

Rigidez y flexibilidad en el análisis de diafragmas flexibles

José Isaac Soler de la Cruz¹, Angel Julver Pino Velázquez²

¹ *Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril y Agustín Cueva Ciudadela, Cuenca, Ecuador, 1010201.*

² *Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril y Agustín Cueva Ciudadela, Cuenca, Ecuador, 1010201.*

Autor para correspondencia: angel.pino@ucuenca.edu.ec, josesoler41@yahoo.com

Fecha de recepción: 21 de septiembre de 2014 - Fecha de aceptación: 20 de octubre de 2014

RESUMEN

Comparación de los métodos del análisis estructural: la Rigidez (Método de los Desplazamientos), y la Flexibilidad (Método de las Fuerzas) en la determinación de la distribución de las fuerzas laterales que actúan en un diafragma, supuestamente flexible, sometido a la acción de dichas fuerzas.

Palabras clave: Diafragma, flexibilidad, rigidez.

ABSTRACT

This paper presents the comparison between two classical general Structural Analysis Methods: the Stiffness (Displacements) and the Flexibility (Forces) method. Both methods determine the distribution of the lateral forces subjected to the action of said forces on a diaphragm, assuming flexibility.

Keywords: Diaphragm, flexibility, stiffness.

1. INTRODUCCION

En un artículo anterior (Pino & Soler, 2007), se expusieron las características generales de los diafragmas rígidos ante la acción de cargas laterales como el viento o el sismo. Sin embargo, este tipo de diafragma tiene lugar en estructuras de piso y cubiertas monolíticas, como losas y entramados de vigas que se comportan como tal. En muchas ocasiones, como es el caso de pisos y cubiertas de madera o metálicas (steel decks) la hipótesis de "diafragma rígido" esta algo lejos de modelar la realidad.

Los autores pretenden, en el presente trabajo, exponer el análisis de este tipo de diafragma, siguiendo una metodología similar a la desarrollada en el caso de diafragmas rígidos.

A lo largo de esta exposición se ha seguido la orientación del Manual del Instituto de Diseño de Diafragmas de Cubiertas de Acero (traducción del "Steel Deck Institute Diafragma Design Manual") porque es en este Manual donde más sencillamente se presentan las características de estos diafragmas, que, por otro lado está avalada por una copiosa muestra de ensayos de laboratorio. No obstante, una vía similar se puede seguir en el caso de diafragmas de madera.

Como línea fundamental del presente trabajo se encuentra el hecho de que la rigidez que caracteriza el comportamiento de los paneles de cubierta o entrepiso se refiere a su rigidez al cortante. De ese modo, la mayoría de las empresas que fabrican estos steel decks, como la VULCRAFT, por citar un caso conocido, ha desarrollado tablas y fórmulas que permiten evaluar esa rigidez al cortante de sus paneles comerciales. En este trabajo, los autores parten del valor escogido de estas rigideces y de allí obtener el comportamiento del diafragma específico.

Se logra demostrar que, independientemente de la vía seguida se obtienen resultados similares, tanto por el Método de la Rigidez como el de la Flexibilidad, lo cual queda demostrado en los ejemplos ilustrativos resueltos en el desarrollo del artículo.

2. DESARROLLO

En la Fig. 1 se presenta un isométrico que muestra a un diafragma flexible, sustentado por pórticos y conformado por paneles de relativa flexibilidad. El diafragma se halla solicitado por un sistema de cargas laterales w producto de la acción del viento o sismo. Las distancias inter - pórticos se denominan: a_1 y a_2, \dots ; mientras, b : anchura del diafragma.

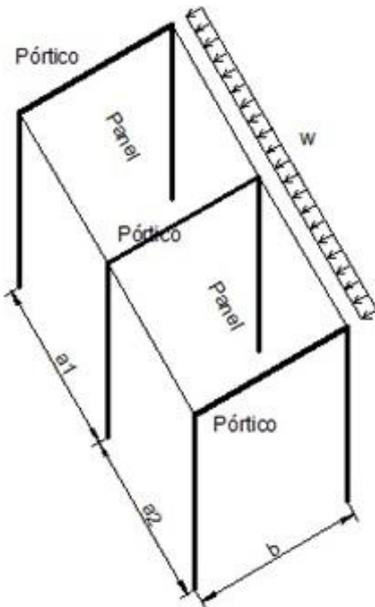


Figure 1. Isométrico que muestra un diafragma flexible.

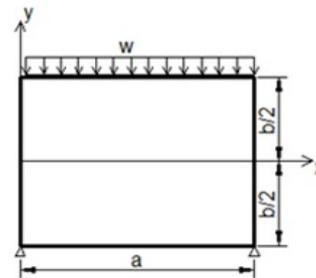


Figure 2. Paneles que conforman los diafragmas flexibles.

3. HIPOTESIS ACERCA DEL COMPORTAMIENTO DE LOS PLANES FLEXIBLES

Los paneles que conforman los diafragmas flexibles se pueden modelar como vigas pared, ya que son muy peraltadas con respecto a su luz (Fig. 2).

Como se sabe, las vigas simples o de Bernoulli se comportan, con respecto a su desplazamiento, de acuerdo a la ecuación de la elástica, donde el dominio de la flexión (representada por el Momento Flector) es, prácticamente total. Responden, pues, a la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad (1)$$

donde: $M(x)$ es la ley de variación de momento flector, y $E \cdot I$ la rigidez a la flexión.

Las vigas pared se ven dominadas por el cortante, entonces, su diferencial con el desplazamiento es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V(X)}{G \cdot A} \quad (2)$$

donde: $V(X)$ es la ley de variación del cortante, y $G \cdot A$ la rigidez a la distorsión.

Así en este caso la expresión del cortante es:

$$V(x) = w \cdot \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

De este modo resolviendo la ecuación (2):

$$y(x) \cdot G \cdot A = \frac{w}{2} \cdot (a \cdot x - x^2) + C \quad (3)$$

donde: C es el constante de integración.

Para: $x=0$, $y(0)=0$, y $C=0$:

$$y(x) \cdot G \cdot A = \frac{w}{2} \cdot (a \cdot x - x^2)$$

y para $x = a/2$:

$$y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{w \cdot a^2}{8 \cdot G \cdot A}$$

Normalmente la rigidez al cortante; GA se expresa como:

$$G \cdot A = G' \cdot b$$

Así:

$$y(x) = \frac{w}{2 \cdot G' \cdot b} (a \cdot x - x^2) \quad (3a)$$

Realmente la expresión (3a) sirve para evaluar el desplazamiento en cualquier sección del panel. Específicamente, cuando se trata de un voladizo, para una carga concentrada en su extremo:

$$y(a) = \frac{P \cdot a}{G' \cdot b} \quad (3b)$$

Desplazamiento en el extremo libre.

Referente a la rigidez G' : Como se señalara anteriormente, los fabricantes de cubiertas y entresijos metálicos han elaborado formulas y tablas que permiten evaluar las rigideces de sus elementos, que no es el objetivo de profundizar en este trabajo, sino solo citar su existencia (Luttrell & Schultz, 2002).

4. METODOLOGIA A SEGUIR EN UN CASO EN ESPECÍFICO DE ACUERDO A LOS METODOS DE RIGIDEZ O FLEXIBILIDAD

El objetivo fundamental de los autores es el de determinar el desplazamiento que toma lugar en estos diafragmas flexibles, compuestos por pórticos y paneles flexibles. Lo anterior se ilustrara a partir de ejemplo prácticos y el mismo se desarrollara siguiendo cada uno de los métodos definidos: Método de la Rigidez y Método de la Flexibilidad, comparando los resultados.

Ejemplo Ilustrativo: Se presenta un diafragma flexible que se soporta de tres pórticos de rigidez "k" y compuesto por paneles de rigidez "G". Como se ilustra en la Fig. 3.

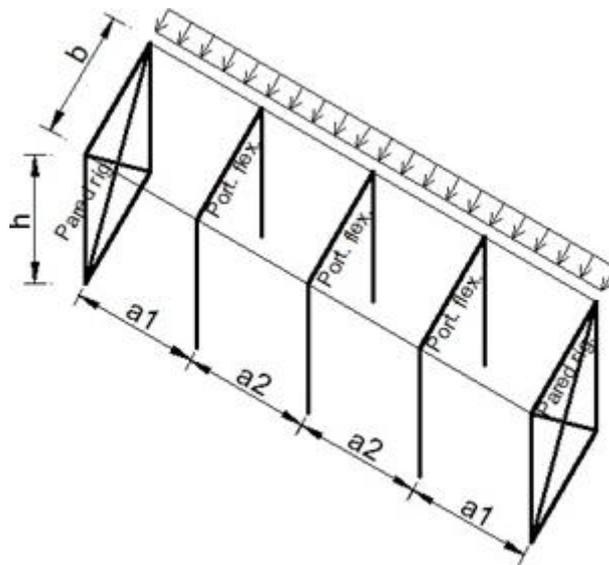


Figure 3. Diafragma flexible que se soporta de tres pórticos de rigidez "k".

Las rigideces de los pórticos fueron evaluadas por la vía normal-por los métodos tradicionales- o con el auxilio de cualquier programa de cálculo estructural.

La rigidez de los paneles fue proporcionada por su fabricante a través de tablas y formulas recomendadas por estos. Los extremos del diafragma reposan en paredes de concreto o mampostería que se consideraran infinitamente rígidas para los efectos del cálculo.

La anchura del diafragma y el espaciamiento entre los pórticos son conocidas así como la carga lateral actuante producto del viento .Obtener los desplazamientos y fuerzas en los pórticos.

Datos a partir de la Fig. 3:

$$a_1 = 30\text{ft}; b = 60\text{ft}; k_{\text{portico}} = \frac{10\text{kip}}{\text{in}}$$

Obtenida del programa RISA.

$$a_2 = 40\text{ft}; h = 12\text{ft}; G' = \frac{10\text{kip}}{\text{in}}$$

Según el fabricante de diafragma (ver Vulcraft Catalogo) es:

$$w = \frac{500\text{lb}}{\text{ft}}$$

Solución a partir del Método de la Rigidez:

El sistema base del Método de la Rigidez se representa en la Fig. 4 con los valores correspondientes a cada desplazamiento unitario de los pórticos respectivos.

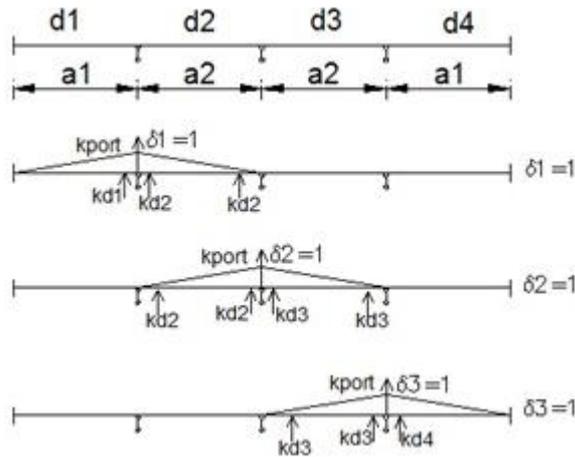


Figure 4. Sistema base.

Los \$d_i\$ representan los paneles afectados por el movimiento correspondiente. De donde la Rigidez del panel genérico sería:

$$k_{di} = \frac{G' \cdot b}{a_i}$$

De (3b) haciendo: \$y(a)=1\$ y despejando P. De este modo:

$$k_{d1} = \frac{G' \cdot b}{a_1} \quad k_{d1} = 40 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad k_{d2} = \frac{G' \cdot b}{a_2} \quad k_{d2} = 30 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$k_{d3} = \frac{G' \cdot b}{a_2} \quad k_{d3} = 30 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad k_{d4} = \frac{G' \cdot b}{a_1} \quad k_{d4} = 40 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

Las reacciones en las ligaduras impuestas a nivel de los pórticos serian:

$$r_{11} = k_{d1} + k_{d2} + k_{\text{portico}} \quad r_{11} = 80 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad r_{21} = -k_{d2}$$

$$r_{21} = -30 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad r_{31} = 0 \quad r_{12} = -k_{d2} \quad r_{12} = -30 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$r_{22} = k_{d2} + k_{d3} + k_{\text{portico}} \quad r_{22} = 70 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad r_{32} = -k_{d3}$$

$$r_{32} = -30 \frac{\text{kip}}{\text{in}} \quad r_{13} = 0 \quad r_{23} = -k_{d3} \quad r_{23} = -30 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$r_{33} = k_{d3} + k_{d4} + k_{\text{portico}} \quad r_{33} = 80 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

La matriz rigidez del sistema sería:

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 50 & -40 & 0 \\ -40 & 85 & -30 \\ 0 & -30 & 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

Las reacciones provocadas por la carga externa en cada ligadura anterior serían:

$$R_{1p} = w \cdot \frac{(a_1 + a_2)}{2} \quad R_{1p} = 17.5 \text{ kip}$$

$$R_{2p} = w \cdot \frac{(a_2 + a_2)}{2} \quad R_{2p} = 20 \text{ kip}$$

$$R_{3p} = w \cdot \frac{(a_2 + a_1)}{2} \quad R_{1p} = 17.5 \text{ kip}$$

El vector de las Cargas Modales sería:

$$R = \begin{pmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ R_{3p} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 20 \\ 17.5 \end{pmatrix} \text{ kip}$$

El vector de los Desplazamientos sería:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = K^{-1} \cdot R \quad \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.697 \\ 0.48 \end{pmatrix} \text{ in}$$

Desplazamientos en los pórticos del sistema.

Fuerzas actuantes en cada pórtico:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{\text{portico}} \cdot \Delta_1 \\ k_{\text{portico}} \cdot \Delta_2 \\ k_{\text{portico}} \cdot \Delta_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.803 \\ 6.974 \\ 4.803 \end{pmatrix} \text{ kip}$$

Por supuesto a cada pared extrema llegarán:

$$F_{\text{pared}} = \frac{[w \cdot (a_1 + a_2) - (F_1 + F_2 + F_3)]}{2}$$

$$F_{\text{pared}} = 26.711 \text{ kip} \quad \text{En cada pared}$$

Resultaría muy simple el demostrar que si los paneles se hicieron más flexibles, por ejemplo, si su Rigidez disminuyera a:

$$G' = 5 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

Las nuevas reacciones en los pórticos se harían mayores y menores las de las paredes en un orden del doble y la mitad, respectivamente.

En un límite, cuando el aporte de los paneles al sistema se hiciera casi nulo, en los pórticos tendrían lugar las reacciones similares a las obtenidas si se tomaran áreas tributarias. Por el contrario, también se podría en el ejemplo demostrar que si los paneles fueran muy rígidos los pórticos no tomarían prácticamente cargas, es decir, como en el caso de la teoría de los diafragmas rígidos.

5. EL METODO DE LA FLEXIBILIDAD

Al igual que en el artículo correspondiente a los diafragmas rígidos, en el caso de los diafragmas flexibles el Método de la Flexibilidad ofrece una vía de solución similar a la anterior. A continuación se analizarán los ejemplos ilustrativos a partir de este método:

Solución del ejemplo ilustrativo No1 a partir del método de la flexibilidad

Sistema Base correspondiente: En la Fig. 5 se presenta el sistema base del Método de la Flexibilidad, mientras en la Fig. 6 se muestran los Diagramas Unitarios.

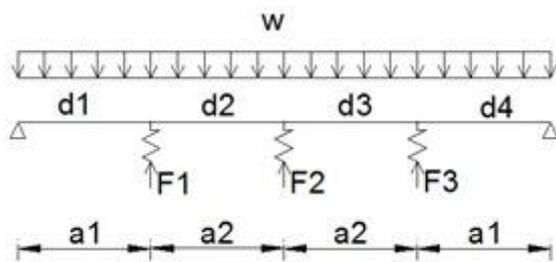


Figure 5. Sistema base del método de la flexibilidad.

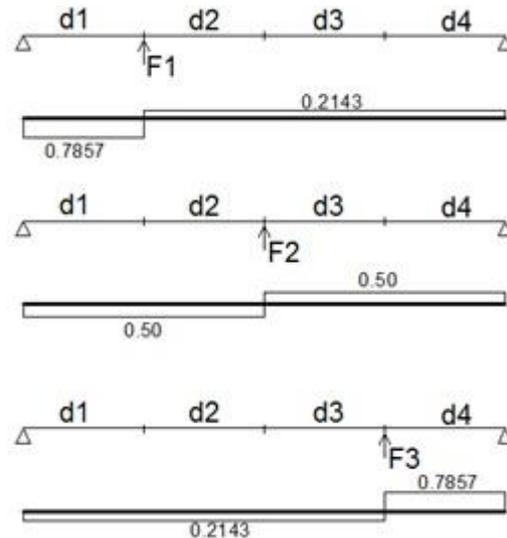


Figure 6. Diagramas unitarios.

Determinación de los coeficientes de la Matriz Flexibilidad

$$f_{11} = \frac{1}{b \cdot G'} \cdot a_1 \cdot 0.7857^2 + \frac{1}{b \cdot G'} \cdot (a_1 + 2 \cdot a_2) \cdot 0.2143^2 + \frac{1}{k_{\text{portico}}}$$

$$f_{11} = 0.12 \frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

$$f_{12} = \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [0.7857 \cdot 0.50 \cdot a_1 - 0.2143 \cdot 0.50 \cdot a_2 + 0.2143 \cdot 0.50 \cdot (a_1 + a_2)]$$

$$f_{12} = 0.013 \frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

$$f_{13} = \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [0.7857 \cdot 0.2143 \cdot a_1 - 0.2143^2 \cdot (2 \cdot a_2) + 0.2143 \cdot 0.7857 \cdot a_1]$$

$$f_{13} = 0.0054 \frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

$$f_{22} = \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [0.50^2(a_1 + a_2) + 0.50^2(a_1 + a_2)] + \frac{1}{k_{\text{portico}}}$$

$$f_{22} = 0.129 \frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

$$f_{23} = \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [0.50 \cdot 0.2143 \cdot (a_1 + a_2) - 0.50 \cdot 0.2143 \cdot a_2 + 0.50 \cdot 0.7857 \cdot a_1]$$

$$f_{23} = 0.013 \frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

$$f_{33} = \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [0.2143^2(a_1 + 2a_2) + 0.7857^2 a_1] + \frac{1}{k_{\text{portico}}}$$

$$f_{33} = 0.12 \frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

Matriz Flexibilidad:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0.11964 & 0.0125 & 0.00536 \\ 0.0125 & 0.12917 & 0.0125 \\ 0.00536 & 0.0125 & 0.11964 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

Determinación del vector de los desplazamientos nodales:

De la expresión (3) se puede derivar la correspondiente al ejemplo en cuestión, haciendo:

$$a = 2a_1 + 2a_2 \quad a = 140\text{ft}$$

Entonces evaluando la misma para cada posición de las fuerzas unitarias, se tendrá:

$$\Delta_{1p} = \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot G'} \cdot (a \cdot a_1 + a_1^2) \quad \Delta_{1p} = 0.688 \cdot \text{in}$$

$$\Delta_{2p} = \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [a \cdot (a_1 + a_2) - (a_1 + a_2)^2] \quad \Delta_{2p} = 1.021 \cdot \text{in}$$

$$\Delta_{3p} = \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{b \cdot G'} \cdot [a \cdot (a_1 + 2a_2) - (a_1 + 2a_2)^2] \quad \Delta_{3p} = 0.688 \cdot \text{in}$$

Vector de los desplazamientos nodales:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{pmatrix} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0.688 \\ 1.021 \\ 0.688 \end{pmatrix} \text{in}$$

Vector de fuerzas en cada pórtico:

$$\Delta \cdot F^{-1} = \begin{pmatrix} F_{\text{port1}} \\ F_{\text{port2}} \\ F_{\text{port3}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_{\text{port1}} \\ F_{\text{port2}} \\ F_{\text{port3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.803 \\ 6.974 \\ 4.803 \end{pmatrix} \text{ kip}$$

Ahora es muy fácil determinar los desplazamientos que toman lugar en cada uno de estos pórticos:

$$\begin{pmatrix} d_{\text{port1}} \\ d_{\text{port2}} \\ d_{\text{port3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{\text{portico}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_{\text{portico}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_{\text{portico}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{\text{port1}} \\ F_{\text{port2}} \\ F_{\text{port3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{\text{port1}} \\ d_{\text{port2}} \\ d_{\text{port3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.697 \\ 0.48 \end{pmatrix} \text{ in}$$

Note la coincidencia en ciento por ciento entre ambas soluciones.

Acerca de la analogía de la armadura:

Algunos autores han tratado de interpretar el comportamiento de un diafragma flexible como el de una armadura, que aporta una rigidez al sistema a través de sus diagonales y, desde luego, de existir, los pórticos de sustentación correspondientes. Este razonamiento parte de la siguiente consideración, a partir de la Fig. 7.

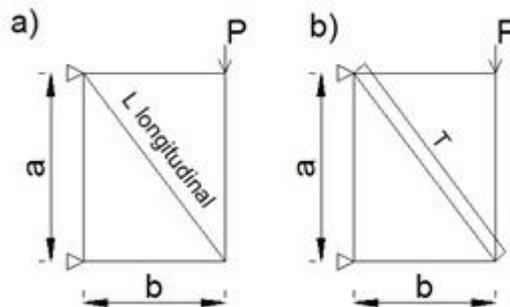


Figure 7. Armadura equivalente.

En la Fig. 7a se representa una armadura "equivalente" en rigidez a un panel flexible. En la Fig. 7b se señala que la fuerza que se produce en la diagonal por efecto de una carga transversal P es T, donde:

$$L_d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Longitud de la diagonal.}$$

$$T = \frac{P}{b} \cdot L_d \quad \text{(a) Tensión en la diagonal debido a P.}$$

Se le denomina: E_d la modulo de elasticidad del componente de la diagonal, y A_d el área de la sección transversal de la diagonal.

La deflexión que experimentara dicha diagonal en la dirección de P será:

$$\Delta_d = \frac{1}{E_d A_d} \cdot \frac{T \cdot L_d^2}{b} = \frac{1}{b^2 E_d A_d} \cdot P \cdot L_d^3 \quad (b)$$

Por su parte la deflexión que experimentaría el panel sería:

$$\Delta_{panel} = \frac{P \cdot a}{G' \cdot b} \quad (c)$$

Para lograr una equivalencia entre ambos elementos, es necesario que los desplazamientos sean los mismos; es decir:

$$\Delta_d = \Delta_{panel}$$

Entonces es necesario que:

$$A_d = \frac{G' \cdot L_d^2}{a \cdot b \cdot E_d} \quad (d)$$

De acuerdo con los resultados obtenidos en (d) si, por ejemplo, interesara obtener las características de las diagonales de la armadura equivalente en el Ejemplo Ilustrativo, y se utilizara una barra de acero, dichas diagonales tendrían que tener las siguientes áreas transversales:

$$a_1 = 30ft; \quad G' = 20 \frac{\text{kip}}{\text{in}}$$

$$E_d = 29000\text{ksi} \quad \text{Módulo de elasticidad del acero}$$

$$a_2 = 40ft$$

$$L_{d1} = \sqrt{a_1^2 + b^2} \quad L_{d1} = 67.082 \quad \text{Longitud de la diagonal 1}$$

$$L_{d2} = \sqrt{a_2^2 + b^2} \quad L_{d2} = 72.111 \quad \text{Longitud de la diagonal 2}$$

$$L_{d3} = \sqrt{a_3^2 + b^2} \quad L_{d3} = 67.082 \quad \text{Longitud de la diagonal 3}$$

$$A_{d1} = \frac{G' \cdot L_{d1}^3}{a_1 \cdot b \cdot E_d} \quad A_{d1} = 1.388 \text{ in}^2$$

$$A_{d2} = \frac{G' \cdot L_{d2}^3}{a_2 \cdot b \cdot E_d} \quad A_{d2} = 1.293 \text{ in}^2$$

El ejemplo ilustrativo se podría modelar tal como se indica en la Fig. 8.

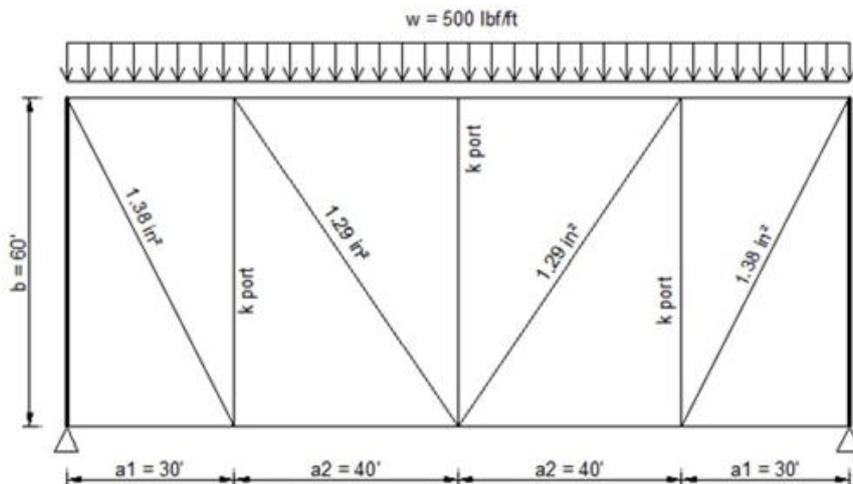


Figure 8. Modelación de la armadura.

6. CONCLUSIONES

Puede notarse que cualquier método que se siga, sea el de la Flexibilidad como el de la Rigidez conduce a resultados similares.

A lo largo de los ejemplos se puede corroborar que en el caso de los diafragmas flexibles, la contribución de los pórticos en el sistema está en dependencia de la rigidez-o flexibilidad- de los paneles. Que, en general, a medidas que esta rigidez se haga mayor, más se tiende al caso de los diafragmas rígidos, mientras menos rígidos tienden a una contribución cercana al del área tributaria.

En la realidad lo anterior se intuía desde siempre, pero, en este trabajo se pone cuantitativamente en evidencias.

El uso de la Analogía de la Armadura hace pensar que si se tiene un diafragma relativamente muy flexible y que obliga a los pórticos a trabajar más y por ende hacerse mayores para ganar rigidez, apenas con adicionar unas diagonales a los paneles se logra aumentar considerablemente la rigidez del sistema aun cuando los pórticos permanezcan sin variar.

REFERENCIAS

- Luttrell, L., W. Schultz, 2002. *Diaphragm design manual*. Steel Deck Institute (3rd. ed.).
- Pino, A., J. Soler, 2007. *El método de la flexibilidad vs el método de la rigidez en el análisis de diafragmas rígidos*.