UNIDAD 6. TEORÍA DE JUEGOS Y DECISIÓN

Teoría de juegos y decisión.

Tabla de contenido

UNIDAD 6. teoría de juegos y decisión ... 1
Tabla de contenido ... 2
Introducción ... 3
Objetivos ... 3
Objetivo general ... 3
Objetivos específicos ... 3
6.1 Teoría de la decisión con incertidumbre o riesgo ... 4
6.1.1 Criterios para valorar las posibles decisiones ... 5
6.1.2 Valor esperado de la información perfecta ... 8
6.2 Procesos de decisión de varias etapas – Arboles de decisión ... 9
6.2.1 Análisis Bayesiano ... 11
6.3 Teoría de juegos o juegos de estrategia ... 14
6.3.1 Elementos que intervienen en un juego ... 14
6.4 Clasificación de los juegos ... 15
6.5 Formas de representar un juego ... 16
6.6 Terminología ... 16
6.6.1 Método algebráico para encontrar estrategias óptimas ... 22
6.7 Juegos no cooperativos ... 23
6.7.1 Con información completa y estáticos ... 23
6.7.2 Con información completa y dinámicos ... 25
6.8 Teorema de Nash ... 28
6.9 Juegos de suma cero y suma variable ... 29
6.10 Dilema de los prisioneros – Modelo de Cournot ... 30
6.10.1 Modelo de Cournot ... 30
Resumen ... 33
Bibliografía ... 34

Introducción

El concepto de teoría de juegos y decisión empieza a cobrar importancia cuando se debe decidir entre varias alternativas, ya sea a nivel personal o laboral, tratando de elegir lo mejor entre lo posible.

Todos los días los humanos toman diversas decisiones. La mayoría de estas son relativamente carentes de importancia, pero también en ocasiones se toman decisiones importantes que pueden tener efectos inmediatos a lo largo de la vida. Estas decisiones se toman con base en emociones o en la intuición, pero ¿esto es realmente lo que se debe hacer? En esta unidad se analizará el proceso de toma de decisiones y se presentarán modelos que posiblemente puedan utilizarse para mejorar dicho proceso.

Los modelos pueden usarse o no; sólo proporcionan una estructura para examinar el proceso de toma de decisiones, siempre y cuando se justifique. Además, los modelos pueden utilizarse para evitar decisiones arbitrarías o inconsistentes que no se basen en toda la información disponible.

Sin embargo, los modelos para la toma de decisiones no pueden asegurar que el resultado sea favorable, en otras palabras, las buenas decisiones no son garantía de buenos resultados.

Objetivos

Objetivo general

Analizar y resolver situaciones conflicto en donde se deban tomar decisiones con diferentes intereses por parte de los decisores.

Objetivos específicos

- Identificar los principales conceptos de la teoría de juegos y decisiones.
- Construir modelos matemáticos que resuelvan las situaciones conflicto.
- Analizar y comprender los resultados de los planteamientos hechos en cada situación conflicto.

6.1 Teoría de la decisión con incertidumbre o riesgo

Existen situaciones en las que tomar una decisión depende del azar, de la aleatoriedad. De esta forma, el encargado de tomar la decisión debe hacerlo con diferentes estados resultado de la aleatoriedad.

Elementos que actúan en un proceso de decisión:

- $E = \{E_1,\ldots,E_m\}$: posibles escenarios.
- $A = \{A_1,\ldots, A_n\}$: posibles decisiones.
- x_{ij}: resultado de tomar la decisión A_i y resulte el estado E_j.

A veces entran las probabilidades a decidir en la toma de una decisión:

p_j: probabilidad de que se de el estado E_j; este valor no es conocido.

Un proceso de *decisión bajo riesgo* se presenta si las probabilidades son conocidas antes de tomar la decisión.

Un proceso de *decisión bajo incertidumbre* se presenta si las probabilidades son desconocidas antes de tomar la decisión.

Con estos criterios, cuando en el proceso hay una única decisión que tomar en un momento y los posibles escenarios y decisiones son finitas, se resuelve representando el problema mediante una tabla de decisión:

	E_1	**E_2**	**…**	**E_m**
	P_1	P_2	…	P_m
A_1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1m}
A_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	X_{n1}	X_{n2}	…	X_{nm}

Tabla 6.1. Tabla de decisión

A la matriz central formada por los resultados, se le denomina matriz de pagos *o* de resultados.

6.1.1 Criterios para valorar las posibles decisiones

Existen varios criterios para valorar alternativas y, de acuerdo a ellos, concluir cuál es la decisión óptima.

Según se utilicen las probabilidades de los distintos estados o no, así se clasifican los criterios.

Criterios utilizando las probabilidades de los estados de la naturaleza cuando los sucesos son conocidos:

- **Criterio del valor esperado**: Este criterio presume seleccionar aquella decisión cuyo dispendio esperado o medio sea mejor (si los dispendios son beneficios la de mayor beneficio esperado y si los desperdicios son costos la de menor costo esperado). Este criterio es bueno cuando el proceso se va a repetir varias veces, pero cuando se presenta una única situación, en la que el proceso no va a ser reiterado, puede no serlo.

- **Criterio de lo más probable:** Este criterio presume seleccionar la posible decisión con mejor valor para el escenario más probable, es decir, cuando se ha divisado el escenario más probable se debe elegir la posible decisión con mejor valor en ese escenario. Este criterio se aplica cuando el proceso de decisión no es repetitivo, es decir, se lleva a cabo una sola vez.

- **Criterio del escenario medio**: Cuando el espacio de posibles escenarios es numérico, es viable establecer un estado medio y buscar aquella posible decisión óptima para este estado. Tiene sentido hacerlo sobre todo con distribuciones continuas que son aquellas que cuentan con espacio de escenarios infinitos; si los resultados son proporcionales al posible escenario, este criterio es semejante al del valor esperado.

- **Criterio del valor en riesgo:** Este criterio es ventajoso cuando el conjunto de posibles estados es continuo o al menos tiene un número de posibles escenarios muy elevado. Este criterio se basa en que normalmente quien toma la decisión siente prevención por el riesgo, mientras que cuando el conjunto de posibles estados es para cantidades que superan un umbral, las diferencias no le importan si se tienen en cuenta.

A continuación conozca los criterios que no utilizan los sucesos de los posibles escenarios de la naturaleza. Estos criterios se usan cuando los **sucesos son desconocidos.**

- **Criterio pesimista o de Wald:** Llamado también *minimax-maximin. En* cada alternativa se presume que va a ocurrir lo peor y se elige aquella alternativa que da como resultado el mejor valor, de esta forma se garantiza que en el peor de los casos se obtendrá la mejor posible solución, que corresponde a un punto de vista de un pesimista de lo que puede resultar. En el evento de que los pagos sean costos se presume seleccionar el mínimo de los máximos recibiendo como nombre minimax, mientras que si son ganancias se presume seleccionar el máximo de los mínimos, recibiendo el nombre de maximin.

- **Criterio optimista:** Es el criterio opuesto al criterio de Wald o pesimista. Para cada alternativa de solución se supone que pasará lo mejor y se elige aquella alternativa que da como resultado el mejor valor.

- **Criterio de Hurwicz:** Este criterio combina las actitudes pesimista o criterio de Wald y optimista, estimando cada alternativa de solución con una ponderación entre lo mejor y lo peor posible. Se elegirá la alternativa que mejor valor de entre:

  - Multiplicar lo mejor por un factor α entre 0 y 1, llamado índice de optimismo.
  - Multiplicar lo peor por $1-\alpha$, adicionando las dos cantidades; denominado índice de pesimismo.

  Este criterio muestra el problema de estimar el valor del índice de optimismo de quien toma la decisión, de modo que normalmente resulta la respuesta para los posibles valores de este índice y se desea ubicar a quien toma la decisión en alguno de los intervalos provenientes del índice de optimismo.

- **Criterio de costos de oportunidad o de Savage**: Este criterio toma en consideración el costo de oportunidad o penalización o arrepentimiento por no predecir correctamente el posible escenario de la naturaleza.

  Estos costos de oportunidad se evalúan para cada posible decisión y cada posible escenario, haciendo la diferencia entre lo mejor de ese posible escenario y lo que proporciona esa posible decisión para ese posible escenario, realizando la matriz de penalizaciones o costos de oportunidad. Fundamentados en esta matriz se emplean los criterios anteriores, pudiendo emplearse el del costo esperado o el criterio minimax, llamándose también como criterio de minimizar el máximo arrepentimiento.

Ejemplo 1

Una compañía manufacturera provisiona su demanda para las próximas cuatro semanas de su producto estrella en 1, 2, 3 y 4, respectivamente con las siguientes probabilidades 0.1, 0.3, 0.4, y 0.2, respectivamente. Los costos de producción son de 5.000 dólares. Si un producto es fabricado y vendido el mismo mes su precio de venta será de 6.500 dólares, mientras que si se vende el mes siguiente el precio de venta será de 4.000 dólares. Con estos datos construir la matriz de decisión y aplicar los criterios de decisión.

	$E_1 = 1$	$E_2 = 2$	$E_3 = 3$	$E_4 = 4$
	$P_1 = 0.1$	$P_2 = 0.3$	$P_3 = 0.4$	$P_4 = 0.2$
$A_1 = 1$	1500	1500	1500	1500
$A_2 = 2$	500	3000	3000	3000
$A_3 = 3$	-500	2000	4500	4500
$A_4 = 4$	-1500	1000	3500	6000

Tabla 6.2. Matriz de decisión

Los criterios de decisión serán:

- Criterio de la ganancia esperada: Las posibles ganancias son: para A_1, 1.500; para A_2, 2.750; para A_3, 3.250 y para A_4, 2.750. Con lo que aplicando este criterio daría que la decisión óptima es producir 3 artículos.

- Criterio de lo más probable: La solución óptima más probable es E_3 y para ello el mejor posible escenario es expedir 3 artículos.

- Criterio del escenario medio: 1x0.1+ 2x0.3 + 3x0.4 + 4x0.2 = 2.7 (escenario medio)
  Si se observa se puede ver que no toca a ninguno de los escenarios posibles, ya que el resultado no es un número entero. Las ganancias serían para A_1, 1.500; para A_2, 3.000; para A_3, 3.750 y para A_4, 2750, que al observar la matriz no concuerdan con los valores de la ganancia esperada. Aplicando el criterio la decisión permitida sería A_3.

- Criterio de Wald: Las ganancias mínimas para cada decisión son: A_1 =1.500; A_2 = 500; A_3 = -500 y A_4 = –1.500, al punto que la posible decisión seleccionada sería producir 1 artículo.

- Criterio optimista: Las ganancias máximas son: A_1 = 1.500; A_2 = 3.000; A_3 = 4.500; A_4 = -1.500, al punto de que la posible decisión sería producir 4 artículos.

- Criterio de Hurwicz: Para cada posible decisión se tiene: A_1 1.500; A_2, 3.000 α +500(1-α), A_3 4.500α -500(1- α) y A_4 6.000α -1.500(1- α). Si α <0.4, la posible solución sería producir 1 artículo, mientras que si es superior la posible decisión sería producir 4 artículos.

- Criterio de Savage: Primero se construye la matriz de penalizaciones o costos de oportunidad. La matriz se representa por columnas, resultando el máximo de la columna y restándole a este valor el pago de cada posible solución.

0	**1500**	**3000**	**4500**
1000	0	1500	3000
2000	1000	0	1500
3000	2000	1000	0

Tabla 6.3. Matriz de penalización

Empleando el criterio minimax, para minimizar la máxima penalización, dando como resultado que las ganancias máximas son 4.500, 3.000, 2.000 y 3.000, respectivamente, con lo que la solución sería producir 3 artículos.

6.1.2 Valor esperado de la información perfecta

La imagen que se tiene referente a los posibles escenarios de la naturaleza se puede cambiar. Este cambio puede arrojar como consecuencia un costo y la pregunta es, ¿cuánto vale el disponer de esa información?, ¿cuánto se está dispuesto a pagar por ella? Hay que tener en cuenta que será mayor la ganancia esperada teniendo mayor información.

De esta forma se puede definir:

Ganancia esperada con información perfecta: Es la expectativa de la ganancia tomando para cada posible escenario la mejor opción. Para la compañía manufacturera del ejercicio anterior sería $0.1 \cdot 1500 + 0.3 \cdot 3000 + 0.4 \cdot 4500 + 0.2 \cdot 6000 = 4050$.

Ganancia esperada con incertidumbre: Es la expectativa esperada con la decisión que se haya elegido con alguno de los criterios presentados anteriormente. Para la compañía manufacturera del ejercicio anterior sería la decisión seleccionada la A_3 y la ganancia esperada es 3.250.

Valor esperado de la información perfecta: Es la resta de la ganancia esperada con información perfecta y la ganancia esperada con incertidumbre. Para la compañía manufacturera del ejercicio anterior sería = 4.050 – 3.250 = 800.

6.2 Procesos de decisión de varias etapas – Arboles de decisión

Se puede tomar un proceso de decisión como un proceso consecutivo de decisión-azar, donde consecuentemente se van eligiendo decisiones y va funcionando el azar, limitando las decisiones siguientes.

Para representar la aleatoriedad por etapas se emplean los llamados árboles de decisión o de escenarios. Sin embargo, no basta representar la aleatoriedad, ya que lo que puede o no darse posteriormente condiciona las decisiones tomadas en el proceso, representándose en un árbol de decisión o escenarios la continuidad de la aleatoriedad y las decisiones que integran el proceso. Cuando tanto el espacio de estados como el de las decisiones son discretos, esta representación es apropiada.

Los siguientes elementos se utilizan para representar gráficamente el proceso en un árbol de decisión o de escenarios:

- Vértice de azar: Son vértices que personifican puntos en los que la naturaleza elige un posible escenario. De allí salen tantos arcos como estados de la naturaleza posibles que haya en ese punto y se figuran mediante un círculo.

- Vértice de decisión: Son vértices que personifican puntos en los que hay que tomar una decisión. De allí salen tantos arcos como posibles decisiones que hay en ese punto y se figuran mediante un cuadrado.

- Vértice inicial o raíz: Como su nombre lo indica es la raíz del árbol; en este proceso lo primero es tomar una decisión. De allí salen tantos arcos como decisiones iniciales hayan.

- Vértice terminal u hoja: Son los vértices concluyentes de una rama que es seguido de estados y decisiones. Allí se les asigna el costo o beneficio (según la función objetivo a evaluar) del camino o decisión seguido para llegar a él y se figuran mediante un triángulo.

El árbol se construye de la raíz o inicio a las hojas o terminación, expresando el proceso secuencial que es seguido y una vez acabado se valora de las hojas o terminación a la raíz o inicio de la siguiente forma:

- **Nodos de azar:** Se estiman con alguno de los criterios mostrados para valorar decisiones; suele ser el del valor medio, pero se puede elegir otro.

- **Nodos de decisión:** Se estiman eligiendo la mejor posible decisión según el criterio considerado; se rechazan las decisiones no seleccionadas y con ello todos los caminos que surjan de ese arco.

Ejemplo 2

Una compañía comercializadora de muebles debe decidir en el mes de enero si va a acudir a la feria del hogar que se celebra en el mes de septiembre en Bogotá. Para ello, en caso afirmativo, deberá pagar 40.000 dólares por poder instalar su puesto en la feria. En el mes de agosto, un mes antes de la feria, se conocen las suposiciones del clima para el mes de septiembre. Por resultados climatológicos de años atrás se sabe que el 30% de estos pronósticos son de mal tiempo, de modo que si estos son de mal tiempo, la compañía sabe que lo más rentable es no ir a la feria. En el caso de que sean buenas las suposiciones climáticas, la compañía iría a la feria del hogar y haría el pedido de productos a vender. Concebiría realizar dos tipos de pedidos: uno grande de 900 juegos de alcoba, con un costo de compra de 100 dólares y un precio de venta de 300 dólares o uno pequeño de 600 juegos de alcoba con un costo de compra de 125 dólares y un precio de venta de a 350 dólares. Una vez en la feria del hogar, esta compañía estima que la demanda puede ser de tres tipos: demanda alta de 900 juegos de alcoba, media de 600 juegos de alcoba y baja de 300 juegos de alcoba, con probabilidades 0.3, 0.5 y 0.2, respectivamente. Sin embargo, se puede dar el escenario de que si la solicitud de productos es mayor que la oferta de productos que ha llevado a la feria del hogar, entonces el precio de venta se verá reducido en 50 dólares, como penalización. ¿Qué política debe adoptar la compañía?

Este problema será representado gráficamente mediante el siguiente árbol de decisión:

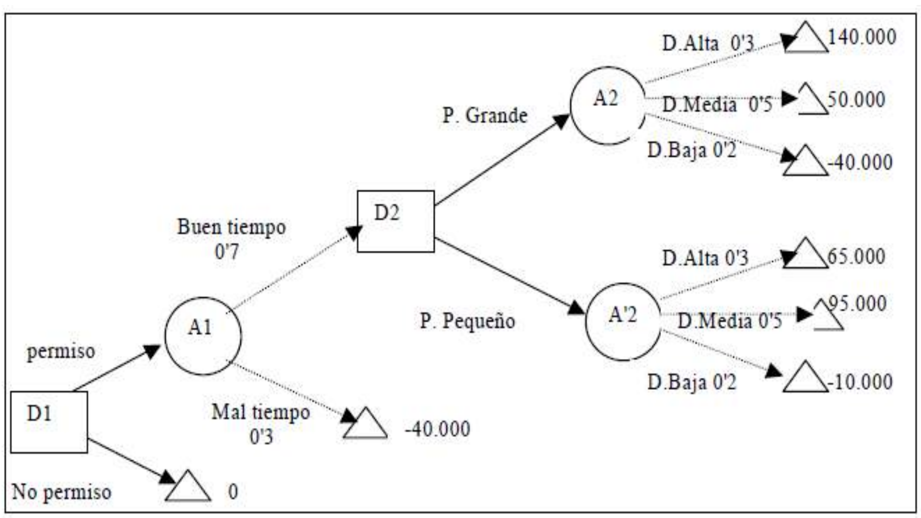

Gráfico 6.1. Árbol de decisión vendedor ambulante.

La valoración de los nodos es la siguiente:

- Nodo A2: Se elige y valorará según el criterio del valor medio con 59.000, pudiendo definir por cualquiera. Por ejemplo: Criterio de Wald con –40.000. La idea es elegir cualquier criterio de los estudiados.

- Nodo A'2: Como se decidió según el criterio del valor medio, será de 65.000.

- Nodo D2: Como este es un nodo de decisión, se elegirá el mejor valor de los nodos ligados a él, es decir, el mejor de A2 y A'2, con 65.000.

- Nodo A1: Como este es un nodo de azar, se evalúa por el criterio adoptado con la media del nodo, es decir, 45.500.

  El otro nodo es un nodo terminal con valor de 0.

- Nodo D1: Como es un nodo de decisión en el que se debe elegir entre 45.500 y 0, con lo que deriva valorado en 45.500.

La política óptima para la compañía será solicitar la aprobación en enero y asistir si hace buen tiempo con pedido pequeño de 600 juegos de alcoba para obtener una ganancia esperada de 45.500 dólares.

6.2.1 Análisis Bayesiano

En muchos escenarios es posible reunir información al árbol de decisión de manera parcial y para reunir esta información ha de utilizarse el análisis Bayesiano. Este análisis bayesiano cambia las posibilidades en términos de probabilidad de los escenarios en función de la nueva información que se reúna.

El teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total son la base en las dos consecuencias de probabilidad más utilizados en el cálculo de probabilidades condicionadas en el análisis bayesiano.

Teorema de la probabilidad total: A partir de las probabilidades de este evento condicionadas a otros eventos que formen un sistema completo, se permite calcular la probabilidad de un suceso, es decir, cuya alianza sea toda el área muestral y sean disjuntas. Así, si $\{B1,\ldots,Bn\}$ son tales que $\cup Bi = \Omega$ y $Bi \cap Bj = \emptyset \ \forall i \neq j$, para cualquier suceso se tiene:

$$P\ (A) = \sum_{i} P\ (A/B_i)\ .P\ (B_i)$$

Cuando la información de la que se dispone es del condicionado inverso: (el teorema de Bayes establece la probabilidad de un suceso A condicionada a la ocurrencia de otro suceso).

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P\left(\frac{A}{B}\right).P(B)}{P(A)}$$

En el ejemplo anterior la compañía, dado la cantidad de dinero tan alta que está en juego, examina exasperadamente que alguien le pueda dar información adicional en enero acerca de lo que va a ocurrir con el pronóstico del clima en el mes de septiembre para la feria del hogar en Bogotá. Al fin encuentra a un experto meteorólogo que le señala que la compañía puede hacer un pronóstico por 10.000 dólares y que, anteriormente, ya lo ha hecho con los siguientes resultados:

- A buen tiempo atino 3 de cada 5 veces
- A mal tiempo atino 2 de cada 5 veces.

A la compañía se le presenta una decisión que es decidir si va a pedir el permiso o si consulta al experto meteorólogo. Ahora el nodo inicial es otro del que salen dos arcos, uno que es consultar al experto meteorólogo y otro que es no hacerlo. Si no se consulta al experto meteorólogo todo se mantiene igual que antes, con lo que el nodo que sale de ahí ya estaría valorado: 45.500.

Si se consulta al experto meteorólogo se tendría que evaluar el otro nodo, teniendo en cuenta que viene un nodo de azar acerca del resultado de la consulta después de esta y que según sea el resultado modifica las siguientes probabilidades de ocurrencia de buen tiempo y mal tiempo basándose en lo que dice el experto meteorólogo.

Primero se requieren hallar las probabilidades de lo que dirá el experto meteorólogo.

B= suceso de buen tiempo en septiembre.
M= suceso de mal tiempo en septiembre.
DB= suceso de que el experto meteorólogo indique que va a hacer buen tiempo.
DM= suceso de que el experto meteorólogo indique que va a hacer mal tiempo.

La información que se tiene es: probabilidad de buen tiempo $P(B) = 0.7$ y probabilidad de mal tiempo $P(M) = 0.3$. Por otro lado, se sabe la probabilidad de que el experto indique buen tiempo sobre la probabilidad de buen tiempo $P(DB/B) = 3/5 = 0.6$ y la probabilidad de que el experto indique mal tiempo sobre la probabilidad de mal tiempo $P(DM/M) = 2/5 = 0.4$, de lo que resulta por complemento la probabilidad de que el experto indique mal tiempo sobre la probabilidad de buen tiempo $P(DM/B) =$

$1-3/5 = 0.4$ y la probabilidad de que el experto indique buen tiempo sobre la probabilidad de mal tiempo $P(DB\,/M) = 1-2/5 = 0.6$.

Luego, aplicando el teorema de la probabilidad total, se puede obtener como resultado directamente la probabilidad de que el experto meteorólogo indique que hará buen clima o que diga que hará mal clima:

$$P(DB) = P(DB\,/B)P(B)+P(DB\,/M)P(M) = 0.6\times0.7 + 0.6\times0.3 = 0.6$$
$$P(DM) = P(DM\,/B)P(B)+P(DM\,/M)P(M) = 0.4\times0.7 + 0.4\times0.3 = 0.4$$

El valor de $P(DM)$ es complemento de $P(DB)$.

Estas serán las probabilidades de los arcos que salen del nodo del experto meteorólogo, teniendo en cuenta que cualquiera de ellas afectará a las probabilidades que habrá que poner en los arcos siguientes cuando se llegue al nodo de la suposición meteorológica de septiembre, ya que las probabilidades han de ser probabilidades condicionadas a los valores que la aleatoriedad haya tomado anteriormente. Así, en los arcos posteriores a los que dice el experto meteorólogo que hará buen clima, las probabilidades que hay que situar son $P(B\,/DB)$ y $P(M\,/DB)$, mientras que en los que derivan del estado que el experto meteorólogo dice que hará mal clima serán condicionadas al evento DM .

Se utilizará el teorema de Bayes para calcular estas probabilidades condicionadas ya que no se tienen.

$$P\left(B\,\frac{D}{B}\right) = \frac{P\left(\frac{DB}{B}\right)P\,(B)}{P\,(DB)} = \frac{0.6\ x\ 0.7}{0.6} = 0.7$$

$$P\left(M\,\frac{D}{B}\right) = \frac{P\left(\frac{DB}{M}\right)P\,(M)}{P\,(DB)} = \frac{0.6\ x\ 0.3}{0.6} = 0.3$$

$$P\left(B\,\frac{D}{M}\right) = \frac{P\left(\frac{DM}{B}\right)P\,(B)}{P\,(DM)} = \frac{0.4\ x\ 0.7}{0.4} = 0.7$$

$$P\left(M\,\frac{D}{M}\right) = \frac{P\left(\frac{DM}{M}\right)P\,(M)}{P\,(DM)} = \frac{0.4\ x\ 0.3}{0.4} = 0.3$$

Estas probabilidades son las que habría que poner entonces en las ramas correspondientes y valorar de nuevo toda esta parte del árbol. Como se observa resulta evidente que las probabilidades de que haga buen tiempo o mal tiempo no se ven afectadas por lo que diga el experto, de modo que este experto meteorólogo no es más que un timador que pretende engañar a la compañía.

6.3 Teoría de juegos o juegos de estrategia

La teoría de juegos, juegos de estrategia o teoría de las decisiones interactivas es el estudio del actuar principal cuando dos o más individuos o jugadores interactúan y cada fallo individual es consecuencia de lo que el otro individuo o jugador espera que los otros individuos o jugadores hagan.

Un juego: Es un entorno en el que se hace necesario tomar una decisión acorde a unas astucias o estrategias creadas por las partes activas o jugadores. El juego está gobernado por unas reglas y un resultado preciso.

La teoría de juegos y decisiones fue diseñada y elaborada por el matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern en 1939 (The Theory of Games and Economic Behaviour (1944)), con el fin de realizar análisis de ciertos procesos de negociación.

A.W. Tucker fue el creador y diseñador del famoso e importante problema del "Dilema del Prisionero". El matemático John Forbes Nash Jr. (1928), (Premio Nobel de Economía en 1994 por sus contribuciones a la Teoría de Juegos) creó en 1950 la noción de "Equilibrio Nash", que corresponde a una situación en la que dos rivales, individuos o jugadores, están de acuerdo con determinada situación o reglas del juego o negociación. Otros importantes representantes de la teoría de juegos fueron el húngaro nacionalizado estadounidense John Harsanyi (1920), (Premio Nobel de Economía en 1994 por sus contribuciones a la teoría de juegos) y el alemán Reinhard Selten (Premio Nobel de Economía en 1994 por sus contribuciones a la teoría de juegos).

6.3.1 Elementos que intervienen en un juego

Los elementos que entran en un juego son, además de los individuos o jugadores, los siguientes:

- Para cada individuo o jugador se tiene el conjunto de estrategias, llamado las estrategias de los jugadores.

- Cada individuo o jugador tiene una función que determina el pago que recibe el individuo o jugador cuando cada uno de ellos adopta una de sus posibles estrategias. Siempre se supone que los pagos son ganancias, estas son llamadas los pagos de los jugadores.

Un juego con dos individuos o jugadores se puede expresar mediante la forma normal de un juego:

- X: conjunto de estrategias de J1
- Y: conjunto de estrategias de J2
- Pagos o utilidades de los pares de estrategias para los jugadores:

$M_1 = X \; x \; Y \to R$ (x,y) $\to$ M_1 (x,y) función de pagos (pagos que recibe) del jugador J_1

$M_2 = X \; x \; Y \to R$ (x,y) $\to$ M_2 (x,y) función de pagos (pagos que recibe) del jugador J_2

Cuando el juego es de dos individuos o jugadores y los conjuntos de estrategias son finitos, éste se resuelve mediante una matriz de pago denominada bimatriz, en donde las filas representan las estrategias del primer jugador y las columnas las del segundo.

$$\begin{pmatrix} (a11, b11) & \dots & a1n, b1n \\ \dots & (aij, bij) & \dots \\ (am1, bm1) & \dots & (amn, bmn) \end{pmatrix}$$

Siendo a_{ij} el pago que recibe el primer individuo o jugador si él escoge su estrategia iésima y el segundo individuo o jugador si él escoge su estrategia j-ésima, y b_{ij} el pago que recibe el segundo individuo o jugador si optan ambos individuos o jugadores por esas mismas estrategias.

6.4 Clasificación de los juegos

Los juegos pueden clasificarse según su criterio:

CRITERIO	CLASIFICACIÓN
Número de jugadores	Juegos bipersonales Juegos Npersonales
Número de estrategias de los jugadores	Juegos finitos: Si los conjuntos de estrategias son finitos. Juegos infinitos: Si los conjuntos de estrategias son infinitos.
Evolución en el tiempo	Juegos estáticos o dinámicos: Aquellos en el que en el transcurso del juego existe una ganancia de información por parte de algún jugador.
Relación de intercambio de información entre jugadores	Juegos cooperativos: Los jugadores intercambian información y pueden colaborar; no que tengan intereses comunes. Juegos no cooperativos: Los jugadores no intercambian información y no pueden colaborar.

Variación de “riqueza” del conjunto de jugadores	Juegos de suma no constante: En el propio juego se genera o pierde riqueza del conjunto. Juegos de suma constante: En el que hay una cantidad que repartir y el problema es cómo se hará ese reparto, por tanto, toda la ganancia de un jugador es pérdida del otro.
Cantidad de información de que disponen los jugadores	Juegos con información completa: La función de ganancias de cada jugador es conocida por todos los jugadores, o juegos con información incompleta, en cuyo caso un jugador al menos no conoce las ganancias del otro jugador.
Cantidad de información que adquieren durante el juego	Juego de información perfecta: En cada momento el jugador que tiene que decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento. Juego con información imperfecta: El jugador que tiene que decidir no conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento.

Tabla 6.4 Clasificación de lo juegos.

6.5 Formas de representar un juego

Juegos en forma extensiva: Un árbol de decisión contiene la información necesaria para resolver un juego. Los puntos de decisión del árbol se llaman nodos. Un nodo con un círculo alrededor y el número de jugador en su interior indica a qué jugador corresponde jugar y qué es lo que el jugador sabe en ese instante. Las alternativas que salen de cada nodo se llaman ramas. Los resultados correspondientes a cada nodo terminal reciben el nombre de ganancias.

Juegos en forma normal: Se basan sólo en estrategias codificando toda la información en una matriz de pagos. Se debe hacer un listado con las estrategias posibles de cada jugador, después se colocan las estrategias en una matriz, las filas de la matriz corresponden a las estrategias del jugador 1 y las columnas a las estrategias del jugador 2. Las ganancias de las ramas terminales se colocan en las casillas correspondientes de la matriz.

6.6 Terminología

Interacción estratégica: La esencia de un juego de estrategia es la interdependencia entre las decisiones de los jugadores.

Existen dos tipos de interacciones:

- **Secuencial**: Lo primero que se debe hacer en esta estrategia es mirar hacia adelante e inferir hacia atrás, teniendo observadores en las movidas, quienes habrán de elegir el juego posteriormente. De igual forma, las estrategias de cada parte deben ser irreversibles. Se prevén las disposiciones futuras y se utilizan para tomar las decisiones anteriores. En cada nodo del árbol puede ser la tanda de tomar una decisión para un individuo o jugador; alguien que elige tomar una decisión en un punto debe tener en cuenta no sólo sus propias decisiones futuras, sino también las de otros individuos o jugadores. Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, si alguna de estas no se cumple se puede razonar el juego bajo una interacción simultánea.

- **Simultánea**: Cada individuo o jugador debe proceder bajo condiciones de ignorancia acerca de la jugada de los otros. La estrategia en estos casos consiste en ponerse simultáneamente en los zapatos del contrincante y ver cuál es la jugada más conveniente para ambos individuos o jugadores. Para manejar un juego con una interacción simultánea primero se debe elegir una estrategia dominante, posteriormente se deben eliminar todas las estrategias dominadas bajo consideración y cuando se haya reducido el juego se debe cotejar el problema de razonamiento circular (lo que es mejor para uno depende de lo que es mejor para el otro y viceversa). Después se debe buscar un equilibrio para el juego.

Resolución de juegos con decisiones simultáneas:

- Construir la matriz de pagos.
- Usar la estrategia dominante en caso de tenerla
- Si no se tiene una estrategia absoluta y el otro individuo o jugador si la tiene, asumir que la va a emplear y actuar de acuerdo a ello.
- Si nadie tiene una estrategia absoluta, reducir el problema eliminando las estrategias absolutas.
- Si no hay estrategias absolutas, buscar una armonía.

Equilibrios eficientes e ineficientes: Un equilibrio es eficiente si no hay un resultado alterno o electivo que deje a algunos individuos o jugadores mejor y a ningún individuo o jugador peor. Un equilibrio no es eficiente si hay algún otro resultado para todos los individuos o jugadores que encuentren predilecto.
En un juego puede haber bastantes de ambos equilibrios.

Información perfecta e imperfecta: Un individuo o jugador tiene información perfecta si está al tanto de lo que ocurre cada vez que toma una decisión. Si algún jugador no tiene información perfecta, el juego es de información imperfecta que sucede cuando el individuo o jugador en el instante de tomar una decisión no sabe ubicarse en el juego. Para poder contener información imperfecta se necesita agregar la herramienta del "azar", de esta forma, las ramas que parten de un nodo de azar representan probabilidades. Un individuo o jugador no conoce en qué nodo estará cuando le corresponda realizar su jugada. Lo único que conoce el individuo o jugador son las probabilidades con que se llega a cada nodo.

La dispersión de información da paso a las estrategias ofensivas y defensivas, de tal forma que se aprovecha cualquier ventaja informativa propia y se limitan las ventajas de información de otros.

Estrategias puras y estrategias mixtas: Una decisión que se toma con certeza es estrategia pura. En oposición a tal concepto, una combinación de decisiones tomada de acuerdo a una serie de probabilidades es una estrategia mixta y la sumatoria de estas debe arrojar el 100%. Un problema se puede resolver con estrategias mixtas cuando no se alcanza una solución con estrategias puras.

Las proporciones iguales de estrategias puras pueden crear diversos tamaños, como un único equilibrio; dos o más proporciones pueden crear infinitas proporciones en un conjunto de conjuntos del total de escenarios finales del juego o infinitas proporciones que cubren la totalidad de escenarios finales del juego. En cualquiera de ellas, una proporción de estrategia pura es una situación final cuya probabilidad de arrojar máximo beneficio a los dos individuos o jugadores es uno. Es posible determinar equilibrios Nash de estrategias mixtas cuando no hay equilibrios Nash de estrategias puras.

Suponer que un conjunto de las situaciones finales tiene un valor esperado único y máximo es el método para hallar las distribuciones de probabilidad de las estrategias mixtas. Para que se produzca esa equivalencia se deben calcular las distribuciones de probabilidades.

Ejemplo 3

Un juego dinámico que según su número de jugadores es bipersonal, que según su número de estrategias de los jugadores es finito, que según su relación de intercambio de información entre jugadores es no cooperativo y que según la cantidad de información que adquieren durante el juego es con información completa, pero imperfecta.

Un juego de estos se plantea por pasos:

1. J_1 cifra un número $x \in \{1,2\}$ en un documento sin que nadie lo vea.

2. El azar elige (procedimiento aleatorio y con tal distribución) un número $y \in \{1,2\}$ con probabilidades ¾ (0.75) y ¼ (0.25), respectivamente.
3. J_2 escoge un número $z \in \{1,2,3\}$ sin conocer x pero conociendo y
4. Se obtienen los pagos $h_1(x,y,z)$ y $h_2(x,y,z)$

Este tipo de juegos por etapas se suelen construir mediante la forma extensiva de un juego o lo que se llama un árbol de decisión, que es la forma más habitual de representar un juego dinámico.

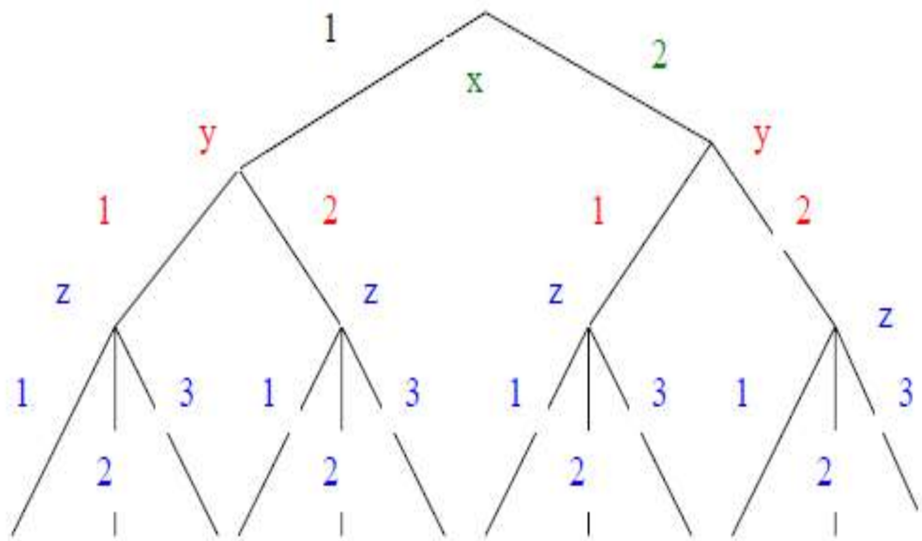

Gráfico 6.2. Árbol o forma extensiva de un juego

Este juego es dinámico porque hay un dividendo de información; si el segundo individuo o jugador no conociera el resultado del azar, seguiría estando estancado aunque pueda parecer lo contrario. En este juego, dada la información que tiene el segundo individuo o jugador, por ejemplo y=1 y z=1, el jugador o individuo no puede conocer si se encuentra en el primer nodo de la izquierda o en el séptimo. A estos conjuntos, que son idénticos para un jugador, se les llama conjuntos de información.

Ejemplo 4

Un juego que, según su evolución en el tiempo es estático, que según su número de jugadores es bipersonal, que según su número de estrategias de los jugadores es finito, que según su relación de intercambio de información entre jugadores es no cooperativo, que según la cantidad de información que adquieren durante el juego es con información completa y que según su variación de “riqueza” del conjunto de jugadores es suma constante.

Suponga un juego de batalla naval en el que existen dos posiciones en juego, la A y la B.

El individuo o jugador 1 ampara o defiende ambas posiciones con 3 particiones, mientras que el individuo o jugador 2 asalta o ataca con 5 particiones. En caso de igualdad de particiones, en alguna de las posiciones, gana la posición el individuo o jugador que defiende. El número de particiones que envía cada uno a cada posición son las estrategias de los individuos o jugadores y los pagos serán el número de situaciones ganadas.
La matriz de pagos puede diseñarse de la siguiente manera:

	(0,5)	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)	(5,0)
(0,3)	(1,1)	(0,2)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
(1,2)	(1,1)	(1,1)	(0,2)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
(2,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(0,2)	(1,1)	(1,1)
(3,0)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(0,2)	(1,1)

Ejemplo 5

Estrategias mixtas
Los jugadores X y Y deben determinar la proporción del tiempo en que deben jugar cada renglón (esto sólo se aplica a X) y cada columna (lo que sólo se aplica a Y).

Hay tres métodos para encontrar estrategias óptimas para una matriz de 2 x 2: aritmético, algebraico y de álgebra matricial.

Método aritmético para encontrar estrategias óptimas
Lo primero que se debe hacer es restar el pago menor del mayor en cada renglón y aplicar el mismo procedimiento a la columna.

Ejemplo 6

Una compañía y un sindicato negocian un contrato de trabajo. Las estrategias a desarrollar son las siguientes:

Estrategias para la compañía

C1: Se esperan negociaciones difíciles con el sindicato.

C2: Se considera que las peticiones del sindicato son prácticas.
C3: Se considera que las peticiones del sindicato son prácticas.
C4: Amplias variaciones en las peticiones del sindicato.

Estrategias para el sindicato

S1: Peticiones costosas de parte del sindicato.
S2: Peticiones costosas de parte del sindicato.
S3: Peticiones normales de parte del sindicato.
S4: Peticiones favorables a la empresa, pero no para el sindicato.

Con base en las estrategias se construyó la siguiente matriz de costos de un aumento condicional de salarios:

		Estrategias de la Compañía			
		C1	C2	C3	C4
Estrategias del sindicato	S1	0.25	0.14	0.15	0.32
	S2	0.40	0.17	0.13	0.16
	S3	0.30	0.05	0.12	0.15
	S4	-0.01	0.08	0.11	0.03

Tabla 4. Matriz de costos

Reduciéndola por dominio se llega a:

0.14 0.15 — 0.15 - 0.14 = 0.01
0.17 0.13 — 0.17 – 0.13 = 0.04

0.17 0.15
-0.14 -0.13
0.03 0.02

Posteriormente se intercambian cada uno de los pares de valores restados.

0.14 0.15 — 0.04
0.17 0.13 — 0.01
0.02 0.03

Con el fin de determinar las estrategias de las compañías, se debe sumar 0.02 y 0.03 y luego colocarse en cada uno de ellos. Se sigue el mismo procedimiento para el sindicato:

C 0.04 C
0.14 0.15 0.04 + 0.01 0.14
0.15 4/5
S 0.17 0.13 0.01 S 0.17 0.13 1/5
0.02 0.03
0.04 + 0.01 2/5
3/5
0.02 + 0.03 0.02 + 0.03

Esta no es una técnica útil para juegos de dimensiones amplias.

6.6.1 Método algebráico para encontrar estrategias óptimas

Se debe dejar que Q sea igual al tiempo (menor que 1), que el jugador X emplea jugando el primer renglón y (1 – Q), el tiempo que emplea jugando el segundo renglón.

Se aplica ese mismo concepto al jugador Y, empleando P. En el ejemplo de la compañía y el sindicato la representación de la distribución proporcional del tiempo entre las columnas y los renglones es la siguiente:

		C2	C3
		P	1 – P
S1	Q	0.14	0.15
S2	1 – Q	0.17	0.13

Con este método el sindicato quiere dividir sus jugadas entre los dos renglones, con el fin de que las ganancias esperadas de la jugada del primer renglón sean exactamente iguales a las ganancias de la jugada del segundo renglón, a pesar de que lo haga la compañía. Con el fin de llegar a las estrategias correctas para el sindicato cuando se juegue ya sea el renglón 1 o el 2, es necesario igualar las ganancias esperadas del sindicato cuando la compañía juega la columna 2 con las utilidades esperadas del sindicato cuando la compañía juega la columna 3. Para hacerlo se deja que: $0.14\,Q + 0.17\,(1 - Q)$ sea igual a $0.15\,Q + 0.13\,(1-Q)$ y se resuelve:

$$0.14Q + 0.17\,(1-Q) = 0.15\,Q + 0.13\,(1-Q)$$

$$0.14\,Q + 0.17 - 0.17Q = 0.15\,Q + 0.13 - 0.13Q$$

$$0.05 = 0.04$$

$$Q = 4/5$$

El cálculo anterior indica que el sindicato jugará el primer renglón 4/5 partes del tiempo y el segundo renglón 1/5 parte (1 – Q o 1- 4/5 = 1/5).

El mismo enfoque del sindicato se aplica a la compañía. Las expectativas de la compañía al jugar la segunda columna P del tiempo y su tercera columna (1-P) del tiempo, se igualan de la siguiente forma: las pérdidas esperadas de la compañía cuando el sindicato juega el renglón 2. En esas condiciones la ecuación es la siguiente:

$$0.14P + 0.15\,(1 - P) = 0.17P + 0.13\,(1-P)$$

$$0.14P + 0.15 - 0.15P = 0.17P + 0.13 - 0.13P$$

$$5P = 2$$

$$P = 2/5$$

Esta solución indica que la empresa jugará la columna 2, 2/5 partes del tiempo y la columna 3, 3/5 partes del tiempo (1-P o 1-2/5 = 3/5).

6.7 Juegos no cooperativos

6.7.1 Con información completa y estáticos

Lo primero que hay que hacer una vez planteado un problema de teoría de juegos, es precisar el concepto de solución (un par de estrategias que optimicen los pagos de cada individuo o jugador). Si existiera un par de estrategias cuyos pagos fueran los mejores, tanto para un individuo o jugador como para otro individuo o jugador, infaliblemente ésta sería la solución, pero en tal hipótesis no habría problema.

El concepto de solución estará en manos del tipo de juego con el que se trabaje y más, de si hay aportación o no, habrá de ser una noción que simbolice el comportamiento racional de los individuos o jugadores.

Para el caso de juegos no cooperativo, según Nash, se aplica el concepto de estrategias en equilibrio o punto de equilibrio o punto de silla. Para el caso de dos individuos o jugadores (es necesario extrapolarlo al caso N-personal), (x^*, y^*) es un par de estrategias en equilibrio si y solo si:

$$\begin{Bmatrix} M_1\,(x*, y*) \geq M_1\,(x, y*) & \forall x \in X \\ M_2\,(x*, y*) \geq M_1\,(x*, y) & \forall x \in Y \end{Bmatrix}$$

De esta manera son un par de estrategias, por lo cual ningún individuo o jugador está interesado en cambiar de estrategia por sí solo.

Por ejemplo, en el problema del Dilema del Prisionero, el par de estrategias ideales que hay en equilibrio es (D,D), es decir, que los dos individuos o jugadores se descubren. Es la respuesta acertada, no sólo porque rigurosamente sea el único par de estrategias que cumplen las condiciones, sino que por el propio razonamiento matemático es la respuesta a la que llegarían movidos los individuos o jugadores uno por uno por su propio beneficio.

El individuo o jugador 1 presta atención que puede no descubrir a su compañero y si hace eso el individuo o jugador 2 descubrirá al individuo o jugador 1 buscando su propio beneficio. Entonces, el individuo o jugador 1 presta atención que si el otro individuo o jugador le va a descubrir, a él le conviene descubrir al individuo o jugador 2. Esta misma lógica es permitida para el individuo o jugador 2, ya que es un juego estratégico cuyos pagos son equilibrados.

Es indiscutible que este problema tiene una solución que suministra mejores pagos equilibrados para ambos individuos o jugadores, que es el par de estrategias (ND, ND) como solución, es decir, que no se descubren, pero es una solución que no está en equilibrio, porque cualquiera de los individuos o jugadores mira que si el otro individuo o jugador conserva esa estrategia a él le va mejor cambiar de estrategia. Para poder elegir al par de estrategias de no descubrirse se requiere llegar a algún acuerdo, es decir, mercantilizar información, lo que convertiría al juego en un juego cooperativo. En estos juegos cooperativos, el concepto de respuesta o solución pasa por las alianzas, de modo que una alianza se reparte el beneficio obtenido entre los individuos o jugadores, pudiendo llegar a alguna solución del par de estrategias (ND,D) o viceversa, si ello favorece a ambos individuos o jugadores (obviamente para el problema del prisionero en el contexto proyectado no sería una opción, pero sí si son resultados de tipo económico). Los juegos cooperativos permiten llegar a una respuesta eficiente en el sentido de Pareto (no dominada), lo cual no puede ser afirmado en el evento en que no haya cooperación.

El concepto de solución de las estrategias en equilibrio no siempre da respuesta a un juego no cooperativo. Esencialmente, el problema viene de que pueden existir más de un par de estrategias en equilibrio. Si sólo existe un par de estrategias en equilibrio o existen más de un par de estrategias en equilibrio, pero con los mismos pagos, la respuesta existe, sin embargo, si existe más de un par de estrategias en equilibrio y los pagos son disímiles, no existe solución del juego en esas situaciones.

Ejemplo 7

Una pareja (hombre y mujer) desea salir a distraerse una noche juntos. Ella quiere ir a bailar, pero él quiere ir al estadio a ver un partido de futbol. Hay un conflicto de intereses ya que a cada uno de ellos le gustaría realizar cosas diferentes, pero lo importante es estar juntos, así que proyectan los beneficios para ambos de las posibles alternativas de combinación formando la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{ccc} & & Mujer \\ & & futbol \quad Bailar \\ Hombre & \begin{array}{r} futbol \\ Bailar \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Inicialmente en este planteamiento se verá que hay dos pares de estrategias en equilibrio que son la del hombre (futbol, futbol) y la de la mujer (Bailar, Bailar), pero cuyos pagos, según la matriz (2,1) y (1,2) son disímiles, por lo cual el problema matemáticamente no tiene solución pues no satisface a ninguna de las dos partes. En ese escenario para solucionar el juego, se puede llegar a un arreglo si el juego se repite varias veces, lo cual requiere de la cooperación o puede tener solución si alguno de los dos (hombre o mujer) aparece como dirigente, con lo que la solución sería aquel par de estrategias en equilibrio que suministre mejor pago al dirigente.

6.7.2 Con información completa y dinámicos

Se caracterizan por ser juegos en los que no se supone cooperación entre los individuos o jugadores, es decir, no hay la más remota posibilidad de pactos entre los individuos o jugadores, ya porque no sea posible conseguir mediante alianzas y nada mejor que actuar individualmente o porque se prohíbe hacerlo.

La información es completa porque los destinos de pagos de los individuos o jugadores son conocidos por todos los individuos o jugadores.

Es dinámico porque hay margen de información, ya que existe al menos un individuo o jugador que al decidir tiene más información que al principio del juego y, por lo tanto, su decisión aparecerá determinada por el resultado de esa información previa.

Al representar la forma normal de un juego, hay que precisar:

- Los individuos o jugadores.
- Las posibles estrategias (plan de acción completo) de cada individuo o jugador.
- La ganancia percibida por cada individuo o jugador para cualquier combinación de jugadas.

Al representar la forma extensiva de un juego, hay que precisar:

- Los individuos o jugadores.
  - Cuándo le toca jugar a cada individuo o jugador
  - Que puede hacer cada individuo o jugador cuando tiene que jugar
  - Que sabe el individuo o jugador cuándo tiene que jugar
- La ganancia percibida por cada individuo o jugador para cualquier combinación de jugadas.

Para juegos dinámicos resulta mucho más apropiada la representación en forma extensiva que la representación en forma normal y se puede representar en forma de árbol.

Ejemplo 8

Un juego en que el individuo o jugador 1 opta por una de las acciones del conjunto {I,D}. Seguidamente, el individuo o jugador 2, una vez que ha prestado atención a lo que ha escogido el individuo o jugador 1, prefiere entre una de 3 acciones {1, 2, 3}. Los pagos se muestran en la siguiente tabla; primero del jugador 1 y luego del jugador 2, apreciando además que las filas son las estrategias del individuo o jugador 1 y las columnas son las estrategias del individuo o jugador 2.

	1	2	3
I	(3,1)	(1,2)	(0,0)
D	(2,1)	(0,0)	(1,0)

Tabla 5. Matriz de pagos

La forma extensiva de este juego sería:

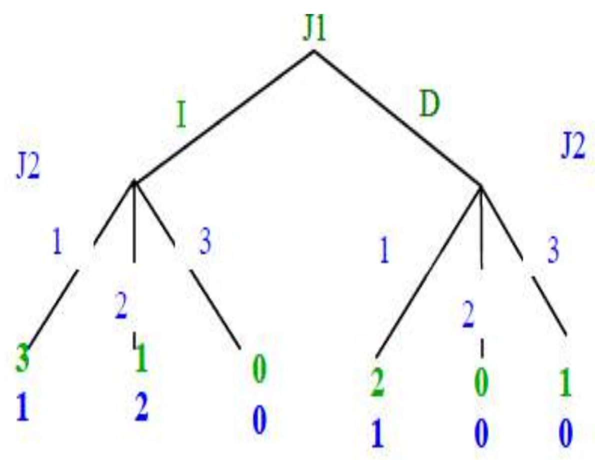

Gráfico 6.3. Forma extensiva de un juego

Este juego está representado en forma extensiva, pero si se quiere representar en forma normal, hay que tener presente que una estrategia del individuo o jugador 2 ha de ser un método perfecto, es decir, ha de contener la respuesta a las dos opciones del individuo o jugador 1. De esta forma la matriz sería:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
I	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
D	(2,1)	(0,0)	(1,0)	(2,1)	(0,0)	(1,0)	(2,1)	(0,0)	(1,0)

Tabla 6.6. Representación de la bimatriz en forma normal

La representación de la información útil cuando a un individuo o jugador le corresponde jugar, es el conocimiento que falta para que el árbol de decisión simbolice el juego.

Se detalla como *conjunto de información* a un conjunto de nodos de decisión de un individuo o jugador que compensa las siguientes condiciones:

- Al individuo o jugador le toca jugar en cada nodo del conjunto.
- Cuando en el juego el individuo o jugador llega a un nodo del conjunto, el individuo o jugador al que le corresponde no sabe a qué nodo del conjunto ha llegado.

Los conjuntos de información, generalmente, se simbolizan uniendo mediante líneas espaciadas los nodos de un mismo conjunto. Tomando el ejemplo anterior y dado que cuando juega el individuo o jugador 1 sólo hay un nodo, ese es su único conjunto de información. Para el individuo o jugador 2, dado que conoce qué eligió el individuo o jugador 1, hay dos conjuntos de información distados que son sus dos nodos de juego.

Si el juego no fuera dinámico y no arrojara ganancia de información, la representación de la forma extensiva sería la misma, pero el individuo o jugador 2 no sabría en qué nodo está, de modo que el árbol resultante sería:

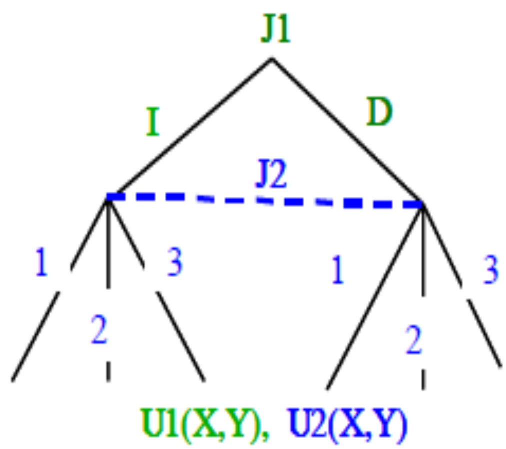

Gráfico 6. 4. Representación extensiva.

6.8 Teorema de Nash

En un juego con un número determinado de individuos o jugadores y cada uno con un número limitado de estrategias, está al menos un equilibrio de Nash, que probablemente contiene estrategias mixtas.

El equilibrio de Nash, en estrategias mixtas, se dilucida más que en términos de optar aleatoriamente una estrategia y alcanzar ciertas probabilidades, como una representación de la incertidumbre del individuo o jugador *i* relacionada a la decisión del individuo o jugador *j* sobre la estrategia pura que va a continuar. Es una suposición sobre lo que hará el otro individuo o jugador con la información que se tiene (es posible que el otro individuo o jugador proceda después, apoyándose en algún criterio no conocido).

Ejemplo 9

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix}$$

En esta matriz la primera estrategia de J_1 está sometida, pues la segunda fila (o la tercera) facilita mejores pagos al individuo o jugador, aunque después para la solución se puede eliminar, resultando la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{pmatrix} (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix}$$

En esta matriz las estrategias segunda y tercera del individuo o jugador 2 están sometidas por la primera, por lo cual pueden descartarse, dando como resultado:

$$\begin{pmatrix} (3,-3) \\ (2,-2) \end{pmatrix}$$

Y aquí la última estrategia del jugador 1 está dominada por la anterior, con lo que después de haber eliminado las estrategias dominadas queda sólo la matriz $((3,-3))$ correspondiente a la segunda estrategia de $J1$ y a la primera de $J2$, que es la solución del juego.

Asegurar que si la eliminación repetida de estrategias dominadas excluye todas las estrategias menos un par, este par de estrategias establece el único equilibrio de Nash en el juego. También se puede afirmar que si un par de estrategias crean un equilibrio de Nash, éstas sobreviven a la eliminación repetida de estrategias dominadas.

6.9 Juegos de suma cero y suma variable

Los juegos en que los beneficios de los individuos o jugadores son comparados se llaman juegos de suma cero. Para cada posible resultado la suma de las utilidades de los dos individuos o jugadores suma cero, es decir, lo que un individuo o jugador gana el otro individuo o jugador lo pierde.

$$u_1 + u_2 = 0$$

En este tipo de juego no se crea valor sino que se redistribuye.

Por su parte, en un juego de suma constante la suma de las utilidades de los individuos o jugadores es una constante k.

6.10 Dilema de los prisioneros – Modelo de Cournot

Un resultado es eficiente si no existe ningún otro resultado que suministre a todos los individuos o jugadores un ingreso mayor. Todo juego en el que cada individuo o jugador posee una estrategia dominante tiene una única solución que radica en jugar esa estrategia dominante. Cuando la salida resultante es ineficiente, se está frente a un problema tipo Dilema de los Prisioneros.

Los individuos o jugadores están cautivos de sus propias estrategias, a no ser que algo se modifique en las reglas del juego. Ya sea que se busque incitar la cooperación o la competencia, es preciso primero deducir las maneras en que se puede evitar un problema tipo Dilema de los Prisioneros. El problema consiste en el incentivo que tiene cada individuo o jugador para tomar direcciones oportunistas que arrasen un arreglo eficiente.

Ejemplo 10

Dos individuos cometen un delito, aunque posteriormente son detenidos e incomunicados. Si ambos delincuentes se descubren pagarán una condena de 5 años los dos; si uno descubre al otro, pero el otro no lo hace, el descubierto pagará 20 años y el delator nada; si ninguno se descubre, pagarán un año cada uno. La matriz de pagos, en este caso de los delincuentes, y cambiando el signo con el fin de maximizar estos pagos sería la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & J_2 \\ & & \begin{array}{cc} D & ND \end{array} \\ J_1 & \begin{array}{c} D \\ ND \end{array} & \begin{pmatrix} (-5,-5) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Este problema del Dilema de los Prisioneros es uno de los más importantes de la teoría de juegos, ya que el entorno puede aplicarse en diversos contextos. Es especialmente adaptable en la economía y las empresas, y ha dado resultado a una gran cantidad de estudios, que además han permitido ver claramente la diferencia entre juegos cooperativos y no cooperativos.

6.10.1 Modelo de Cournot

La teoría de juegos sirve para analizar algunos modelos de competencia imperfecta. El concepto de equilibrio de Nash ya había sido tratado por otro autor llamado Antoine Augustin Cournot, en un trabajo sobre el duopolio en 1838. Cournot, matemático y economista francés, fue el abanderado del marginalismo; conocido por sus estudios sobre la oferta y la demanda, tanto en condiciones de competencia como de monopolio, consideró un producto cuya ecuación de demanda es $q = M - p$, que no tiene costos fijos y que se inicia con un costo marginal unitario constante $c < M$.

La rivalidad entre dos empresas puede representarse por medio del equilibrio de Nash, suponiendo que dos empresas fabrican un producto idéntico en cantidades q_1 y q_2. Cada una de ellas usaría como estrategia la cantidad que fabrica. La oferta del mercado será $q = q_1 + q_2$, mientras que la función de demanda inversa será $p = M - q_1 - q_2$

Las funciones de beneficios de cada empresa serán:

$$B_1\,(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1 = (p - c)q_1 = (M - c - \ q_1 - \ q_2)q_1$$
$$B_2\,(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2 = (p - c)q_2 = (M - c - \ q_1 - \ q_2)q_2$$

Donde se ha condicionado que no existen costos fijos y que los costos marginales son iguales a $c < M$.

La respuesta óptima de la empresa I ante la cantidad elegida q_2 por parte de la empresa II será maximizar $B_1\,(q_1, q_2)$ respecto a q_1:

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_1} = M - c - 2q_1 - \ q_2$$

La curva de reacción de I será $q_1 = \ R_1\,(q_2) = \frac{M-c-\,q_2}{2}$

La respuesta óptima de la empresa II ante la cantidad elegida q_1 por parte de la empresa I será maximizar $B_2\,(q_1, q_2)$ respecto a q_2:

$$\frac{\partial B_2}{\partial q_1} = M - c - 2q_2 - \ q_1$$

La curva de reacción de II será $q_2 = \ R_2\,(q_1) = \frac{M-c-\,q_1}{2}$

El equilibrio de Nash se da donde se intersectan las curvas de reacción $q1 = R_1\,(q_2)$ y $q_2 = R_2\,(q_1)$. Resolviendo las ecuaciones:

$$2q_1 + \ q_2 = M - c$$

$$q_1 + 2q_2 = M - c$$

El equilibrio de Nash será $q_1* = q_2* = M – c / 3$

El precio de equilibrio del mercado será $P * = M – 2/3 (M – c)$

El beneficio de cada empresa es $B_1\left(q *_{1,}\ q *_2\right) = B_2\left(q *_{1,}\ q *_2\right) = \left(\frac{M-c}{3}\right)^2$

El precio en el duopolio de Cournot es mayor al de la competencia perfecta, que es igual al costo marginal, pero es inferior al del monopolio $P * = M + c /2$.

Resumen

La teoría de juegos estudia de manera formal y abstracta las decisiones óptimas que deben tomar diversos adversarios en conflicto, pudiendo definirse como el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto y la cooperación entre individuos que toman decisiones. Tales decisiones se consideran estratégicas, es decir, que quienes participan en el juego actúan teniendo en cuenta las acciones que tomarán los demás.

La teoría de juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchas disciplinas se han visto beneficiadas por las aportaciones de este método de análisis.

Bibliografía

- Bronson, R. (1993). Investigación de operaciones, México, Editorial McGraw-Hill.
- Chediak, F.(2005). Investigación de operaciones, Colombia Ibagué, Editorial El Poira.
- Izar, J.(2012). Investigación de operaciones, México, Editorial Trillas.
- Roscoe, D.(1984). Modelos cuantitativos para administración, México, Editorial Iberoamérica.
- Lieberman, G.(2002). Investigación de operaciones. México, Editorial McGraw-Hill.
- Taha, H. (2008). Investigación de operaciones, México, Editorial Alfaomega.
- Winston, W. (2005). Investigación de operaciones, México, Editorial Thomson.
- http://digital.csic.es/bitstream/10261/7734/1/eserv.pdf
- http://www.ecpunr.com.ar/Docs/bc5210d82038f4f_lecturas%20matematicas.pdf
- http://www.mat.ucm.es/~bvitoria/Archivos/a_dt_UCM.pdf
- http://tellado.es/descargas/negociacion/teoria-del-juego.pdf
- http://www.mat.ucm.es/~bvitoria/Archivos/a_dt_UCM.pdf
- http://www.mat.ucm.es/~bvitoria/Archivos/a_dt_UCM.pdf