UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Recinto Universitario Augusto C. Sandino
Estelí, Nicaragua.

Asignatura	**:**	**Ingeniería económica.**
Carrera	**:**	**Ingeniería agroindustrial.**
Año Académico	**:**	**IV Año.**
Unidad No. III	**:**	**Ecuaciones de equivalencia.**
Profesor	**:**	**Mauricio Navarro Zeledón.**

Unidad No. III. Ecuaciones de equivalencia.

1. Flujos de efectivo únicos.

El flujo de efectivo resulta fundamental en todo estudio económico. Los flujos de efectivo ocurren en muchas configuraciones y cantidades: valores únicos de efectivo ocurren aislados, series que son uniformes y series que aumentan o disminuyen en cantidades o porcentajes constantes.

2. Series Uniforme de Flujos de Efectivo.

2.1. Valor Presente de una S.U.F.E.

Existen multitud de ocasiones en la vida cotidiana en que la forma de pago común es la aportación de una serie de cantidades iguales durante ciertos períodos. Por ejemplo, en la compra a crédito de autos, muebles, electrodomésticos, etc. la forma usual de pago son 12, 24, 36, 48 o más mensualidades.

Ejemplo No. 1.

Una persona compró una casa por S 100,000 y decidió pagarla en 10 anualidades iguales, haciendo el primer pago un año después de adquirida la casa. Si la inmobiliaria cobra un interés del 10% capitalizado anualmente, ¿a cuánto ascienden los pagos iguales anuales que deben hacerse, de forma que con el último pago se liquide totalmente la deuda?

Sea A el pago anual uniforme; P = \$ 100,000 o el valor presente que tiene la casa n = 10 pagos; i = 10%.

Hay que observar dos cosas importantes en este problema:

Primero se designa como A al pago anual uniforme que se efectúa. En la ingeniería económica anualidad no significa pagos anuales sino pagos a intervalos iguales. Por consiguiente, se consideran anualidades los dividendos sobre acciones, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos de las compañías de seguro. La expresión anualidad puede cambiarse por la de rentas, series uniformes, pagos periódicos u otros, según sea el caso y las costumbres de cada país. Por lo tanto es adecuado llamarle A por ser ésta la primera letra de anualidad, pero cuando se efectúan pagos uniformes (iguales) cada trimestre, cada mes o aún cada semana, según lo señale el problema se seguirá designando a ese pago uniforme como A, de forma que en lo sucesivo, A, será sinónimo de pago uniforme sin importar la frecuencia con éste se efectúe.

Segundo, si el número de períodos por analizar es muy alto, el problema se vuelve engorroso por la cantidad de operaciones aritméticas simples que es necesario efectuar. Para simplificar la solución de problemas de este tipo se ha desarrollado una fórmula. Su desarrollo matemático no es muy importante, pues solo puede confundir al estudiante que se enfrenta por primera vez con la ingeniería económica; lo importante es entender el concepto implícito de esta fórmula, tanto como todas las que manejan series uniformes de pagos. Así, para obtener la fórmula que simplifique la obtención del resultado se parte de la siguiente generalización:

a) El valor presente es conocido.
b) Se desconoce el valor de *n* pagos iguales *A*.
c) El primer pago se efectúa en el período 1 y el último pago, en el período *n*.
d) Los pagos no se suspenden en el transcurso de los *n* períodos.

La fórmula es:

$$A = P\left[\frac{i\,(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}\right]$$

Solución

$$A = 100{,}000\left[\frac{0.1\,(1+0.1)^{10}}{(1+0.1)^{10} - 1}\right] = \$\ 16{,}274.54$$

Demostración

Año	Interés	Deuda + interés	Pago de fin de año	Deuda después del pago
0				100,000.00
1	10,000.00	110,000.00	16,274.54	93,725.46
2	9,372.55	103,098.01	16,274.54	86,823.47
3	8,682.35	95,505.81	16,274.54	79,231.27
4	7,923.13	87,154.40	16,274.54	70,879.86
5	7,087.99	77,967.85	16,274.54	61,693.31
6	6,169.33	67,862.64	16,274.54	51,588.10
7	5,158.81	56,746.91	16,274.54	40,472.37
8	4,047.24	44,519.60	16,274.54	28,245.06
9	2,824.51	31,069.57	16,274.54	14,795.03
10	1,479.50	16,274.54	16,274.54	0.00

Una serie uniforme de pagos y el valor presente de una cantidad se pueden relacionar inversamente con respecto al ejemplo mostrado, es decir, en un problema cualquiera se pueden conocer los pagos uniformes y desconocer el presente. Para resolver problemas de este tipo se puede utilizar la misma fórmula si se desea simplificar el cálculo. De este modo, si se despeja P de la anterior fórmula se obtiene:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N}\right]$$

Ejemplo No. 2.

Un ama de casa compra a crédito una lavadora y acuerda pagarla en 12 pagos iguales mensuales de $ 95 comenzando dentro de un mes. Si la casa comercial cobra un interés del 2% mensual en sus ventas a crédito, ¿cuál es el valor de contado de la lavadora?

En este ejemplo se puede observar que *A* no necesariamente es un pago anual y que los períodos de capitalización *n* tampoco se cuantifican por necesidad en años; los datos del problema están dados en meses, pero ello no invalida la aplicación de las fórmulas dadas. Por supuesto, el interés se da mensualmente.

El resultado al aplicar la fórmula es: $ 1,004.65.

En los negocios, es frecuente que los pagos periódicos uniformes se efectúen al comienzo de cada período; tal es el caso de la renta de terrenos, edificios y oficinas, cuyo alquiler se paga al principio del período. En las ventas a plazos se suele estipular una serie uniformes de pagos, los cuales se pueden pagar por anticipado.

Ejemplo No. 3.

Una compañía alquila un terreno en $ 4,000 mensuales y propone al propietario pagar el alquiler anual total, a principio de cada año, con la tasa del 12% convertible mensualmente. Hallar el valor del alquiler anual.

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}\left[\frac{1 - (1+i)^{-(N-1)}}{i} + 1\right]$$

El resultado a aplicar la fórmula es: $ 45,470.51

2.2. Valor Futuro de una S.U.F.E.

En la vida cotidiana existen problemas en que se relaciona el futuro con una serie de pagos iguales, por tanto, es necesario contar con fórmulas que ayuden a la solución de estos problemas. Los siguientes ejemplos muestran esas fórmulas.

Ejemplo No. 4.

Si una persona ahorra $ 800 cada año en un banco que paga el 12% de interés capitalizable anualmente, ¿Cuánto tendrá ahorrado al finalizar el noveno año, luego de hacer nueve depósitos de fin de año?

Para simplificar la resolución de este problema se utiliza la fórmula siguiente:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i}\right]$$

El resultado a aplicar la fórmula es: $ 11,820.53

La aplicación de la anterior fórmula tiene las siguientes restricciones:

a) El pago de la primera *A* siempre se efectúa en el período uno y no el período cero.
b) El último pago se verifica en el período *n*, es decir, en el momento en el que se calcula la *F*, por tanto, la última *A* ya no gana interés.
c) Los pagos de *A* son continuos, del período 1 al período *n*.

En el caso que las anualidades se paga de forma anticipada o sea al principio de los *n* períodos la fórmula a utilizar es la siguiente:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{N}-1}{i}(1+i)\right]$$

Ejemplo No. 5.

Una empresa distribuidora de insumos agrícolas deposita al principio de cada año $ 20,000 en una cuenta de ahorros que abona el 7% de interés. ¿A cuánto ascenderán los depósitos al cabo de 5 años?

El resultado al aplicar la fórmula es: $ 123,065.81.

Si queremos saber el pago de las anualidades, podemos aplicar la fórmula siguiente de abajo, que nos permita determinar los pagos iguales, en períodos también iguales que se deben de hacer para contar con una determinada cantidad de dinero.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^{N}-1}\right]$$

Ejemplo No. 6.

Una empresa desea contar en una cuenta de ahorros un capital de $ 20,000 en un período de 5 años. Calcular los depósitos semestrales necesarios en el banco que paga un 8% con capitalización semestral.

El resultado al aplicar la fórmula es: $ 1,665.82

3. Series con crecimiento aritmético.

Un gradiente aritmético es una serie de efectivo que aumenta o disminuye en una cantidad constante. Es decir, el flujo de efectivo, ya sea ingreso o desembolso, cambia por la misma cantidad aritmética cada período. La cantidad del aumento o de la disminución del gradiente. Por ejemplo un ingeniero agroindustrial predice que el costo de mantenimiento de una tractor aumentará en $ 500 anuales hasta que él tractor sea desechado, hay una serie gradiente relacionada y la cantidad del gradiente es $ 500.

Las fórmulas desarrolladas anteriormente para una serie *A* tienen cantidades iguales de final de período de igual valor. En el caso de un gradiente, el flujo de efectivo de cada fin de período es diferente, de manera que es preciso derivar nuevas fórmulas.

3.1. Valor Presente de una S.C.A.

El símbolo *G* para los gradientes se define como:

G = cambio aritmético constante en la magnitud de los ingresos o desembolsos de un período al siguiente; *G* puede ser positivo o negativo.

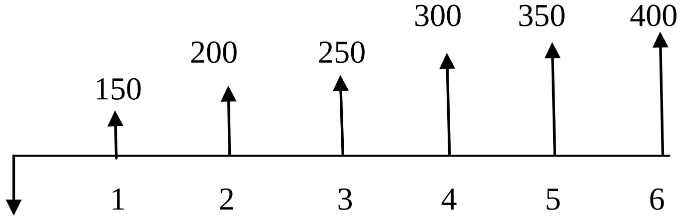
Para resolver esta serie de problemas se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^N-1}{i\,(1+i)^N}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^N-1}{i} - N\right]\left[\frac{1}{(1+i)^N}\right]$$

Ejemplo No. 7.

Un agricultor adquirió un motor para la succión de agua; espera que el costo de mantenimiento sea de \$ 150 al finalizar el primer año y que en los subsecuentes aumente a razón de \$ 50 anuales. Si la tasa de interés es del 8% capitalizada cada año, ¿cuál es el valor presente de esta serie de pagos durante un período de 6 años?

Datos de problema son P =?; i = 8%; primer pago A = \$ 150; G = 50. El diagrama del flujo de problema es el siguiente:



Aplicando la fórmula el resultado es: \$ 1,219.60

Ejemplo No. 8.

Una comercializadora vende tractores de 30 HP bajo las siguientes condiciones: se hace un primer pago de \$ 900 un mes después de la fecha de adquisición y nueve pagos mensuales adicionales, cada uno de los cuales disminuye en \$ 50 al pago del mes anterior (el segundo mes se pagaran \$ 850, el tercer mes \$ 800, etc.) Si el interés que carga la comercializadora es del 12% anual, ¿cuál es el valor a pagar de contado por la compra del tractor?

En este caso existe un gradiente negativo porque los pagos van disminuyendo y por lo tanto se utiliza la fórmula siguiente:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^N-1}{i\,(1+i)^N}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^N-1}{i} - N\right]\left[\frac{1}{(1+i)^N}\right]$$

El resultado es= \$ 6,021.62
Ejemplo No. 9.

Una persona contrae la obligación de pagar \$ 2,000 cada final de mes, durante un año, aumentando sus pagos sucesivos en \$ 100 cada mes, hallar: (a) a la tasa del 24%, el valor presente de sus obligaciones; (b) si desea sustituir, su obligación por otra equivalente con la misma tasa, con pagos mensuales iguales, ¿cuánto deberá de pagar mensualmente?

(a) P = \$ 26,717.80.
(b) A = \$ 2,526.40

4. Series con crecimiento geométrico.

En este caso se abordan las anualidades variables cuyos pagos periódicos varían formando una progresión geométrica, o sea, que se caracterizan porque el cociente entre dos términos sucesivos es constante. Estas anualidades reciben el nombre de gradiente geométrico.

4.1. Valor Presente de una S.C.G.

Para tal caso se utiliza la siguiente fórmula:

$$P = A\left[\frac{g^N (1+i)^{-N} - 1}{g - (1+i)}\right]$$

Ejemplo No. 10.

Una deuda debe cancelarse en 5 años con cuotas de \$ 10,000 cada final de año a una tasa de interés del 6%. Estos pagos se incrementarán, después del primero, en un 10% anual cada uno. Hallar el valor presente de la deuda.

Los datos del problema son:

A = 10,000.
g = 1.1
i = 0.06
N = 5

El resultado es: \$ 50,866.68