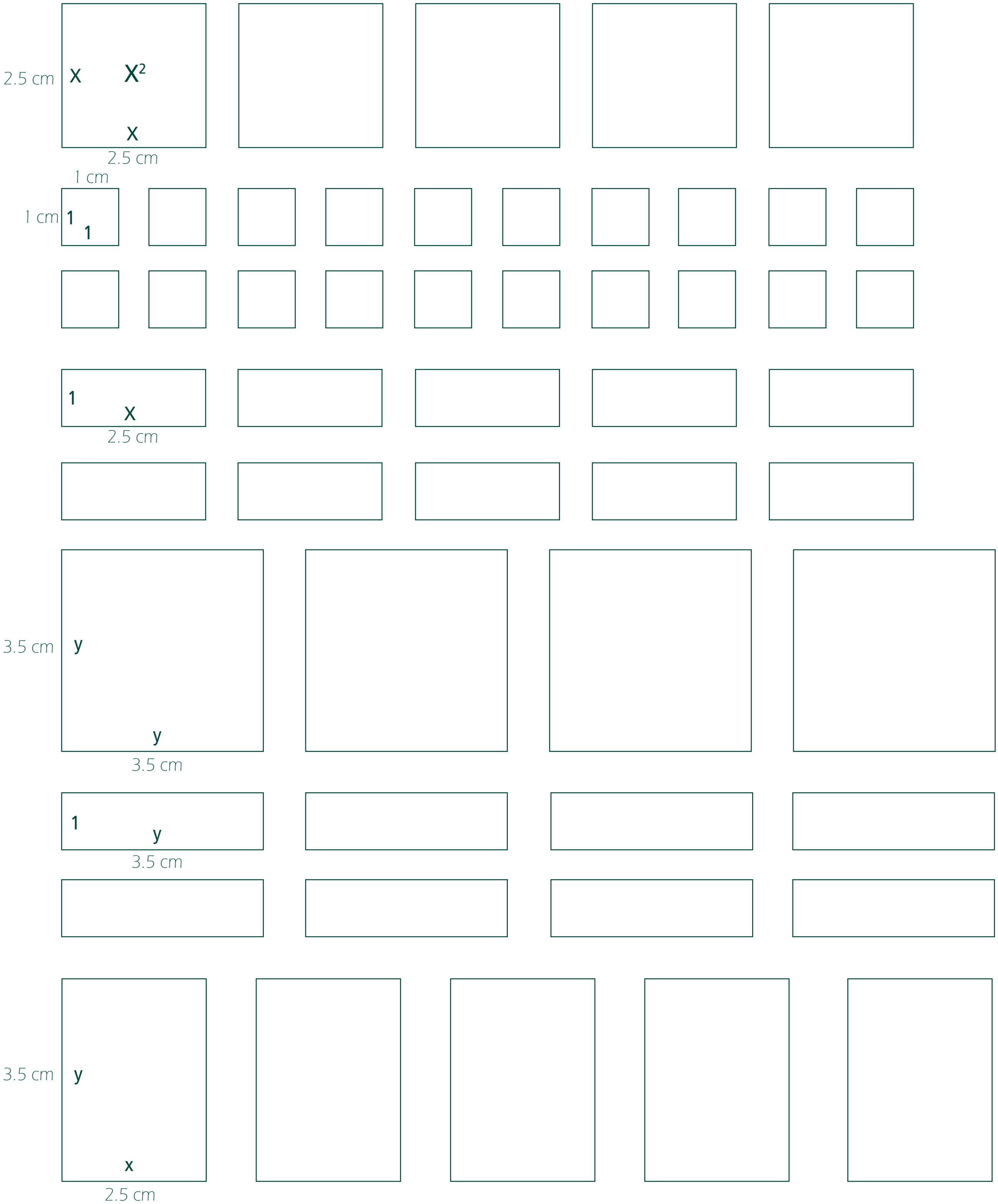
G H I J K L

M N Ñ O P

Q R S T U

V W X Y Z

Anexo B


2.5 cm
X
X²
X
2.5 cm
1 cm
1 cm
1
1
1
X
2.5 cm
3.5 cm
y
y
3.5 cm
1
y
3.5 cm
3.5 cm
y
x
2.5 cm

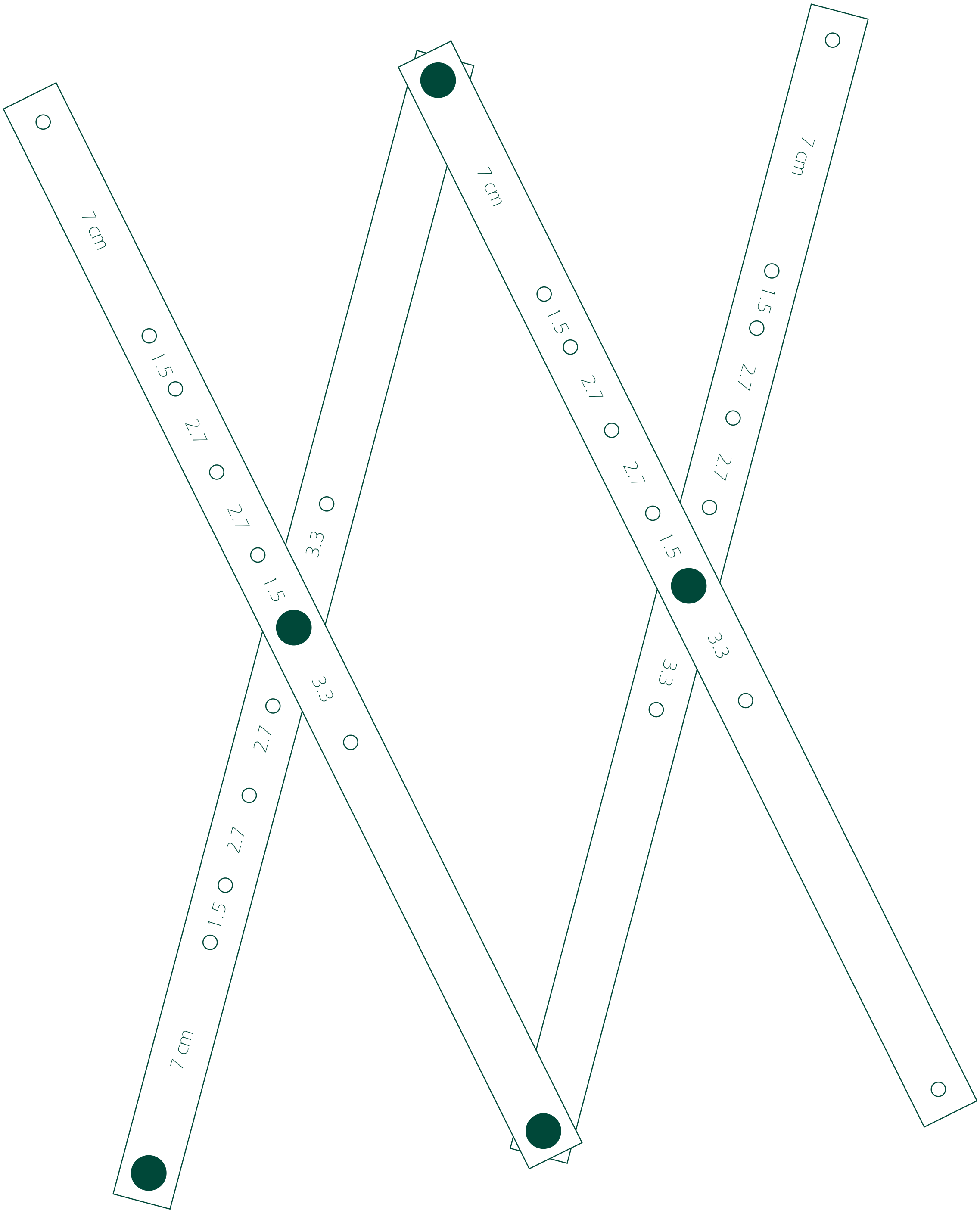
Anexo C

$a^2 - 6a + 9$	$b^2 - 4b + 4$	$4b^2 - 4b + 1$	$4a^2 + 4a + 1$	$(2a + 1)^2$	$4b^2 - 4b + 1$	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + 1)^2$	$(b - 2)^2$	$(b - 2)^2$	$(a + b)^2$	$a^2 - 6a + 9$	$(2a + 1)^2$	$(a - b)^2$
$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$(2a + 1)^2$	$(a - 3)^2$	$a^2 - 6a + 9$	$4a^2 + 4a + 1$	$a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 + 2a + 1$	$a^2 + 2a + 1$	$b^2 - 4b + 4$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a - 3)^2$	$(2a + 1)^2$	$(2b - 1)^2$
$(b - 2)^2$	$4b^2 - 4b + 1$	$a^2 - 6a + 9$	$a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2$	$4b^2 - 4b + 1$
$(a + 1)^2$	$(a + 1)^2$	$(b - 2)^2$	$(a + b)^2$	$(a + b)^2$	$a^2 - 6a + 9$	$(2b - 1)^2$
$a^2 + 2a + 1$	$(2a + 1)^2$	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$(2b - 1)^2$	$4b^2 - 4b + 1$	$(a - b)^2$
$(a + 1)^2$	$a^2 + 2a + 1$	$b^2 - 4b + 4$	$b^2 - 4b + 4$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a - 3)^2$	$4a^2 + 4a + 1$

Anexo D

El pantógrafo se puede construir con cuatro tablitas de madera que midan 19 cm de largo y 1 cm de ancho, y que se articulen como se muestra en el dibujo.

Cada tablita tiene seis agujeros, colocados a la distancia que se indica.



Bibliografía consultada

Alarcón, J. y H. Barrón, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Guía de estudio,* México, SEP, 1995.

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero, *Libro para el maestro. Educación secundaria. Matemáticas,* México, SEP, 1995.

Alvarenga, B. y A. Máximo, *Física general*, México, Harla, 1983.

Ball, Bárbara y Derek Ball, *Task maths 2*, Ontario, Canadá, Nelson, 1991.

Ball, Bárbara y Derek Ball, *Task maths 3*, Ontario, Canadá, Nelson, 1993.

Ball, Bárbara y Derek Ball, *Task maths 4*, Ontario, Canadá, Nelson, 1994.

Block, D., M. Schulmaister, H. Balbuena, M. Dávila, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte*, México, SEP, 1995.

Bolt, Brian, *Más actividades matemáticas*, España, Labor, 1988.

Corbalán, F., *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Madrid, Síntesis, 1994.

Corbalán, F., *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Barcelona, Graó, 1995.

Ghyka, M., *The geometry of art and life*, Nueva York, Dover, 1977.

Grupo Azarquiel, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Madrid, Síntesis, 1993.

H.S.M. Coxeter I., *Fundamentos de geometría*, México, Limusa-Wiley, 1971.

Flores, A., *La feria de Pitágoras,* en *Educación matemática,* vol. 4, núm. 1, pp. 66-83, México, Iberoamérica, 1992.

NCTM, *Sugerencias para resolver problemas*, México, Trillas, 1990.

Palacios, A. R. y E.H. Giordano, *Geometría de papel. El arte del bien plegar,* Río de la Plata, Magisterio Río de la Plata, 1996.

Shell Centre Matematical Education, *Problems with Patterns and Number A O Level Module. Joint Matriculation Board*, Manchester, University of Nottingham, 1984.

Wigley, Alan, D. Rooke, M. Har, A. Bell (Shell Centre Matematical Education), *Algebra. Ideas and Material for years 2-3 in the Secundary School*, Manchester, University of Nottingham.

El *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*
se imprimió por encargo de la Comisión Nacional
de Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de
con domicilio en
el mes de de 2004.
El tiraje fue de
más sobrantes para reposición.