CINEMATICA

En está sección introduciremos las nociones necesarias para describir el movimiento de *partículas puntuales.* Un objeto es *puntual* si las dimensiones físicas de él son pequeñas comparadas con las distancias características de su movimiento, o son pequeñas comparadas con la distancia al observador. Por ejemplo si lanzamos una silla por el aire, y la estamos observando de cerca veremos sus volteretas y evoluciones que hacen parecer su movimiento muy complicado. Sin embargo, si observamos la silla desde suficiente distancia parecerá un punto y su movimiento será muy simple de describir.

Con el objeto de describir el movimiento de una partícula en el espacio basta especificar su posición en cada instante de tiempo. Llamaremos *vector posición* de la partícula en el instante t al vector que va desde un origen (arbitrario pero fijo) hasta la posición de la partícula en el instante t. Este vector, que usualmente denotaremos por $\vec{r}(t)$ es una función del tiempo. A la curva que describe la posición de la partícula a medida que el tiempo transcurre la llamaremos la *trayectoria de la partícula.* Es el lugar geométrico descrito por el extremo del vector $\vec{r}(t)$. En la figura 1, la curva $\mathcal{C}$ es la trayectoria descrita por una partícula. Si la partícula se encuentra en el punto A de la trayectoria en el instante t_1, su vector posición es $\vec{r}(t_1)$. Si en un instante posterior, digamos t_2, la partícula se encuentra en el punto B de la trayectoria, su vector posición es $\vec{r}(t_2)$.

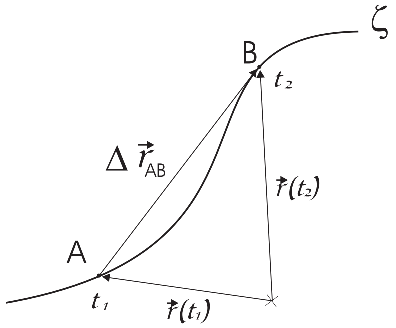


Fig. 1: Trayectoria, vector posición

Ciertamente la evolución de la partícula en el tiempo no queda determinada completamente por su trayectoria $\mathcal{C}$. La partícula en cuestión puede haber recorrido la trayectoria de muchas maneras. Si nos referimos a la figura 1, podría haber tardado en ir de A a B diez segundos, o quizás una hora, o podría haberse movido lentamente al pasar por A, o quizás muy rápido, y estos hechos no quedan para nada descritos con sólo especificar la *traza* (i.e., la trayectoria) que fue dejando la partícula en su movimiento. Por otra parte, la función $\vec{r}(t)$ sí contiene toda la información sobre el movimiento de ella. A partir de $\vec{r}(t)$ podemos conocer todos los detalles asociados al movimiento de la partícula (e.g., que distancia recorrió en un intervalo de tiempo Δt, que tan rápido paso por A, cuánto tiempo tardó en ir de A a B, etc.). Por ejemplo, el *desplazamiento* efectuado por la partícula al ir de A a B está dado por

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \tag{1}$$

Como el *intervalo de tiempo* que tarda la partícula al ir desde la posición A a la posición B es $\Delta t_{AB} = t_2 - t_1$, es natural definir la *velocidad media* de la partícula entre A y B como el cuociente entre $\Delta\vec{r}_{AB}$ y Δt_{AB}, es decir

$$\vec{v}_{AB} \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2}$$

Nótese que la velocidad media, tal como la hemos definido, es un vector y su dirección es paralela a la del vector desplazamiento. En la vida cotidiana, sin embargo, casi nunca se usa la velocidad media, tal como la hemos definido en (2). En nuestro lenguaje común, al referirnos a una velocidad promedio siempre pensamos en el cuociente entre la distancia recorrida, a lo largo de la trayectoria, y el tiempo que tardamos en recorrer esa distancia. A este cuociente, que es un escalar y no un vector, lo llamaremos la *rapidez media*. Para ser más precisos, fijemos un punto sobre la trayectoria, digamos P (ver la figura 2). Ahora podemos medir la longitud del arco (medido sobre la trayectoria) desde el punto P y cualquier punto sobre la trayectoria. En particular llamaremos $s(t_1)$ a la longitud del arco PA, $s(t_2)$ la longitud del arco PB, y en general $s(t)$ la longitud del arco desde el punto P hasta la posición de la partícula en el instante t.

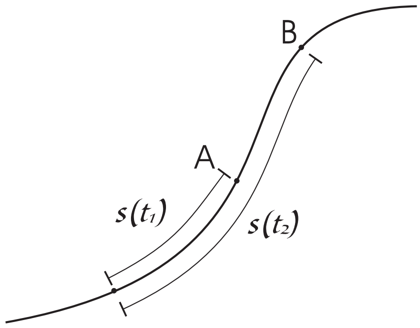


Fig. 2: Rapidez

Entonces, de acuerdo al lenguaje común, definiremos la *rapidez media* de la partícula entre los puntos A y B como el cuociente

$$v_{AB} \equiv \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{3}$$

En general, no hay ninguna relación entre la velocidad media y la rapidez media entre A y B, salvo que siempre la magnitud del vector $\vec{v}_{AB}$ es mayor que el módulo de la rapidez media v_{AB} (pues la longitud de un arco entre dos puntos es mayor que la longitud de la cuerda entre los mismos puntos). En general, el conocimiento de la velocidad media entre A y B no nos da una información detallada del movimiento de la partícula entre A y B como mencionamos anteriormente. Por ejemplo no sabemos que velocidad tenía la partícula al pasar por A o cual era su velocidad al pasar por B. Sin embargo, si el punto B es suficientemente cercano al punto A, v_{AB} nos da una muy buena idea de la rapidez con que la partícula pasa por A. Así, conviene definir la *rapidez instantánea* (o simplemente rapidez a secas) en el instante t (i.e., cuando la partícula pasa por A) a

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \right). \tag{4}$$

El lado derecho de (4) es justamente la derivada de s con repecto al tiempo en t_1. De este modo, la *rapidez* en A (i.e., en el instante t_1) está dada por

$$v(t_1) = \frac{ds}{dt}(t_1). \tag{5}$$

Usando el mismo procedimiento podemos definir la *velocidad instantánea* (o **velocidad**, a secas), como

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \right), \tag{6}$$

es decir,

$$\vec{v}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_1). \tag{7}$$

Cuando hacemos tender t_2 a t_1 (en otras palabras, cuando llevamos al punto

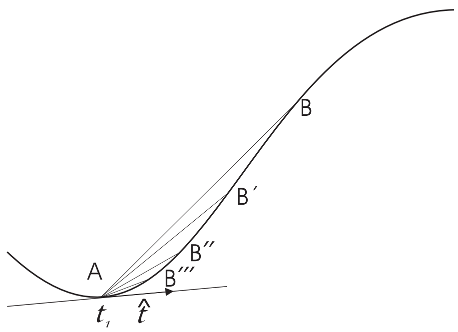


Fig.3: Proceso de límite

B junto al punto A), la distancia medida sobre el arco AB y sobre la cuerda AB se asemejan cada vez mas (i.e., $|\Delta r_{AB}| \approx \Delta s_{AB}$ cuando $B \to A$), de modo que la magnitud del vector $\vec{v}_{t_1}$ coincide con el módulo de $v(t_1)$. De este modo, la rapidez (instantánea) es simplemente la magnitud del vector velocidad (intantánea). Por otra parte, es evidente de este proceso de límite (si la trayectoria es una curva suave) que la dirección del vector velocidad $\vec{v}(t_1)$ es la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto A. Siguiendo un uso habitual, llamaremos $\hat{t}$ a la tangente unitaria a la curva. En realidad $\hat{t}$ es una función del arco s (i.e., de la distancia PA medida sobre la trayectoria). En resumen, el vector velocidad de la partícula al pasar por el punto A de la trayectoria está dado por

$$\vec{v}(t_1) = v(t_1)\hat{t}. \tag{8}$$

La ecuación (8) es una consecuencia directa de la regla de la cadena. En efecto,

$$\vec{v}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t}(s(t_1))v(t_1), \tag{9}$$

pues $d\vec{r}/ds$ es precisamente la tangente unitaria a la curva en el punto A.

Además de la posición y de la velocidad, otra cantidad relevante en la descripción del movimiento es la aceleración. De hecho la aceleración juega un papel crucial en las leyes de Newton que rigen el movimiento de las partículas. Definiremos *aceleración media* entre dos puntos A y B de la trayectoria al cuociente

$$\vec{a}_{AB} \equiv \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{10}$$

Finalemente, definiremos la *aceleración instantánea* (o *aceleración*, a secas) en el instante t como

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}(t). \tag{11}$$

Hasta ahora hemos visto como, a partir del conocimiento de la función $\vec{r}(t)$, podemos obtener distintas propiedades del movimiento de la partícula tales como su velocidad, rapidez, aceleración, velocidades y aceleraciones medias. El problema central de mecánica como veremos en el capítulo siguiente es el problema inverso. En efecto, lo que nos interesará más adelante es cómo, a partir de la aceleración (i.e., de la función $\vec{a}(t)$ para $t \geq 0$) y del estado inicial de la partícula (i.e., de su posición $\vec{r}$ y velocidad $\vec{v}$ en $t = 0$) podemos determinar totalmente la evolución de la partícula, i.e., su vector posición $\vec{r}$ como función del tiempo. Este camino inverso es simple de llevar a cabo, a partir de las ecuaciones (11) y (7), utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Si integramos la ecuación (11) entre $t = 0$ y $t = T$, y usamos el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos,

$$\vec{v}(T) - \vec{v}(0) = \int_0^T \vec{a}(t)\, dt. \tag{12}$$

Llamando a la variable de integración τ y luego cambiando T por t, podemos arreglar (12) de modo que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Por lo tanto, si conocemos la velocidad inicial $\vec{v}(0)$ de la partícula y su aceleración $\vec{a}(\tau)$ entre 0 y t, por medio de (13) podemos determinar su velocidad entre 0 y t. Ahora podemos hacer un proceso similar, usando (7), para determinar $\vec{r}(t)$ a partir de $\vec{r}(0)$ y de $\vec{v}(\tau)$ entre 0 y t. Así obtendremos

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Las ecuaciones (13) y (14) representan justamente la solución del problema inverso buscado.

Quizás la aplicación más simple de las ecuaciones (13) y (14) consiste en encontrar la trayectoria de una partícula sometida a aceleración constante, digamos $\vec{a} = \vec{g}$ (esta situación corresponde precisamente a la de una partícula moviéndose en el campo gravitatorio uniforme, cerca de la superficie de la tierra;

en este caso $\vec{g}$ está dirigido a lo largo de la vertical hacia abajo y su magnitud está dada aproximadamente por $g = |\vec{g}| \approx 9,81$ [m/seg^2]; g se conoce habitualmente como *aceleración de gravedad*). Haciendo pues $\vec{a} = \vec{g}$ (constante) en (13) obtenemos de inmediato

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{g}\,t. \tag{15}$$

Reemplazando esta expresión para $\vec{v}(t)$ en (14) e integrando, obtenemos

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)\,t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \tag{16}$$

(aquí hemos usado que $\int_0^t \tau\, d\tau = t^2/2$). La ecuación (16) determina entonces la posición de una partícula que se mueve bajo la acción del campo gravitatorio uniforme $\vec{g}$ una vez conocido su *estado inicial* $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$. Si elegimos el origen O justo en el punto inicial de la trayectoria $\vec{r}(0)$ tendremos

$$\vec{r}(t) = \vec{v}(0)\,t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \tag{17}$$

y observamos que $\vec{r}(t)$ es una combinación lineal de dos vectores constantes $\vec{v}(0)$ y $\vec{g}$. Si estos dos vectores son linealmente independientes, generan un plano. Así pues la trayectoria de la partícula, determinada a partir de (17), está contenida en el plano generado por $\vec{v}(0)$ y $\vec{g}$. Por otra parte, si $\vec{v}(0)$ y $\vec{g}$ son colineales, entonces la partícula se mueve a lo largo de la línea generada por $\vec{g}$, que pasa por el origen. Retornaremos a este problema más adelante en este capítulo, cuando veamos el *Lanzamiento de Proyectiles*).

Sistemas de Coordenadas

Con el objeto de representar los vectores discutidos en la sección precedente, en partícular el vector posición de la partícula, es conveniente utilizar algunos sistemas de coordenadas. Los mas usuales son los sistemas de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas, sistemas que discutiremos en detalle a continuación.

Coordenadas Cartesianas

Este es el sistema más simple de coordenadas. Para representar al vector $\vec{r}$ utilizamos su proyección a lo largo de tres ejes ortogonales, fijos, los que denotaremos como OX, OY y OZ, respectivamente, tal como se indica en la figura 4. Llamaremos $\hat{\imath}$ al vector unitario a lo largo de OX, $\hat{\jmath}$ al vector unitario a lo largo de OY y $\hat{k}$ al vector unitario a lo largo de OZ. A la proyección de $\vec{r}$ a lo largo de OX (i.e., a $\vec{r} \cdot \hat{\imath}$) la denotaremos por x. A las proyecciones de $\vec{r}$ a lo largo de OY y OZ las llamaremos y y z respectivamente.

De este modo, podemos representar al vector $\vec{r}$ (en la base de vectores ortonormales $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$) por

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}. \tag{18}$$

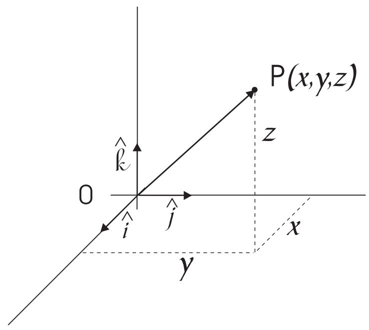


Fig. 4: Coordenadas Cartesianas

Puesto que el vector $\vec{r}$ es una función del tiempo, también lo son sus *coordenadas* x, y, z. Por otra parte los vectores de la base, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, son constantes. Derivando con respecto al tiempo la expresión (18) para $\vec{r}$, obtenemos la correspondiente expresión para la velocidad en cartesianas. Como los vectores de la base son constantes, al derivar (18) obtenemos

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}. \tag{19}$$

Derivando a su vez (19) con respecto al tiempo, obtenemos la expresión para la aceleración en cartesianas,

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}. \tag{20}$$

De ahora en adelante utilizaremos una notación introducida por Newton para escribir las diferentes derivadas con respecto al tiempo. Así pues, denotaremos por

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}, \qquad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{etc.,} \tag{21}$$

Con esta notación podemos escribir

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}, \tag{22}$$

y

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}, \tag{23}$$

repectivamente. Para ilustrar el uso de coordenadas cartesianas volvamos al ejemplo de una partícula moviéndose en un campo gravitatorio uniforme que discutimos en la sección anterior. Elijamos el origen de coordenadas de modo que coincida con $\vec{r}(0)$; entonces, la posición de la partícula queda determinada por (17). Ahora elegimos el eje OZ de modo que coincida con la dirección del campo gravitatorio. De este modo

$$\vec{g} = -g\,\hat{k}, \tag{24}$$

en que g denota la aceleración de gravedad. Consideremos luego el vector $\vec{v}(0)$. Como hemos dicho antes, si $\vec{v}(0)$ es colineal con $\vec{g}$, el movimiento de la partícula es rectilíneo. En cambio, si $\vec{v}(0)$ no es colineal con $\vec{g}$, siempre podemos escoger como eje OY a la dirección paralela al vector $\vec{v}(0) - v_z(0)\hat{k}$ (aquí $v_z(0)$ denota la proyección de $\vec{v}(0)$ sobre el eje OZ). Con esta elección tenemos

$$\vec{v}(0) = v_y(0)\hat{\jmath} + v_z(0)\hat{k}, \tag{25}$$

y, reemplazando (24) y (25) en (17) obtenemos

$$\vec{r}(t) = y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \tag{26}$$

en que

$$y(t) = v_y(0)\, t \tag{27}$$

y

$$z(t) = v_z(0)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2, \tag{28}$$

respectivamente.

Coordenadas Polares

En diversas circunstancias, el sistema de coordenadas cartesianos no resulta el mas apropiado. Por ejemplo, al discutir el movimiento de un péndulo simple, o al describir la órbita de un satélite bajo la acción del campo gravitatorio terrestre, las ecuaciones de movimiento en cartesianas son mas bien complicadas. En esos casos resulta mucho más adecuado usar *coordenadas polares*, las que introducimos a continuación.

Consideremos una partícula en movimiento en un plano. Por supuesto podemos representar el movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas (x, y) como se indica en la figura 4. Sin embargo, también podemos usar otros parámetros para representar la posición P de la partícula.

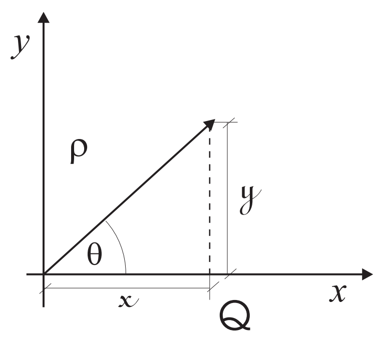


Fig. 5: Coordenadas Polares

En efecto, podemos determinar completamente la posición P especificando la distancia de P al origen O y el ángulo que forma OP con un eje fijo (por ejemplo el eje OX). Llamemos pues ρ a la distancia de O a P y θ al ángulo entre OX y OP. Entonces la posición de P queda especificada completamente por los valores de ρ y θ. Al par (ρ, θ) los llamaremos *coordenadas polares*. Aquí ρ es una longitud y es siempre positiva o cero, en cambio θ es un ángulo que usualmente tomaremos entre 0 y 2π. Usando la geometría del triángulo OQP de la figura, resulta elemental encontrar la relación entre el par (x, y) de coordenadas cartesianas y el par (ρ, θ) de coordenadas polares. De la figura tenemos

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\theta. \tag{29}$$

Usando el Teorema de Pitágoras también tenemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{30}$$

y, por último, de la geometría del triángulo OQP tenemos

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \tag{31}$$

de modo que

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}. \tag{32}$$

Con el objeto de representar los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en este sistema de coordenadas, elegiremos una base apropiada. Llamaremos $\hat{\rho}$ al vector unitario a lo largo de $\vec{r}$ (i.e., a la dirección $\theta =$ constante, ó, en otras palabras, la dirección de máximo crecimiento de la variable ρ). Por otra parte, llamaremos $\hat{\theta}$ al vector unitario ortogonal a ρ, dirigido en la dirección de crecimiento del ángulo θ (ver figura 6).

Fig. 6: Base del sistema de coordenadas polares

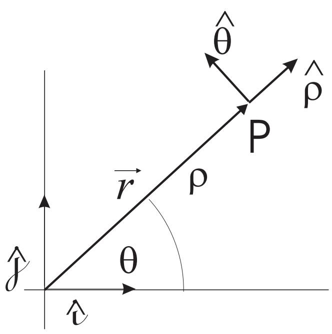


Fig. 6: Base del sistema de coordenadas polares

La base de vectores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ varía en el tiempo, junto con el movimiento del punto P. En cambio la base de vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ está fija. Con el objeto de calcular la dependencia temporal de $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ en el tiempo, conviene representar los vectores móviles $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ en la base $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$. De la figura 6 tenemos

$$\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\theta\,\hat{\jmath} \tag{33}$$

y

$$\hat{\theta} = -\mathrm{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}. \tag{34}$$

Es evidente de la figura 5, así como también de las ecuaciones (33) y (34), que los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ solamente varían si varía el ángulo θ. Derivando (33) con repecto a θ vemos que

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = -\mathrm{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} = \hat{\theta}. \tag{35}$$

Por otra parte, diferenciando (34) con respecto a θ obtenemos

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\hat{\imath} - \mathrm{sen}\theta\hat{\jmath} = -\hat{\rho}. \tag{36}$$

Que la derivada de $\hat{\rho}$ sea proporcional a $\hat{\theta}$ es una consecuencia del hecho que $\hat{\rho}$ es unitario. En efecto, derivando la igualdad $\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = 1$ con respecto a θ, obtenemos de inmediato que $\hat{\rho}\cdot d\hat{\rho}/\theta = 0$, es decir $d\hat{\rho}/d\theta$ es ortogonal a $\hat{\rho}$. Como estamos en un espacio de dos dimensiones, ésto a su vez implica que $d\hat{\rho}/d\theta$ debe ser paralelo a $\hat{\theta}$.

Con estos preliminares podemos ahora obtener las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares. De la figura **??**, obtenemos de inmediato

$$OP \equiv \vec{r} = \rho\hat{\rho}. \tag{37}$$

Para obtener la velocidad derivamos (37) con respecto al tiempo. De este modo, usando la regla de Leibniz, tenemos

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}. \tag{38}$$

Hemos visto anteriormente que $\hat{\rho}$ varía solo si θ varía. Así pues, usando la regla de la cadena y (35) obtenemos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}. \tag{39}$$

Para referencia futura es conveniente calcular $d\hat{\theta}/dt$. Procediendo en forma análoga a la maera que obtuvimos (39), se tiene

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}. \tag{40}$$

Reemplazando (39) en (38) y utilizando la notación de Newton para denotar las derivadas temporales, finalmente obtenemos,

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{41}$$

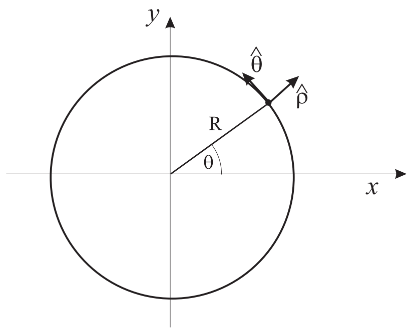
Una vez obtenida la velocidad es simple obtener la aceleración iterando el procedimiento anterior. De hecho, derivando (41) con respecto al tiempo, y utilizando la regla de Leibniz, se tiene

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\hat{\theta} + \rho\ddot{\theta}\hat{\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}. \tag{42}$$

Finalmente, reemplazando las expresiones para $d\hat{\rho}/dt$ y $d\hat{\theta}/dt$ obtenidas en (39) y (40) respectivamente, obtenemos finalmente la expresión para la aceleración en coordenadas polares

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\,\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}. \tag{43}$$

Para ilustrar el uso de las coordenadas polares, consideremos el movimiento de una partícula en un circunferencia con rapidez constante, i.e., *el movimiento circular uniforme*. Consideremos pues una circunferencia de radio R sobre la cual se mueve una partícula con rapidez constante v_0. Con el objeto de describir el movimiento de la partícula elijamos un sistema de coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia (ver figura **??**).



Movimiento Circular Uniforme

Dada esta elección de coordenadas, $\rho = R$ es constante y por lo tanto $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Reemplzando estos valores en (41) tenemos

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{44}$$

Como la partícula está obligada a moverse en la circunferencia, sólo tiene componente tangencial de la velocidad (i.e., sólo la componente a lo largo de $\hat{\theta}$ de su velocidad es no nula). Además, de (44) tenemos

$$v_0 = \dot{\theta}R, \tag{45}$$

de modo que la *velocidad angular* $\omega \equiv \dot{\theta}$ de la partícula es constante y está dada por $\omega = v_0/R$. Ya que $\omega = \dot{\theta}$ es constante para este movimiento, entonces $\ddot{\theta} = 0$. Reemplazando $\rho = R$, $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, y $\dot{\theta} = 0$ en (43) se tiene,

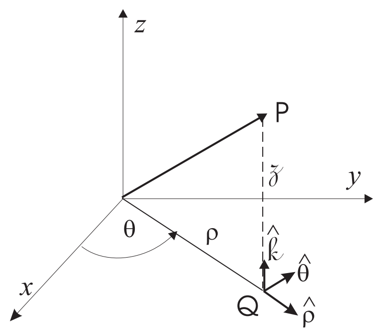
$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{\rho} = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho}. \tag{46}$$

Entonces, para el *movimiento circular uniforme* la aceleración de la partícula es centrípeta (i.e., es radial y dirigida hacia el centro de la circunferencia). Nota: La expresión (46) para la aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme fue obtenida por primera vez por Christian Huygens (1629–1695) (e.g., ver por ejemplo [2], que es una excelente referencia para distintos temas de la historia de la mecánica; ver también [3]).

Coordenadas Cilíndricas

Consideremos una partícula P que se mueve en el espacio. En lugar de representar la posición de P en coordenadas cartesianas como lo hicimos mas arriba, podemos proyectar su movimiento a lo largo de un eje (llamemos OZ a este eje) y sobre el plano perpendicular a OZ, digamos el plano XY, y utilizar coordenadas polares sobre este plano.

En la figura **??** el punto P se mueve en el espacio, Q representa su proyección en el plano XY, z mide la altura de P sobre el plano (i.e., la coordenada a lo largo del eje OZ). Para describir la posición de Q sobre el plano XY utilizamos coordenadas polares. Elegimos como eje polar a un eje fijos sobre el plano, que llamaremos OX. A la distancia del origen de coordenadas O al punto Q la llamremos ρ, en tanto que al ángulo entre OQ y OX lo llamaremos θ. La posición de P queda completamente determinada al especificar los valores de ρ, θ y z. A este conjunto de parḿetros los llamaremos *coordenadas cilíndricas.* La coordenada z varía entre $-\infty$ y $+\infty$, la coordenada ρ entre 0 e ∞ y θ entre 0 y 2π. En la figura **??** también hemos representado la base de vectores ortonormales $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{k}$, dirigidos a lo largo de las direcciones de crecimiento de ρ, θ y z respectivamente. Los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ yacen sobre el plano XY en tanto que $\hat{k}$ es perpendicular al plano.



Coordenadas Cilíndricas

Una vez introducidas las coordenadas cilíndricas procedemos como en los casos anteriores a encontrar las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de P enestas coordenadas. Del triángulo OQP de la figura **??** tenemos de inmediato

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{k}. \tag{47}$$

Derivando $\vec{r}$ con respecto al tiempo, utilizando (39), (40) (o mejor aún directamente (41) para expresar la derivada de OQ con respecto al tiempo) obtenemos

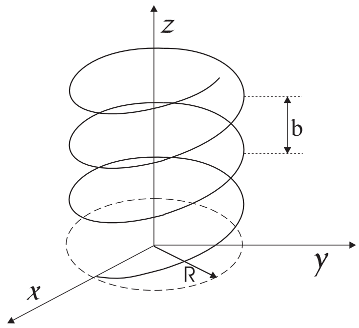
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}. \tag{48}$$

Aquí hemos usado que el vector $\hat{k}$, como en el caso de las coordenadas cartesianas, es constante.

Finalmente, derivando (48) con respecto al tiempo y utilizando (43), obtenemos

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{k}. \tag{49}$$

Ejemplo: Como aplicación del uso de las coordenadas cilíndricas encontraremos la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con rapidez uniforme, v_0, a lo largo de una *hélice*. La hélice es la curva que se obtiene al trazar una recta sobre el plano y luego enrollar el plano alrededor de un cilindro, tal como se indica en la figura **??**. Alternativamente es la curva que describe la punta de la hélice de un avión que se mueve a velocidad constante.



Movimiento a lo largo de una hélice

De esta definición la ecuación de la hélice en coordenadas cilíndricas queda dada por

$$\rho = R \qquad z = \frac{b}{2\pi}\theta, \tag{50}$$

en que R es el radio de la hélice y b el *paso de la hélice*, es decir cuando aumenta z al girar una vuelta (i.e., al avanzar θ en 2π). Nótese para la hélice z es multivaluada, y por lo tanto tenemos que tomar θ variando entre $-\infty$ y $+\infty$ para especificar completamente la posición de un punto sobre la hélice.

Derivando (50) con respecto al tiempo obtenemos de inmediato

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0, \qquad \dot{z} = \frac{b}{2\pi}\dot{\theta}, \qquad \text{y} \qquad \ddot{z} = \frac{b}{2\pi}\ddot{\theta}. \tag{51}$$

Substituyendo los valores dados por (50) y (51) en (47) y (48) encontramos

$$\vec{r} = R\,\hat{\rho} + \frac{b}{2\pi}\theta\,\hat{k}, \tag{52}$$

$$\vec{v} = \left(R\,\hat{\theta} + \frac{b}{2\pi}\,\hat{k}\right)\dot{\theta}, \tag{53}$$

respectivamente. Nótese que la componente radial de la velocidad es nula como era de esperar pues la partícula se mueve sobre la superficie del cilindro de radio R (la velocidad es tangencial a la superficie del cilindro).

Como la magnitud de $\vec{v}$ es constante, e igual a v_0, en este ejemplo, de (53) obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (b/(2\pi))^2}}. \tag{54}$$

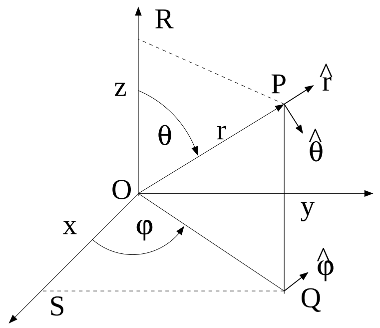
Nótese que en este caso la velocidad angular, $\dot{\theta}$, es constante y por lo tanto $\ddot{\theta} = 0$. Finalmente usando (50), (51), y (54) en (49) obtenemos

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\rho} = -\frac{v_0^2\,R}{R^2 + (b/(2\pi))^2}\hat{\rho}. \tag{55}$$

Nótese que si hacemos $b = 0$ en (53), (54), y (55), reobtenemos las expresiones correspondientes del movimiento circular uniforme que habíamos obtenido en la sección anterior. Esto era de esperarse, pues si el paso de la hélice es nulo, el movimiento sobre la hélice se reduce al movimiento sobre un círculo.

Coordenadas Esféricas

Consideremos una partícula P que se mueve en el espacio. En lugar de representar la posición de P en coordenadas cartesianas como lo hicimos mas arriba, podemos usar coordenadas esféricas. En la figura 10 el punto P se mueve en el espacio, Q representa su proyección en el plano XY, R representa su proyección en el plano XZ. Llamaremos r a la distancia OP, i.e., al largo del vector $\vec{r}$. Así mismo llamaremos θ al ángulo entre OP (vector posición) y el eje z. Finalmente llamaremos φ al ángulo entre OQ y el eje x. A este conjunto de parḿetros (r, θ, φ) lo llamaremos *coordenadas esféricas*. Aquí, la coordenada r es no negativa (i.e., $r \geq 0$), en tanto que $0 \leq \theta \leq \pi$, y $0 \leq \varphi \leq 2\,\pi$. En la figura 10 también hemos representado la base de vectores ortonormales $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{v}arphi$, dirigidos a lo largo de las direcciones de crecimiento de r, θ y φ respectivamente. Los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ yacen en el plano (vertical) que contiene al eje z y a la recta PQ, en tanto que φ yace en el plano XY.



Coordenadas Esféricas

Descomponiendo $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$, obtenemos las relaciones siguientes:

$$\hat{r} = \text{sen}\theta\,(\cos\varphi\,\hat{\imath} + \text{sen}\varphi\,\hat{\jmath}) + \cos\theta\,\hat{k}, \tag{56}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,(\cos\varphi\,\hat{\imath} + \text{sen}\varphi\,\hat{\jmath}) - \text{sen}\theta\,\hat{k}, \tag{57}$$

y,

$$\hat{\varphi} = -\text{sen}\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}. \tag{58}$$

Derivando estas expresiones es simple obtener,

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \qquad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \text{sen}\theta\,\hat{\varphi}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \qquad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}, \tag{60}$$

y

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\text{sen}\theta\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}. \tag{61}$$

Tal como lo hicimos en el caso de las coordenadas polares, ahora encontraremos las expresiones para el vector posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas, usando las expresiones (59), (60), y (61). De la definición de r y de $\hat{r}$ (ver también la figura 10) tenemos que,

$$\vec{r} = r\,\hat{r}. \tag{62}$$

Derivando (62) con respecto al tiempo y usando la regla de la cadena tenemos,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\theta}\hat{\theta} + \text{sen}\theta\dot{\phi}\,\hat{\varphi}). \tag{63}$$

Para obtener el término entre paréntesis en la última ecuación usamos la regla de la cadena para obtener,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi},$$

y luego (59) para obtener finalmente

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \text{sen}\theta\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}.$$

Derivando luego (63) y procediendo de un modo análogo, uno finalmente encuentra,

$$\begin{aligned} \vec{a} = \\ \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\text{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\,\hat{r} \\ + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \text{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\,\hat{\theta} \\ + \left(2\dot{r}\text{sen}\theta\dot{\varphi} + r\text{sen}\theta\ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\,\hat{\varphi}. \end{aligned} \tag{64}$$

Antes de cerrar este capítulo deseamos discutir dos problemas típicos. El primero es el lanzamiento de proyectiles y el segundo los problemas de persecución.

Lanzamiento de Proyectiles

El lanzamiento de proyectiles fue analizado correctamente por primera vez por Galileo Galilei (1564–1642). El problema, por supuesto, es encontrar la trayectoria de una partícula que es arrojada con rapidez inicial v_0 formando unángulo

θ con la horizontal, en presencia de un campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ dirigido a lo largo de la vertical, hacia abajo (ver figura).

Como hemos visto anteriormente, la ecuación que gobierna el movimiento del proyectil es la ecuación (17). Hemos visto que el movimiento de tal proyectil ocurre en un plano. Si elegimos las coordenadas cartesianas (y, z) para describir el movimiento del proyectil en el plano, entonces la evolución de las coordenadas $y(t)$ y $z(t)$ del proyectil está dada por (25) y (26) respectivamente. En términos de la rapidez inicial v_0 y del ángulo de tiro θ, tenemos $v_y(0) = v_0 \cos\theta$ y $v_z(0) = v_0 \mathrm{sen}\theta$. Reemplazando estas expresiones en (25) y (26) respectivamente, el movimiento del proyectil está dado en forma paramétrica (i.e., en la forma $y = y(t)$, $z = z(t)$ con el tiempo como parámetro) por

$$y(t) = v_0 \cos\theta\, t, \tag{65}$$

y

$$z(t) = v_0 \mathrm{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2. \tag{66}$$

Recordemos que hemos elegido el origen de coordenadas de modo que coincide justo con el punto de lanzamiento y hemos establecido $t = 0$ como el instante en que se arroja el proyectil.

Si despejamos el tiempo t de (65) en términos de y, y lo remmplazamos en (66) obtenemos

$$z = \tan\theta\, y - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos\theta^2}\, y^2. \tag{67}$$

(67) corresponde a la ecuación de una parábola en el plano (y, z), invertida, y con eje de simetría el eje z. Completando el cuadrado en (**??**) podemos escribir la ecuación de la parábola como

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos\theta^2} \left(y - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta. \tag{68}$$

De (68) vemos que la altura máxima que alcanza el proyectil es

$$h = h(v_0, \theta) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta, \tag{69}$$

altura que ocurre cuando el proyectil se encuentra a una distancia horizontal $d = d(v0, \theta) =\equiv v_0^2 \sin\theta \cos\theta / g$ desde el punto de lanzamiento. En otras palabras, el vértice de la parábola se encuentra en el punto (d, h) del plano. Quizás la propiedad más importante en el lanzamiento de proyectiles es el *rango*, i.e., a que distancia desde el punto de lanzamiento se encuentra el proyectil cuando toca tierra (cuando $z = 0$ nuevamente). El rango $R = R(v_0, \theta)$ es fácil de obtener a partir de (**??**). Haciendo $z = 0$ en (67) obtenemos dos soluciones para y, digamos $y = 0$ e $y = R$ en que

$$R(v_0, \theta) = \frac{v_0^2}{g}\, 2 \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\,\theta. \tag{70}$$

Nótese que $R = 2\,d$, lo que era de esperar pues el eje de simetría de la parábola es la recta $z = d$. Tanto el rango, R, como la altura máxima que alcanza el proyectil, h, son funciones de los datos del lanzamiento v_0 y θ. En particular, ambos son proporcionales a v_0^2/g que es la única expresión con dimensiones de longitud que podemos construir a partir de v_0 y g.

Para una rapidez inicial v_0 dada, si consideramos el *rango* como función del ángulo de lanzamiento, θ, este es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es $\pi/4$ (i.e., 45°). Además, como la función *seno* satisface $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, el *rango* correspondiente a un ángulo θ es igual al *rango* correspondiente a $\pi/2 - \theta$ (en otras palabras, la función $R(v_0, \theta)$ es simétrica con respecto a 45°).

Problemas de Persecución: La Dama y el Perrito

Los problemas de *persecución* son un tema clásico de la cinemática. Tradicionalmente llevaban el rótulo del mercante y el pirata (ver [**?**]). Las herramientas de cálculo que se usan en este tipo de problemas son un poco mas sofisticadas que la del resto del capítulo, de modo que esta sección se puede saltar en una primera lectura y retornar a ella más adelante.

Considere dos puntos (la dama y su perrito); el primero, Q(la dama), se mueve en línea recta con velocidad constante v y el segundo, P (el perrito), describe una curva con rapidez constante u de modo que en todo instante se dirige hacia su amo (la dama). El objeto es determinar la ecuación de la trayectoria de P, en los distintos casos ($u < v$, $u = v$, y $u > v$). Existen muchas variantes de este tipo de problemas. El lector interesado puede consultar [**?**].

Con el objeto de encontrar la trayectoria del perrito, elegiremos coordenadas cartesianas. Elegimos el eje OX de modo que coincida con la trayectoria de la dama. Denotaremos por C a la trayectoria del perrito. El perrito recorre C con rapidez constante u, de modo que en todo instante t, la recta tangente a C en el punto P intersecat al eje OX justo en Q, i.e., en la posición de la dama en el instante t. Si consideramos la trayectoria de la dama como todo el eje OX, eds claro que sobre la curva C debe haber un punto A tal que la tangente a C en A es perpendicular al eje OX. Elegiremos justamente la tangente a C en A como el eje OY. Llamemos x e y a las coordenadas del perrito P en un instante dado (i.e., $P = (x, y)$. Como P y Q recorren sus respectivas trayectorias con rapidez constante, debemos tener

$$\frac{AP}{u} = \frac{OQ}{v}, \tag{71}$$

ya que A, O y P, Q son dos pares de posiciones simultáneas del perrito y de la dama. Por definición de la tangente a C en el punto P tenemos que

$$\frac{MQ}{MP} = -\frac{dx}{dy}, \tag{72}$$

en que el punto M es la proyección de P sobre el eje OX. El signo menos se ha introducido en (72) para tomar en cuenta que la curva C tiene pendiente negativa en P. Ahora, $AP = s$ es el arco descrito por el perrito sobre C (medido a partir del punto A), en tanto que $OQ = OM + MQ$. Pero, por construcción, $OM = x$ y $MP = y$, de modo que podemos reescribir (71, usando (72, como

$$\frac{v}{u}\, s = e\, s = x - y\,\frac{dx}{dy}, \tag{73}$$

en que hemos definido $e \equiv v/u$.

Por otra parte, a lo largo de la curva C, el elemento de arco está dado (usando el Teorema de Pitágoras) por

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{74}$$

de donde sigue

$$\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \tag{75}$$

en que el signo menos proviene del hecho que s aumenta cuando y disminuye. Derivando la ecuación (73) con repecto a y, usando (75), obtenemos

$$e\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\frac{d^2x}{dy^2}, \tag{76}$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden para $f = dx/dy$ que se puede resolver mediante separación de variables. En efecto, la ecuación (76) se puede escribir como

$$\frac{df}{\sqrt{1+f^2}} = e\,\frac{dy}{y}, \tag{77}$$

cuya integral es

$$\sinh^{-1} f = \log y^e + c, \tag{78}$$

en que c es una constante de integración. Sin embargo, $f = dx/dy = 0$ para $y = OA \equiv a$, lo cual determina la constante de integración. Tenemos entonces

$$\sinh^{-1} f = \log(\frac{y}{a})^e \tag{79}$$

de modo que, usando la definición de la funcion senh(x), (i.e., $\sinh x = (\exp x - \exp(-x))/2$), obtenemos

$$f = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[(\frac{y}{a}^e - \frac{a}{y}^e \right]. \tag{80}$$

Para determinar si el perrito alcanza a la dama, debemos ver si la curva C intercepta al eje OX.

References

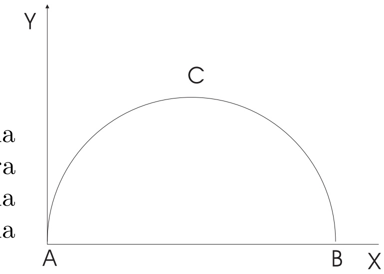
[1] Benguria, R.D. y Depassier, M.C., **Problemas Resueltos de Mecánica Clásica**, Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile, 1995.

[2] Dugas, René, **A history of mechanics**, Dover, NY, 1988.

[3] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Huygens.html

EJERCICIOS

1. Una partícula viaja a lo largo de la curva de la figura desde A a B en un segundo. Si se demora tres segundos para ir de A hasta C, determine la velocidad media cuando va de B a C. ¿Cúal es la rapidez media al ir de B a A ?



2. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$, con una rapidez constante v_0. Encuentre expresiones para la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula, cuando ésta se encuentra el la posición (x_0, y_0).

3. Imagine un río con orillas paralelas entre las cuales hay una distancia ℓ. La velocidad de la corriente es uniforme a todo el ancho del río, e igual a u. ¿ Con qué velocidad mínima, constante respecto del agua, deberá navegar un bote para que, partiendo desde el punto A vaya a parar a un punto B en la orilla opuesta que se encuentra a una distancia s corriente abajo? ¿ A qué distancia mínima será llevado el bote corriente abajo durante el cruce del río, si la rapidez del bote con respecto al agua es v.

4. Dos trenes, uno de los cuales lleva una velocidad de 100 [km/hr] y el otro una velocidad de 120 [km/hr], se dirigen uno hacia el otro en la misma vía recta. Cuando los trenes están a una distancia de 3.200$[m]$, ambos maquinistas ven simultáneamente al tren que se les acerca y aplican los frenos. Si los frenos retardan a ambos trenes a razón de $0,915[m/seg^2]$, diga si los trenes chocarán.

5. Una partícula se mueve en una espiral plana $r = A\exp(k\theta)$, tal que la rapidez se mantiene constante e igual a v_0. Determine:
i) $\vec{v}$ en función de r y θ;
ii) $\vec{a}$ en función de r y θ;
iii) demuestre que en todo instante la aceleración es perpendicular a la velocidad; y
iv) encuentre el ángulo θ y la velocidad angular $\dot{\theta}$ en función del tiempo.

6. El mecanismo que se muestra en la figura adjunta transforma un movimiento de rotación en otro lineal. El vástago A, fijo en la barra OA se encuentra a 8[cm] de O y desliza en la ranura a medida que el brazo OA gira a una tasa constante de 3 radianes por segundo,

en el sentido indicado. Como consecuencia de este movimiento la barra B se mueve verticalmente. Describa el movimiento de B y en particular determine su aceleración cuando $\theta = 30°$.

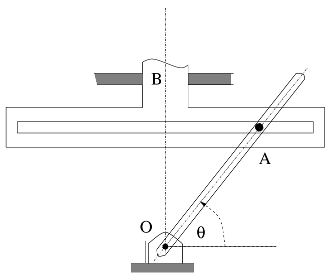
7. Un camarógrafo de TV filma desde el punto A el auto de carrera B que se desplaza en un tramo curvo (ver figura) con una rapidez constante de 20 [m/seg]. Determine, para la posición indicada en la figura, la velocidad angular del camarógrafo de modo que en la filmación el auto aparezca en el centro de la pantalla.

8. El piloto de un avión que transporta un paquete de correo a un lugar remoto desea soltarlo en el momento justo para que alcance el punto A. ¿ Qué ángulo θ con la horizontal deberá formar la visual al blanco en el instante del lanzamiento? El avión vuela horizontalmente a una altura de 152 [m] con una velocidad de 193 [km/h].

9. Desde la superficie terrestre es necesario dar con una piedra en un blanco situado a una altura h y a una distancia s por la horizontal. ¿ Cuál es la velocidad inicial mínima que debe tener la piedra para dar en el blanco? Desprecie la resistencia del aire.

10. Un punto se mueve sobre un camino circular en el plano xy, con coordenadas dadas por $x = r\cos(\alpha t^2/2)$, $y = r\mathrm{sen}(\alpha t^2/2)$, donde r y α son constantes. Interprete el significado de r y α y determine las componentes x e y de la aceleración del punto cuando (a) $t = 0$ y (b) $\alpha t^2 = \pi$.

11. El movimiento del rodillo A, en la ranura circular fija, está gobernado por el brazo OA, cuya parte superior desliza libremente en la inferior para acomodarse a la variación de la distancia de A a O al variar θ. Si el brazo tiene una velocidad angular constante, en sentido antihorario, $\dot{\theta} = K$ durante un intervalo de su movimiento, determine la aceleración a del punto A para cualquier posición en dicho intervalo.



12. La velocidad de salida de un fusil de largo alcance, situado en A, es $u = 360$ [m/s]. Determinar los dos ángulos de elevación θ que permitirán al proyectil alcanzar el blanco B de la montaña.

13. Se lanza una pelota desde el punto A de la figura con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y con una rapidez de 20 [m/seg]. Encuentre la distancia horizontal recorrida por la pelota en su trayectoria hasta C.

14. Un carro rueda de manera uniforme, con rapidez v_0 por un camino con el pavimento mojado. ¿ Cuál es la altura máxima que pueden alcanzar las gotas de agua que se desprenden de la corona de las ruedas? En la figura, el ángulo φ determina la posición de cualquiera de los puntos del borde de la rueda en los que se produce el desprendimiento de la gota.

15. Una pelota de basketball lanzada al canasto comienza a caer verticalmente desde éste, sin velocidad inicial. En el mismo instante, desde un punto situado a una distancia ℓ del canasto, se tira una pelota de tenis contra la pelota de basketball. ¿ Con qué velocidad inicial debe ser lanzada la pelota de tenis para que choque con la de basketball a una distancia h del cesto?

16. Un esquiador deja una rampa de salto con una rapidez de 10 [m/s], formando un ángulo de 15° hacia arriba de la horizontal, como se indica en la figura. La inclinación de la ladera de la montaña es de 50° y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre: a) la distancia a la que cae el esquiador a lo largo de la ladera de la montaña, y b) las componentes de la velocidad justo en el instante en el que cae en la ladera.