

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

APUNTES MAT 022

CÁLCULO INTEGRAL

VERSIÓN 2017

SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA



SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA

APUNTES

MAT 022 | CÁLCULO INTEGRAL

VERSIÓN ACTUALIZADA 01/03/2017

Prefacio

Estimados alumnos, en el contexto de la asignatura MAT 022 que se dicta en nuestra Universidad, me es grato presentar esta versión actualizada de mis apuntes de Cálculo Integral, la cual incluye algunas correcciones de las versiones anteriores. El principal objetivo de estas notas es ofrecer un material de consulta acorde a los contenidos tratados en clases.

Es importante señalar que estos apuntes no reemplazan a los libros de la Bibliografía del programa de la asignatura, ni tampoco a los que cito en la Bibliografía al finalizar estos apuntes. Por esta razón, recomiendo revisar aquellos libros con la finalidad que puedan profundizar en el estudio de los contenidos aquí tratados y, de esta forma, puedan conocer puntos de vista diferentes a los expuestos aquí. Añado una mención especial para Cristobal Cancino, quien durante el segundo semestre de 2016 realizó una cuidadosa lectura de este apuntes, y colaboró de manera importante en la corrección de algunas erratas difíciles de detectar en versiones anteriores a esta.

Agradezco desde ya los comentarios y sugerencias que ustedes puedan hacerme llegar para mejorar estas notas y corregir erratas que puedan existir. Para ello, pueden contactarme por correo e-mail a:

salomon.alarcon@usm.cl.

Espero que este material les sea de utilidad.

Atte.

SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA.

Valparaíso, 1 de Marzo de 2017

Índice general

<i>Prefacio</i>	I
Índice general	III
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	XI
1. La integral indefinida	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. La antiderivada (o primitiva) de una función	2
1.1.2. La integral indefinida	4
1.1.3. Propiedades de la integral indefinida	6
1.2. Métodos de integración (Técnicas de antiderivación)	8
1.2.1. Método de integración por sustitución	8
1.2.2. Método de integración por partes	10
1.2.3. Integración de funciones racionales: Método de integración vía descomposición en fracciones parciales	13
1.2.4. Integración de funciones trigonométricas	20
1.2.5. Método de integración por sustitución trigonométrica	24
1.2.6. Método de integración para funciones racionales de seno y coseno	27
1.2.7. Resumen sobre algunas técnicas de integración	29
1.3. Aplicaciones de la integral indefinida	31
1.3.1. Preliminares	31
1.3.2. Problemas de valores iniciales	33
1.3.3. Aplicaciones	33
2. La integral de Riemann	43
2.1. Preliminares	43
2.2. Partición de un intervalo $[a, b]$	44
2.3. Refinamientos de una partición de un intervalo $[a, b]$	46

2.4.	Funciones Riemann–integrables	49
2.5.	Criterios de integrabilidad–Riemann	51
2.6.	Propiedades de la integral de Riemann	55
2.7.	Teorema del valor medio para integrales	59
2.8.	Sumas de Riemann. Aproximaciones de una integral	61
2.8.1.	Aproximación de Riemann	61
2.8.2.	Aproximación trapezoidal	63
2.8.3.	Aproximación de Simpson	64
2.9.	La integral definida	65
2.9.1.	Cálculo de integrales definidas usando una sustitución	69
2.9.2.	Cálculo de integrales definidas usando integración por partes	70
2.10.	Área de una región en el plano	71
2.10.1.	Área bajo una curva	71
2.10.2.	Área entre curvas	72
3.	Funciones logarítmicas, exponenciales e hiperbólicas	77
3.1.	La función logaritmo natural	77
3.2.	La función exponencial	83
3.3.	Funciones logarítmicas y exponenciales de base a ($a > 0$)	85
3.4.	Funciones hiperbólicas	87
3.4.1.	Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico	87
3.4.2.	Las funciones tangente hiperbólico y secante hiperbólico	90
3.4.3.	Las funciones cosecante hiperbólico y cotangente hiperbólico	94
3.4.4.	Algunas identidades hiperbólicas adicionales	98
3.5.	Funciones hiperbólicas inversas	100
3.5.1.	Seno hiperbólico inverso	100
3.5.2.	Coseno hiperbólico inverso	101
3.5.3.	Tangente hiperbólica inversa	102
3.5.4.	Secante hiperbólica inversa	103
3.5.5.	Cosecante hiperbólica inversa	104
3.5.6.	Cotangente hiperbólica inversa	105
3.5.7.	Integrales que dan funciones hiperbólicas inversas	106
4.	Integración impropia	109
4.1.	Integrabilidad sobre intervalos no acotados	109
4.1.1.	Integración impropia sobre intervalos de la forma $[a, +\infty[$	109
4.1.2.	Integración impropia sobre intervalos de la forma $] - \infty, b]$	112
4.1.3.	Integración impropia sobre \mathbb{R}	114
4.1.4.	Algunas propiedades de las integrales impropias sobre dominios no acotados	116

4.1.5. Criterios de convergencia para integrales de funciones no negativas sobre intervalos no acotados	118
4.2. Integrabilidad de funciones no acotadas en intervalos acotados	121
4.2.1. Integración impropia de funciones no acotadas sobre intervalos de la forma $]a, b]$	121
4.2.2. Integración impropia de funciones no acotadas sobre intervalos de la forma $[a, b[$	124
4.2.3. Integración impropia de funciones no acotadas en otros intervalos acotados	125
4.2.4. Teoremas relativos a integración impropia de funciones no acotadas	127
4.3. Integrabilidad de funciones no acotadas en intervalos no acotados	130
5. Aplicaciones de la integral de Riemann	133
5.1. Volumen de un sólido de revolución	133
5.1.1. Método del disco	133
5.1.2. Método del anillo circular	138
5.1.3. Método de las capas cilíndricas	142
5.2. Volumen de sólidos con secciones planas paralelas	144
5.3. Longitud de arco de una curva	148
5.4. Áreas de superficies de revolución	149
5.5. Centro de masa	152
5.6. Centroides de una región plana	155
5.7. Centroides de un sólido de revolución	158
5.8. Trabajo Mecánico	161
6. Integración en coordenadas paramétricas y polares	169
6.1. Coordenadas paramétricas	169
6.1.1. Pendientes y derivadas en coordenadas paramétricas	173
6.2. Integración en coordenadas paramétricas	174
6.3. Longitud de arco en coordenadas paramétricas	176
6.4. Coordenadas polares	178
6.4.1. Transformación o cambio de coordenadas	180
6.5. Gráficas en coordenadas polares	182
6.5.1. Intersecciones	183
6.5.2. Simetrías	183
6.5.3. Extensión	183
6.5.4. Trazado de la gráfica	183
6.5.5. Pendientes y rectas tangentes a curvas en coordenadas polares	190
6.6. Integración en coordenadas polares: área de una región polar	192
6.7. Longitud de arco en coordenadas polares	196

A. Desarrollos de los Ejercicios	199
B. Soluciones de algunos Ejercicios Propuestos	217
C. Soluciones de algunos Ejercicios de Repaso	223
Bibliografía	225

Índice de figuras

1.1. Triángulo rectángulo asociado a la relación $x = a \operatorname{sen} \theta$	24
1.2. Triángulo rectángulo asociado a la relación $x = a \operatorname{tan} \theta$	25
1.3. Triángulo rectángulo asociado a la relación $x = a \operatorname{sec} \theta$	26
2.1. Suma superior e inferior para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ con respecto a la partición $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$	46
2.2. Un refinamiento de una partición con un elemento más.	47
2.3. Cota inferior para las sumas inferiores: $s(f, \mathcal{P}_0) = m(b - a)$; y cota superior para las sumas superiores: $S(f, \mathcal{P}_0) = M(b - a)$, con $\mathcal{P}_0 = \{a, b\}$, $m = \inf_{z \in [a, b]} f(z)$ y $M = \sup_{z \in [a, b]} f(z)$	49
2.4. Teorema del Valor Medio para la integral definida de una función continua y acotada.	60
2.5. Norma de una partición \mathcal{P}	61
2.6. Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$, considerando la partición $\mathcal{P} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$	63
2.7. Aproximación trapezoidal del “área bajo la curva” determinada por una función.	63
2.8. Aproximación de Simpson del “área bajo la curva” determinada por una función.	64
2.9. Área bajo la curva	71
2.10. La región acotada limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$	72
2.11. Región \mathcal{R} entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$	72
2.12. La región acotada limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x + 6$ e $y = \frac{x}{2}$	73
2.13. División de la región \mathcal{R} en dos subregiones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2	74
3.1. Función logaritmo natural.	80
3.2. Función exponencial.	85
3.3. Caso $0 < a < 1$: Gráfica de la función logaritmo de base a	86
3.4. Caso $a > 1$: Gráfica de la función logaritmo de base a	86
3.5. Función seno hiperbólico.	88
3.6. Función coseno hiperbólico.	90
3.7. Función tangente hiperbólico.	92
3.8. Función secante hiperbólico.	93
3.9. Función cosecante hiperbólico.	96

3.10. Función cotangente hiperbólico.	97
3.11. Función arcoseno hiperbólico.	101
3.12. Función arcocoseno hiperbólico.	102
3.13. Función arcotangente hiperbólico.	103
3.14. Función arcosecante hiperbólico.	104
3.15. Función arcosecante hiperbólico.	105
3.16. Función arcocotangente hiperbólico.	106
4.1. El área bajo la curva $y = e^x$ es infinita en $[0, +\infty[$	110
4.2. El área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ es finita en $[0, +\infty[$ e igual a 1.	111
4.3. El área bajo la curva $y = \frac{1}{x^p}$ en $[1, +\infty[$ no es finita si $0 < p \leq 1$, y es finita e igual a $\frac{1}{p-1}$ si $p > 1$	111
4.4. El área bajo la curva $y = e^{px}$ en $[0, +\infty[$ no es finita si $p \geq 0$, y es finita e igual a $-\frac{1}{p}$ si $p < 0$	112
4.5. El área bajo la curva $y = e^x$ en $] -\infty, 0]$ es finita e igual a 1.	113
4.6. El área bajo la curva $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ en $] -\infty, 0]$ es finita e igual a 1.	114
4.7. El área bajo la curva $y = e^x$ en \mathbb{R} no es finita.	115
4.8. El área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en \mathbb{R} es finita e igual a π	115
4.9. El área entre el eje x y la curva $y = \frac{1}{x \ln(x)}$ en $]0, \frac{1}{2}]$ no es finita.	122
4.10. El área bajo la curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $]0, 1]$ es finita e igual 2.	123
4.11. El área bajo la curva $y = \frac{1}{x^p}$ en $]0, 1]$ es finita e igual a $\frac{1}{1-p}$ si $0 < p < 1$, y es infinita si $p \geq 1$	124
4.12. El área entre el eje x y la curva $y = \frac{1}{x \ln(x)}$ en $[\frac{1}{2}, 1[$ no es finita.	125
4.13. El área bajo la curva $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ en $[0, 2]$ no es finita.	126
4.14. El área bajo la curva $y = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$ en $[-1, 1]$ es finita e igual a	127
5.1. Sólido de revolución obtenido al girar de una región \mathcal{R}	133
5.2. Cilindro o Disco de radio $ f(\omega_k) $ y altura Δx_k	134
5.3. Cilindros concéntricos que aproximan el volumen de un sólido de revolución.	134
5.4. Cilindro de radio r y altura h	135
5.5. Cono de radio basal r y altura h	136
5.6. Cono truncado de radio menor r_1 , radio mayor r_2 y altura h	137
5.7. Parte de un sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje x la región entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$	138
5.8. Sólido de revolución \mathcal{S} obtenido al rotar en torno al eje x la región entre las curvas $y = x^2 + 2$ e $2y - x = 2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$	139
5.9. Sólido de revolución obtenido al rotar en torno a la recta $y = 3$ la región entre las curvas $y = x^2 + 2$ e $2y - x = 2$	140

5.10. Sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje X la región entre las curvas $Y = X^2 - 1$ e $Y = \frac{X}{2} - 2$.	141
5.11. Sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje y la región ubicada entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.	142
5.12. Anillo circular de radio menor x_{k-1} , radio mayor x_k y altura $f(w_k)$.	143
5.13. Aproximación por capas cilíndricas del sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje y la región entre las curvas $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.	143
5.14. Sección plana de un sólido S .	145
5.15. Secciones planas paralelas	145
5.16. Cilindro recto que no posee base circular.	145
5.17. Sólido cilíndrico asociado al corte k -ésimo.	146
5.18. Volumen aproximado de un Sólido mediante cilindros.	146
5.19. Sólido cuya base es un círculo de radio 2 y cuyas secciones transversales a un diámetro fijo de la base son cuadrados.	147
5.20. Longitud aproximada de una curva mediante una poligonal.	148
5.21. Cono circular recto truncado.	149
5.22. Aproximación de una superficie de revolución mediante superficies laterales de conos truncados	150
5.23. Punto de equilibrio de masas	153
5.24. Centroides de una región plana	155
5.25. Centroides de la región limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$	157
5.26. Centroides de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x + 3$	158
5.27. Para una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, ponemos $w_k \in [w_{k-1}, w_k]$, con $w_k = \frac{w_{k-1} + w_k}{2}$.	158
5.28. El momento de masa del disco S_k con respecto al plano yz (es decir, con respecto al plano $x = 0 \forall y, \forall z$) es: $M_{yz}^k = w_k \rho_0 \pi (f(w_k))^2 \Delta x_k$, donde ρ_0 es la densidad medida en unidades de peso sobre unidades de volumen, y la cantidad $\pi (f(w_k))^2 \Delta x_k$ representa el volumen de S_k .	159
5.29. Centroides del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje x , la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$.	160
5.30. Centroides del sólido de revolución generado por la rotación, alrededor del eje x , de la región limitada por la curva $y = x^2 + 1$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$.	161
6.1. La gráfica de la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \cos t \wedge y = a \sin t\}$, con $a > 0$ fijo, es la circunferencia centrada de radio a centrada en el origen.	170
6.2. La gráfica de la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{1}{2}} = t \wedge y^{\frac{1}{3}} = t : t \geq 0\}$ es la gráfica de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$.	170

6.3. La gráfica de la curva $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cosh(t) \wedge y = \sinh(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es la gráfica de la curva $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$.	171
6.4. Gráfica de la curva $y = 1 - x^2$.	172
6.5. La gráfica de la curva $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{t} \wedge y = t^2 - 2 : t \geq 0\}$ es la gráfica de la curva $y = x^4 - 2$ con $x \geq 0$.	174
6.6. Gráfica de la hipocicloide de tres ramas de ecuaciones paramétricas $x = 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2t)$ e $y = 2 \cos t + \cos(2t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.	175
6.7. Gráfica de la epicicloide de tres ciclos de ecuaciones paramétricas $x = 4 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(4t)$ e $y = 4 \cos t - \cos(4t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.	178
6.8. Coordenadas polares	178
6.9. Coordenadas polares	180
6.10. Coordenadas polares	184
6.11. Trazado de la rosa de 3 pétalos $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$	185
6.12. Clasificación de caracoles en cordenadas polares	186
6.13. Trazado de la cardioide $r = 2(1 - \cos \theta)$	187
6.14. Trazado de la espiral $r = \theta$	187
6.15. Trazado de la lemniscata $r^2 = 4 \operatorname{sen} \theta$	188
6.16. La pendiente de la cardioide $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{6})$ es 0.	191
6.17. Las rectas tangentes a la rosa de 3 pétalos $r = \cos(3\theta)$ en el polo son las rectas radiales $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = -\frac{\pi}{6}$.	192
6.18. El sector circular \mathcal{S} tiene área $A(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\theta r^2$.	192
6.19. El sector circular \mathcal{S} tiene área $A(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\theta r^2$.	192
6.20. Partición de la región \mathcal{R} y elección de sectores circulares \mathcal{S}_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ que aproximan a las subregiones generadas por la partición.	193
6.21. Aproximación del área de la región \mathcal{R} mediante la suma de las áreas de los sectores circulares \mathcal{S}_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.	193
6.22. Rosa de tres pétalos de ecuación $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$.	194
6.23. Región acotada exterior a la circunferencia $r = 2$ e interior al caracol con hoyuelo $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$.	195
A.1. Función $f(x) = x$ en $[a, b]$, con $a \geq 0$.	201
A.2. Las curvas $y = x^2$, $y = 2x + 3$ e $y = 2 - x^2$.	203

Índice de tablas

1.1. Tabla de integrales indefinidas	5
1.2. Método de integración por sustitución	29
1.3. Método de integración por partes	29
1.4. Método de integración por sustitución trigonométrica	29
1.5. Método de integración por descomposición en fracciones parciales de la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$	30
1.6. Método de integración de funciones racionales de seno y coseno	30

El principal interés que tenemos en este capítulo es el de recuperar una función a partir de su derivada, la cual asumiremos conocida. En particular, estudiaremos algunas técnicas que en muchos casos nos permitirán alcanzar nuestro objetivo.

1.1. Introducción

Ya estamos familiarizados con la derivada de una función; operación que recibe el nombre de derivación. Por ejemplo, sabemos que

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 1) = 2x + 2 = 2(x + 1).$$

Por otro lado, en matemática es usual estudiar procesos inversos. Por ejemplo, para operaciones entre números reales la operación inversa de la adición es la sustracción, la operación inversa de la multiplicación es la división y una operación inversa de una potencia con exponente natural es la raíz n -ésima. Más aún, para cierta clase de funciones nos interesamos en determinar su inversa. Luego, considerando la derivación como una operación sobre una función, una cuestión de interés que surge ahora es tratar lo siguiente,

Dada una función $f(x)$, ¿es posible encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$?

En otras palabras, nos interesa saber si podemos definir una operación inversa para la derivación.

EJEMPLO 1.1.1 ¿Qué función tiene por derivada a $\cos x$?

Solución. La respuesta es $\sin x + c$, con $c \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x. \quad \square$$

EJEMPLO 1.1.2 ¿Qué función tiene por derivada a $\frac{4x}{x^2+1}$?

Solución. La respuesta es $\ln(x^2 + 1)^2 + c$, con $c \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^2 + 1)^2 + c) = \frac{4x}{x^2 + 1}. \quad \square$$

1.1.1. La antiderivada (o primitiva) de una función

DEFINICIÓN 1.1.1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una función continua $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *antiderivada* (o *primitiva*) de la función f si $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$, salvo tal vez para un número finito de puntos en I .

EJEMPLO 1.1.3 Sea $f(x) = 20x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Encuentra algunas antiderivadas de f .

Solución. Notar que $F(x) = 5x^4 + x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f pues

$$F'(x) = 20x^3 + 2x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observemos también que $G(x) = 5x^4 + x^2 + 10$, $x \in \mathbb{R}$ también es una antiderivada o primitiva de f , pues

$$G'(x) = 20x^3 + 2x^2 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En general $F_c(x) = 5x^4 + x^2 + c$, con c una constante, es una antiderivada de f , pues

$$F'_c(x) = f(x). \quad \square$$

OBSERVACIÓN 1.1.1

- Una función derivable en un intervalo abierto I puede tener derivadas discontinuas en algún punto. Luego, el hecho que una función f sea discontinua en un punto $a \in I$ no impide necesariamente que ella tenga una primitiva en I .
- Si una función es derivable en un intervalo abierto I , su derivada no puede tener discontinuidades de salto infinito en I . Luego, si f es una función continua a trozos en I , que posee una discontinuidad de salto infinito en un punto $a \in I$, entonces f no tiene primitiva en I .

Los siguientes ejemplos ilustran la observación previa.

EJEMPLO 1.1.4 Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. Encuentra una antiderivada de f .

Solución. Notar que $F(x) = |x| + c$, con c un número real fijo, es una antiderivada o primitiva de f pues F es continua en \mathbb{R} y aunque $\nexists F'(0)$, se tiene que

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \square$$

EJEMPLO 1.1.5 Sea $f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Encuentra una antiderivada de f .

Solución. Notar que $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, es una antiderivada o primitiva de f pues F es continua en \mathbb{R} y

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

EJEMPLO 1.1.6 Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$. ¿Es posible encontrar una antiderivada de f ?

Solución. Notar que $F(x) = \begin{cases} x + c_1 & x \leq 0 \\ \ln x + c_2 & x > 0 \end{cases}$, debiese ser una antiderivada o primitiva de f . Sin embargo, no existe forma de elección de c_1 y c_2 para que F sea continua en 0, por lo tanto F no es una antiderivada de f en \mathbb{R} . El problema radica en que la función f es discontinua en 0 con salto infinito. Sin embargo, si miramos las ramas continuas de f , cada una de ellas tiene antiderivadas (que son las correspondientes ramas de la función F). \square

TEOREMA 1.1.1 Si F y G son dos funciones tales que

$$F'(x) = G'(x) \quad \forall x \in I,$$

entonces existe una constante c_0 tal que

$$F(x) = G(x) + c_0 \quad \forall x \in I.$$

Demostración. Sea $H(x) = F(x) - G(x)$; entonces

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \quad \forall x \in I,$$

pues por hipótesis $F'(x) = G'(x)$ para cada $x \in I$. Luego, como la derivada de una constante es 0; tenemos que existe una constante c_0 tal que: $H(x) = c_0$ para cada $x \in I$, y por definición de H :

$$F(x) - G(x) = c_0 \quad \forall x \in I.$$

Así

$$F(x) = G(x) + c_0 \quad \forall x \in I. \quad \blacksquare$$

Como aplicación directa del Teorema 1.1.1, obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 1.1.1 Si F es una primitiva particular de f en un intervalo I , entonces cualquier otra antiderivada de f está dada por

$$F(x) + c,$$

donde c es una constante arbitraria.

Demostración. Sea G una antiderivada cualquiera de f en I , entonces

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Como F es una primitiva particular de f en I , tenemos

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

y así

$$F'(x) = G'(x) \quad \forall x \in I,$$

y, desde el Teorema 1.1.1, se sigue que existe una constante c_0 tal que

$$G(x) = F(x) + c_0 \quad \forall x \in I.$$

Dado que la derivada de una constante es 0, vemos que cualquier otra antiderivada G de f debe tener la forma

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I,$$

donde c es una constante arbitraria. ■

EJERCICIOS 1.1.1 Encuentra una antiderivada o primitiva de la función:

a) $f(x) = x + 1.$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x.$

c) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^8}$

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 1.1.1 presiona aquí 

1.1.2. La integral indefinida

Como hemos dicho en la introducción, la *antiderivación* es el proceso inverso de la derivación. Además,

$$“F \text{ es una antiderivada de } f” \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

De acuerdo al Corolario 1.1.1, sabemos también que cualquier otra antiderivada de f tiene la forma $F + c$, donde c es una constante real cualquiera.

DEFINICIÓN 1.1.2 Sea F una primitiva cualquiera de f . La *integral indefinida* de $f(x)$ con respecto a x se denota como $\int f(x) dx$ y se define como

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

donde c es una constante arbitraria.

OBSERVACIÓN 1.1.2 En otras palabras, la integral indefinida de f es un representante de la familia de todas sus primitivas posibles. Es muy importante entender esto, pues quiere decir que al evaluar una integral indefinida, podremos reunir todas las constantes que surjan en su evaluación en una única constante genérica que denotaremos c . De esta forma, evaluar una integral indefinida de f equivale a encontrar a una antiderivada genérica.

A continuación presentamos una tabla con algunas integrales indefinidas que se pueden obtener directamente.

Tabla 1.1. Tabla de integrales indefinidas

Derivadas	Integrales Indefinidas
$\frac{d}{dx}(kx) = k$	$\int k dx = kx + c$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{csc}^2 x$	$\int \operatorname{csc}^2 x dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{csc} x) = -\operatorname{csc} x \cdot \cot x$	$\int \operatorname{csc} x \cdot \cot x dx = -\operatorname{csc} x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$	$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}(x^{m+1}) = (m+1)x^m$	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad ; \quad m \in \mathbb{Q}, m \neq -1$
$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$
$\frac{d}{dx}(\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c$
$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x + c$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + c$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}} dx = -\operatorname{arccsc} x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln \sec x + \tan x) = \sec x$	$\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln \csc x - \cot x) = \csc x$	$\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln \operatorname{sen} x) = \cot x$	$\int \cot x dx = \ln \operatorname{sen} x + c$
$\frac{d}{dx}(\ln \sec x) = \tan x$	$\int \tan x dx = \ln \sec x + c$

1.1.3. Propiedades de la integral indefinida

Como la antiderivación es la operación inversa de la derivación, los siguientes teoremas acerca de las integrales indefinidas se pueden obtener desde los teoremas dados para las derivadas. Por lo tanto, aquí omitimos las demostraciones.

TEOREMA 1.1.2

i) Sea f una función que posee antiderivada. Entonces

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx,$$

donde α es una constante.

ii) Sean f y g dos funciones que poseen antiderivadas sobre un mismo intervalo. Entonces

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

iii) Más generalmente, si f_1, f_2, \dots, f_n son funciones que poseen antiderivadas sobre un mismo intervalo, entonces:

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx + \dots + \alpha_n \int f_n(x) dx,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son constantes.

EJEMPLO 1.1.7 Calcula $\int (3x^4 - 2x^3 + 9x + 4) dx$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int (3x^4 - 2x^3 + 9x + 4) dx &= 3 \int x^4 dx - 2 \int x^3 dx + 9 \int x dx + 4 \int dx \\ &= \frac{3}{5}x^5 + c - \frac{2}{4}x^4 + c + \frac{9}{2}x^2 + c + 4x + c \\ &= \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + 4x + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.1.8 Calcula $\int \sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} (x + x^{-1}) dx \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.1.9 Calcula $\int \frac{2 \cot x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \cot x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx &= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cot x dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx \\ &= 2 \int \operatorname{csc} x \cot x dx - 3 \int \operatorname{sen} x dx \\ &= -2 \operatorname{csc} x + 3 \cos x + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 1.1.2

a) Evalúa la siguiente integral indefinida:

$$\int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) dx.$$

b) En cualquier punto (x, y) de una curva en particular, la recta tangente tiene una pendiente igual a $4x - 5$. Si la curva contiene al punto $(3, 7)$, formula su ecuación.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 1.1.2 presiona aquí 

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.1.1 Evalúa cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int 3x^4 dx$.

b) $\int 10 \sqrt[3]{x^2} dx$.

c) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.

d) $\int (5 \cos x - 4 \operatorname{sen} x) dx$.

e) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$.

f) $\int (4 \operatorname{csc} x \cot x + 2 \sec^2 x) dx$.

g) $\int \frac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$.

h) $\int (2 \cot^2 \theta - 3 \tan^2 \theta) d\theta$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 1.1.1 presiona aquí 

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 1.1.1

- Para visitar un sitio web donde se encuentra una poderosa herramienta de integración online, presiona aquí . En esta página web podrás evaluar una integral indefinida y, de paso, chequear tus cálculos.

1.2. Métodos de integración (Técnicas de antiderivación)**1.2.1. Método de integración por sustitución**

Comenzamos recordando la regla de la cadena:

Si u es derivable en x y f es derivable en $u(x)$, entonces

$$\left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) u'(x)$$

para todo valor de x donde la compuesta está bien definida y es derivable.

Luego, desde la definición de integral indefinida, obtenemos

$$\int f'(u(x)) u'(x) dx = f(u(x)) + c,$$

y como $u = u(x)$, entonces $du = u'(x) dx$ y así obtenemos

$$\int f'(u) du = f(u) + c.$$

EJEMPLO 1.2.1 Evalúa la integral indefinida $\int 2x \operatorname{sen}(1+x^2) dx$.

Solución. Si ponemos $u = 1+x^2$, entonces $du = 2x dx$. Luego,

$$\int 2x \operatorname{sen}(1+x^2) dx = \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c = -\cos(1+x^2) + c. \quad \square$$

EJEMPLO 1.2.2 Evalúa la integral indefinida $\int x\sqrt{1+x^2} dx$.

Solución. Si ponemos $u = 1+x^2$, entonces $du = 2x dx$, de donde

$$u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} du = x dx.$$

Luego,

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c. \quad \square$$

EJEMPLO 1.2.3 Evalúa la integral indefinida $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$.

Solución. Si ponemos $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x \, dx$. Luego,

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx = \int u^4 \, du = \frac{1}{5} u^5 + c = \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + c. \quad \square$$

EJERCICIOS 1.2.1 Evalúa las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \tan x \, dx$

b) $\int \frac{dx}{(3 - 2x)^3}$

c) $\int x \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \, dx$

d) $\int \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \, dz$.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 1.2.1 presiona aquí 

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.2.1

1. Evalúa las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x^2 \sqrt{1 + x} \, dx$ **Sugerencia:** Usa $u = 1 + x$; $du = dx$; $x = u - 1$.

b) $\int \frac{4x^2}{(1 - 8x^3)^4} \, dx$

c) $\int \operatorname{sen} x \sqrt{1 - \cos x} \, dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$.

2. Una herida cicatriza de tal forma que t días a contar del Lunes el área de la herida ha comenzado a decrecer a razón de $-3(t + 2)^{-2} \, \text{cm}^2$ por día. Si el día Martes el área de la herida fue de $2 \, \text{cm}^2$,

a) ¿Cuál fue el área de la herida el día Lunes?

b) ¿Cuál será el área anticipada de la herida el día Viernes si ésta continúa cicatrizándose con la misma rapidez?

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 1.2.1 presiona aquí 

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 1.2.1

1. Para ver un video donde se evalúa la siguiente integral indefinida usando el método de integración por sustitución presiona aquí 

$$\int x(x^2 - 3) dx.$$

2. Para ver un video donde se evalúan las siguientes integrales indefinidas usando el método de integración por sustitución presiona aquí 

a) $\int e^{x+e^x} dx$

b) $\int \cot x \ln(\sin x) dx$

c) $\int \frac{x}{1-x^2-\sqrt{1-x^2}} dx$

d) $\int x \sqrt[3]{x+4} dx.$

1.2.2. Método de integración por partes

Recordemos ahora la regla de la derivada de un producto:

Sean u y v dos funciones derivables en x , entonces

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

para todo valor de x donde el producto está bien definido y es derivable.

Luego, desde la definición de integral indefinida, tenemos que

$$\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x) + c,$$

y, por la regla de la derivada del producto, obtenemos

$$\int u(x)v'(x) dx + \int v(x)u'(x) dx = u(x)v(x),$$

donde la constante c ha sido absorbida por las integrales indefinidas a la izquierda de la igualdad.

En particular,

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx,$$

Esta última fórmula es conocida como la *fórmula de integración por partes*.

Poniendo

$$\begin{cases} u = u(x) & dv = v'(x) dx \\ du = u'(x) dx & v = v(x), \end{cases}$$

la fórmula de integración por partes puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

EJEMPLO 1.2.4 Evalúa la integral indefinida $\int xe^x dx$.

Solución. Ponemos

$$\begin{cases} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2.5 Evalúa la integral indefinida $\int x \operatorname{sen} x dx$.

Solución. Ponemos

$$\begin{cases} u = x & dv = \operatorname{sen} x \\ du = dx & v = -\cos x. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x dx &= \int u dv = uv - \int v du \\ &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2.6 Evalúa la integral indefinida $\int e^x \cos x dx$.

Solución. Ponemos

$$\begin{cases} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\operatorname{sen} x dx & v = e^x. \end{cases}$$

Luego,

$$I = \int e^x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{I_1}. \quad (*)$$

Ahora, para I_1 ponemos:

$$\begin{cases} \bar{u} = \sin x & d\bar{v} = e^x \, dx \\ d\bar{u} = \cos x \, dx & \bar{v} = e^x. \end{cases}$$

Luego,

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - I.$$

Volviendo a (*), obtenemos

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

de donde

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x.$$

Por lo tanto,

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c. \quad \square$$

EJERCICIOS 1.2.2 Evalúa cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \ln x \, dx$

b) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} \, dx$

c) $\int \arcsen x \, dx.$

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 1.2.2 presiona aquí 

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.2.2 Evalúa cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

b) $\int x^2 e^x \, dx$

c) $\int x \ln x \, dx$

d) $\int \sec^3 x \, dx.$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 1.2.2 presiona aquí 

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 1.2.2

1. Para ver un video donde se evalúa la siguiente integral indefinida usando el método de integración por partes presiona aquí 

$$\int x^2 \cos(2x) dx.$$

2. Para ver un video donde se evalúa la siguiente integral indefinida usando el método de integración por partes presiona aquí 

$$\int x^3 e^{4x} dx.$$

3. Para ver un video donde se evalúan las siguientes integrales indefinidas usando el método de integración por partes presiona aquí 

a) $\int x e^{-x} dx.$

b) $\int \ln x dx.$

c) $\int x 5^x dx.$

1.2.3. Integración de funciones racionales: Método de integración vía descomposición en fracciones parciales

- *Caso 1.*

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales tales que $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$.

Asumamos que

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \quad \text{con } a_i \neq a_j \quad \forall i \neq j.$$

Entonces existen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

EJEMPLO 1.2.7 Evalúa la integral indefinida $\int \frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx.$

Solución. Notemos que

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x - 2)(x + 1).$$

Luego,

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1},$$

de donde

$$\begin{aligned} x-1 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \\ &= A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A = 0x^2 + 1x - 1 = x - 1.$$

Ahora resolvemos el sistema asociado a la ecuación previa, el cual proviene de igualar los coeficientes de las distintas potencias de x :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=1 \\ -2A=-1. \end{cases}$$

Desde la tercera ecuación, obtenemos que $A = \frac{1}{2}$. Reemplazando este valor en la primera y segunda ecuación formamos el sistema

$$\begin{cases} B+C = -\frac{1}{2} \\ B-2C = -\frac{3}{2}, \end{cases}$$

de donde obtenemos $3C = -2$, que conduce a

$$C = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + c \\ &= \ln \left(\frac{|x|^{1/2} |x-2|^{1/6}}{|x+1|^{2/3}} \right) + c. \quad \square \end{aligned}$$

■ *Caso 2.*

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales tales que $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$.

Asumamos que

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \dots (x-a_k)^{n_k} \quad \text{con } a_i \neq a_j \quad \text{si } i \neq j, \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Entonces existen $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n_1}, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n_2}, \dots, A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn_k} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{(x-a_k)} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}}.$$

En particular, si

$$Q(x) = (x-a)^n,$$

entonces existen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

EJEMPLO 1.2.8 Evalúa la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2-1}{x(x-2)^2} dx$.

Solución. Notemos que

$$\frac{x^2-1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Luego,

$$A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx = x^2 - 1$$

de donde obtenemos

$$(A+B)x^2 + (-4A-2B+C)x + 4A = x^2 - 1.$$

Ahora resolvemos el sistema asociado a la ecuación previa, el cual proviene de igualar los coeficientes de las distintas potencias de x :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -4A-2B+C=0 \\ 4A=-1. \end{cases}$$

Obtenemos:

$$A = -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad B = \frac{5}{4} \quad \wedge \quad C = -1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{(x-2)} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{5}{4} \ln|x-2| - \frac{3}{2(x-2)} + c \\ &= \ln \frac{|x-2|^{5/4}}{|x|^{1/4}} - \frac{3}{2(x-2)} + c. \quad \square \end{aligned}$$

■ *Caso 3.*

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales tales que $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$. Asumamos que

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } b^2 - 4ac < 0,$$

que implica que $ax^2 + bx + c$ no es factorizable en polinomios de primer grado. Entonces, existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

EJEMPLO 1.2.9 Evalúa la integral indefinida $\int \frac{(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$.

Solución. Notemos que el polinomio $x^2 + 1$ no es factorizable en polinomios de primer grado, de manera que

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Luego,

$$A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) = x^2 - 2x - 3,$$

de donde

$$Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C = x^2 - 2x - 3,$$

que conduce a

$$(A + B)x^2 + (C - B)x + (A - C) = x^2 - 2x - 3.$$

Ahora resolvemos el sistema asociado a la ecuación previa, el cual proviene de igualar los coeficientes de las distintas potencias de x :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C - B = -2 \\ A - C = -3. \end{cases}$$

Obtenemos,

$$A = -2, \quad B = 3 \quad \text{y} \quad C = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx &= -2 \int \frac{dx}{x - 1} + 3 \int \frac{x}{1 + x^2} dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= -2 \ln |x - 1| + \arctan x + \frac{3}{2} \ln |1 + x^2| + c. \quad \square \end{aligned}$$

■ *Caso 4.*

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales tales que $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$. Asumamos que

$$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^n \quad \text{con } b^2 - 4ac < 0,$$

de manera que $ax^2 + bx + c$ no es factorizable en polinomios de primer grado. Entonces, existen $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

EJEMPLO 1.2.10 Evalúa la siguiente integral indefinida $\int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2} dx$.

Solución. Notemos que el polinomio $x^2 - 4x + 5$ no es factorizable en polinomios de primer grado, de manera que

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2-4x+5)} + \frac{Dx+E}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Luego,

$$A(x^2-4x+5)^2 + (Bx+C)x(x^2-4x+5) + (Dx+E)x = x-2$$

de donde

$$\begin{aligned} Ax^4 + 16Ax^2 + 25A - 8Ax^3 + 10Ax^2 - 40Ax \\ + Bx^4 - 4Bx^3 + 5Bx^2 + Cx^3 - 4Cx^2 + 5Cx + Dx^2 + Ex = x - 2, \end{aligned}$$

que conduce a

$$(A+B)x^4 + (-8A-4B+C)x^3 + (16A+10A+5B-4C+D)x^2 + (-40A+5C+E)x + 25A = x-2.$$

Ahora resolvemos el sistema asociado a la ecuación previa, el cual proviene de igualar los coeficientes de las distintas potencias de x :

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -8A - 4B + C = 0 \\ 16A + 10A + 5B - 4C + D = 0 \\ -40A + 5C + E = 1 \\ 25A = -2. \end{array} \right.$$

Obtenemos,

$$A = -\frac{2}{25}, \quad B = \frac{2}{25}, \quad C = -\frac{8}{25}, \quad D = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad E = -\frac{3}{5}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2} dx \\ &= -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{2}{25} \int \frac{x dx}{x^2-4x+5} - \frac{8}{25} \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)} + \frac{2}{5} \int \frac{x dx}{(x^2-4x+5)^2} - \frac{3}{5} \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} \\ &= I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5, \end{aligned}$$

donde

$$I_1 = -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} = -\frac{2}{25} \ln|x|,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{25} \int \frac{x dx}{x^2-4x+5} \\ &= \frac{2}{25} \left(\frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{4}{x^2-4x+5} dx \right) \\ &= \frac{2}{25} \left(\frac{1}{2} \ln|x^2-4x+5| + 2 \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{25} \ln|x^2-4x+5| + \frac{4}{25} \arctan(x-2) + c, \end{aligned}$$

$$I_3 = -\frac{8}{25} \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)} = -\frac{8}{25} \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = -\frac{8}{25} \arctan(x-2) + c,$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{2}{5} \int \frac{x dx}{(x^2-4x+5)^2} \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{x dx}{((x-2)^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{5} \left(\int \frac{x-2}{((x-2)^2+1)^2} dx + \int \frac{2 dx}{((x-2)^2+1)^2} \right) \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \int \frac{2u}{(u^2+1)^2} du + 2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \right) \quad \text{donde } u = x-2 \\ &= -\frac{1}{5} \frac{1}{(x-2)^2+1} + \frac{2}{5} \arctan(x-2) + \frac{2}{5} \frac{(x-2)}{(x-2)^2+1} + c \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I_5 &= -\frac{3}{5} \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} \\ &= -\frac{3}{5} \int \frac{dx}{((x-2)^2+1)^2} \\ &= -\frac{3}{10} \arctan(x-2) - \frac{3}{10} \frac{(x-2)}{(x-2)^2+1} + c. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2} dx = \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x^2-4x+5}{x^2} \right| - \frac{3}{50} \arctan(x-2) + \frac{1}{10} \frac{x-4}{x^2-4x+5} + c. \quad \square$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.2.3 Evalúa las siguientes integrales indefinidas

a) $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

b) $\int \frac{3x - 5}{2x^2 - 5x - 12} dx$

c) $\int \frac{x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6} dx$

d) $\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

e) $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} dx$

f) $\int \frac{1}{(x + 1)^2(x + 1)^3} dx$

g) $\int \frac{x^4}{x^2 - 1} dx.$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 1.2.3 presiona aquí 

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 1.2.3

1. Para ver un video donde se evalúa la siguiente integral indefinida de funciones racionales usando descomposición en fracciones parciales presiona aquí 

$$\int \frac{5x + 1}{x^2 + x - 2} dx.$$

2. Para ver un video donde se evalúa la siguiente integral indefinida de funciones racionales usando descomposición en fracciones parciales presiona aquí 

$$\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 4x - 24}{x^4 + 4x^3 + 8x^2} dx.$$

3. Para ver un video donde se evalúa la siguiente integral indefinida de funciones racionales usando descomposición en fracciones parciales presiona aquí 

$$\int \frac{-x^4 - x^2 + 7}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

1.2.4. Integración de funciones trigonométricas

a. Potencias de senos y cosenos $\int \operatorname{sen}^n x \, dx, \int \operatorname{cos}^n x \, dx$.

- *Caso n impar.*

Podemos asumir que $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego factorizamos el integrando de forma conveniente.

Por ejemplo, si ponemos

$$\operatorname{sen}^n x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x,$$

y usamos la identidad

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1,$$

junto al cambio de variables

$$u = \operatorname{cos} x \quad du = -\operatorname{sen} x \, dx,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \, dx &= \int (1 - \operatorname{cos}^2 x)^k \operatorname{sen} x \, dx \\ &= - \int (1 - u^2)^k \, du. \end{aligned}$$

Similarmente, si ponemos

$$\operatorname{cos}^n x = (\operatorname{cos}^2 x)^k \operatorname{cos} x,$$

y hacemos el cambio de variables

$$u = \operatorname{sen} x \quad du = \operatorname{cos} x \, dx,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cos}^n x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{cos} x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^k \, du. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2.11 Evalúa la integral indefinida $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \operatorname{cos}^2 x) \operatorname{sen} x \, dx \\ &= - \int (1 - u^2) \, du \quad \text{donde } u = \operatorname{cos} x; -du = \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \frac{u^3}{3} - u + c \\ &= \frac{\operatorname{cos}^3 x}{3} - \operatorname{cos} x + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2.12 Evalúa la integral indefinida $\int \cos^5 x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{Solución. } \int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - u^2)^2 \, du \quad \text{donde } u = \sin x; \, du = \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du \\
 &= u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c \\
 &= \sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{2 \sin^5 x}{5} + c. \quad \square
 \end{aligned}$$

- *Caso n par.*

Podemos asumir que $n = 2k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego factorizamos el integrando de forma conveniente.

Por ejemplo, si ponemos

$$\sin^n x = \sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k,$$

usamos la identidad trigonométrica:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Similarmente, si ponemos

$$\cos^n x = \cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k$$

y usamos la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

EJEMPLO 1.2.13 Evalúa la integral indefinida $\int \sin^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{Solución. } \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx \\
 &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx \\
&= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + c. \quad \square
\end{aligned}$$

b. Productos de potencias de senos y cosenos $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$

- *Caso m y n par.*

Si m y n son pares, al integrar utilizaremos las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

y

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

EJEMPLO 1.2.14 Evalúa la integral indefinida $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos^2(2x)}{4} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int 2 \cos^2(2x) dx \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int \cos^2 u du \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 + \cos(2u)}{2} \right) du \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{16} \int du - \frac{1}{32} \int 2 \cos(2u) du \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{16} u - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(2u) + c \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + c \\
&= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + c. \quad \square
\end{aligned}$$

- *Caso m o n impar*

Si m o n impar, al integrar utilizaremos, de ser necesario, la identidad

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

y/o el método de sustitución.

EJEMPLO 1.2.15 Evalúa la integral indefinida $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$.

Solución.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^3 x \, dx \\ &= \int \cos^3 x \, dx - \int \cos^5 x \, dx \\ &= \int \cos^2 x \cos x \, dx - \int \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2) \, du - \int (1 - u^2)^2 \, du \quad \text{donde } u = \operatorname{sen} x; \, du = \cos x \\ &= u - \frac{u^3}{3} - u + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \operatorname{sen} x + \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + c \\ &= -\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c. \quad \square \end{aligned}$$

c. Productos de potencias de tangentes y secantes $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$

- *Caso m par.*

Si n es par usamos la identidad

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

En efecto, considerando el cambio de variables

$$u = \tan x; \quad du = \sec^2 x \, dx,$$

y $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\int \tan^n x \sec^{2k} x \, dx = \int (\sec^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x \, dx = \int (1 + u^2)^{k-1} u^n \, du.$$

- *Caso n impar.*

Si n es impar usamos la identidad

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

En efecto, considerando el cambio de variables

$$u = \sec x; \quad du = \sec x \tan x \, dx,$$

y $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\int \tan^{2k+1} x \sec^m x \, dx = \int (\tan^2 x)^k \tan x \sec^{m-1} x \sec x \, dx = \int (u^2 - 1)^k u^{m-1} \, du.$$

- *Caso n par y m impar.*

En este caso podemos usar otros métodos, por ejemplo integración por partes, que permitan reducir nuestro estudio a integrales conocidas.

1.2.5. Método de integración por sustitución trigonométrica

Este método es un caso especial del método de sustitución.

- *Caso 1. $\sqrt{a^2 - x^2}$*

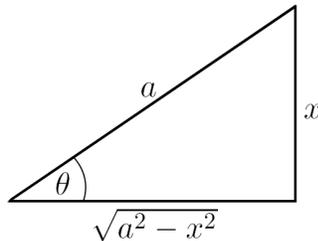


Figura 1.1. Triángulo rectángulo asociado a la relación $x = a \operatorname{sen} \theta$

Notemos que

$$\sqrt{a^2 - x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1.$$

Además, resulta natural realizar el siguiente cambio de variables

$$x = a \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \left(\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta \quad \wedge \quad dx = a \cos \theta \, d\theta \right).$$

Por último, observemos que de acuerdo a nuestro cambio de variables

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \right).$$

EJEMPLO 1.2.16 Evalúa la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx$.

Solución. Ponemos $x = 3 \operatorname{sen} \theta$ y obtenemos

$$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta \quad \wedge \quad dx = 3 \cos \theta \, d\theta \quad \wedge \quad x^2 = 9 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta = \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \\
 &= \int \cot^2 \theta d\theta \\
 &= \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta \\
 &= -\cot \theta - \theta + c \\
 &= \frac{-\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + c. \quad \square
 \end{aligned}$$

- Caso 2. $\sqrt{a^2 + x^2}$

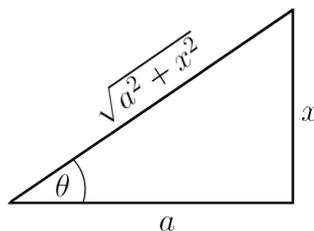


Figura 1.2. Triángulo rectángulo asociado a la relación $x = a \tan \theta$

Notemos que

$$\sqrt{a^2 + x^2} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además, resulta natural realizar el siguiente cambio de variables

$$x = a \tan \theta \Rightarrow \left(\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta \quad \wedge \quad dx = a \sec^2 \theta d\theta \right).$$

Por último, observemos que de acuerdo a nuestro cambio de variables

$$\theta = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right).$$

EJEMPLO 1.2.17 Evalúa la integral indefinida $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2}$.

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \int \frac{dx}{((x^2 - 4x + 4) + 1)^2} \\
 &= \int \frac{dx}{((x - 2)^2 + 1)^2} \\
 &= \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2} \quad \text{donde } u = x - 2 \quad ; \quad du = dx
 \end{aligned}$$

Ahora ponemos $u = \tan \theta$ y obtenemos $du = \sec^2 \theta d\theta$. Luego,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\
 &= \int \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + c \quad \left(\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \arctan u + \frac{1}{2} \frac{u}{1+u^2} + c \\
 &= \frac{1}{2} \arctan(x-2) + \frac{1}{2} \frac{(x-2)}{1+(x-2)^2} + c. \quad \square
 \end{aligned}$$

- Caso 3. $\sqrt{x^2 - a^2}$

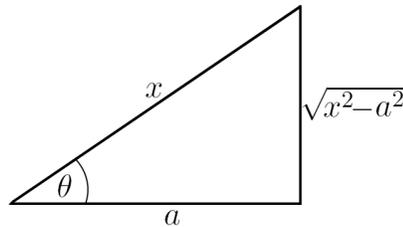


Figura 1.3. Triángulo rectángulo asociado a la relación $x = a \sec \theta$

Notemos que

$$\sqrt{x^2 - a^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} \leq -1 \quad \vee \quad \frac{x}{a} \geq 1 \right).$$

Además, resulta natural realizar el siguiente cambio de variables

$$x = a \sec \theta \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta \quad \wedge \quad dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta \right).$$

Por último, observemos que de acuerdo a nuestro cambio de variables

$$\theta = \arccos \left(\frac{a}{x} \right).$$

EJEMPLO 1.2.18 Evalúa la integral indefinida $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 16}} dx$.

Solución. Tenemos,

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 16}} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 16}} \quad \text{donde } z = \tan x \quad ; \quad dz = \sec^2 x dx.$$

Ahora ponemos $z = 4 \sec \theta$ y obtenemos

$$\sqrt{z^2 - 16} = 4 \tan \theta \quad \wedge \quad dz = 4 \sec \theta \tan \theta d\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4 \sec \theta \tan \theta}{4 \tan \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \\ &= \ln \left| \frac{z}{4} + \frac{\sqrt{z^2 - 16}}{4} \right| + c \\ &= \ln \left| \frac{\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 16}}{4} \right| + c \\ &= \ln |\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 16}| + c. \quad \square \end{aligned}$$

1.2.6. Método de integración para funciones racionales de seno y coseno

Si un integrando es una función racional que sólo depende de $\sin x$ y $\cos x$, entonces haciendo el cambio de variables

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

ésta se puede reescribir en forma de una función racional que depende sólo de z , y la integral resultante será más fácil de evaluar.

Veamos a continuación cómo se origina este cambio de variables. Como ya sabemos:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \wedge \quad \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Luego, si ponemos

$$\alpha = \left(\frac{x}{2}\right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \sin x &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2z}{1 + z^2} \\ \blacksquare \quad \cos x &= 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1 = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \\ \blacksquare \quad z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) &\Rightarrow dz = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{2} (1 + z^2) dx \\ &\Rightarrow \frac{2}{(1 + z^2)} dz = dx. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2.19 Evalúa la integral indefinida $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x}$.

Solución. Usamos el cambio de variables

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

que implica que

$$dx = \frac{2 dz}{1 + z^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x} &= \int \frac{\frac{2}{1+z^2} dz}{1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{2 dz}{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)} \\ &= \frac{2}{2} \int \frac{dz}{1-z} \\ &= -\ln|1-z| + c \\ &= -\ln\left|1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.2.20 Evalúa la integral indefinida $\int \sec x dx$.

Solución. Usamos el cambio de variables

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

que implica que

$$dx = \frac{2}{(1+z^2)} dz \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \quad \operatorname{cos} x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \tan x = \frac{2z}{1-z^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\operatorname{cos} x} dx = \int \frac{2}{1-z^2} dz \\ &= \int \frac{1}{1-z} dz + \frac{1}{1+z} dz \\ &= \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{1-2z+z^2}{1-z^2}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{1+z^2}{1-z^2} - \frac{2z}{1-z^2}\right| + c \\ &= \ln|\sec x - \tan x| + c. \quad \square \end{aligned}$$

1.2.7. Resumen sobre algunas técnicas de integración

Tabla 1.2. Método de integración por sustitución

Integral	
$\int f(u(x)) u'(x) dx$	$\int f(u) du$
$u = u(x)$	
$du = u'(x) dx$	

Tabla 1.3. Método de integración por partes

Integral	
$\int u(x) v'(x) dx$	$\int u dv = uv - \int v du$
$u = u(x)$	$dv = v'(x) dx$
$du = u'(x) dx$	$v = v(x)$

Tabla 1.4. Método de integración por sustitución trigonométrica

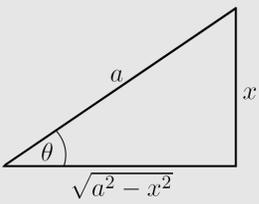
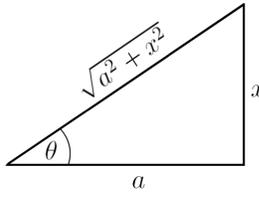
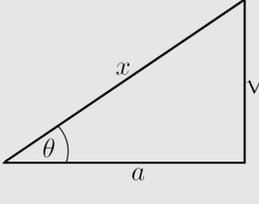
Expresión	Sustitución	Triángulo asociado	Expresiones asociadas
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$		$dx = a \cos \theta d\theta$ $a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 \theta$ $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \right)$ Otras expresiones se obtienen desde el triángulo asociado
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$		$dx = a \sec^2 \theta d\theta$ $a^2 + x^2 = a^2 \sec^2 \theta$ $\theta = \operatorname{arc} \tan \left(\frac{x}{a} \right)$ Otras expresiones se obtienen desde el triángulo asociado
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$		$dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ $x^2 - a^2 = a^2 \tan^2 \theta$ $\theta = \operatorname{arc} \sec \left(\frac{x}{a} \right)$ Otras expresiones se obtienen desde el triángulo asociado

Tabla 1.5. Método de integración por descomposición en fracciones parciales de la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Se asume que $\text{grad}(P(x)) < \text{grad}(Q(x))$	
Forma de la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	Forma de la descomposición
$\int \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} dx$	$\int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx$
$\int \frac{P(x)}{(x-a)^n} dx$	$\int \frac{A_1}{x-a} dx + \int \frac{A_2}{(x-b)^2} dx + \dots + \int \frac{A_n}{(x-a)^n} dx$
$\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx, b^2 - 4ac < 0$	$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$
$\int \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^n} dx, b^2 - 4ac < 0$	$\int \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} dx + \dots + \int \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$
<p>Nota: Si $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x))$ entonces $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con $\text{grad}(R(x)) < \text{grad}(Q(x))$ y $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$</p>	

Tabla 1.6. Método de integración de funciones racionales de seno y coseno

Sustitución	Expresiones asociadas
$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$dx = \frac{2}{1+z^2} dz$
	$\text{sen } x = \frac{2z}{1+z^2}$
	$\text{cos } x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$
	$\tan x = \frac{2z}{1-z^2}$

EJERCICIOS DE REPASO 1.2.1

1. Evalúa las siguientes integrales indefinidas usando el método de sustitución

a) $\int 2x \text{sen}(1+x^2) dx$ b) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$ c) $\int \text{sen}^4 x \text{cos } x dx$
 d) $\int \frac{1}{(3-2x)^3} dx$ e) $\int x\sqrt{a^2+b^2x^2} dx$ f) $\int \frac{(3 \ln x - 5)^4}{x} dx$

2. Evalúa las siguientes integrales indefinidas usando el método de integración por partes

a) $\int e^{2x} \text{sen}(e^x) dx$ b) $\int e^x \text{sen } x dx$ c) $\int x^4 \sqrt{6-3x^5} dx$
 d) $\int \text{cos } x \text{cos}(2x) dx$ e) $\int (\ln x)^2 dx$ f) $\int \text{cos } x \ln(\text{sen } x) dx$

3. Evalúa las siguientes integrales indefinidas mediante una descomposición en fracciones parciales

$$\begin{aligned} a) \int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} dx & \quad b) \int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x} dx & \quad c) \int \frac{x^2+x+2}{x^2-1} dx \\ d) \int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8} dx & \quad e) \int \frac{3x^3+13x+4}{x^3+4x} dx & \quad f) \int \frac{x^2}{x^4+2x^2+1} dx \end{aligned}$$

4. Evalúa las siguientes integrales indefinidas usando sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} a) \int \frac{1}{w^2 \sqrt{w^2-7}} dw & \quad b) \int \frac{t^3}{(25-t^2)^2} dt & \quad c) \int \frac{\sec^2 x}{(4-\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}} dx \\ d) \int \frac{e^z}{(e^{2z}+8e^z+7)^{\frac{3}{2}}} dz & \quad e) \int \frac{1}{(\theta^2-6\theta+18)^{\frac{3}{2}}} d\theta & \quad f) \int \frac{\ln^3 s}{s \sqrt{\ln^2 s-4}} ds \end{aligned}$$

5. Evalúa las siguientes integrales indefinidas

$$\begin{aligned} a) \int \tan^4 x \sec^6 x dx & \quad b) \int \sin^2 x \cos^2 x dx & \quad c) \int \frac{1+\cos(2x)}{\sin^2(2x)} dx \\ d) \int \frac{1}{2\sin x+2\cos x+3} dx & \quad e) \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx & \quad f) \int \frac{1}{1+\cos x} dx \end{aligned}$$

Para ver las Soluciones de algunos de los Ejercicios de Repaso 1.2.1 presiona aquí 

1.3. Aplicaciones de la integral indefinida en problemas de valores iniciales

1.3.1. Preliminares

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una *ecuación diferencial ordinaria* es una ecuación en la que intervienen derivadas respecto a una variable independiente de una o más funciones desconocidas.

Algunas ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3.$$

Se dice que las ecuaciones son *de primer orden* si las derivadas que contiene son de primer orden, de *segundo orden* si las derivadas que contiene son de segundo orden, pudiendo contener otros términos con derivadas de primer orden, y así...

Variables separables

Una ecuación diferencial de primer orden muy simple es

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

que también se puede escribir en la forma

$$dy = f(x) dx.$$

Esta ecuación la podemos resolver integrando directamente en cada lado de la igualdad, de forma que

$$\int dy = \int f(x) dx,$$

de donde, al integrar en cada lado de manera independiente, obtenemos,

$$y = F(x) + c,$$

donde F es una antiderivada de f .

Más generalmente, ecuaciones diferenciales ordinarias que se pueden reducir a la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

o bien a la forma

$$g(y) dy = f(x) dx$$

reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de variables separables*, las que se pueden resolver directamente al integrar en cada lado de la igualdad. Es decir,

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx,$$

de donde obtenemos

$$G(y) = F(x) + c,$$

donde F es una antiderivada de f y G es una antiderivada de g .

EJEMPLO 1.3.1 Transforma la ecuación diferencial

$$f_1(x) g_1(y) dx - f_2(x) g_2(y) dy = 0$$

en una ecuación de variables separables.

EJEMPLO 1.3.2 Resuelve la ecuación diferencial

$$\cot y \csc y dx + (1 + x) \csc y dy = 0.$$

EJEMPLO 1.3.3 Resuelve la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y^2 - x^4}{xy}.$$

Sugerencia: Usa el cambio de variable $y = ux$.

1.3.2. Problemas de valores iniciales

Si al formular una ecuación diferencial en términos de una variable “ y ” que depende de una variable “ x ”, se especifican condiciones sobre la variable “ y ” en un único valor de “ x ”, entonces denominamos a este problema, *problema de valores iniciales* o PVI.

EJEMPLO 1.3.4 Encuentra una solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}.$$

Luego, encuentra una solución particular que satisfaga la condición inicial $y = 1$ cuando $x = 1$.

OBSERVACIÓN 1.3.1 Otra forma de plantear el problema anterior es la siguiente: Resuelve el PVI

$$\begin{cases} y' = \frac{2x^2}{3y^3} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

EJEMPLO 1.3.5 Resuelve el PVI

$$\begin{cases} y'' = 4x + 3 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = -3. \end{cases}$$

EJEMPLO 1.3.6 Sea \mathcal{S} el conjunto de todas las curvas cuya pendiente está dada por:

$$y' = -\frac{3x + xy^2}{2y + x^2y}.$$

Encuentra la curva en \mathcal{S} que pasa por el punto $(2, 1)$ del plano cartesiano.

1.3.3. Aplicaciones

Modelamiento Matemático

Los modelos matemáticos se usan para describir matemáticamente un fenómeno de la vida real. El modelamiento matemático corresponde a la formulación de un modelo matemático. Algunas etapas para formular un modelo son:

- A partir de cierta información respecto de un hecho o fenómeno, se identifican aquellas variables que son agentes de cambio del fenómeno usando notación matemática.
- Se plantea una (o más) preguntas respecto del hecho o fenómeno y se identifica el problema a investigar, complementando la información que se conoce con alguna información adicional, la cual generalmente corresponde a leyes empíricas, y que ayuden a contestar la (las) pregunta(s).
- Una vez establecido el conjunto de hipótesis razonables acerca del fenómeno en cuestión (también conocidas como leyes empíricas aplicables), se plantea el modelo y se realizan las operaciones necesarias para resolver el problema planteado.

Dentro de las hipótesis que ayudan a describir un fenómeno, con frecuencia encontramos a la razón de cambio de una o más de las variables que intervienen. Luego, el enunciado matemático correspondiente a cada hipótesis por lo general se representa mediante una o más ecuaciones en las que intervienen derivadas de funciones.

Reacciones químicas y desintegración

Sea t la variable tiempo medida en una unidad de tiempo determinada y supongamos que en $t = 0$ se tienen x_0 gramos de una cierta sustancia (puede ser cualquier otra unidad de medida como kilogramos, centígramos, etc. . .). Nos interesa saber como se desintegra esta sustancia con el paso del tiempo.

- Denotemos por $x(t)$ a la cantidad de la sustancia en el tiempo t . Entonces $x(0) = x_0$.
- Sabemos que

$$\frac{dx}{dt}$$

representa la razón de cambio de la cantidad de la sustancia con respecto al tiempo t .

- Asumamos, para efectos de plantear nuestro problema, que *la velocidad con que se descompone la masa de la sustancia es proporcional a la masa*. Esto es,

$$\frac{dx}{dt} = -k x,$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. El signo negativo se explica pues se espera que la cantidad de sustancia disminuya con el paso del tiempo. Además, notemos que el supuesto que *la velocidad con que se descompone la masa de la sustancia es proporcional a la masa* es muy razonable, pues se sabe que para cierto tipo de moléculas que se desintegran por la acción del medio, el número de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo es proporcional al número de moléculas total presente.

- Entonces, debemos resolver el PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

- Notemos que la ecuación en el PVI es de variables separables, y es equivalente a la ecuación

$$\frac{dx}{x} = -k dt,$$

la cual se resuelve integrando,

$$\int \frac{dx}{x} = -k \int dt,$$

de donde obtenemos que

$$\ln |x| = -kt + c,$$

o equivalentemente

$$x(t) = Ce^{-kt} \quad \text{para alguna constante } C > 0,$$

pues $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, y $e^{-kt+c} = e^c e^{-kt} = Ce^{-kt}$, con $C = e^c$.

- Evidentemente, como $x(0) = x_0$, el valor de C debe ser exactamente igual a x_0 . En efecto,

$$(x(0) = x_0 \quad \wedge \quad x(0) = Ce^{-k \cdot 0} = C) \Rightarrow C = x_0.$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$x(t) = x_0 e^{-kt}.$$

- En muchas ocasiones se pregunta por la vida media o semivida de la sustancia, que es el tiempo requerido para que la sustancia se reduzca a la mitad. En nuestro caso estudiado, la ecuación a resolver para t sería

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kt}.$$

EJEMPLO 1.3.7 (Desintegración de sustancias radiactivas) Una sustancia radiactiva se desintegra a una velocidad que es proporcional a la cantidad presente. Además, se sabe que de 200 gramos de esta sustancia radiactiva, al cabo de 100 años quedan sólo 50 gramos.

- Calcula la vida media de esta sustancia.
- ¿Cuántos gramos de sustancia radiactiva quedarán al cabo de 200 años?

Solución. De acuerdo a la información del problema, la cantidad inicial de la sustancia radiactiva es

$$x_0 = 200.$$

Si $x(t)$ es la cantidad de la sustancia radioactiva en el instante t , entonces

$$x(t) = 200e^{-kt},$$

donde k es la constante de proporcionalidad entre la velocidad con que se descompone la masa de la sustancia y la masa. Para responder a las preguntas planteadas es evidente que necesitamos encontrar previamente el valor de k .

De acuerdo a la información del problema, tenemos que

$$x(100) = 50.$$

Por otro lado,

$$x(100) = 200e^{-100k}.$$

Luego, podemos calcular k resolviendo la ecuación

$$50 = 200e^{-100k},$$

de donde obtenemos que

$$k = \ln 4^{\frac{1}{100}}.$$

Ahora responderemos a las preguntas planteadas.

a) Nos piden calcular la vida media de la sustancia. Tenemos,

$$\frac{200}{2} = 200e^{-\ln 4^{\frac{1}{100}}t},$$

que conduce a

$$4^{-\frac{1}{100}t} = \frac{1}{2} = 4^{-\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\frac{1}{100}t = \frac{1}{2}.$$

Luego,

$$t = 50.$$

Por lo tanto la vida media de la sustancia es de 50 años.

b) Nos piden calcular $x(200)$. Tenemos,

$$x(200) = 200e^{-\ln 4^{\frac{1}{100}}200} = 200e^{\ln 16^{-1}} = \frac{200}{16} = 12,5.$$

Por lo tanto, en 200 años quedarán 12,5 gramos de la sustancia. \square

Crecimiento exponencial de poblaciones

Sea t la variable tiempo medida en una unidad de tiempo determinada y supongamos que en $t = 0$ hay P_0 habitantes en de una cierta especie en un determinado lugar. Nos interesa saber como varía la cantidad de habitantes con el paso del tiempo.

- Denotemos por $P(t)$ al número de habitantes de la especie (en un determinado lugar) en el instante t . Entonces $P(0) = P_0$.

- Sabemos que

$$\frac{dP}{dt}$$

representa la razón de cambio de la cantidad de población con respecto al tiempo t .

- Establezcamos algunas condiciones razonables que debe satisfacer P . Sea $N(t) = N$ la tasa de natalidad de la especie y $M(t) = M$ la tasa de mortalidad de la especie. Si Δt es un intervalo de tiempo pequeño, tendremos que

$$P(t + \Delta t) - P(t) = N P(t) \Delta t - M P(t) \Delta t.$$

Luego, dividiendo por Δt en ambos lados y pasando al límite cuando Δt tiende a cero, obtenemos que

$$\frac{dP}{dt} = k P,$$

donde $k = N - M$ es la tasa de crecimiento neto de la población (k puede ser positiva o negativa, dependiendo de los valores de M y N).

- Entonces, debemos resolver el PVI

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k P \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

- Notemos que la solución de este PVI es

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

EJEMPLO 1.3.8 La población de cierta ciudad se duplicó desde el año 1980 hasta el año 2000. Si la tasa de crecimiento natural de la población es proporcional a la población en cualquier tiempo y la población en 1960 era de 6.000 habitantes, estima la población para el año 2016.

Solución. De acuerdo a la información del problema, la población inicial está dada en el año 1960, y es

$$P_0 = 6.000.$$

Si $P(t)$ es el número de habitantes de la población en el instante t , entonces

$$P(t) = 6.000e^{kt},$$

donde k es la tasa de crecimiento neto de la población. Nos piden calcular el número de habitantes de la población para el año 2016, y como $2016 - 1960 = 56$, debemos calcular $P(56)$, por lo que necesitamos encontrar el valor de k .

De acuerdo a la información en el problema, tenemos que

$$2P(20) = P(40),$$

pues $1980 = 1960 + 20$ y $2000 = 1960 + 40$. Por otro lado,

$$P(20) = 6.000e^{20k} \quad \text{y} \quad P(40) = 6.000e^{40k}.$$

Luego, podemos calcular k resolviendo la ecuación

$$2 \cdot 6.000e^{20k} = 6.000e^{40k}.$$

Obtenemos,

$$e^{40k-20k} = 2,$$

y se sigue que

$$20k = \ln 2,$$

de donde

$$k = \ln 2^{\frac{1}{20}}.$$

Por lo tanto,

$$P(56) = 6.000e^{56 \ln 2^{\frac{1}{20}}} = 6.000e^{\ln 2^{\frac{56}{20}}} \approx 41.786.$$

Es decir, en 2016 habrán aproximadamente 41.786 habitantes. \square

Ley de Newton del enfriamiento y el calentamiento

Sea t la variable tiempo medida en una unidad de tiempo determinada y supongamos que en $t = 0$ se tiene que T_0 es la temperatura de un cuerpo que se encuentra en un medio determinado, con temperatura igual a T_m en todo momento. Nos interesa saber como varía la temperatura en el cuerpo con el paso del tiempo.

- Denotemos por $T(t)$ a la temperatura de un cuerpo en el instante t y asumamos que para cada t la temperatura en todo el cuerpo es igual (lo que equivale a decir, que si bien la temperatura del cuerpo varía con el tiempo, no importa en que parte del cuerpo mida su temperatura, pues en todo su interior ésta será la misma). Entonces $T(0) = T_0$.

- Sabemos que

$$\frac{dT}{dt}$$

representa la razón de cambio de la temperatura respecto al tiempo t .

- Es conocido que el flujo de calor a través del borde del cuerpo (dado por $\frac{dT}{dt}$) es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio. Esto es,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. Notemos que:

- $T > T_m$ implica que el cuerpo se enfría. Luego, la temperatura decrece, y así

$$\frac{dT}{dt} < 0.$$

- $T < T_m$ implica que el cuerpo se calienta. Luego, la temperatura crece, y así

$$\frac{dT}{dt} > 0.$$

- Por lo tanto, debemos resolver el PVI

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

- Notemos que la solución de este PVI es

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

siendo esperable que cuando el tiempo crezca ilimitadamente, la temperatura T se aproxime cada vez más a la temperatura del medio, que es T_m . Es decir, se debiese verificar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_m.$$

EJEMPLO 1.3.9 Un cuerpo que posee 80°C de temperatura en su interior es puesto en un cuarto cerrado que posee una temperatura constante desconocida. Si a los 10 minutos la temperatura del cuerpo descendió a 70°C y a los 20 minutos bajó hasta los 65°C , ¿cuál es la temperatura del cuarto?

Solución. La temperatura inicial del cuerpo es

$$T_0 = 80.$$

Si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el instante t , entonces

$$T(t) = T_m + (80 - T_m)e^{-kt},$$

donde T_m es la temperatura del medio, a determinar, y k es la constante de proporcionalidad que determina el flujo de calor a través del borde del cuerpo. De acuerdo a la información en el problema, tenemos que

$$T(10) = 70 \quad \text{y} \quad T(20) = 65.$$

Por otro lado,

$$T(10) = T_m + (80 - T_m)e^{-10k} \quad \text{y} \quad T(20) = T_m + (80 - T_m)e^{-20k}.$$

Luego, para encontrar T_m (que es lo que me preguntan), debemos tener en cuenta al sistema

$$\begin{cases} T_m + (80 - T_m)e^{-10k} = 70 \\ T_m + (80 - T_m)e^{-20k} = 65. \end{cases}$$

Una forma de encontrar el valor de T_m es despejar en la primera ecuación

$$e^{-10k} = \frac{70 - T_m}{80 - T_m} = 1 - \frac{10}{80 - T_m} \Rightarrow e^{-20k} = 1 - \frac{20}{80 - T_m} + \frac{100}{(80 - T_m)^2},$$

despejar en la segunda ecuación

$$e^{-20k} = \frac{65 - T_m}{80 - T_m} = 1 - \frac{15}{80 - T_m},$$

y entonces igualar

$$1 - \frac{20}{80 - T_m} + \frac{100}{(80 - T_m)^2} = 1 - \frac{15}{80 - T_m},$$

que nos conduce a resolver la ecuación

$$\frac{5}{80 - T_m} = \frac{100}{(80 - T_m)^2}.$$

Desde aquí obtenemos

$$T_m = 60.$$

Por lo tanto, la temperatura del cuarto es de 60°C. \square

EJERCICIOS PROPUESTOS 1.3.1 Resuelve los siguientes problemas.

1. **[Desplazamiento horizontal de una partícula]** Una partícula se desplaza en línea recta. Si s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos, v metros por segundos es la velocidad de la partícula a los t segundos, y a metros por segundos cuadrados es la aceleración de la partícula a los t segundos, expresa v y s como funciones de t , supuesto que $a(t) = 2t - 1$ si $t \geq 0$, y que $v = 3$ y $s = 4$ cuando $t = 1$.
2. **[Lanzamiento vertical de un proyectil]** Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 128 pies por segundos. Si la única fuerza que se considera es la atribuida a la aceleración de gravedad, determina
 - a) cuánto tiempo tardará la piedra en chocar contra el suelo,
 - b) la velocidad con la cual la piedra chocará contra el suelo,
 - c) la altura máxima a la que se elevará la piedra en su ascenso.
3. **[Mezclas]** Considera un recipiente que posee en su interior un dispositivo de agitación tal que en todo momento mantiene homogénea una mezcla de agua con sal. Si al recipiente le agregamos agua con c gramos de sal por litro a una velocidad de a litros por segundo, y sacamos agua del recipiente a la misma velocidad, entonces la cantidad de sal que hay en el recipiente en el tiempo t queda determinada por

$$x(t) = cV + (x_0 - cV)e^{-\frac{a}{V}t} \quad \forall t > 0,$$

donde V es el volumen en litros de la mezcla que se encuentra en el recipiente (el cual es constante en todo momento).

Asume ahora que el recipiente contiene 100 litros de agua sin sal, que entra agua con 500 gramos de sal por litro, a razón de 5 litros por minuto, y que además sale agua del recipiente a la misma velocidad. ¿En cuánto tiempo el recipiente tendrá 10 kilos de sal?

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 1.3.1 presiona aquí **B**

En el presente capítulo introduciremos el concepto de integral definida, bajo la perspectiva de Riemann, y ligaremos este concepto con el de integral indefinida introducido en el capítulo anterior.

2.1. Preliminares

Partimos recordando algunos resultados sobre funciones continuas en intervalos cerrados y acotados que fueron establecidos en el curso de Cálculo Diferencial.

DEFINICIÓN 2.1.1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que

i) f es acotada si su recorrido es acotado

ii) f es continua en $x \in I$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall z \in I)(|z - x| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \varepsilon)$$

iii) f es continua en I si f es continua en cada punto en I

iv) f es uniformemente continua en I si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall x, z \in I)(|x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon).$$

OBSERVACIÓN 2.1.1 La principal diferencia entre la continuidad y la continuidad uniforme es que en la primera el δ de la definición depende de x y de ε , mientras que en la segunda, el δ depende sólo de ε (i.e. es independiente de x).

TEOREMA 2.1.1 (Acotamiento global de una función continua en un intervalo cerrado) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, f es acotada en $[a, b]$.

TEOREMA 2.1.2 (Teorema de Weierstrass) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces

$$(\exists c_1, c_2 \in [a, b]) \text{ tales que } \left(f(c_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \wedge f(c_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \right).$$

COROLARIO 2.1.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado en \mathbb{R} .

TEOREMA 2.1.3 (Continuidad en un intervalo cerrado y acotado implica continuidad uniforme) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces ella es uniformemente continua en $[a, b]$.

2.2. Partición de un intervalo $[a, b]$

DEFINICIÓN 2.2.1 Una *partición de un intervalo* $[a, b]$ es un conjunto finito $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

EJEMPLO 2.2.1 Señale algunas particiones de $[0, 1]$.

Solución. Algunas particiones de $[0, 1]$ son las siguientes:

$$\mathcal{P}_1 = \{0, 1\}, \quad \mathcal{P}_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad \mathcal{P}_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}, \quad \mathcal{P}_4 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}. \quad \square$$

NOTACIÓN 2.2.1 Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ introducimos a continuación la siguiente notación,

- $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$
- $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$
- $I_k = [x_{k-1}, x_k]$
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

DEFINICIÓN 2.2.2 Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Llamamos

i) *Suma superior de f con respecto a \mathcal{P}* a la cantidad

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k,$$

ii) *Suma inferior de f con respecto a \mathcal{P}* a la cantidad

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k.$$

EJEMPLO 2.2.2 Sea $f(x) = x^2$ definida en $[0, 1]$; consideremos la siguiente partición de $[0, 1]$:

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\} = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1 \right\}.$$

Encuentra I_k, M_k, m_k y Δx_k , para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; y calcula $S(f, \mathcal{P})$ y $s(f, \mathcal{P})$.

Solución. Tenemos

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{4} \right], \quad I_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right], \quad I_4 = \left[\frac{3}{4}, 1 \right].$$

Por otro lado, como la función f es continua y estrictamente creciente en $[0, 1]$, se verifica que

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) \quad \forall x \in I_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Así, en el intervalo I_k la función f alcanza su valor máximo en x_k (que por continuidad es donde f alcanza su supremo en I_k) y su valor mínimo en x_{k-1} (que por continuidad es donde f alcanza su ínfimo en I_k). Luego,

$$\begin{aligned} M_1 &= f(x_1) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, & m_1 &= f(x_0) = f(0) = 0^2 = 0, \\ M_2 &= f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, & m_2 &= f(x_1) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \\ M_3 &= f(x_3) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, & m_3 &= f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\ M_4 &= f(x_4) = f(1) = 1^2 = 1, & m_4 &= f(x_3) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Entonces, dado que

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{4} - 0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}, \quad \Delta x_4 = x_4 - x_3 = 1 - \frac{3}{4},$$

obtenemos

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{1}{4},$$

de donde

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^4 M_k \Delta x_k = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1 \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{32}$$

y

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^4 m_k \Delta x_k = \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{32}. \quad \square$$

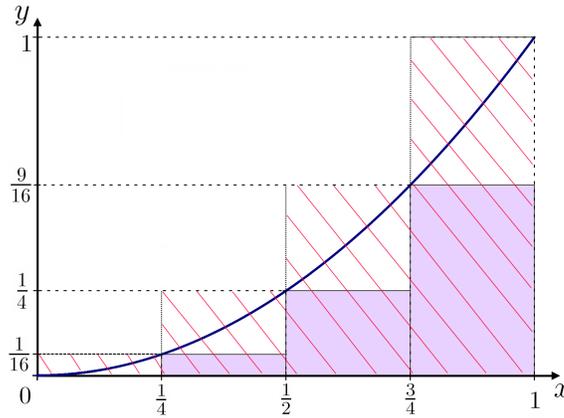


Figura 2.1. Suma superior e inferior para $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ con respecto a la partición $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

OBSERVACIÓN 2.2.1 Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- Como

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x) \leq \sup_{x \in I_k} f(x) = M_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

donde $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, es claro que

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S(f, \mathcal{P}).$$

- Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la cantidad $M_k \Delta x_k$ es el área del rectángulo de base Δx_k y altura M_k , mientras que la cantidad $m_k \Delta x_k$ es el área del rectángulo de base Δx_k y altura m_k (vea la Figura 2.1 asociada al Ejemplo 2.2.2).

2.3. Refinamientos de una partición de un intervalo $[a, b]$

DEFINICIÓN 2.3.1 Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos particiones de $[a, b]$. Diremos que \mathcal{P}_1 es un refinamiento de \mathcal{P}_2 si $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$.

LEMA 2.3.1 Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos particiones de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si \mathcal{P}_1 es un refinamiento de \mathcal{P}_2 , entonces

$$S(f, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_2).$$

Demostración. Sea $\mathcal{P}_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \cup \{z^*\}.$$

Entonces,

$$\mathcal{P}_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k_0}, z^*, x_{k_0+1}, \dots, x_n\}.$$

Luego,

$$S(f, \mathcal{P}_1) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n M_j \cdot \Delta x_j + M_{1,k_0}^* \cdot (z^* - x_{k_0}) + M_{2,k_0}^* \cdot (x_{k_0+1} - z^*) \quad (2.1)$$

y como

$$M_{1,k_0}^* \leq M_{k_0} \quad \wedge \quad M_{2,k_0}^* \leq M_{k_0},$$

entonces

$$M_{1,k_0}^* \cdot (z^* - x_{k_0}) \leq M_{k_0} \cdot (z^* - x_{k_0}) \quad \wedge \quad M_{2,k_0}^* \cdot (x_{k_0+1} - z^*) \leq M_{k_0} \cdot (x_{k_0+1} - z^*),$$

de donde obtenemos que

$$M_{1,k_0}^* \cdot (z^* - x_{k_0}) + M_{2,k_0}^* \cdot (x_{k_0+1} - z^*) \leq M_{k_0} \cdot (x_{k_0+1} - z^*),$$

y así, desde (2.1), concluimos que

$$S(f, \mathcal{P}_1) \leq S(f, \mathcal{P}_2). \quad \blacksquare$$

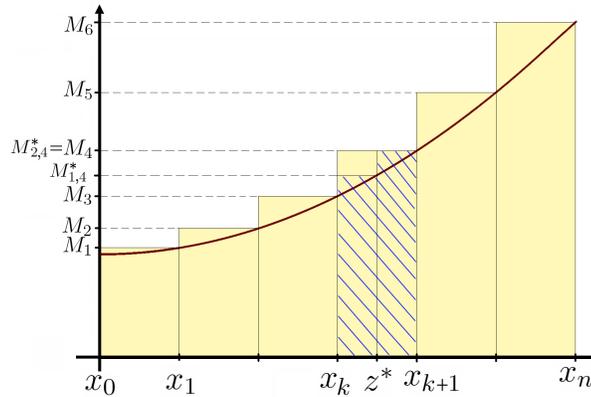


Figura 2.2. Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, la suma de las áreas de los rectángulos del refinamiento (con un elemento más) de la partición \mathcal{P} , aproximan mejor el área bajo la curva $y = f(x)$ limitada por el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

LEMA 2.3.2 Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos particiones de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si \mathcal{P}_1 es un refinamiento de \mathcal{P}_2 , entonces

$$s(f, \mathcal{P}_2) \leq s(f, \mathcal{P}_1).$$

La demostración es análoga a la anterior, y por lo tanto aquí la omitimos.

TEOREMA 2.3.1 Sean \mathcal{P} y \mathcal{P}' dos particiones de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}').$$

Demostración. Sea $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$, entonces \mathcal{P}_1 es un refinamiento de \mathcal{P} . Luego,

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &\leq s(f, \mathcal{P}_1) && \text{(Lema 2.3.2)} \\ &\leq S(f, \mathcal{P}_1) \\ &\leq S(f, \mathcal{P}') && \text{(Lema 2.3.1).} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

NOTACIÓN 2.3.1 Denotaremos por $\mathbf{P}[a, b]$ al conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

COROLARIO 2.3.1 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces los conjuntos

$$\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]\} \quad \text{y} \quad \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]\}$$

son acotados y los valores

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} s(f, \mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \inf_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} S(f, \mathcal{P})$$

son números reales. Además, estos valores verifican

$$m(b-a) \leq \sup_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} s(f, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} S(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

donde

$$m = \min_{z \in [a, b]} f(z) \quad \text{y} \quad M = \max_{z \in [a, b]} f(z).$$

Demostración Sea $\mathcal{P}_0 = \{x_0 = a, x_1 = b\}$. Notar que esta es la partición de $[a, b]$ que contiene menos elementos, por lo que cualquier otra partición de $[a, b]$ será un refinamiento de esta. Luego, desde los lemas anteriores, se sigue que

$$m(b-a) = s(f, \mathcal{P}_0) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}_0) = M(b-a) \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a, b].$$

De esta forma,

$$m(b-a) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a) \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]$$

y

$$m(b-a) \leq S(f, \mathcal{P}') \leq M(b-a) \quad \forall \mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a, b],$$

que implican que los conjuntos

$$\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]\} \quad \text{y} \quad \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]\}$$

son acotados en \mathbb{R} . Luego, por el axioma del supremo, ambos conjuntos poseen supremo e ínfimo. Además, por el Teorema 2.3.1 y nuestras consideraciones previas, tenemos que

$$m(b-a) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}') \leq M(b-a) \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a, b].$$

Tomando el supremo sobre las particiones $\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]$ en la desigualdad previa, obtenemos

$$m(b-a) \leq \sup_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}') \leq M(b-a) \quad \forall \mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a, b].$$

Tomando ahora el ínfimo sobre las particiones $\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a, b]$ en la última desigualdad, obtenemos

$$m(b-a) \leq \sup_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} s(f, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a, b]} S(f, \mathcal{P}') \leq M(b-a). \quad \blacksquare$$

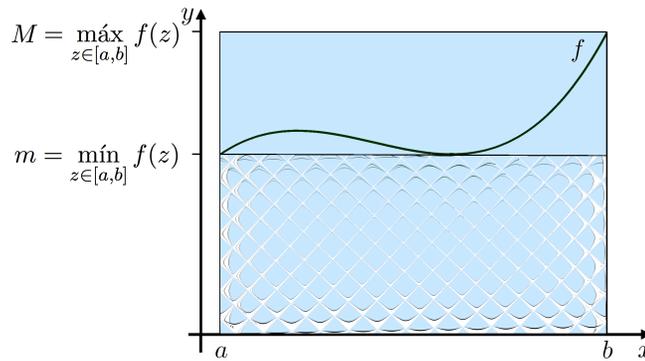


Figura 2.3. Cota inferior para las sumas inferiores: $s(f, \mathcal{P}_0) = m(b-a)$; y cota superior para las sumas superiores: $S(f, \mathcal{P}_0) = M(b-a)$, con $\mathcal{P}_0 = \{a, b\}$, $m = \inf_{z \in [a, b]} f(z)$ y $M = \sup_{z \in [a, b]} f(z)$.

2.4. Funciones Riemann-integrables

DEFINICIÓN 2.4.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y consideremos los valores

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} s(f, \mathcal{P}) \quad \wedge \quad \overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} S(f, \mathcal{P}).$$

Diremos que f es *Riemann-integrable* en $[a, b]$ si

$$\overline{\int}_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

En este caso, el valor se denomina *integral de Riemann de f en el intervalo $[a, b]$* y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Un resultado básico sobre funciones acotadas que son Riemann-integrables es el siguiente.

TEOREMA 2.4.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann-integrable en $[a, b]$ y sean

$$m = \min_{z \in [a, b]} f(z) \quad \text{y} \quad M = \max_{z \in [a, b]} f(z).$$

Entonces,

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$

Demostración. Desde la Definición 2.4.1 de función Riemann-integrable y el Corolario 2.3.1, concluimos que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx = \overline{\int_a^b f(x) \, dx} \leq M(b - a). \quad \blacksquare$$

Naturalmente surge la siguiente pregunta

¿Son todas las funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$ Riemann-integrables en $[a, b]$?

La respuesta es negativa. A continuación exhibimos un **contraejemplo** que muestra que *no todas las funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$ son Riemann-integrables en $[a, b]$.*

EJEMPLO 2.4.1 Muestra que la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

no es Riemann-integrable.

Solución. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[0, 1]$. Entonces

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0.$$

Esto último es así pues sabemos que entre dos números reales cualesquiera siempre hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales, de manera que en los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ siempre existirán números $z_k^* \in \mathbb{Q}$ y $\hat{z}_k \in \mathbb{Q}^c$ verificando que $f(z_k^*) = 0$ y $f(\hat{z}_k) = 1$. Luego,

$$S(f, \mathcal{P}) = 1 \quad \text{y} \quad s(f, \mathcal{P}) = 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[0, 1].$$

Así,

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 0 \neq 1 = \overline{\int_0^1 f(x) \, dx}.$$

Por lo tanto, f no es Riemann-integrable en $[0, 1]$. \square

2.5. Criterios de integrabilidad–Riemann

Dado que no todas las funciones acotadas son Riemann–integrables, una pregunta que surge ahora es la siguiente

¿Qué funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$ son Riemann–integrables en $[a, b]$?

Antes de dar algunos criterios de integrabilidad–Riemann, damos una condición suficiente que si la llegamos a probar, entonces podremos concluir que una cierta función acotada en $[a, b]$ es Riemann–integrable en $[a, b]$.

OBSERVACIÓN 2.5.1 *Para probar que una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann–integrable, bastará con establecer que para $\varepsilon > 0$ dado es posible escoger una partición \mathcal{P} de $[a, b]$ que verifique*

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

En efecto, por propiedades del supremo e ínfimo es claro que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a,b]} S(f, \mathcal{P}') - \sup_{\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a,b]} s(f, \mathcal{P}') \\ &= \inf_{\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a,b]} S(f, \mathcal{P}') + \inf_{\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a,b]} (-s(f, \mathcal{P}')) \\ &\leq \inf_{\mathcal{P}' \in \mathbf{P}[a,b]} (S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}')) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego,

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \underline{\int_a^b f(x) dx} < \varepsilon.$$

Pasando ahora al límite cuando ε tiende a 0, concluimos que

$$\underline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Por lo tanto, f resulta ser Riemann–integrable en $[a, b]$.

Los siguientes resultados son muy importantes pues nos permiten obtener una amplia clase de funciones que son Riemann–integrables.

TEOREMA 2.5.1 *Toda función constante en $[a, b]$ es Riemann–integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = C$ para cada $x \in [a, b]$. Luego, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que

$$m_k = \min_{z \in [x_{k-1}, x_k]} f(z) = C \quad \text{y} \quad M_k = \max_{z \in [x_{k-1}, x_k]} f(z) = C.$$

De esta forma, para $\varepsilon > 0$ dado, tenemos que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = 0 < \varepsilon.$$

Finalmente, desde la Observación 2.5.1, concluimos que f es Riemann-integrable en $[a, b]$. ■

TEOREMA 2.5.2 Toda función monótona y acotada en $[a, b]$ es Riemann-integrable en $[a, b]$.

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y acotada en $[a, b]$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que f es monótona creciente y que $f(b) > f(a)$ (pues si $f(a) = f(b)$, entonces f sería constante en $[a, b]$ y ya probamos que en este caso f es Riemann-integrable). Luego, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que

$$m_k = \min_{z \in [x_{k-1}, x_k]} f(z) = f(x_{k-1}) \quad \text{y} \quad M_k = \max_{z \in [x_{k-1}, x_k]} f(z) = f(x_k).$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado y consideremos la partición \mathcal{P} de manera tal que

$$\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

donde n depende de ε . Entonces

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, desde la Observación 2.5.1, concluimos que f es Riemann-integrable en $[a, b]$. ■

TEOREMA 2.5.3 Toda función continua en $[a, b]$ es Riemann-integrable en $[a, b]$.

Demostración. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f será uniformemente continua en $[a, b]$. Esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in [a, b]) \left(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \right).$$

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que

$$\Delta x_k < \delta \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

donde n depende de ε . Como f es continua en cada subintervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, ella alcanza sus valores máximo y mínimo en tal subintervalo. Luego, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ existen

$z_k, \bar{z}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tales que

$$m_k = \min_{z \in I_k} f(z) = f(z_k) \quad \text{y} \quad M_k = \max_{z \in I_k} f(z) = f(\bar{z}_k).$$

Notemos que $\Delta x_k < \delta$ implica que $|\bar{z}_k - z_k| < \delta$, y así

$$0 \leq M_k - m_k = f(\bar{z}_k) - f(z_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, desde la Observación 2.5.1, concluimos que f es Riemann-integrable en $[a, b]$. ■

TEOREMA 2.5.4 Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es Riemann-integrable en $[a, b]$.

En la siguiente sección volveremos sobre este resultado con más detalle.

EJEMPLO 2.5.1 ¿Existe la integral de Riemann $\int_0^1 \sin x \, dx$?

Solución. Sí, existe, pues la función $f(x) = \sin x$ es una función continua en $[0, 1]$. □

EJEMPLO 2.5.2 ¿Existe la integral de Riemann $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^x \tan x \, dx$?

Solución. Sí, existe, pues la función $f(x) = e^x \tan x$ es una función continua en $[-\pi/4, \pi/4]$. □

EJEMPLO 2.5.3 Muestra que $0 \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx \leq \pi$.

Solución. Sea $f(x) = \cos x$, con $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Como f es una función continua en $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces f es Riemann-integrable en $[-\pi/2, \pi/2]$, y se verifica que

$$M = \sup_{x \in [-\pi/2, \pi/2]} \cos x = 1 \quad \text{y} \quad m = \inf_{x \in [-\pi/2, \pi/2]} \cos x = 0.$$

Entonces, dado que la longitud del intervalo donde integramos es

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

desde el Teorema 2.4.1 concluimos que

$$0 = m \pi \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx \leq M \pi = \pi. \quad \square$$

EJEMPLO 2.5.4 Muestra que $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^4} dx \leq \sqrt{17}$.

Solución. Sea $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, con $x \in [1, 2]$. Como f es una función continua en $[1, 2]$, entonces f es Riemann-integrable en $[1, 2]$. Notemos también que esta función es creciente en $[1, 2]$. En efecto, tenemos

$$(\sqrt{1+x^4})' = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} > 0 \quad \forall x \in [1, 2],$$

y concluimos que f es creciente por el criterio de la primera derivada que estudiamos en el curso anterior. Luego,

$$M = \sup_{x \in [1, 2]} \sqrt{1+x^4} = \sqrt{1+2^4} = \sqrt{17} \quad \text{y} \quad m = \inf_{x \in [1, 2]} \sqrt{1+x^4} = \sqrt{1+1^4} = \sqrt{2}.$$

Entonces, dado que la longitud del intervalo donde integramos es

$$2 - 1 = 1,$$

desde el Teorema 2.4.1 concluimos que

$$\sqrt{2} = m \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^4} dx \leq M = \sqrt{17}. \quad \square$$

EJEMPLO 2.5.5 Sea $b \geq a$. Prueba que $\int_a^b C dx = C(b-a)$.

Solución. Sea $f(x) = C$, con $x \in [a, b]$, y sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Entonces, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = C = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = m_k.$$

Luego,

$$s(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n C \Delta x_k = C \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = C(b-a).$$

Notemos que los valores de $s(f, \mathcal{P})$ y $S(f, \mathcal{P})$ encontrados son independientes de la partición \mathcal{P} escogida. Así,

$$s(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{P}) = c(b-a) \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b].$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x) dx = c(b-a). \quad \square$$

EJERCICIOS 2.5.1 Sean a y b en \mathbb{R} tales que $b \geq a \geq 0$. Prueba que

$$a) \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

$$b) \int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

$$c) \int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a.$$

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 2.5.1 presiona aquí 

OBSERVACIÓN 2.5.2 En los Ejercicios 2.5.1 la restricción $b \geq a \geq 0$ no es necesaria. En otras palabras, los resultados son válidos en el caso general $b \geq a$.

2.6. Propiedades de la integral de Riemann

TEOREMA 2.6.1 (Integral de Riemann en un punto) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann-integrable y sea $c \in [a, b]$. Entonces

$$\int_c^c f(x) \, dx = 0.$$

Demostración. Como f es acotada en $[a, b]$, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m = \min_{z \in [a, b]} f(z) \quad \text{y} \quad M = \max_{z \in [a, b]} f(z).$$

Sea $\varepsilon > 0$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c \in]a, b[$. Poniendo $I_\varepsilon = [c - \frac{\varepsilon}{2}, c + \frac{\varepsilon}{2}]$, vemos que claramente se verifica que

$$m \varepsilon \leq \int_{c - \frac{\varepsilon}{2}}^{c + \frac{\varepsilon}{2}} f(x) \, dx \leq \overline{\int_{c - \frac{\varepsilon}{2}}^{c + \frac{\varepsilon}{2}} f(x) \, dx} \leq M \varepsilon.$$

Pasando al límite cuando ε tiende a cero, obtenemos lo requerido. ■

TEOREMA 2.6.2 (Propiedad aditiva) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann-integrable en $[a, b]$ y sea $c \in]a, b[$. Entonces f es Riemann-integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Más aún,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ y sea $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{c\}$. Ponemos

$$\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}' \cap [a, c]) \in \mathbf{P}[a, c] \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}' \cap [c, b]) \in \mathbf{P}[c, b].$$

Entonces

$$S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2) = S(f, \mathcal{P}') \quad \text{y} \quad s(f, \mathcal{P}_1) + s(f, \mathcal{P}_2) = s(f, \mathcal{P}').$$

Ahora, como

$$s(f, \mathcal{P}_1) + s(f, \mathcal{P}_2) \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2),$$

se tiene que

$$s(f, \mathcal{P}') \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq S(f, \mathcal{P}'). \quad (2.2)$$

Por otro lado, como $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ implica que \mathcal{P}' es refinamiento de \mathcal{P} , obtenemos

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \quad \text{y} \quad S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}). \quad (2.3)$$

Luego, como f es Riemann-integrable, se sigue que

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} s(f, \mathcal{P}) = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf_{\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]} S(f, \mathcal{P}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Entonces desde (2.2) y (2.3), obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 2.6.3 (Integral de Riemann de una función acotada que es continua a trozos) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es continua a trozos, siendo sus puntos de discontinuidad c_1, c_2, \dots, c_n , con $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Entonces f es Riemann-integrable en $[a, b]$ y se verifica que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

OBSERVACIÓN 2.6.1 En el Teorema 2.6.3 previo no es necesario que la función f esté definida en los puntos c_1, c_2, \dots, c_n pues, como ya hemos visto en el Teorema 2.6.1, la integral en un punto vale 0. Sólo es necesario tener en cuenta la hipótesis de que la función es continua y acotada en los trozos del intervalo $[a, b]$ comprendidos entre c_{k-1} y c_k , para todo $k \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, con $c_0 = a$ y $c_{n+1} = b$.

EJEMPLO 2.6.1 Sea $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2 & 2 < x \leq 3. \end{cases}$ Encuentra el valor de $\int_0^3 f(x) dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x) dx &= \int_0^2 x dx + \int_2^3 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}(2^2 - 0^2) + \frac{1}{3}(3^3 - 2^3) \\ &= 2 + \frac{19}{3} = \frac{47}{6}. \quad \square\end{aligned}$$

TEOREMA 2.6.4 (Propiedad de linealidad) Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas que son Riemann-integrables en $[a, b]$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ dado. Entonces

$$\begin{aligned}i) \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \\ ii) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

NOTACIÓN 2.6.1 Por simplicidad notacional, es usual escribir

$$f \geq 0 \text{ en } [a, b] \quad \text{en vez de} \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

TEOREMA 2.6.5 (Integral de una función no negativa) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann-integrable en $[a, b]$, con $f \geq 0$ en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Demostración. Observemos que si $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Luego,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \geq 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b],$$

y como

$$s(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x) dx,$$

obtenemos el resultado requerido. ■

COROLARIO 2.6.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con $f > 0$ en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

La demostración es evidente, por lo tanto aquí la omitimos.

Mediante cálculos directos es fácil chequear que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función nula en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Ahora nos preguntamos por el resultado recíproco:

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada que es Riemann-integrable en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

¿Se verifica necesariamente que $f = 0$ en $[a, b]$?

En otras palabras, queremos saber si se cumple la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

A continuación mostramos un **contraejemplo** para probar que en general la propiedad (2.4) no se cumple.

EJEMPLO 2.6.2 Considera la función $f(x) = x$, con $x \in [-1, 1]$ y calcula el valor de $\int_{-1}^1 x dx$.
¿Se cumple (2.4)?

Solución. Notemos que

$$\int_{-1}^1 x dx = \frac{1}{2} (1^2 - (-1)^2) = 0,$$

pero

$$f(x) = x \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

Por lo tanto, (2.4) no se cumple. \square

TEOREMA 2.6.6 (Propiedad de monotonía) Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas que son Riemann-integrables en $[a, b]$. Si $f \geq g$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Demostración. Notemos que por hipótesis $f - g \geq 0$ en $[a, b]$. Luego, desde el Teorema 2.6.5 de integración según Riemann de funciones no negativas y el Teorema 2.6.4 sobre la propiedad de linealidad de las integrales de Riemann, obtenemos que

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

COROLARIO 2.6.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann-integrable en $[a, b]$. Entonces $|f|$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ y se verifica que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Nos preguntamos ahora por la validez o no del recíproco del Corolario 2.6.2. Es decir, nos hacemos la siguiente pregunta,

¿El hecho que $|f|$ sea Riemann-integrable en $[a, b]$ implica necesariamente que f es Riemann-integrable en $[a, b]$?

A continuación mostramos un **contraejemplo** para probar que en general no es suficiente que $|f|$ sea Riemann-integrable para concluir que f es Riemann-integrable.

EJEMPLO 2.6.3 Considera la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \cap [-1, 1]. \end{cases}$$

Muestra que $|f|$ es Riemann-integrable. ¿Es f Riemann-integrable?

Solución. Claramente

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 1 dx = 1 - (-1) = 2.$$

Por otro lado,

$$s(f, \mathcal{P}) = -1 \quad \wedge \quad S(f, \mathcal{P}) = 1 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[-1, 1].$$

Por lo tanto,

$$\nexists \int_{-1}^1 f(x) dx. \quad \square$$

2.7. Teorema del valor medio para integrales

TEOREMA 2.7.1 (Teorema del valor medio integral) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\exists c \in [a, b] \quad \text{tal que} \quad \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Demostración. Desde el Teorema 2.4.1 tenemos que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a),$$

donde

$$m = \min_{z \in [a,b]} f(z) \quad \text{y} \quad M = \max_{z \in [a,b]} f(z).$$

Dividiendo en la desigualdad previa por $(b - a)$, obtenemos

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m = f(x_0)$ y $M = f(x_1)$, para ciertos $x_0, x_1 \in [a, b]$, con $x_0 < x_1$. Luego, desde el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas en un intervalo cerrado, tenemos que

$$\exists c \in [x_0, x_1] \quad \text{tal que} \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

Luego, como $[x_0, x_1] \subset [a, b]$, al despejar el valor de la integral de Riemann en la igualdad anterior, obtenemos la igualdad deseada. ■

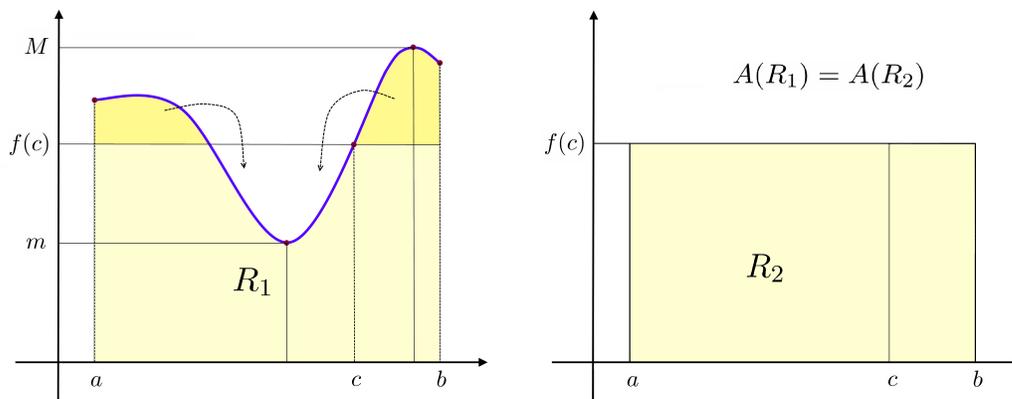


Figura 2.4. Teorema del Valor Medio para la integral definida de una función continua y acotada.

EJEMPLO 2.7.1 Sea $f(x) = x^2$. Encuentra $\gamma \in [1, 3]$ tal que $\int_1^3 f(x) dx = 2f(\gamma)$.

Solución. Notemos que el Teorema 2.7.1 del valor medio integral garantiza que $\exists \gamma \in [1, 3]$ tal que $\int_1^3 f(x) dx = f(\gamma)(3 - 1) = 2f(\gamma)$. Haciendo cálculos directos obtenemos

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3} = 2f(\gamma).$$

Luego,

$$f(\gamma) = \frac{13}{3} \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{13}{3} \Leftrightarrow \gamma = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Pero descartamos el valor $-\frac{1}{3}\sqrt{39}$ pues no pertenece al intervalo $[1, 3]$, así que $\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{39}$. □

2.8. Sumas de Riemann. Aproximaciones de una integral de Riemann

Nos hacemos la siguiente pregunta,

¿Existe alguna otra forma de aproximar el valor de una integral de Riemann?

A continuación veremos algunas formas de aproximar el valor de una integral de Riemann.

DEFINICIÓN 2.8.1 Sea $\mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]$ dada por $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Llamamos *norma de la partición* \mathcal{P} al valor:

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k,$$

donde para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ representa la longitud del intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

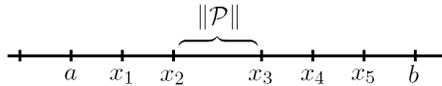


Figura 2.5. Norma de una partición \mathcal{P}

2.8.1. Aproximación de Riemann

DEFINICIÓN 2.8.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función, sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, y sea $\omega_k \in I_k$. Llamamos *suma de Riemann de f con respecto a \mathcal{P}* a la cantidad

$$\sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k. \quad (2.5)$$

En particular, la cantidad (2.5) es llamada

- i) *Suma de Riemann por izquierda de f con respecto a \mathcal{P}* si $\omega_k = x_{k-1}$, y la denotamos por S_I .
- ii) *Suma de Riemann por derecha de f con respecto a \mathcal{P}* si $\omega_k = x_k$, y la denotamos por S_D .
- iii) *Suma de Riemann promedio de f con respecto a \mathcal{P}* si $\omega_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, y la denotamos por S_M .

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Consideremos también, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, los valores

$$m_k = \inf_{z \in I_k} f(z), \quad M_k = \sup_{z \in I_k} f(z) \quad \text{y} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

donde $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Sea ahora $\omega_k \in I_k$ cualquiera, para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Es claro que

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S(f, \mathcal{P}).$$

Por otro lado, si $\mathcal{P}' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ es un refinamiento de \mathcal{P} que posee más elementos que la cantidad de elementos de \mathcal{P} (es decir $m > n$), entonces $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$ y se verifica que

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq \sum_{k=1}^m f(\omega'_k) \Delta x'_k \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}),$$

donde $\omega'_k \in I'_k$, con $I'_k = [x'_{k-1}, x'_k]$ y $\Delta x'_k = (x'_k - x'_{k-1})$ para $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entonces, en el caso que $\|\mathcal{P}\|$ sea tan pequeña como queramos surge naturalmente la siguiente pregunta,

¿Cómo se relaciona la expresión $\sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k$ con la integral de Riemann $\int_a^b f(x) dx$?

TEOREMA 2.8.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Los siguientes dos proposiciones son equivalentes.

- i) f es Riemann-integrable en $[a, b]$.
- ii) Existe un número real L tal que

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]) \left(\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k - L \right| < \varepsilon \right).$$

Aquí $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$, verificando $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y la n -upla $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ es cualquiera que verifique $\omega_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

OBSERVACIÓN 2.8.1

- Es evidente que el valor L en el Teorema 2.8.1 anterior es precisamente el valor de la integral de Riemann de f en $[a, b]$. Es decir,

$$L = \int_a^b f(x) dx.$$

- Cuando f es una función continua en $[a, b]$ tal que $f \geq 0$ en $[a, b]$, las sumas de Riemann son aproximaciones del área bajo la curva $y = f(x)$ limitada por las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x . En efecto, desde el Teorema 2.8.1, podemos deducir que mientras más pequeño es el valor de $\|\mathcal{P}\|$, mejor es la aproximación que estamos haciendo del "área bajo la curva" que es como podemos interpretar al valor de la integral de Riemann de f en $[a, b]$.

EJEMPLO 2.8.1 Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$. Considera la siguiente partición de $[1, 2]$: $\mathcal{P} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$. Calcula S_I , S_D y S_M .

Solución. Hacemos cálculos directos y obtenemos

$$S_I = \left(f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right) \cdot \frac{1}{4} = \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) \cdot \frac{1}{4} \approx 0,7595,$$

$$S_D = \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) \right) \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} \approx 0,6345,$$

$$S_M = \left(f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{11}{8}\right) + f\left(\frac{13}{8}\right) + f\left(\frac{15}{8}\right) \right) \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{8}{9} + \frac{2}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15} \right) \cdot \frac{1}{4} \approx 0,6911. \quad \square$$

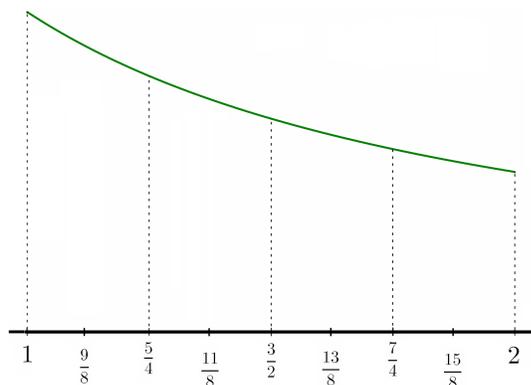


Figura 2.6. Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$, considerando la partición $\mathcal{P} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$.

OBSERVACIÓN 2.8.2 Desde el Teorema 2.8.1, se deduce que los valores encontrados en el ejemplo anterior corresponden a aproximaciones del valor de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

2.8.2. Aproximación trapezoidal

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea \mathcal{P} una partición regular de n intervalos de $[a, b]$; es decir, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Para entender la idea detrás de esta aproximación, podemos asumir que $f \geq 0$ en $[a, b]$ y observar la Figura 2.7 a continuación.

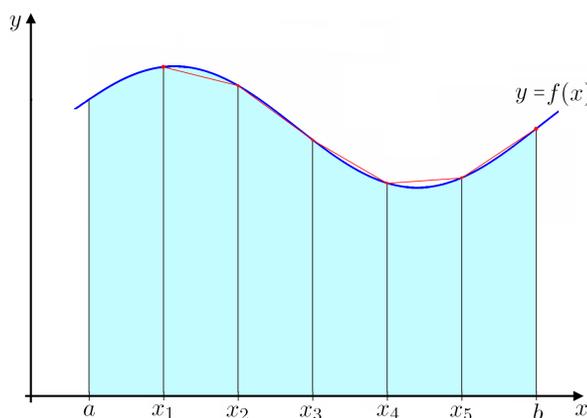


Figura 2.7. Aproximación trapezoidal del “área bajo la curva” determinada por una función.

Si nos concentramos en los trapecios rectángulos T_k de bases con longitudes $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, y

altura Δx_k , obtenemos que el área $A(T_k)$ de cada trapecio está dada por:

$$A(T_k) = \frac{1}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \Delta x_k.$$

Por lo tanto, la suma de las áreas de los n trapecios es

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^n A(T_k) \\ &= \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \\ &= \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.8.2 Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$. Considerando la partición $\mathcal{P} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$ de $[1, 2]$, aproxima el valor de la integral de Riemann $\int_1^2 f(x) dx$ mediante una aproximación trapezoidal.

Solución. Hacemos cálculos directos y obtenemos

$$T(4) = \frac{2-1}{4} \left(f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right) \approx 0,7595. \quad \square$$

2.8.3. Aproximación de Simpson

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea \mathcal{P} una partición regular de n intervalos de $[a, b]$; es decir, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

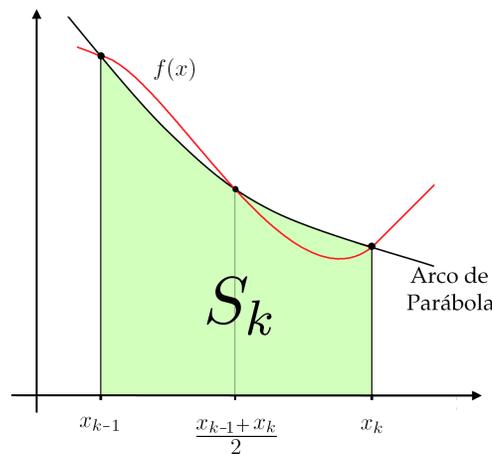


Figura 2.8. Aproximación de Simpson del “área bajo la curva” determinada por una función.

Por simplicidad, asumamos que $f \geq 0$ en $[a, b]$. El área de la región S_k en la Figura 2.8 está dada por

$$A(S_k) = \frac{1}{6} \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right) \Delta x_k.$$

Entonces la suma de las n áreas asociadas a la partición es:

$$S(n) = \sum_{k=1}^n A(S_k) = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) + 4 \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \right).$$

EJEMPLO 2.8.3 Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$. Considerando la partición $\mathcal{P} = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$ de $[1, 2]$, aproxima el valor de la integral de Riemann $\int_1^2 f(x) dx$ mediante la aproximación de Simpson.

Solución. Hacemos cálculos directos y obtenemos

$$S(4) = \frac{1}{24} \left(f(1) + f(2) + 2 \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right) + 4 \left(f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{11}{8}\right) + f\left(\frac{13}{8}\right) + f\left(\frac{15}{8}\right) \right) \right) \\ \approx 0,6931. \quad \square$$

2.9. La integral definida

Gracias al Teorema 2.8.1, desde ahora en adelante podemos usar la siguiente definición para la integral de Riemann, también conocida como *integral definida* (siempre en el sentido de Riemann).

DEFINICIÓN 2.9.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que f es *Riemann-integrable* en $[a, b]$ si existe un número real L tal que

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall \mathcal{P} \in \mathbf{P}[a, b]) \left(\|\mathcal{P}\| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k - L \right| < \varepsilon \right). \quad (2.6)$$

Aquí $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[a, b]$, verificando $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y la n -upla $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ es cualquiera que verifique $\omega_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. El valor L recibe el nombre de *integral de Riemann de f en $[a, b]$* y se denota por

$$L = \int_a^b f(x) dx.$$

OBSERVACIÓN 2.9.1 La condición (2.6) en el Teorema 2.8.1 se puede reescribir como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \Delta x_k,$$

siempre que el valor de este límite sea igual a un mismo número real L , independientemente de la elección de la partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y de la elección de la n -upla $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ tal que $\omega_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

NOTACIÓN 2.9.1 En el símbolo:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

identificamos las siguientes partes: \int corresponde al *signo integral*, $f(x)$ es el *integrand*, a es el *límite inferior de integración*, b es el *límite superior de integración* y la expresión dx señala que estamos integrando con respecto a x , por lo cual x es la *variable de integración*.

DEFINICIÓN 2.9.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$; y sea x cualquier valor $x \in [a, b]$. Llamamos *función integral de f* en $[a, b]$ a la función $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

NOTACIÓN 2.9.2 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann-integrable. Por convención escribimos,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

TEOREMA 2.9.1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces la función integral de f

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable en $]a, b[$ y verifica que

$$\varphi'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Demostración. Sea $x \in]a, b[$. Debemos probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f(x).$$

Trataremos sólo el caso $h > 0$. Veamos,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_a^x \cancel{f(t)} dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x \cancel{f(t)} dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \frac{1}{h} f(c_h)(\cancel{x} + h - \cancel{x}) \\ &= f(c_h), \end{aligned}$$

donde $c_h \in [x, x+h]$ está dada por el Teorema 2.7.1 del valor medio integral. Luego, pasando al

límite, es claro que $c_h \rightarrow x$ cuando $h \rightarrow 0$, y como f es continua, se deduce que $f(c_h) \rightarrow f(x)$ cuando $h \rightarrow 0$. Así, dado que f esta bien definida en $[a, b]$, concluimos que $\exists \varphi'(x)$, y que

$$\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2.9.1 Sea $G(x) = \int_0^x (3t^2 + 1) dt$. Calcula $G'(x)$.

Solución. Como la función $f(t) = (3t^2 + 1)$ es continua en \mathbb{R} , se tiene que $G'(x) = 3x^2 + 1$. \square

EJEMPLO 2.9.2 Sea $H(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Calcula $H'(x)$.

Solución. Como la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene que $H'(x) = \frac{1}{x}$. \square

EJEMPLO 2.9.3 Sea $F(x) = \int_1^{x^2} (2s^3 + 4s) ds$. Calcula $F'(x)$.

Solución. Si hacemos la sustitución $u = x^2$, entonces $u' = 2x$ y $F(x) = \tilde{F}(u)$. Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u) = \int_1^u (2s^3 + 4s) ds &\Rightarrow (\tilde{F}(u))' = (2u^3 + 4u) u' \quad \text{por Regla de la cadena} \\ &\Rightarrow F'(x) = 2x(2x^6 + 4x^2). \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.9.4 Sea $F(x) = \int_1^{\cos x} \frac{ds}{1+s^2}$. Calcula $F'(x)$.

Solución. Si hacemos la sustitución $u = \cos x$, entonces $u' = -\sen x$ y $F(x) = \tilde{F}(u)$. Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u) = \int_1^u \frac{ds}{1+s^2} &\Rightarrow (\tilde{F}(u))' = \left(\frac{1}{1+u^2} \right) u' \quad \text{por Regla de la cadena} \\ &\Rightarrow F'(x) = \left(\frac{1}{1+(\cos x)^2} \right) (-\sen x) = \frac{-\sen x}{1+\cos^2 x}. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.9.1

1. Sea $F(x) = \int_1^{\ln x} (t^3 + \cos t) dt$, con $x \geq e$. Calcula $F'(x)$.
2. Sea $F(x) = \int_{x^3}^2 \frac{(2t+1)x^3}{\sqrt[3]{t^2}} dt$. Calcula $F'(\sqrt[3]{2})$.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 2.9.1 presiona aquí 

TEOREMA 2.9.2 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo o regla de Barrows) Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces para cualquier antiderivada F de f se verifica que

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sabemos desde el Teorema 2.9.1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) que la función

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

es una antiderivada de f .

Por otra parte, sabemos desde el Corolario 1.1.1 que cualquier otra antiderivada F de f adquiere la forma

$$F(x) = \varphi(x) + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Luego,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (\varphi(b) + c) - (\varphi(a) + c) \\ &= \varphi(b) - \varphi(a) \\ &= \int_a^b f(t) \, dt - \int_a^a f(t) \, dt \\ &= \int_a^b f(t) \, dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.9.2 El Teorema 2.9.1 (Primer Teorema Fundamental de Cálculo) junto al Teorema 2.9.2 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) relacionan el concepto de primitiva (o antiderivada) con el concepto de integral definida (o integral de Riemann) mediante una integral indefinida (la función integral). Ahora podemos calcular con mayor facilidad el valor de una integral definida. He ahí la importancia de estos teoremas.

NOTACIÓN 2.9.3 Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. Es usual escribir

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

EJEMPLO 2.9.5 Calcula $\int_0^\pi \sin x \, dx$

Solución. $\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2. \quad \square$

EJEMPLO 2.9.6 Calcula $\int_{-1}^3 (2x^2 + 6x) \, dx$

Solución.
$$\int_{-1}^3 (2x^2 + 6x) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right) \Big|_{-1}^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \right)$$

$$= (18 + 27) - \left(-\frac{2}{3} + 3 \right)$$

$$= 42 + \frac{2}{3} = \frac{126}{3} + \frac{2}{3} = \frac{128}{3}. \quad \square$$

2.9.1. Cálculo de integrales definidas usando una sustitución

TEOREMA 2.9.3 (Teorema del cambio de variable para integrales definidas) Sean I y J dos intervalos cerrados en \mathbb{R} , y sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f \in C(I)$ y $g \in C^1(J)$, con $g(J) \subset I$. Entonces, $f \circ g$ es una función continua en J , y se verifica que

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad \forall a, b \in J.$$

EJEMPLO 2.9.7 Calcula $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2) dx$

Solución. Ponemos $u = x^2 = g(x)$, entonces $du = 2x dx$, y como $g(0) = 0^2 = 0$ y $g(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}^2 = \pi$, obtenemos

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u du = -\cos u \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2. \quad \square$$

Integral definida de una función par en un intervalo cerrado simétrico respecto al cero

Sea $a > 0$ y sea $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una función par. Entonces

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in [-a, a].$$

Luego, si f es integrable en $[-a, a]$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx && \text{por propiedad aditiva de la integral} \\ &= \int_{-a}^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx && \text{pues } f(x) = f(-x) \\ &= -\int_{-(-a)}^{-0} f(z) dz + \int_0^a f(x) dx && \text{por cambio de variable } z = -x, dz = -dx \\ &= \int_0^a f(z) dz + \int_0^a f(x) dx && \text{pues } \int_a^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f \text{ integrable y par en } [-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Integral definida de una función impar en un intervalo cerrado simétrico respecto al cero

Sea $a > 0$ y sea $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una función impar. Entonces

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in [-a, a].$$

Luego, si f es integrable en $[-a, a]$, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx && \text{por propiedad aditiva de la integral} \\ &= - \int_{-a}^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx && \text{pues } f(x) = -f(-x) \\ &= \int_{-(-a)}^{-0} f(z) dz + \int_0^a f(x) dx && \text{por cambio de variable } z = -x, dz = -dx \\ &= - \int_0^a f(z) dz + \int_0^a f(x) dx && \text{pues } \int_a^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f \text{ integrable e impar en } [-a, a] \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

2.9.2. Cálculo de integrales definidas usando integración por partes

TEOREMA 2.9.4 (Teorema de integración por partes para integrales definidas) Sean $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$, tales que sus derivadas u' y v' son integrables en $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(b) v(b) - u(a) v(a) - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

EJEMPLO 2.9.8 Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$

Solución. Ponemos

$$\begin{cases} u = x & dv = \cos x \\ du = dx & v = \text{sen } x. \end{cases}$$

Luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \pi \operatorname{sen} \pi - (-\pi) \operatorname{sen}(-\pi) + \cos \pi - \cos(-\pi) = 0. \quad \square$$

2.10. Área de una región en el plano

2.10.1. Área bajo una curva

DEFINICIÓN 2.10.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con $f \geq 0$ en $[a, b]$, y sea \mathcal{R} la región acotada limitada por la curva $y = f(x)$, y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Llamamos *área bajo la curva* $y = f(x)$ en $[a, b]$ al área de la región \mathcal{R} , la cuál está dada por la cantidad

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

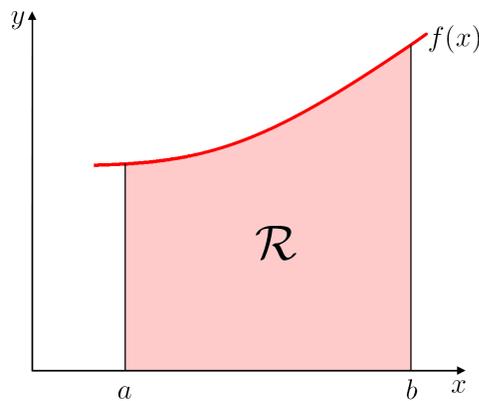


Figura 2.9. Área bajo la curva

EJEMPLO 2.10.1 Encuentra el área de la región acotada limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución. Notemos que la función $f(x) = x^3$ es no negativa en $[0, 2]$. Luego, si llamamos \mathcal{R} a la región acotada limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ (vea la Figura 2.10 a continuación), entonces

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \int_0^2 x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{4}(2^4 - 0^4) \\ &= \frac{16}{4} \\ &= 4. \quad \square \end{aligned}$$

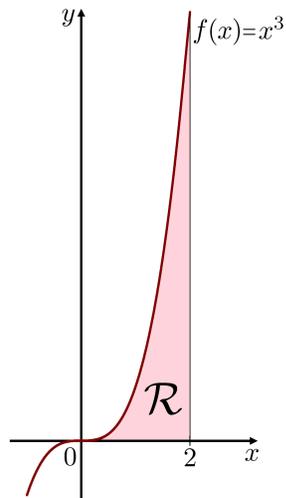


Figura 2.10. La región acotada limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

2.10.2. Área entre curvas

TEOREMA 2.10.1 Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Entonces el área de la región \mathcal{R} del plano entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

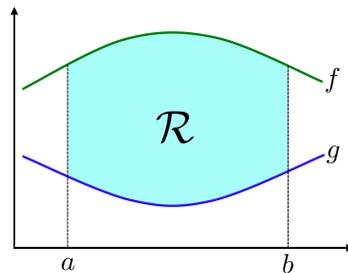


Figura 2.11. Región \mathcal{R} entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 2.10.2 Calcula el área de la región acotada limitada por las curvas $y - x^3 = 0$, $y - x = 6$ y $2y + x = 0$.

Solución. En primer lugar vamos a despejar la variable y para cada ecuación.

$$y - x^3 = 0 \Rightarrow y = x^3$$

$$y - x = 6 \Rightarrow y = x + 6$$

$$2y + x = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}.$$

Un gráfico aproximado de las curvas nos permitirá decidir qué hacer. Antes, es necesario encontrar los puntos de intersección entre las curvas para determinar los intervalos en que una curva está ubicada sobre la otra. Estos puntos de intersección determinan los límites de integración apropiados. Vamos a interseccionar las curvas de a dos:

$$\blacksquare (y = x^3 \quad \wedge \quad y = x + 6) \Rightarrow x^3 = x + 6 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0.$$

Posibles raíces enteras de la ecuación anterior son $\{1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6\}$. Por simple inspección obtenemos que $x = 2$ es una solución de la ecuación. Más aún, se comprueba que $x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$, y que $(x^2 + 2x + 3)$ no es factorizable a coeficientes reales. De esta forma, $x = 2$ es la única raíz real de la ecuación $x^3 - x - 6 = 0$. Entonces, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones obtenemos $y = 2^3 = 8$ (o bien $y = 2 + 6 = 8$).

\therefore Las curvas $y = x^3$ e $y = x + 6$ se intersecan en el punto $(2, 8)$.

$$\blacksquare \left(y = x^3 \quad \wedge \quad y = -\frac{x}{2} \right) \Rightarrow 2x^3 + x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Entonces, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones obtenemos $y = 0^3 = 0$ (o bien $y = -\frac{0}{2} = 0$).

\therefore Las curvas $y = x^3$ e $y = -\frac{x}{2}$ se intersecan en el punto $(0, 0)$.

$$\blacksquare \left(y = x + 6 \quad \wedge \quad y = -\frac{x}{2} \right) \Rightarrow 2x + 12 = -x \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow x = -4.$$

Entonces, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones obtenemos $y = -4 + 6 = 2$ (o bien $y = -\frac{(-4)}{2} = 2$).

\therefore Las curvas $y = x + 6$ e $y = -\frac{x}{2}$ se intersecan en el punto $(-4, 2)$.

Ahora estamos en condiciones de trazar las curvas:

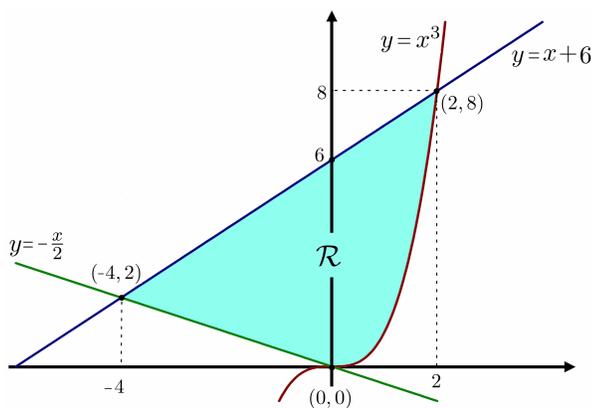


Figura 2.12. La región acotada limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x + 6$ e $y = \frac{x}{2}$.

Notemos que la región \mathcal{R} de la Figura 2.12 se puede dividir en otras dos regiones:

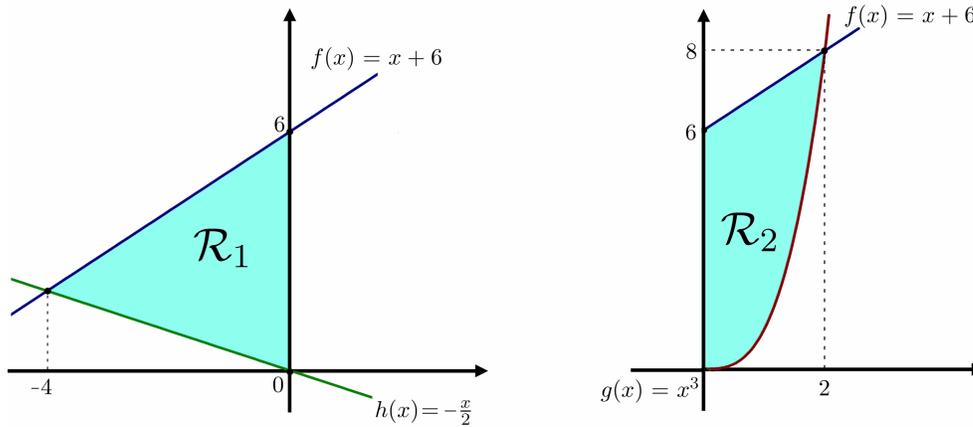


Figura 2.13. División de la región \mathcal{R} en dos subregiones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 .

donde hemos puesto $f(x) = x + 6$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = -\frac{x}{2}$. Entonces, desde la Figura 2.13 deducimos lo siguiente: $f \geq h$ en $[-4, 0]$, $f \geq g$ en $[0, 2]$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ y

$$A(\mathcal{R}) = A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2).$$

Así,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \int_{-4}^0 (f(x) - h(x)) \, dx + \int_0^2 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_{-4}^0 \left(x + 6 - \left(-\frac{x}{2} \right) \right) \, dx + \int_0^2 (x + 6 - x^3) \, dx \\ &= \int_{-4}^0 \left(\frac{3}{2}x + 6 \right) \, dx + \int_0^2 (-x^3 + x + 6) \, dx \\ &= \left(\frac{3}{4}x^2 + 6x \right) \Big|_{-4}^0 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{3}{4} \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - \left(\frac{3}{4}(-4)^2 + 6 \cdot (-4) \right) \right) + \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 - \left(-\frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} + 6 \cdot 0 \right) \right) \\ &= 12 + 10 \\ &= 22. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.10.1

1. Calcula el área de la región acotada limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x + 3$ e $y = 2 - x^2$.
2. Encuentra el área de la región encerrada por la curva $xy = \ln x$; las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje x . **Sugerencia:** Para calcular la integral usa una sustitución simple adecuada.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 2.10.1 presiona aquí 

EJERCICIOS PROPUESTOS 2.10.1

1. Determina el área de la región acotada determinada por la parábola $y^2 - x = 0$ y la recta $y = x$.
2. Encuentra el área de la región acotada por la recta $x = 0$ y la curva $x = \sqrt[3]{y}$, $y = -8$.
3. Determina por integración el área del triángulo rectángulo con vértices en $(5, 1)$, $(1, 3)$ y $(-1, -2)$.
4. Encuentra el área de la región acotada limitada por:
 - a) La curva $y = 9 - x^2$ y el eje x .
 - b) La curva $y = x - x^2$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
 - c) La curva $y = \sin x$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{3}\pi$ y $x = \frac{2}{3}\pi$.
 - d) Las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.
 - e) La curva $y = \cos x - \sin x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

Para ver las Soluciones de algunos de los Ejercicios Propuestos 2.10.1 presiona aquí **B**

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 2.10.1

1. Para ver un video donde se calcula el área de la región acotada limitada por las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = |x|$ en $[-1, 1]$, presiona aquí 
2. Para ver un video donde se calcula el área de la región acotada limitada por las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$ presiona aquí 
3. Para ver un video donde se calcula el área de la región acotada limitada por las funciones $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2$ presiona aquí 

EJERCICIOS DE REPASO 2.10.1

1. Evalúa cada una de las siguientes integrales definidas

a) $\int_1^2 \sqrt{x} \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

c) $\int_{-1}^1 x^2 e^x \, dx$

$$d) \int_0^{\pi} e^{3x} \cos(2x) dx$$

2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$ y derivable en $]0, 1[$ tal que $f(0) = 0$ y $0 \leq f'(x) \leq 1 \quad \forall x \in]0, 1[$. Prueba que

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq \int_0^1 (f(t))^3 dt.$$

Para ver las Soluciones de algunos de los Ejercicios de Repaso **2.10.1** presiona aquí 

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 2.10.2

Para ver un video donde se calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones integrales presiona aquí 

$$a) g(x) = \int_1^x (t^2 - 1)^{20} dt$$

$$b) h(x) = \int_x^2 (\cos(t^2) + t) dt$$

$$c) g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{s^2}{s^2 + 1} ds$$

$$d) g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{1}{1 + t^4} dt.$$

Funciones logarítmicas, exponenciales e hiperbólicas

En el presente capítulo estudiaremos formalmente las funciones logarítmicas y exponenciales que ya conocemos, e introduciremos a las funciones hiperbólicas y sus inversas.

3.1. La función logaritmo natural

A continuación vamos a construir la función logaritmo natural, pero antes conviene recordar que en el curso previo se definió el número de Euler e como el siguiente límite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

TEOREMA 3.1.1 La función

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \mathfrak{L}(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

está bien definida y es continua; es derivable, con primera derivada positiva, por lo tanto es estrictamente creciente e inyectiva; y es dos veces derivable, con segunda derivada negativa, por lo tanto es estrictamente cóncava. Más aún, $\mathfrak{L} \in C^\infty(]0, +\infty[)$, con

$$\frac{d^n}{dx^n}(\mathfrak{L}(x)) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, \mathfrak{L} satisface las siguientes propiedades,

- i) $\mathfrak{L}(xz) = \mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(z) \quad \forall x, y \in]0, +\infty[$
- ii) $\mathfrak{L}\left(\frac{x}{z}\right) = \mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(z) \quad \forall x, y \in]0, +\infty[$
- iii) $\mathfrak{L}(x) < 0$ si $0 < x < 1$; $\mathfrak{L}(1) = 0$ y $\mathfrak{L}(x) > 0$ si $x > 1$
- iv) $\mathfrak{L}(x^q) = q \mathfrak{L}(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall q \in \mathbb{R}$
- v) $\mathfrak{L}(e) = 1$
- vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathfrak{L}(x) = +\infty$
- vii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{L}(x) = -\infty$
- viii) Es biyectiva.

Demostración. Probaremos sólo las propiedades enumeradas.

i) Sean $x, z \in]0, \infty[$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(xz) &= \int_1^{xz} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xz} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^z \frac{1}{u} du \quad \text{donde } t = xu; dt = x du; (t = x \Rightarrow u = 1); (t = xz \Rightarrow u = z) \\ &= \mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(z).\end{aligned}$$

ii) Sean $x, z \in]0, \infty[$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(\frac{x}{z}\right) &= \int_1^{\frac{x}{z}} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{\frac{x}{z}} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^z \frac{1}{u} du \quad \text{donde } t = \frac{x}{u}; dt = -\frac{x}{u^2} du; (t = x \Rightarrow u = 1); (t = \frac{x}{z} \Rightarrow u = z) \\ &= \mathfrak{L}(x) - \mathfrak{L}(z).\end{aligned}$$

iii) Estudiamos caso a caso.

- Sea $0 < x < 1$. Entonces, como

$$f(t) = \frac{1}{t} > 0 \quad \text{si } x \leq t \leq 1,$$

se sigue que

$$\mathfrak{L}(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0.$$

- Sea $x = 1$. Entonces,

$$\mathfrak{L}(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$

- Sea $x > 1$. Entonces, como

$$f(t) = \frac{1}{t} > 0 \quad \text{si } 1 \leq t \leq x,$$

se sigue que

$$\mathfrak{L}(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0.$$

iv) Notemos que

$$(\mathfrak{L}(t^q))' = q \mathfrak{L}'(t^q) t^{q-1} = q \frac{t^{q-1}}{t^q} = q \frac{1}{t} \quad \forall t > 0. \quad (3.1)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{L}(x^q) &= \mathfrak{L}(x^q) - \mathfrak{L}(1^q) \quad \text{pues } \mathfrak{L}(1^q) = \mathfrak{L}(1) = 0 \\
 &= \int_1^x (\mathfrak{L}(t^q))' dt \quad \text{por el Teorema 2.9.2 de la regla de Barrows} \\
 &= q \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{desde lo obtenido en (3.1)} \\
 &= q \mathfrak{L}(x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 vi) \quad \mathfrak{L}(e) &= \mathfrak{L}\left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}\right) \quad \text{por definición del número de Euler } e \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathfrak{L}\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right) \quad \text{por la continuidad de } \mathfrak{L} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathfrak{L}(1+h) \quad \text{por propiedad de } \mathfrak{L} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{L}(1+h) - \mathfrak{L}(1)}{h} \quad \text{pues } \mathfrak{L}(1) = 0 \\
 &= \mathfrak{L}'(1) \quad \text{pues } \mathfrak{L} \text{ es derivable} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

vii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Notar que

$$\mathfrak{L}(e^n) = n \quad \wedge \quad \mathfrak{L}(e^{n+1}) = n + 1.$$

Luego, por el Teorema del valor intermedio, tenemos que

$$(\forall y \in [n, n+1])(\exists x \in [e^n, e^{n+1}]) \text{ tal que } (n \leq \mathfrak{L}(x) \leq n+1).$$

Luego, el conjunto de las imágenes de \mathfrak{L} no es acotado superiormente, y como \mathfrak{L} es estrictamente creciente, se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathfrak{L}(x) = +\infty.$$

viii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Notar que

$$\mathfrak{L}(e^{-n}) = -n \quad \wedge \quad \mathfrak{L}(e^{-(n+1)}) = -(n+1).$$

Luego, por el Teorema del valor intermedio, tenemos que dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(\forall y \in [-(n+1), -n])(\exists x \in [e^{-(n+1)}, e^{-n}]) \text{ tal que } (-(n+1) \leq \mathfrak{L}(x) \leq -n).$$

Luego, el conjunto de las imágenes de \mathfrak{L} no es acotado inferiormente, y como \mathfrak{L} es estrictamente creciente, se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{L}(x) = -\infty.$$

viii) Desde las propiedades vi) y vii) se deduce que $\mathfrak{L}([0, +\infty[) = \mathbb{R}$, lo cual implica que \mathfrak{L} es sobreyectiva, y como \mathfrak{L} es inyectiva (por ser estrictamente creciente), concluimos que \mathfrak{L} es biyectiva. ■

DEFINICIÓN 3.1.1 La función \mathcal{L} construida en el Teorema 3.1.1 se denomina *función logaritmo natural* y se denota por $\mathcal{L} = \ln$. Es decir, la función logaritmo natural es la función

$$\begin{aligned} \ln :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

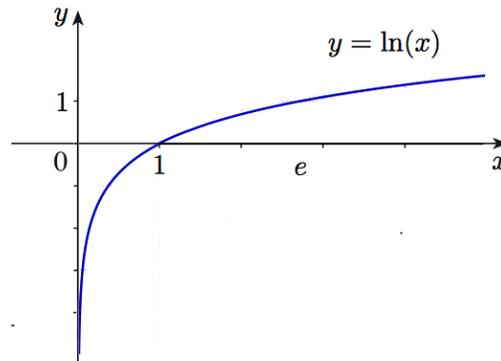


Figura 3.1. Función logaritmo natural.

EJEMPLO 3.1.1 Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt & \text{si } x \in [0, +\infty[\setminus \{0, 1\} \\ \ln 2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prueba que

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$, y justifica el hecho que f es de clase C^1 en $[0, +\infty[$.

b) Calcula la integral $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Sugerencia: Considera la función $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{t-1}{\ln t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

y utiliza el Teorema del valor intermedio para g en orden a obtener que entre x y x^2 hay un valor $c = c(x)$ (se estudian separados los casos $x > 1$ y $0 \leq x < 1$) tal que

$$f(x) = g(c) \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt.$$

Solución. Consideremos la función g dada en la sugerencia. Notemos que g es continua si $t \neq 1$. Por otro lado,

$$\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t}} = 1,$$

que implica que g también es continua en $t = 1$. Además, como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t-1}{\ln t} = 0 = g(0),$$

podemos extender g continuamente hasta 0, de manera que $g \in C([0, +\infty[)$.

Notemos también que

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} g(t) \frac{1}{t-1} dt.$$

a) Asumamos que $0 \leq x < 1$. En esta situación, se verifica que $0 \leq x^2 \leq x < 1$. Notemos que $g(t) \leq 0$ si $0 \leq t < 1$, y $0 < \frac{1}{t-1} < +\infty$ si $0 \leq t < 1$, así que

$$-g(t) \frac{1}{t-1} \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1[,$$

lo cual implica que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = - \int_{x^2}^x g(t) \frac{1}{t-1} dt \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Además, podemos definir

$$m = \min_{z \in [x^2, x]} (-g(z)) \geq 0 \quad \text{y} \quad M = \max_{z \in [x^2, x]} (-g(z)) \geq 0.$$

Así,

$$m \int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_{x^2}^x (-g(t)) \frac{1}{t-1} dt \leq M \int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt,$$

de donde obtenemos

$$m \leq \frac{\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt}{\int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt} \leq M.$$

Luego, por el Teorema del valor intermedio, existe $c = c(x) \in [x^2, x]$ tal que

$$-g(c) = \frac{\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt}{\int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt},$$

que equivale a decir que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = g(c) \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt.$$

Se sigue que

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = -g(c) \int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt = g(c)(\ln(1-x^2) - \ln(1-x)) = g(c) \ln(1+x) \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Similarmenete para $x > 1$, en cuya situación se tiene $1 < x < x^2$, uno puede chequear la misma igualdad anterior, y por lo tanto concluir que

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = g(c) \ln(1+x) \quad \forall x \in [0, +\infty[\setminus\{1\},$$

donde $c = c(x) \in [x^2, x]$ si $x \in [0, 1[$, y $c = c(x) \in [x, x^2]$ si $x \in]1, +\infty[$.

Claramente,

$$\lim_{x \rightarrow 1} c(x) = 1$$

y por continuidad de g ,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(c(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow 1} c(x)\right) = g(1) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(c(x)) \ln(1+x) = \ln 2.$$

Como $f(1) = \ln 2$, concluimos que f es continua en $x = 1$.

Por otro lado, por regla de Barrows obtenemos

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln x} + \frac{2x}{\ln x^2} = \frac{x-1}{\ln x} = g(x) \quad \forall x \neq 1.$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = g(1) = 1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = g(0) = 0.$$

Entonces, desde un resultado en el curso de Cálculo Diferencial, concluimos que f es derivable en 1, con $f'(1) = 1$ y que f' se puede extender continuamente a 0, con $f'(0) = 0$. Por lo tanto, gracias a la continuidad de g , obtenemos que f' es continua en $[0, +\infty[$. Es decir, f es de clase C^1 en $[0, +\infty[$.

- b) Basta notar que por construcción, f es una primitiva de g , siendo ambas funciones continuas en $[0, +\infty[$. Luego, por regla de Barrows concluimos que

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = f(1) - f(0) = \ln 2. \quad \blacksquare$$

3.2. La función exponencial

Como \ln es biyectiva, entonces existe su función inversa. La existencia de tal función inversa garantiza que podemos realizar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.2.1 Se denomina *función exponencial* a la función

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\rightarrow \exp(x) = \ln^{-1}(x). \end{aligned}$$

El siguiente teorema resume las propiedades que verifica la función exponencial.

TEOREMA 3.2.1 La función exponencial es continua y, por definición, biyectiva; es derivable, con primera derivada positiva, por lo tanto es estrictamente creciente; y es dos veces derivable, con segunda derivada positiva, por lo tanto es estrictamente cóncava.

$$i) \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$ii) \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$iii) \exp(x \cdot y) = (\exp(x))^y$$

$$iv) \exp(0) = 1$$

$$v) \exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$$

$$vi) \frac{d^n}{dx^n}(\exp(x)) = \exp(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$vii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Demostración. Probaremos sólo las propiedades enumeradas.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Como \ln es biyectiva, con $\text{Rec}(\ln) = \mathbb{R}$, entonces

$$\exists! a \in]0, +\infty[\text{ tal que } \ln(a) = x \quad \text{y} \quad \exists! b \in]0, +\infty[\text{ tal que } \ln(b) = y.$$

Luego, por definición de la exponencial, $a = \exp(x)$ y $b = \exp(y)$. Entonces,

$$\begin{aligned} i) \exp(x + y) &= \ln^{-1}(\ln a + \ln b) \\ &= \ln^{-1}(\ln(a \cdot b)) \\ &= a \cdot b \\ &= \exp(x) \cdot \exp(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ii) \exp(x - y) &= \ln^{-1}(\ln a - \ln b) \\
 &= \ln^{-1}\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) \\
 &= \frac{a}{b} \\
 &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 iii) \exp(x \cdot y) &= \ln^{-1}(\ln a \cdot \ln b) \\
 &= \ln^{-1}\left(\ln\left(a^{\ln b}\right)\right) \\
 &= a^{\ln b} \\
 &= (\exp(x))^y.
 \end{aligned}$$

$$iv) \exp(0) = 1, \text{ pues } \ln(1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 v) \exp(-y) &= \exp(0 - y) \\
 &= \frac{\exp(0)}{\exp(y)} \\
 &= \frac{1}{\exp(y)}.
 \end{aligned}$$

vi) Notemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\exp(x)) &= \frac{1}{\frac{d}{dx}(\ln(a))} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{a}} \\
 &= a \\
 &= \exp(x).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\exp(x)) = \exp(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$vii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \text{ pues } \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(a) = -\infty.$$

$$viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty, \text{ pues } \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln(a) = +\infty. \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN 3.2.1 *Notar que*

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y por definición de la función exp,

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, podemos poner

$$\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, podemos reescribir las propiedades de la función exponencial de la siguiente forma. Sean $x, y \in \mathbb{R}$

- i) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- ii) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- iii) $e^{xy} = (e^x)^y$
- iv) $e^0 = 1$
- v) $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$
- vi) $\frac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

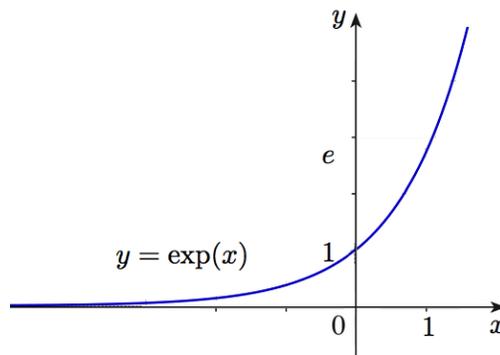


Figura 3.2. Función exponencial.

3.3. Funciones logarítmicas y exponenciales de base a ($a > 0$)

DEFINICIÓN 3.3.1 Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Llamamos *función logaritmo de base a* a la función denotada por \log_a , y definida por

$$\begin{aligned} \log_a :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.3.2 Sea $a > 0$. Llamamos *función exponencial de base a* a la función denotada por $a^{(\cdot)}$, y definida por

$$\begin{aligned} a^{(\cdot)} : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\rightarrow a^x = e^{x \ln a}. \end{aligned}$$

Notemos que si $a > 0$, $a \neq 1$, entonces $a^{(\cdot)}$ y \log_a son funciones inversas. Es decir,

$$a^x = z \Leftrightarrow \log_a(z) = x$$

de donde

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

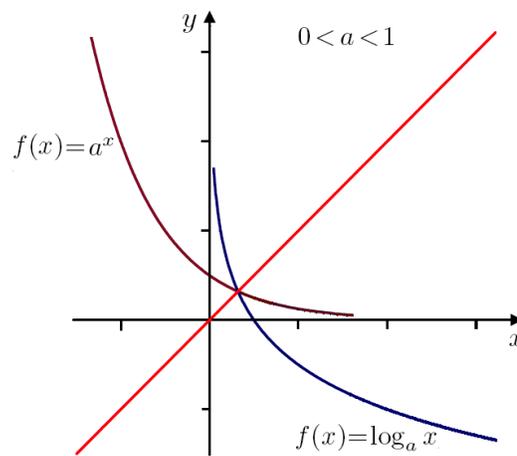


Figura 3.3. Caso $0 < a < 1$: Gráfica de la función logaritmo de base a , $f(x) = \log_a x$, $x \in]0, +\infty[$, y de la función exponencial de base a , $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

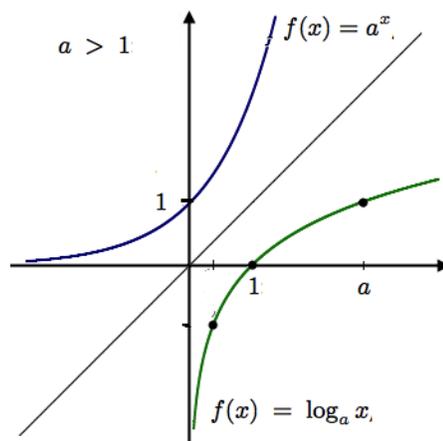


Figura 3.4. Caso $a > 1$: Gráfica de la función logaritmo de base a , $f(x) = \log_a x$, $x \in]0, +\infty[$, y de la función exponencial de base a , $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

3.4. Funciones hiperbólicas

3.4.1. Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico

DEFINICIÓN 3.4.1 Llamamos

- *función seno hiperbólico* a la función denotada por \sinh y definida por

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

- *función coseno hiperbólico* a la función denotada por \cosh y definida por

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Identidades fundamentales

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

En efecto,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$

En efecto,

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$

En efecto

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades de la función seno hiperbólico

- $\text{Dom}(\sinh) = \mathbb{R}$

- \sinh es continua en \mathbb{R}

$$\text{Rec}(\sinh) = \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty,$$

que junto a la continuidad de \sinh en \mathbb{R} conducen a $\text{Rec}(\sinh) = \mathbb{R}$.

$$\sinh \text{ es impar en } \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\int \sinh(x) dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c = \cosh(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

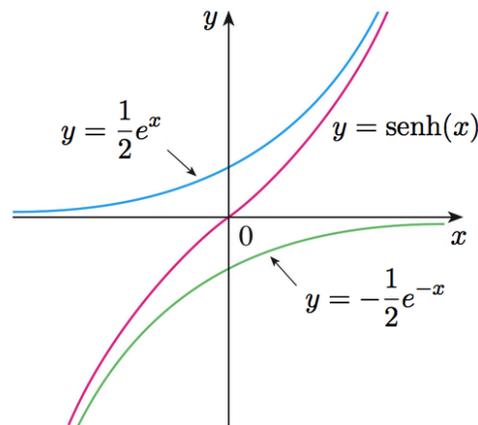


Figura 3.5. Función seno hiperbólico.

Propiedades de la función coseno hiperbólico

- $$\text{Dom}(\cosh) = \mathbb{R}$$

- $$\cosh \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

- $$\text{Rec}(\cosh) = [1, +\infty[$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty.$$

Además, $e^x \geq 1$ si $x \geq 0$ y $e^{-x} \geq 1$ si $x \leq 0$, de donde obtenemos que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Así, teniendo en cuenta la continuidad de \cosh en \mathbb{R} , concluimos que $\text{Rec}(\cosh) = [1, +\infty[$.

- $$\cosh \text{ es par en } \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x) + c) = \cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

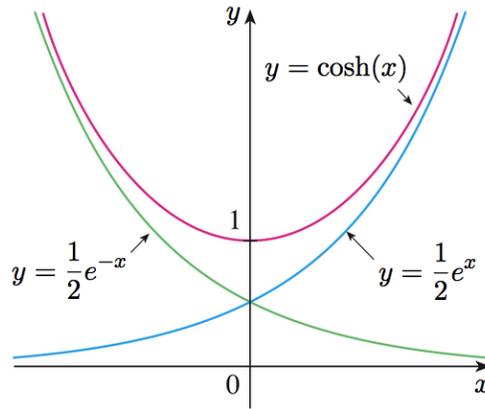


Figura 3.6. Función coseno hiperbólico.

3.4.2. Las funciones tangente hiperbólico y secante hiperbólico

DEFINICIÓN 3.4.2 Llamamos

- *función tangente hiperbólico* a la función denotada por \tanh y definida por

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

- *función secante hiperbólico* a la función denotada por sech y definida por

$$\begin{aligned} \operatorname{sech} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Identidades

- $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

En efecto,

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

En efecto,

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{1}{\cosh(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

En efecto,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \Leftrightarrow 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{1 + \tanh(x)}{\operatorname{sech}(x)} = e^x$$

En efecto,

$$\frac{1 + \tanh(x)}{\operatorname{sech}(x)} = \frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\frac{2}{e^x + e^{-x}}} = \frac{1 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}}{\frac{2e^x}{e^{2x} + 1}} = \frac{e^{2x} + 1 + e^{2x} - 1}{2e^x} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{1 - \tanh(x)}{\operatorname{sech}(x)} = e^{-x}$$

En efecto,

$$\frac{1 - \tanh(x)}{\operatorname{sech}(x)} = \frac{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\frac{2}{e^x + e^{-x}}} = \frac{1 - \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}}{\frac{2e^x}{e^{2x} + 1}} = \frac{e^{2x} + 1 - (e^{2x} - 1)}{2e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades de la función tangente hiperbólico

$$\operatorname{Dom}(\tanh) = \mathbb{R}$$

\tanh es continua en \mathbb{R}

$$\operatorname{Rec}(\tanh) =] - 1, 1[$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1.$$

Además,

$$0 < \frac{2}{e^{2x} + 1} \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y como

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

concluimos que

$$-1 < \tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Así, teniendo en cuenta la continuidad de \tanh en \mathbb{R} , concluimos que $\operatorname{Rec}(\tanh) =] - 1, 1[$.

■ \tanh es impar en \mathbb{R}

En efecto,

$$\tanh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\tanh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■ $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■ $\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x)) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\int \tanh(x) dx = \int \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} dx = \ln(\cosh(x)) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

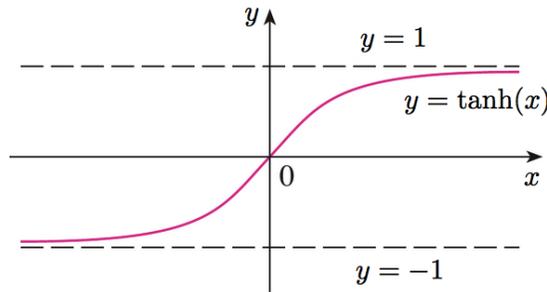


Figura 3.7. Función tangente hiperbólico.

Propiedades de la función secante hiperbólico

■ $\operatorname{Dom}(\operatorname{sech}) = \mathbb{R}$

■ sech es continua en \mathbb{R}

■ $\operatorname{Rec}(\operatorname{sech}) =]0, 1]$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sech}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

Además,

$$e^x + e^{-x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

lo cual implica que

$$0 < \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Así, teniendo en cuenta la continuidad de sech en \mathbb{R} , concluimos que $\operatorname{Rec}(\operatorname{sech}) =]0, 1]$.

sech es par en \mathbb{R}

En efecto,

$$\operatorname{sech}(-x) = \frac{2}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{sech}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\int \operatorname{sech}(x) dx = 2 \arctan(e^x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\int \operatorname{sech}(x) dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \arctan(e^x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\int \operatorname{sech}^2(x) dx = \tanh(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

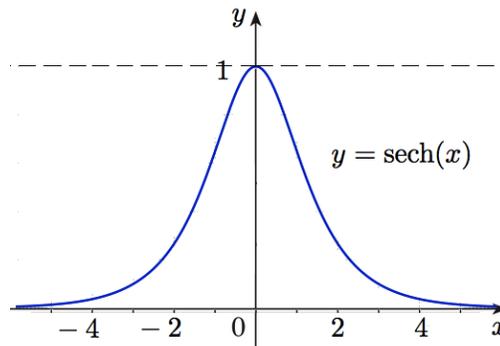


Figura 3.8. Función secante hiperbólico.

3.4.3. Las funciones cosecante hiperbólico y cotangente hiperbólico

DEFINICIÓN 3.4.3 Llamamos

- *función cosecante hiperbólico* a la función denotada por csch y definida por

$$\begin{aligned} \operatorname{csch} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

- *función cotangente hiperbólico* a la función denotada por coth y definida por

$$\begin{aligned} \operatorname{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \operatorname{coth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Identidades

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{sinh}(x)}$$

En efecto,

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sinh}(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\operatorname{coth}(x) = \frac{\operatorname{cosh}(x)}{\operatorname{sinh}(x)}$$

En efecto,

$$\operatorname{coth}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{\operatorname{cosh}(x)}{\operatorname{sinh}(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\operatorname{coth}^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x)$$

En efecto,

$$\operatorname{cosh}^2(x) - \operatorname{sinh}^2(x) = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{cosh}^2(x)}{\operatorname{sinh}^2(x)} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sinh}^2(x)} \Leftrightarrow \operatorname{coth}^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\frac{\operatorname{coth}(x) + 1}{\operatorname{csch}(x)} = e^x$$

En efecto,

$$\frac{\operatorname{coth}(x) + 1}{\operatorname{csch}(x)} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + 1}{\frac{2}{e^x - e^{-x}}} = \frac{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} + 1}{\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}} = \frac{e^{2x} + 1 + e^{2x} - 1}{2e^x} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\frac{\coth(x) - 1}{\operatorname{csch}(x)} = e^{-x}$$

En efecto,

$$\frac{\coth(x) - 1}{\operatorname{csch}(x)} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 1}{\frac{2}{e^x - e^{-x}}} = \frac{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} - 1}{\frac{2e^x}{e^{2x} + 1}} = \frac{e^{2x} + 1 - (e^{2x} - 1)}{2e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Propiedades de la función cosecante hiperbólico

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{csch} \text{ es continua en } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{Rec}(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = +\infty,$$

y por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 0.$$

Además, $\sinh(x) < 0$ si $x < 0$ y $\sinh(x) > 0$ si $x > 0$. Luego,

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} < 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} > 0 \quad \text{si } x > 0.$$

Así, teniendo en cuenta la continuidad de csch en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluimos que $\operatorname{Rec}(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\operatorname{csch} \text{ es impar en } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

En efecto,

$$\operatorname{csch}(-x) = \frac{2}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = -\frac{2}{e^x - e^{-x}} = -\operatorname{csch}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x) \coth(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\frac{2(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{2}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\operatorname{csch}(x) \coth(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\int \operatorname{csch}(x) \, dx = \ln \left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x} \right) + c \quad \forall x \in] - \infty, 0[$$

En efecto, $1 - e^x > 0$ para cada $x < 0$ y \ln está bien definido para valores positivos, de forma que

$$\int \operatorname{csch}(x) \, dx = \int \frac{2}{e^x - e^{-x}} \, dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} \, dx = \ln \left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x} \right) + c \quad \forall x \in] - \infty, 0[.$$

$$\int \operatorname{csch}^2(x) \, dx = -\operatorname{coth}(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{csch}^2(x) \, dx &= \int \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \, dx = -\frac{2}{e^x(e^x - e^{-x})} + c \\ &= -\frac{\operatorname{coth}(x) - 1}{\operatorname{csch}(x)} \operatorname{csch}(x) + c = -\operatorname{coth}(x) + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

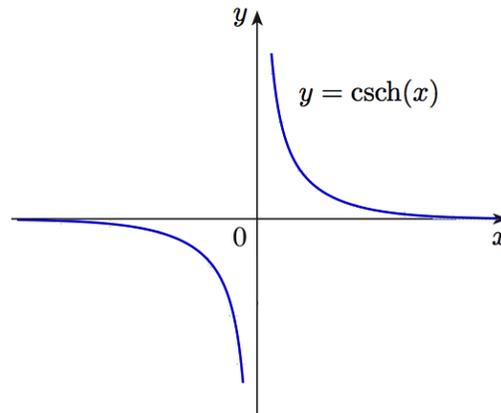


Figura 3.9. Función cosecante hiperbólico.

Propiedades de la función cotangente hiperbólico

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{coth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{coth} \text{ es continua en } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{Rec}(\operatorname{coth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{coth}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = +\infty,$$

y por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \coth(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \coth(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1.$$

Además, $\tanh(x) < 0$ si $x < 0$, $\tanh(x) > 0$ si $x > 0$ y

$$-1 < \tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

implican que $\coth(x) < 1$ si $x < 0$ y $\coth(x) > 1$ si $x > 0$. Así, teniendo en cuenta la continuidad de \coth en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluimos que $\text{Rec}(\coth) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

coth es impar en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

En efecto,

$$\coth(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\coth(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\frac{d}{dx}(\coth(x)) = -\text{csch}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\coth(x)) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = 1 - \coth^2(x) = -\text{csch}^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\int \coth(x) dx = \ln |\sinh(x)| + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

En efecto,

$$\int \coth(x) dx = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} dx = \ln |\sinh(x)| + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

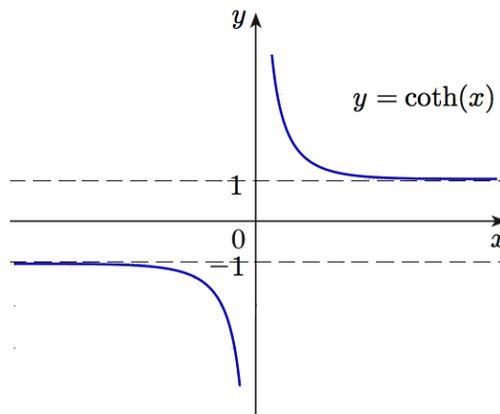


Figura 3.10. Función cotangente hiperbólica.

3.4.4. Algunas identidades hiperbólicas adicionales

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \sinh(x + y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2} \\ &= \frac{(\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(y) + \sinh(y)) - (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(y) - \sinh(y))}{2} \\ &= \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y). \end{aligned}$$

$$\sinh(x - y) = \sinh(x) \cosh(y) - \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x - y) = \cosh(x) \cosh(y) - \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

$$\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

En efecto,

$$\tanh(2x) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)} = \frac{2 \sinh(x) \cosh(x)}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}.$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

En efecto,

$$\sinh^2(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}.$$

$$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$\tanh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{\cosh(2x) + 1}$$

EJEMPLO 3.4.1 Calcula $\frac{d}{dx}(\cosh(1+x^2))$

Solución. Por regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\cosh(1+x^2)) = 2x \sinh(1+x^2). \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.2 Calcula $\frac{d}{dx}(\ln(\operatorname{sech}(x^2)))$

Solución. Por regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\ln(\operatorname{sech}(x^2))) = \frac{1}{\operatorname{sech}(x^2)}(-2x \operatorname{sech}(x^2) \tanh(x^2)) = -2x \tanh(x^2). \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.3 Calcula $\int \sinh^3(x) \cosh^2(x) dx$

Solución. Tenemos

$$\int \sinh^3(x) \cosh^2(x) dx = \int (\cosh^2(x) - 1) \cosh^2(x) \sinh(x) dx = \frac{1}{5} \cosh^5(x) - \frac{1}{3} \cosh^3(x) + c. \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.4 Calcula $\int \operatorname{coth}^2(x) dx$

Solución. Tenemos

$$\int \operatorname{coth}^2(x) dx = \int (\operatorname{csch}^2(x) + 1) dx = -\operatorname{coth}(x) + x + c. \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.5 Calcula $\int e^x \operatorname{sech}(x) dx$

Solución. Tenemos

$$\int e^x \operatorname{sech}(x) dx = \int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2e^x e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \ln(u^2 + 1) + c = \ln(e^{2x} + 1) + c. \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.6 Evalúa $\int_0^2 x \sinh(x) dx$

Solución. Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^2 x \sinh(x) dx = x \cosh(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \cosh(x) dx = 2 \cosh(2) - \sinh(x) \Big|_0^2 = 2 \cosh(2) - \sinh(2). \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.7 Evalúa $\int_{-5}^5 \cosh^2(x) dx$

Solución. El integrando es par, así que

$$\int_{-5}^5 \cosh^2(x) dx = 2 \int_0^5 \cosh^2(x) dx = \int_0^5 (\cosh(2x)+1)dx = \left(\frac{\sinh(2x)}{2} + x \right) \Big|_0^5 = \frac{\sinh(10)}{2} + 5. \quad \square$$

EJEMPLO 3.4.8 Calcula la derivada de $F(x) = \int_x^{e^x} \sinh(t) dt$

Solución. Notemos que

$$F(x) = - \int_1^x \sinh(t) dt + \int_1^{e^x} \sinh(t) dt \Rightarrow F'(x) = \sinh(x) + e^x \sinh(e^x) \quad \square$$

3.5. Funciones hiperbólicas inversas

3.5.1. Seno hiperbólico inverso

La función \sinh verifica que $Rec(\sinh) = Dom(\sinh) = \mathbb{R}$, siendo una función estrictamente creciente e impar en \mathbb{R} . Luego, $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva y podemos definir su función inversa.

Notemos que,

$$y = \sinh(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}.$$

Luego,

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

que motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.5.1 Llamamos *función arcoseno hiperbólico*, la cual denotamos por arsenh , a la función

$$\begin{aligned} \operatorname{arsenh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \operatorname{arsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \end{aligned}$$

La función arsenh corresponde a la función inversa de la función seno hiperbólico, y verifica

$$y = \sinh(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arsenh}(y)$$

Además, notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{d}{dx} (\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

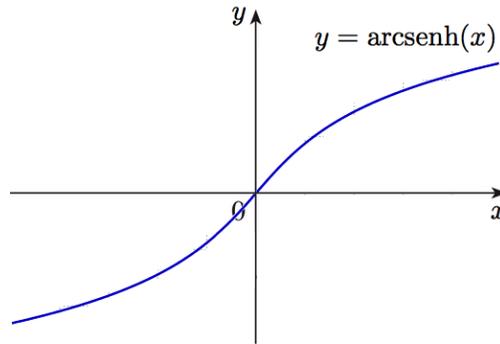


Figura 3.11. Función arcoseno hiperbólico.

3.5.2. Coseno hiperbólico inverso

La función \cosh verifica que $\text{Dom}(\cosh) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(\cosh) = [1, +\infty[$, siendo una función estrictamente decreciente en $] -\infty, 0]$, estrictamente creciente en $[0, +\infty[$ y par en \mathbb{R} . Luego, escogiendo la rama $\cosh : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$, vemos que ésta es biyectiva y podemos definir su función inversa.

Notemos que,

$$y = \cosh(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}.$$

Luego,

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \forall y \in [1, +\infty[,$$

que motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.5.2 Llamamos *función arcoseno hiperbólico*, la cual denotamos por arccosh , a la función

$$\begin{aligned} \text{arccosh} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\rightarrow \text{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

La función arccosh corresponde a la función inversa de la función coseno hiperbólico en $]0, +\infty[$, y verifica

$$y = \cosh(x) \Leftrightarrow x = \text{arccosh}(y) \quad \forall y \in [1, +\infty[$$

Además, notemos que si $x \in]1, +\infty[$, entonces

$$\frac{d}{dx}(x + \ln(\sqrt{x^2 - 1})) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(\text{arccosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

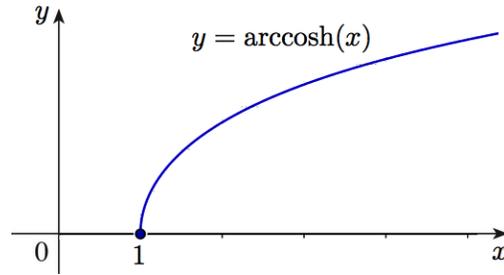


Figura 3.12. Función arcocoseno hiperbólico.

3.5.3. Tangente hiperbólica inversa

La función \tanh verifica que $Dom(\tanh) = \mathbb{R}$ y $Rec(\tanh) =] - 1, 1[$, siendo una función estrictamente creciente en \mathbb{R} e impar en \mathbb{R} . Luego, $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow] - 1, 1[$ es biyectiva y podemos definir su función inversa.

Notemos que,

$$y = \tanh(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = y + 1 \Leftrightarrow e^x = \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}.$$

Luego,

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) \quad \forall y \in] - 1, 1[,$$

que motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.5.3 Llamamos *función arcotangente hiperbólico*, la cual denotamos por $\operatorname{arctanh}$, a la función

$$\begin{aligned} \operatorname{arctanh} :] - 1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right). \end{aligned}$$

La función $\operatorname{arctanh}$ corresponde a la función inversa de la función tangente hiperbólico en \mathbb{R} , y verifica

$$y = \tanh(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arctanh}(y) \quad \forall y \in] - 1, 1[$$

Además, notemos que si $x \in] - 1, 1[$, entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln(1 + x) - \ln(1 - x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arctanh}(x)) = \frac{1}{1 - x^2} \quad \forall x \in] - 1, 1[$$

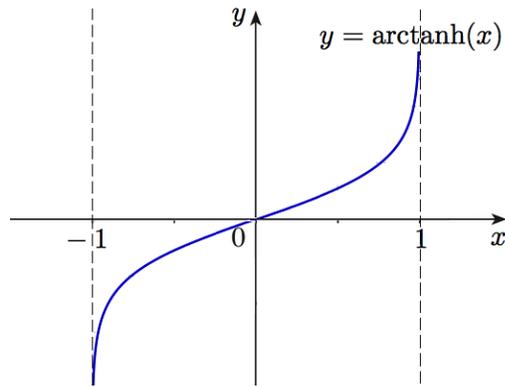


Figura 3.13. Función arcotangente hiperbólico.

3.5.4. Secante hiperbólica inversa

La función sech verifica que $\operatorname{Dom}(\operatorname{sech}) = \mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec}(\operatorname{sech}) =]0, 1]$, siendo una función estrictamente creciente en $] -\infty, 0]$, estrictamente decreciente en $[0, +\infty[$ y par en \mathbb{R} . Luego, escogiendo la rama $\operatorname{sech} : [0, +\infty[\rightarrow]0, 1]$, vemos que ésta es biyectiva y podemos definir su función inversa.

Notemos que,

$$y = \operatorname{sech}(x) \Leftrightarrow y = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow ye^{2x} - 2e^x + y = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y}.$$

Luego,

$$x = \ln \left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \right) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{y} \right) \quad \forall y \in]0, 1],$$

que motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.5.4 Llamamos *función arcosecante hiperbólico*, la cual denotamos por $\operatorname{arcsech}$, a la función

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsech} :]0, 1] &\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\rightarrow \operatorname{arcsech}(x) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

La función $\operatorname{arcsech}$ corresponde a la función inversa de la función secante hiperbólico en $[0, +\infty[$, y verifica

$$y = \operatorname{sech}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsech}(y) \quad \forall y \in]0, 1]$$

Además, notemos que si $x \in]0, 1[$, entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arcsech}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]0, 1[$$

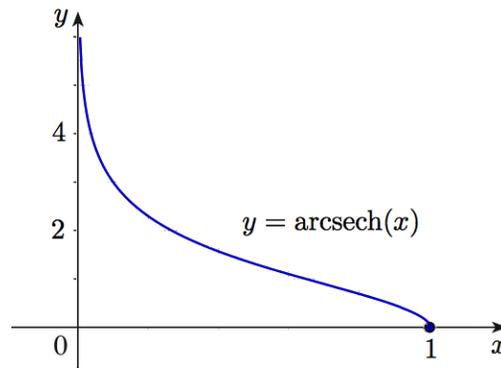


Figura 3.14. Función arcosecante hiperbólico.

3.5.5. Cosecante hiperbólica inversa

La función csch verifica que $\operatorname{Dom}(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\operatorname{Rec}(\operatorname{csch}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, siendo una función estrictamente decreciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, negativa en $] -\infty, 0[$, positiva en $]0, +\infty[$ e impar en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego, $\operatorname{csch} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es biyectiva y podemos definir su función inversa.

Notemos que,

$$y = \operatorname{csch}(x) \Leftrightarrow y = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow ye^{2x} - 2e^x - y = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y^2}}{2y}.$$

Luego,

$$x = \ln \left(\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1} \right) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{y} \right) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

que motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.5.5 Llamamos *función arcocosecante hiperbólico*, la cual denotamos por $\operatorname{arccsch}$, a la función

$$\begin{aligned} \operatorname{arccsch} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\rightarrow \operatorname{arccsch}(x) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

La función $\operatorname{arccsch}$ corresponde a la función inversa de la función cosecante hiperbólico en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y verifica

$$y = \operatorname{csch}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arccsch}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Además, notemos que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arccsch}(x)) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

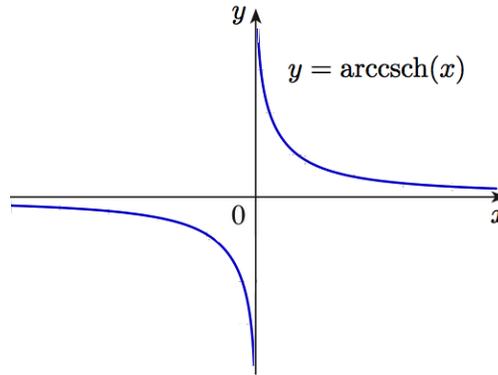


Figura 3.15. Función arcosecante hiperbólico.

3.5.6. Cotangente hiperbólica inversa

La función \coth verifica que $\text{Dom}(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\text{Rec}(\coth) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, siendo una función estrictamente decreciente en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, negativa en $] -\infty, 0[$, positiva en $]0, +\infty[$ e impar en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego, $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ es biyectiva y podemos definir su función inversa.

Notemos que,

$$y = \coth(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow e^{2x}(y - 1) = y + 1 \Leftrightarrow e^x = \sqrt{\frac{y + 1}{y - 1}}.$$

Luego,

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y + 1}{y - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}} \right) = \text{arctanh} \left(\frac{1}{y} \right) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1],$$

que motiva la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.5.6 Llamamos *función arccotangente hiperbólico*, la cual denotamos por arccoth , a la función

$$\begin{aligned} \text{arccoth} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\rightarrow \text{arccoth}(x) = \text{arctanh} \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

La función arccoth corresponde a la función inversa de la función cotangente hiperbólico en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y verifica

$$y = \coth(x) \Leftrightarrow x = \text{arccoth}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

Además, notemos que si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\text{arctanh} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = -\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} (\text{arccoth}(x)) = \frac{1}{1 - x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

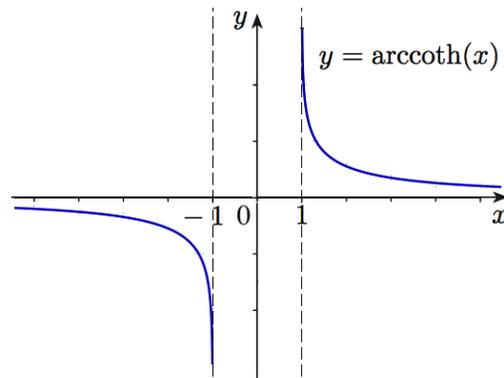


Figura 3.16. Función arcocotangente hiperbólico.

3.5.7. Integrales que dan funciones hiperbólicas inversas

Sea $a > 0$. Entonces,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \operatorname{arccosh} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \forall x \in]a, +\infty[$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \forall x \in]-a, a[$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{arccoth} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsech} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \forall x \in]0, a[$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + a^2}} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsch} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

EJEMPLO 3.5.1 Calcula $\frac{d}{dx}(x \operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1})$

Solución. Por regla del producto y regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{arccosh}(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arccosh}(x). \quad \square$$

EJEMPLO 3.5.2 Calcula $\int \frac{2}{\sqrt{5 + 3x^2}} dx$

Solución. Tenemos

$$\int \frac{2}{\sqrt{5+3x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}+x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} \right). \quad \square$$

EJEMPLO 3.5.3 Evalúa $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3-x^2} dx$

Solución. Tenemos $[1, \frac{3}{2}] \subset]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Luego,

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctanh} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right). \quad \square$$

Integración impropia

Sabemos que el concepto de integrabilidad desarrollado por Riemann está asociado a funciones acotadas definidas en intervalos cerrados y acotados (cuyos extremos son los límites de integración), y que adicionalmente satisfacen una condición de integrabilidad. Entonces de forma natural surge la siguiente pregunta

¿Es posible definir una integral sobre un intervalo no acotado o para una función no acotada en su intervalo de integración?

En el presente capítulo abordamos esta pregunta en los diferentes escenarios planteados. Notemos que el asunto es de particular interés cuando interpretamos la integral de Riemann como el área bajo la curva determinada por la gráfica de la función continua no negativa. En este contexto es de interés responder a las siguientes preguntas: *¿Puede una función continua no negativa tener un área finita sobre un intervalo no acotado?, ¿Puede una función continua no negativa y no acotada superiormente tener un área finita sobre un intervalo cualquiera?.*

4.1. Integración impropia de primera especie: integrabilidad sobre intervalos no acotados

4.1.1. Integración impropia sobre intervalos de la forma $[a, +\infty[$

DEFINICIÓN 4.1.1 Sea $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f es Riemann-integrable en $[a, b]$ para cada $b \geq a$. Decimos que f es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[a, +\infty[$ si

$$\exists \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

En este caso, el valor del límite se denomina *integral impropia de Riemann de f en el intervalo $[a, +\infty[$* , y se denota por

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx.$$

En este caso, también decimos que *la integral de f sobre $[a, +\infty[$ es convergente*, mientras que en otro caso, decimos que tal integral es *divergente* o que *no es Riemann-integrable en el sentido impropio*.

OBSERVACIÓN 4.1.1 Es conveniente observar que si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, +\infty[$, entonces f es Riemann-integrable en $[a, b]$ para cada $b \geq a$. Por lo tanto, para garantizar que tal función es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[a, +\infty[$, basta con verificar que exista el siguiente límite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

EJEMPLO 4.1.1 Determina si la función $f(x) = e^x$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[0, +\infty[$.

Solución. Tenemos que $f(x) = e^x$ es continua en $[0, +\infty[$. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^x \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = e^x$ no es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[0, +\infty[$. \square

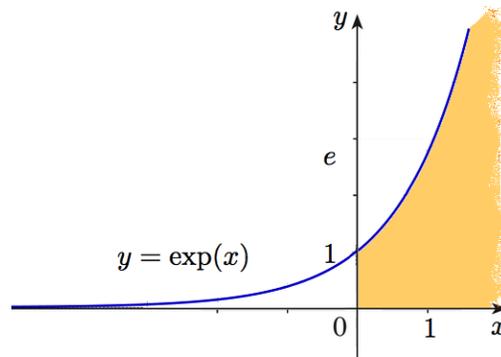


Figura 4.1. El área bajo la curva $y = e^x$ es infinita en $[0, +\infty[$.

EJEMPLO 4.1.2 Determina si la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[1, +\infty[$.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es continua en $[1, +\infty[$. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[1, +\infty[$. \square

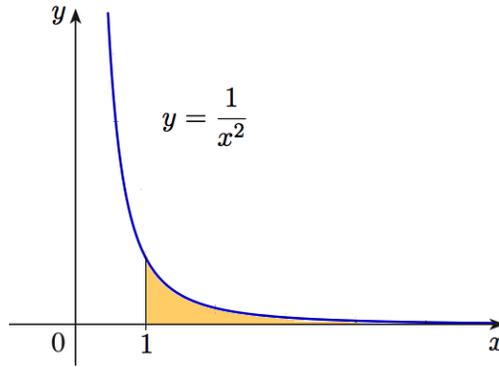


Figura 4.2. El área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ es finita en $[0, +\infty[$ e igual a 1.

EJEMPLO 4.1.3 (p -integral) Sea $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ y considera la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$. Determina los valores de p para los cuales la integral converge y los valores de p para los cuales la integral diverge.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{x^p}$ es continua en $[1, +\infty[$ para cada $p > 0$. Además,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b \right) & \text{si } p \neq 1 \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Es claro que

- Si $p > 1$, entonces la integral converge, pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{1}{p-1}$
- Si $p = 1$, entonces la integral diverge, pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$
- Si $p < 1$, entonces la integral diverge, pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} b^{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty$. \square

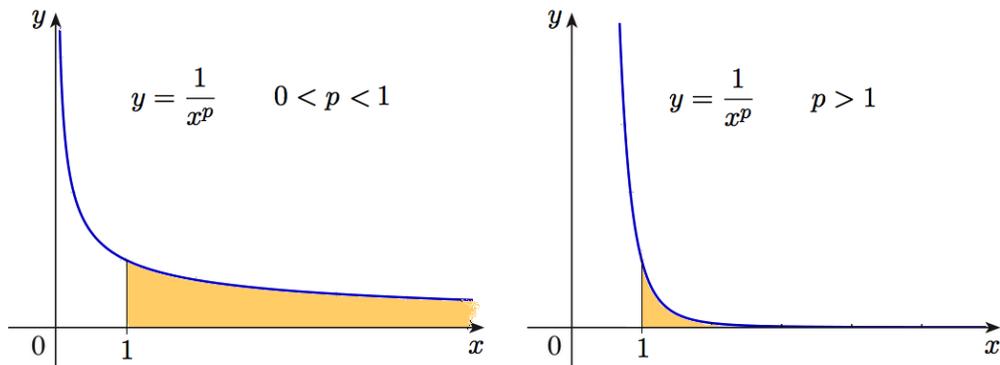


Figura 4.3. El área bajo la curva $y = \frac{1}{x^p}$ en $[1, +\infty[$ no es finita si $0 < p \leq 1$, y es finita e igual a $\frac{1}{p-1}$ si $p > 1$.

EJEMPLO 4.1.4 Sea $p \in \mathbb{R}$, y considera la integral $\int_0^{+\infty} e^{px} dx$. Determina los valores de p para los cuales la integral converge y los valores de p para los cuales la integral diverge.

Solución. Tenemos que $f(x) = e^{px}$ es continua en $[0, +\infty[$ para cada $p \in \mathbb{R}$. Además,

$$\int_0^{+\infty} e^{px} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{px} dx = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{px}}{p} \Big|_0^b \right) & \text{si } p \neq 0 \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(x \Big|_0^b \right) & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Es claro que

- Si $p > 0$, entonces la integral diverge, pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{pb}}{p} - \frac{1}{p} \right) = +\infty$
- Si $p = 0$, entonces la integral diverge, pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 0) = +\infty$
- Si $p < 0$, entonces la integral converge, pues $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{pb}}{p} - \frac{1}{p} \right) = -\frac{1}{p}$. \square

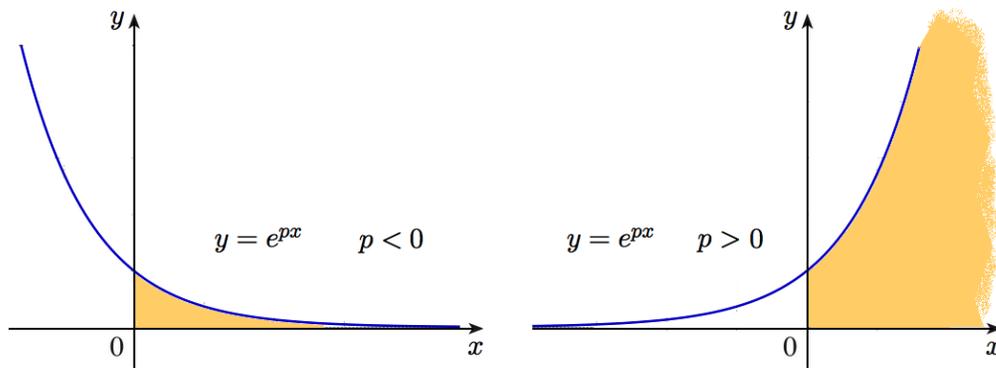


Figura 4.4. El área bajo la curva $y = e^{px}$ en $[0, +\infty[$ no es finita si $p \geq 0$, y es finita e igual a $-\frac{1}{p}$ si $p < 0$.

4.1.2. Integración impropia sobre intervalos de la forma $] -\infty, b]$

DEFINICIÓN 4.1.2 Sea $f :] -\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f es Riemann-integrable en $[a, b]$ para cada $a \leq b$. Decimos que f es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $] -\infty, b]$ si

$$\exists \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

En este caso, el valor del límite se denomina *integral impropia de Riemann de f en el intervalo $] -\infty, b]$* , y se denota por

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx.$$

En este caso, también decimos que *la integral de f sobre $] -\infty, b]$ es convergente*, mientras que en otro caso, decimos que tal integral es *divergente* o que *no es Riemann-integrable en el sentido impropio*.

OBSERVACIÓN 4.1.2 Es conveniente observar que si $f :] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $] - \infty, b]$, entonces f es Riemann-integrable en $[a, b]$ para cada $a \leq b$. Por lo tanto, para garantizar que tal función es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $] - \infty, b]$, basta con verificar que exista el siguiente límite

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

EJEMPLO 4.1.5 Determina si la función $f(x) = e^x$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $] - \infty, 0]$.

Solución. Tenemos que $f(x) = e^x$ es continua en $] - \infty, 0]$. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_a^0 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = e^x$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $] - \infty, 0]$. \square

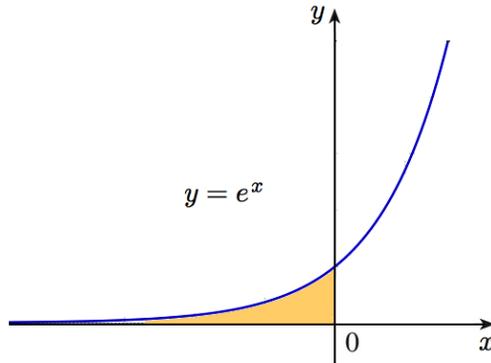


Figura 4.5. El área bajo la curva $y = e^x$ en $] - \infty, 0]$ es finita e igual a 1.

EJEMPLO 4.1.6 Determina si la integral $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ es convergente y determina su valor en caso que lo sea.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ es continua en $] - \infty, 0]$. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_a^0 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{a-1} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego, la integral $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ es convergente, y su valor es 1. \square

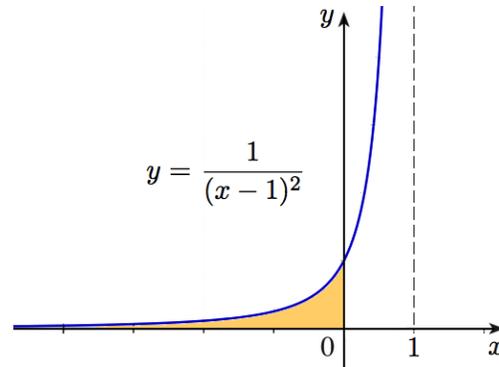


Figura 4.6. El área bajo la curva $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ en $]-\infty, 0]$ es finita e igual a 1.

4.1.3. Integración impropia sobre \mathbb{R}

DEFINICIÓN 4.1.3 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Riemann-integrable en sentido impropio sobre \mathbb{R} si f es Riemann-integrable en sentido impropio tanto en $[a, +\infty[$ como en $]-\infty, b]$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$. En este caso, el valor del límite se denomina *integral impropia de Riemann de f en \mathbb{R}* , y se denota por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

En este caso, también decimos que *la integral de f sobre \mathbb{R} es convergente*, mientras que en otro caso, decimos que tal integral es *divergente* o que *no es Riemann-integrable en el sentido impropio*.

OBSERVACIÓN 4.1.3 Es conveniente observar que el hecho que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función continua en \mathbb{R} no garantiza que tal función sean Riemann-integrable en sentido impropio sobre \mathbb{R} , pero bastará con verificar que fijado $c \in \mathbb{R}$, cada límite a continuación exista por separado

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx \quad \text{y} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

EJEMPLO 4.1.7 Determina si la función $f(x) = e^x$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre \mathbb{R} .

Solución. Ya hemos visto que

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = +\infty.$$

Por lo tanto, $f(x) = e^x$ no es Riemann-integrable sobre \mathbb{R} . \square

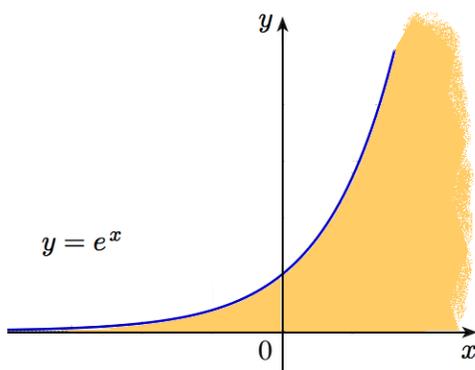


Figura 4.7. El área bajo la curva $y = e^x$ en \mathbb{R} no es finita.

EJEMPLO 4.1.8 Calcula, si es posible, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es continua en \mathbb{R} . Además,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\arctan(x) \Big|_a^0 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan(0) - \arctan(a)) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctan(x) \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan(b) - \arctan(0)) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi. \quad \square$$

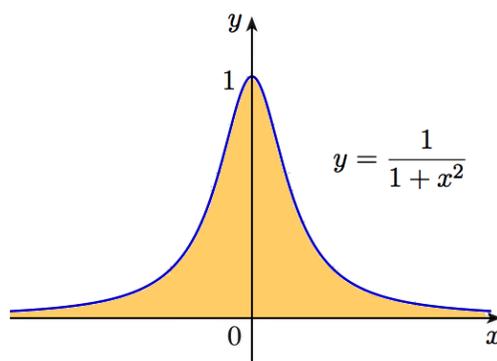


Figura 4.8. El área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en \mathbb{R} es finita e igual a π .

OBSERVACIÓN 4.1.4 Es tentador intentar calcular una integral del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ considerando únicamente el límite

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx.$$

Pero este razonamiento es erróneo. Por ejemplo, si $f(x)$ es continua e impar en \mathbb{R} , es inmediato que

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

que nos llevaría a concluir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0,$$

lo que implicaría que la integral converge a 0, pero esto no es cierto como se observa en el ejemplo a continuación.

EJEMPLO 4.1.9 Calcula el valor de $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^{+c} x dx$. ¿Es convergente la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$?

Solución. Como $f(x) = x$ es una función impar en cualquier intervalo simétrico en contenido en \mathbb{R} , tenemos que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c x dx = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_a^0 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{a^2}{2} \right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Luego, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ es divergente. \square

4.1.4. Algunas propiedades de las integrales impropias sobre dominios no acotados

TEOREMA 4.1.1 (Propiedad aditiva) Sea $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable en sentido impropio en $[a, +\infty[$ y sea $c \in [a, +\infty[$ dado. Entonces, f es Riemann-integrable en sentido impropio en $[c, +\infty[$ y se verifica que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Demostración. Como f es Riemann-integrable en sentido impropio en $[a, +\infty[$, se tiene que f es Riemann-integrable en $[a, b]$ para todo $b \geq a$. Luego, si consideramos $b \geq c \geq a$, entonces f es

Riemann-integrable en $[a, b]$ y en $[a, c]$, y por la propiedad aditiva de la integral de Riemann se sigue que

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx.$$

Pasando al límite cuando $b \rightarrow +\infty$, la conclusión es inmediata, toda vez que el límite del lado izquierdo existe. ■

TEOREMA 4.1.2 (Propiedad de linealidad) Sean $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones Riemann-integrables en sentido impropio en $[a, +\infty[$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ dado. Entonces

$$i) \int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

$$ii) \int_a^{+\infty} \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Demostración. Como f y g son Riemann-integrables en sentido impropio en $[a, +\infty[$, se tiene que f y g son Riemann-integrables en $[a, b]$ para todo $b \geq a$.

i) Se verifica que

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad \forall b \geq a.$$

Pasando al límite cuando $b \rightarrow +\infty$, la conclusión es inmediata, toda vez que el límite del lado derecho existe.

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \alpha f(x) dx \quad \forall b \geq a.$$

Pasando al límite cuando $b \rightarrow +\infty$, la conclusión es inmediata, toda vez que el límite del lado izquierdo existe. ■

TEOREMA 4.1.3 (Propiedad de monotonía) Sean $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas Riemann-integrables en sentido impropio en $[a, +\infty[$. Si $f \geq g$ en $[a, +\infty[$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Demostración. Como f y g son Riemann-integrables en sentido impropio en $[a, +\infty[$, se tiene que f y g son Riemann-integrables en $[a, b]$ para todo $b \geq a$. Notemos también que por hipótesis $f - g \geq 0$ en $[a, b]$ para cada $b \geq a$. Luego, desde el Teorema 2.6.5 de integración según Riemann

de funciones no negativas y el Teorema 4.2.2 sobre la propiedad de linealidad de las integrales impropias, obtenemos que

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \geq 0.$$

Pasando al límite cuando $b \rightarrow +\infty$, la conclusión es inmediata. ■

TEOREMA 4.1.4 (Teorema del cambio de variable para integrales impropias) Sean $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f \in C([a, +\infty[)$ y $g \in C^1([c, d[)$, con $g([c, d[) \subset [a, +\infty[$ (aquí $d \in]c, +\infty[\cup \{+\infty\}$). Si f es Riemann-integrable en sentido impropio en $[a, +\infty[$ y g es estrictamente creciente en $[c, d[$, entonces $f \circ g$ es una función continua en $[c, d[$ tal que

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) \, dx = \lim_{s \rightarrow d^-} \int_{g(c)}^{g(s)} f(u) \, du.$$

OBSERVACIÓN 4.1.5 En el Teorema 4.2.4 anterior puede ocurrir que

$$\lim_{s \rightarrow d^-} g(s) = +\infty.$$

TEOREMA 4.1.5 (Teorema de integración por partes para integrales impropias) Sean $u : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $v : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, +\infty[$ y derivables en $]a, +\infty[$. Si existen dos de los siguientes tres límites

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b u(x) v'(x) \, dx, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} (u(b) v(b) - u(a) v(a)) \quad \text{o} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b u'(x) v(x) \, dx,$$

entonces el tercero también existe y se verifica que

$$\int_a^{+\infty} u(x) v'(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (u(b) v(b) - u(a) v(a)) - \int_a^{+\infty} u'(x) v(x) \, dx.$$

4.1.5. Criterios de convergencia para integrales de funciones no negativas sobre intervalos no acotados

Una dificultad que puede surgir al momento de determinar si una integral impropia está bien definida es que desconozcamos cómo calcular una primitiva del integrando, con lo cual no podremos calcular el límite que nos permite distinguir si la integral converge o no. De esta forma, surge la pregunta siguiente pregunta

¿Es posible establecer la convergencia o divergencia de una integral impropia a pesar de no conocer una antiderivada del integrando?

Abordaremos este asunto para integrandos no negativos.

TEOREMA 4.1.6 (Criterio de comparación por acotación) Sean $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, +\infty[$ tales que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

Entonces,

i) Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

ii) Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

Demostración. Sea $c > a$ y consideremos las funciones $F : [c, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $G : [c, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \forall x \in [c, +\infty[\quad \text{y} \quad G(x) = \int_c^x g(t) dt \quad \forall x \in [c, +\infty[.$$

Desde el Teorema 2.9.1 (primer teorema fundamental del cálculo), ambas funciones están bien definidas y son derivables, con derivadas no negativas. Además, notemos que desde el Teorema 2.6.6 tenemos que

$$0 \leq F(x) - F(c) = \int_c^x f(t) dt \leq \int_c^x g(t) dt = G(x) - G(c) \quad \forall x \in [c, +\infty[. \quad (4.1)$$

y

$$0 \leq \int_a^c f(x) dx \leq \int_a^c g(x) dx. \quad (4.2)$$

i) Si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, entonces desde el Teorema 4.2.1, obtenemos que $\int_c^{+\infty} g(x) dx$ converge, y pasando al límite en (4.1), concluimos que $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ converge. Aplicando nuevamente el Teorema 4.2.1, obtenemos que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

de donde obtenemos la convergencia de la integral del lado izquierdo.

ii) Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, debe diverger a $+\infty$. En efecto, la función F es creciente, y por lo tanto sólo puede diverger a $+\infty$. Desde (4.1) y (4.2) concluimos que $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ también diverge. ■

Conviene señalar que el criterio de convergencia por acotamiento se puede extender a funciones no necesariamente no negativas.

TEOREMA 4.1.7 (Criterio de comparación por acotación) Sean $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $h : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones continuas y no acotadas en $[a, +\infty[$ tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

Si las integrales impropias

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} h(x) \, dx$$

convergen, entonces la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$$

también converge.

La demostración del teorema previo se basa en una aplicación del Teorema 4.1.6 del criterio de comparación por acotamiento a las funciones $f - g$ y $h - g$, las cuales verifican que

$$0 \leq f - g \leq h - g \quad \text{en } [a, +\infty[.$$

Por último, presentamos un criterio de convergencia basado en el límite del cociente entre una función, de la cual se sabe que su integral en cierto intervalo es convergente, con otra acerca de la cual no tenemos total certeza que sea convergente en el mismo intervalo.

TEOREMA 4.1.8 (Criterio de comparación por paso al límite del cociente) Sean $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y no negativas en $[a, +\infty[$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Entonces,

i) Si $L > 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \text{ converge}.$$

ii) Si $L = 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} g(x) \, dx \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \text{ converge}.$$

iii) Si $L = +\infty$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x) \, dx \text{ converge}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.1.1

1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales.

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + 1} dx$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{3 + \operatorname{sen}(x)}{x^2 + \ln(x)} dx$$

$$c) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2 + 1} dx$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x^2 + 1) + 3} dx$$

2. Determina los valores de p para los cuales las siguientes integrales convergen.

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(x + 1)^p} dx$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{1 + x^p + x^{2p}}} dx$$

$$c) \int_1^{+\infty} \frac{(x + 1)^p}{e^x + 1} dx$$

$$d) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^{-px} + e^{\frac{p}{2}x}} dx$$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 4.1.1 presiona aquí **B**

4.2. Integración impropia de segunda especie: integrabilidad de funciones no acotadas en intervalos acotados

4.2.1. Integración impropia de funciones no acotadas sobre intervalos de la forma $]a, b]$

DEFINICIÓN 4.2.1 Sea $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada tal que f es Riemann-integrable en $[c, b]$ para cada $c \in]a, b]$. Decimos que f es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]a, b]$ si

$$\exists \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

En este caso, el valor del límite se denomina *integral impropia de Riemann de f en el intervalo $]a, b]$* , y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

En este caso, también decimos que *la integral de f sobre $]a, b]$ es convergente*, mientras que en otro caso, decimos que tal integral es *divergente* o que *no es Riemann-integrable en el sentido impropio*.

OBSERVACIÓN 4.2.1 Es conveniente observar que si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $]a, b]$, entonces f es Riemann-integrable en $[c, b]$ para cada $c \in]a, b]$. Por lo tanto, para garantizar que tal función es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]a, b]$, basta con verificar que exista el siguiente límite

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) \, dx.$$

EJEMPLO 4.2.1 Determina si la función $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, \frac{1}{2}]$.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ es continua $]0, \frac{1}{2}]$ y no acotada en $]0, \frac{1}{2}]$. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^3} = -\infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln(x)} \, dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\ln |\ln(x)| \Big|_c^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\ln \left| \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right| - \ln |\ln(c)| \right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ no es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, \frac{1}{2}]$. \square

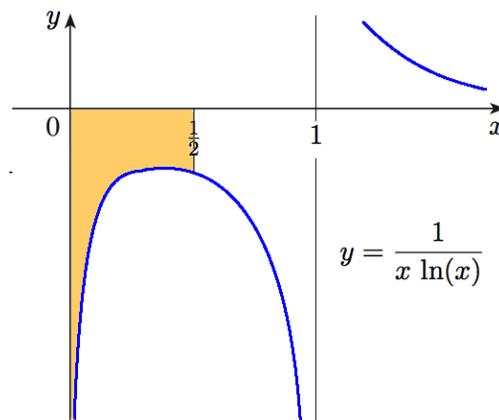


Figura 4.9. El área entre el eje x y la curva $y = \frac{1}{x \ln(x)}$ en $]0, \frac{1}{2}]$ no es finita.

EJEMPLO 4.2.2 Determina si la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, 1]$.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $]0, 1]$ y no acotada en $]0, 1]$. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_c^1 \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, 1]$. \square

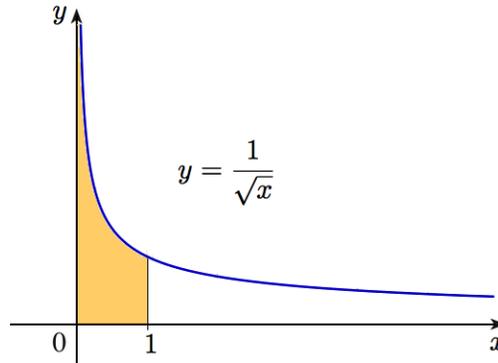


Figura 4.10. El área bajo la curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $]0, 1]$ es finita e igual 2.

EJEMPLO 4.2.3 (p -integral) Sea $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ y considera la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$. Determina los valores de p para los cuales la integral converge y los valores de p para los cuales la integral diverge.

Solución. Para cada $p > 0$, tenemos que $f(x) = \frac{1}{x^p}$ es continua en $]0, 1]$ y no acotada en $]0, 1]$. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^p} = +\infty \quad \forall p > 0.$$

Además,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_c^1 \right) & \text{si } p \neq 1 \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\ln x \Big|_c^1 \right) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Es claro que

- Si $p > 1$, entonces la integral diverge, pues $\lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} c^{1-p} \right) = +\infty$
- Si $p = 1$, entonces la integral diverge, pues $\lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = +\infty$

- Si $p < 1$, entonces la integral converge, pues $\lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} c^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$. \square

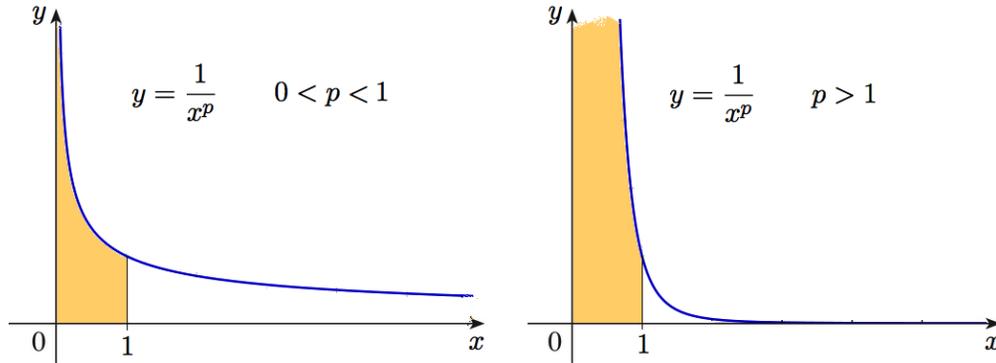


Figura 4.11. El área bajo la curva $y = \frac{1}{x^p}$ en $]0, 1]$ es finita e igual a $\frac{1}{1-p}$ si $0 < p < 1$, y es infinita si $p \geq 1$.

OBSERVACIÓN 4.2.2 Sobre la p -integral es conveniente observar lo siguiente:

- Si $p = 1$, entonces $f(x) = \frac{1}{x}$ no es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, 1]$ y tampoco lo es sobre $[1, +\infty[$.
- Si $0 < p < 1$, entonces $f(x) = \frac{1}{x^p}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, 1]$ pero no lo es sobre $[1, +\infty[$.
- Si $p > 1$, entonces $f(x) = \frac{1}{x^p}$ no es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $]0, 1]$ pero sí lo es sobre $[1, +\infty[$.

4.2.2. Integración impropia de funciones no acotadas sobre intervalos de la forma $[a, b[$

DEFINICIÓN 4.2.2 Sea $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada tal que f es Riemann-integrable en $[a, c]$ para cada $c \in [a, b[$. Decimos que f es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[a, b[$ si

$$\exists \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

En este caso, el valor del límite se denomina *integral impropia de Riemann de f en el intervalo $[a, b[$* , y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

En este caso, también decimos que *la integral de f sobre $[a, b[$ es convergente*, mientras que en otro caso, decimos que tal integral es *divergente* o que *no es Riemann-integrable en el sentido impropio*.

OBSERVACIÓN 4.2.3 Es conveniente observar que si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b[$, entonces f es Riemann-integrable en $[a, c]$ para cada $c \in [a, b[$. Por lo tanto, para garantizar que tal función sea Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[a, b[$, basta verificar que exista el siguiente límite

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) \, dx.$$

EJEMPLO 4.2.4 Determina si la función $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ es Riemann-integrable en sentido impropio sobre $[\frac{1}{2}, 1[$.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ es continua y no acotada en $[\frac{1}{2}, 1[$. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x \ln(x)} = -\infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^c \frac{1}{x \ln(x)} \, dx &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(\ln |\ln(x)| \Big|_{\frac{1}{2}}^c \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(\ln \left| \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right| - \ln |\ln(c)| \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ no es Riemann-integrable sobre $[\frac{1}{2}, 1[$. \square

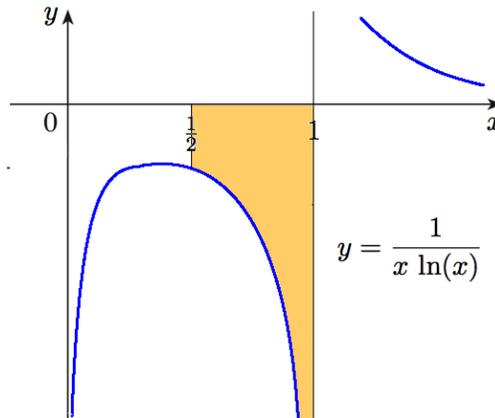


Figura 4.12. El área entre el eje x y la curva $y = \frac{1}{x \ln(x)}$ en $[\frac{1}{2}, 1[$ no es finita.

4.2.3. Integración impropia de funciones no acotadas en otros intervalos acotados

En estos casos siempre será beneficioso tener claro el lugar donde la función no es acotada. Algunas situaciones que se pueden presentar son los siguientes:

- i) Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $[a, b]$ salvo en un punto $c \in]a, b[$ tal que la recta $x = c$ es una asíntota para la gráfica de la función, es una función no acotada. En casos como

este, el estudio de la integral de la función en el intervalo $[a, b]$ debe realizarse por separado para los intervalos $[a, c[$ y $]c, b]$, debiendo converger ambas integrales para garantizar que la integral de f también ha de converger en $[a, b]$.

- ii) Una función $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $]a, b[$ y tal que las rectas $x = a$ y $x = b$ son asíntotas horizontales para la gráfica de la función, es una función no acotada. En casos como este, el estudio de la integral de la función en el intervalo $]a, b[$ debe realizarse por separado para los intervalos $]a, c[$ y $]c, b[$, para algún $c \in]a, b[$, debiendo converger ambas integrales para garantizar que la integral de f también ha de converger en $]a, b[$.

EJEMPLO 4.2.5 Calcula, si es posible $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ es continua $[0, 2]$ salvo en 1, siendo $x = 1$ una asíntota horizontal para la gráfica de la función, por lo que la función no es acotada. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{(x-1)^2} dx &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_0^c \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{c-1} - 1 \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ no es Riemann-integrable sobre $[0, 2]$. \square

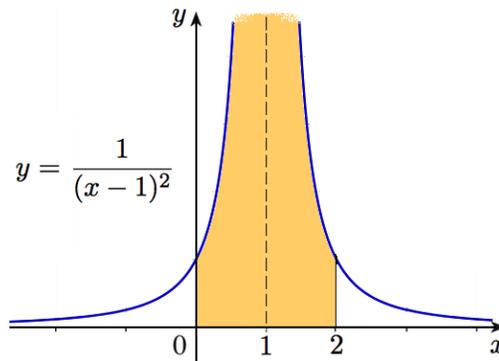


Figura 4.13. El área bajo la curva $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ en $[0, 2]$ no es finita.

EJEMPLO 4.2.6 Calcula, si es posible $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} dx$.

Solución. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$ es continua $[-1, 1]$ salvo en 1 y en -1 , siendo $x = 1$ y $x = -1$ asíntotas horizontal para la gráfica de la función, por lo que la función no es acotada. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} = +\infty.$$

Además, si $x \geq 0$, $|x| = x$ y así,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(-2\sqrt{1-x} \Big|_0^c \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^-} 2\sqrt{1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por paridad de la función f en $] -1, 1[$, concluimos que $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} = 4$. \square

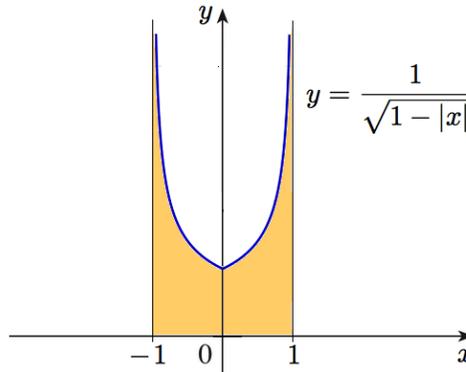


Figura 4.14. El área bajo la curva $y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$ en $[-1, 1]$ es finita e igual a 4.

4.2.4. Teoremas relativos a integración impropia de funciones no acotadas

Algunas propiedades de las integrales impropias de funciones no acotadas

TEOREMA 4.2.1 (Propiedad aditiva) Sea $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable en sentido impropio en $]a, b]$ y sea $c \in]a, b]$ dado. Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

TEOREMA 4.2.2 (Propiedad de linealidad) Sean $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones Riemann-integrables en sentido impropio en $]a, b]$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ dado. Entonces

$$i) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$ii) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

TEOREMA 4.2.3 (Propiedad de monotonía) Sean $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas Riemann-integrables en sentido impropio en $]a, b]$. Si $f \geq g$ en $]a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

TEOREMA 4.2.4 (Teorema del cambio de variable para integrales impropias) Sean $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g :]c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f \in C(]a, b])$ y $g \in C^1(]c, d])$, con $g(]c, d]) \subset]a, b]$ (aquí $c \in]-\infty, d] \cup \{-\infty\}$). Si f es Riemann-integrable en sentido impropio en $]a, b]$ y g es estrictamente creciente en $]c, d]$, entonces $f \circ g$ es una función continua en $]c, d]$ tal que

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = \lim_{s \rightarrow c^+} \int_{g(s)}^{g(d)} f(u) du.$$

OBSERVACIÓN 4.2.4 En el Teorema 4.2.4 anterior puede ocurrir que

$$\lim_{s \rightarrow c^+} g(s) = a.$$

TEOREMA 4.2.5 (Teorema de integración por partes para integrales impropias) Sean $u :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $v :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $]a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Si existen dos de los siguientes tres límites

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b u(x) v'(x) dx, \quad \lim_{c \rightarrow a^+} (u(b)v(b) - u(c)v(c)) \quad \text{o} \quad \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b u'(x) v(x) dx,$$

entonces el tercero también existe y se verifica que

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} (u(b)v(b) - u(c)v(c)) - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Teoremas de convergencia de funciones no acotadas no negativas

TEOREMA 4.2.6 (Criterio de comparación por acotación) Sean $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y no acotadas en $]a, b]$ tales que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in]a, b].$$

Entonces,

i) Si $\int_a^b g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x) dx$ converge.

ii) Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x) dx$ diverge.

TEOREMA 4.2.7 (Criterio de comparación por acotación) Sean $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ y $h :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones continuas y no acotadas en $]a, b[$ tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Si las integrales impropias

$$\int_a^b g(x) dx \quad \text{y} \quad \int_a^b h(x) dx$$

convergen, entonces la integral impropia

$$\int_a^b f(x) dx$$

también converge.

TEOREMA 4.2.8 (Criterio de comparación por paso al límite del cociente) Sean $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y no negativas en $]a, b[$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Entonces,

i) Si $L > 0$, entonces

$$\int_a^b g(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge.}$$

ii) Si $L = 0$, entonces

$$\int_a^b g(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge.}$$

iii) Si $L = +\infty$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ converge.}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.2.1

1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales.

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x)x^2} dx$

b) $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{x^3+2x}} dx$

2. Determina los valores de p para los cuales las siguientes integrales convergen.

a) $\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^p} dx$

b) $\int_0^1 \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^{2p}}} dx$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 4.2.1 presiona aquí **B**

4.3. Integración impropia de tercera especie: Integrabilidad de funciones no acotadas en intervalos no acotados

- En estos casos siempre será beneficioso tener claro el lugar donde la función no es acotada. Por ejemplo, si I es un intervalo no acotado en \mathbb{R} , una situación general que se puede presentar es que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función continua en I salvo en un punto $c \in \text{int}(I)$ tal que la recta $x = c$ es una asíntota para la gráfica de la función, por lo que la función no es acotada. En casos como este, el estudio de la integral de la función en el intervalo I se debe realizar por separado para cada uno de los intervalos I_1 e I_2 , tales que $I_1 \cup I_2 = I \setminus c$, con I_1 conteniendo números reales menores que c , e I_2 conteniendo números reales mayores que c , debiendo converger las integrales en I_1 y en I_2 por separado para garantizar que la integral de f también ha de converger en I .
- Las propiedades de aditividad, linealidad y monotonía también son válidas para este tipo de integrales impropias.
- Los teoremas relativos a cambios de variable e integración por partes también se pueden validar para este tipo de integrales impropias.
- Los teoremas de convergencia de integrales impropias de primera y segunda especie también se pueden validar para integrales impropias de tercera especie.

EJEMPLO 4.3.1 Calcula, si es posible $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

Solución. Tenemos que f es continua $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde no está definida, siendo $x = 0$ una asíntota horizontal para la gráfica de la función, por lo que la función no es acotada. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Además, por paridad de f , se sigue que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4$$

y

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Por lo tanto, f es Riemann-integrable en sentido impropio sobre \mathbb{R} y se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 6. \quad \square$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 4.3.1

1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales.

$$a) \int_2^{+\infty} \frac{x+2}{2\sqrt[3]{x^5}} dx$$

$$b) \int_1^2 \frac{x^2}{(x-1)^4} dx$$

$$c) \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{1-|1-x|} dx$$

$$d) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(2+x)}} dx$$

2. Calcula, si es posible, el valor de cada integral.

$$a) \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x} dx$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

3. Determina los valores de p para los cuales las siguientes integrales convergen.

$$a) \int_1^{+\infty} x^p e^{-x} dx$$

$$b) \int_0^2 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[4]{4-x^2}} dx; \quad p > 0$$

$$c) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x^p \ln(x)} dx$$

$$d) \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1} dx$$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios Propuestos 4.3.1 presiona aquí **B**

Aplicaciones de la integral de Riemann

5.1. Volumen de un sólido de revolución

DEFINICIÓN 5.1.1 Llamamos *sólido de revolución* al cuerpo obtenido al girar o rotar una superficie plana alrededor de una recta fija del mismo plano llamada *eje de revolución* del sólido.

Algunos cuerpos que se pueden describir como sólidos de revolución son: la esfera, el cono circular recto, el cilindro circular recto, el toro, los paraboloides, los hiperboloides y los elipsoides.

En las siguientes dos subsecciones estudiaremos el volumen de sólidos de revolución obtenidos al rotar una región del plano cartesiano, primero en torno al eje x y luego en torno al eje y .

5.1.1. Método del disco

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa, y consideremos la región \mathcal{R} del plano ubicada entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si hacemos girar la región \mathcal{R} en torno al eje x se obtiene un *sólido de revolución* S y nos interesa encontrar su volumen.

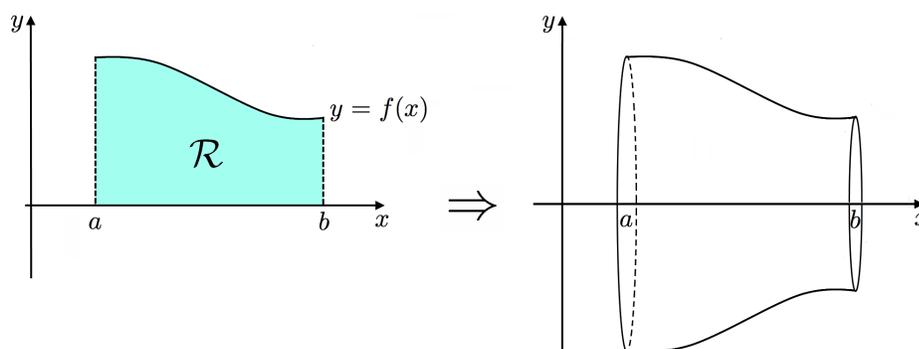


Figura 5.1. Sólido de revolución obtenido al girar en torno al eje x la región \mathcal{R} limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje x .

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, sea $\omega_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y consideremos el cilindro de radio $|f(\omega_k)|$ y altura Δx_k como en la Figura 5.2 a continuación. Como Δx_k es muy pequeño, este cilindro tiene altura muy pequeña, de manera que se parece a un disco.

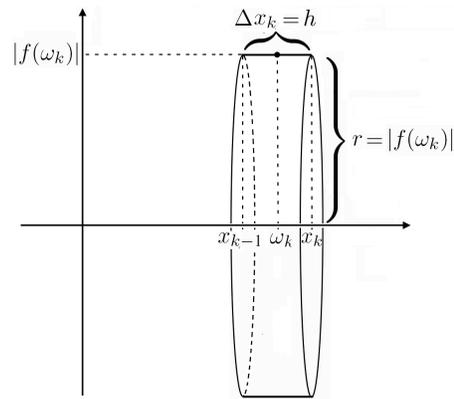


Figura 5.2. Cilindro o Disco de radio $|f(\omega_k)|$ y altura Δx_k .

Si V_k denota el volumen de este cilindro, tendremos que

$$V_k = \pi (f(\omega_k))^2 \Delta x_k.$$

Luego, el volumen V del sólido de revolución total \mathcal{S} debe ser aproximadamente igual a la suma de todos los V_k . Es decir,

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &\approx \sum_{k=1}^n V_k \\ &= \sum_{k=1}^n \pi (f(\omega_k))^2 \Delta x_k. \end{aligned}$$

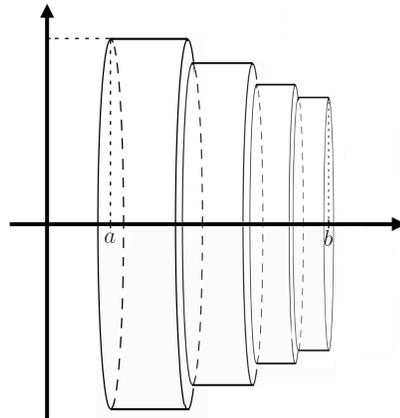


Figura 5.3. Cilindros concéntricos que aproximan el volumen de un sólido de revolución.

Finalmente, usando la idea de aproximación de Riemann, podemos concluir que

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \pi \sum_{k=1}^n (f(\omega_k))^2 \Delta x_k \\ &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$

TEOREMA 5.1.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El sólido de revolución \mathcal{S} obtenido al girar en torno al eje x la región acotada \mathcal{R} limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x , tiene volumen $V(\mathcal{S})$ dado por la fórmula

$$V(\mathcal{S}) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

EJEMPLO 5.1.1 Encuentra el volumen de un cilindro de radio r y altura h .

Solución. Ponemos $f(x) = r$ en el intervalo $[0, h]$. Entonces el volumen del cilindro de radio r y altura h , aquí denotado por \mathcal{S} , es:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^h r^2 dx \\ &= \pi r^2 x \Big|_0^h \\ &= \pi r^2 h. \quad \square \end{aligned}$$

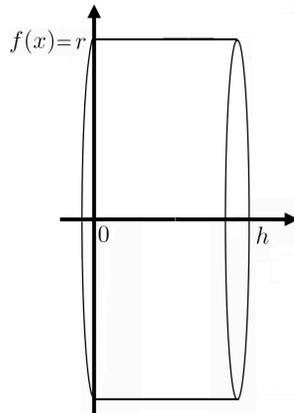


Figura 5.4. Cilindro de radio r y altura h .

EJEMPLO 5.1.2 Encuentra el volumen de un cono de radio r y de altura h .

Solución. Primero ubicamos el radio basal r del cono sobre el eje y y la altura h del cono sobre el eje x . Luego, giramos en torno al eje x la región triangular encerrada por la recta que pasa por $(h, 0)$ y $(0, r)$ y los ejes cartesianos, obteniendo el cono como un sólido de revolución \mathcal{S} . La ecuación de la recta que pasa por $(h, 0)$ y $(0, r)$ determina una función f que depende de x de la siguiente forma: ponemos $y = f(x)$ y obtenemos

$$\frac{f(x) - 0}{r - 0} = \frac{x - h}{0 - h} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{r}{h}(x - h).$$

Luego, el volumen del cono es:

$$\begin{aligned}
 V(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^h \left(-\frac{r}{h}(x-h)\right)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}(x^2 - 2xh + h^2) dx \\
 &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} - x^2h + h^2x\right) \Big|_0^h \\
 &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - h^3 + h^3\right) \\
 &= \frac{\pi r^2 h}{3}. \quad \square
 \end{aligned}$$

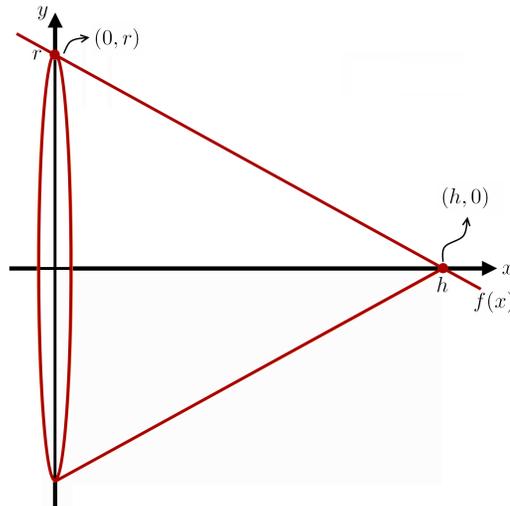


Figura 5.5. Cono de radio basal r y altura h

EJEMPLO 5.1.3 Encuentra el volumen de un cono truncado de altura h , radio menor r_1 y radio mayor r_2 .

Solución. Primero ubicamos el radio menor r_1 del cono truncado sobre el eje y , su altura h sobre el eje x , y su radio mayor r_2 sobre la recta $y = h$. Luego, giramos en torno al eje x la región trapezoidal encerrada bajo la recta que pasa por $(0, r_1)$ y (h, r_2) , los ejes cartesianos y la recta $y = h$, obteniendo el cono truncado como un sólido de revolución \mathcal{S} . La ecuación de la recta que pasa por $(0, r_1)$ y (h, r_2) determina una función f que depende de x de la siguiente forma: ponemos $y = f(x)$ y obtenemos

$$\frac{f(x) - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{x - 0}{h - 0} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{r_2 - r_1}{h} x + r_1.$$

Luego, el volumen del cono truncado es:

$$\begin{aligned}
 V(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^h \left(\frac{r_2 - r_1}{h} x + r_1 \right)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^h \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{h^2} x^2 + 2 \frac{(r_2 - r_1)}{h} r_1 x + r_1^2 \right) dx \\
 &= \pi \left(\frac{1}{3} \frac{(r_2 - r_1)^2}{h^2} x^3 + \frac{r_2 - r_1}{h} r_1 x^2 + r_1^2 x \right) \Big|_0^h \\
 &= \pi h \left(\frac{r_2^2}{3} - \frac{2r_1 r_2}{3} + \frac{r_1^2}{3} + r_2 r_1 - r_1^2 + r_1^2 \right) \\
 &= \frac{\pi h}{3} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

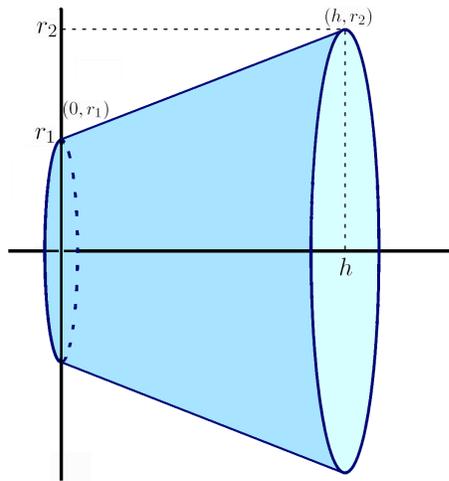


Figura 5.6. Cono truncado de radio menor r_1 , radio mayor r_2 y altura h

EJERCICIOS 5.1.1

1. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar en torno al eje x la región:

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje y la región:

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y = x^3 \\ y = 1 \\ y = 8 \end{cases}$$

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 5.1.1 presiona aquí

5.1.2. Método del anillo circular

TEOREMA 5.1.2 Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y no negativas tales que $f \geq g$ en $[a, b]$. El sólido de revolución \mathcal{S} obtenido al girar en torno al eje x la región acotada \mathcal{R} limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, tiene volumen $V(\mathcal{S})$ dado por la fórmula

$$V(\mathcal{S}) = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx. \tag{5.1}$$

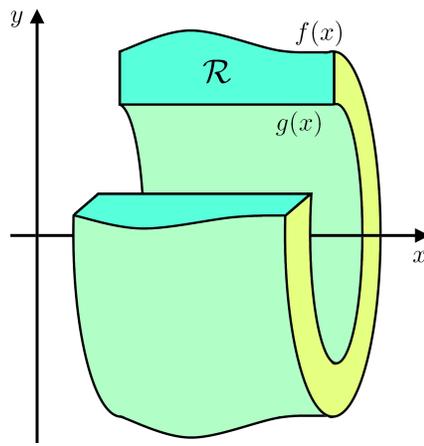


Figura 5.7. Parte de un sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje x la región entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

OBSERVACIÓN 5.1.1 El mismo resultado se obtiene si f y g son funciones continuas y no positivas en $[a, b]$, con $f \leq g$ en $[a, b]$. En efecto, es claro que $-f$ y $-g$ son funciones continuas y no negativas en $[a, b]$, con $-f \geq -g$ en $[a, b]$ y que el sólido de revolución \mathcal{S} obtenido al girar la región acotada \mathcal{R} limitada por las curvas $y = -f(x)$ e $y = -g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, es el mismo sólido de revolución que se obtiene al girar la región acotada \mathcal{R}' limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$; y como $(-f(x))^2 - (-g(x))^2 = (f(x))^2 - (g(x))^2 \geq 0$, entonces

$$V(\mathcal{S}) = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx.$$

EJEMPLO 5.1.4 Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje x la región:

$$\mathcal{R} = \begin{cases} x^2 = y - 2 \\ 2y - x = 2 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Solución. Para la primera ecuación tenemos

$$y = x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 & \text{si } x = 0 \\ y = 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para la segunda ecuación tenemos

$$2y - x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 & \text{si } x = 0 \\ y = \frac{3}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Luego, un gráfico aproximado del sólido \mathcal{S} al cual le queremos calcular su volumen es:

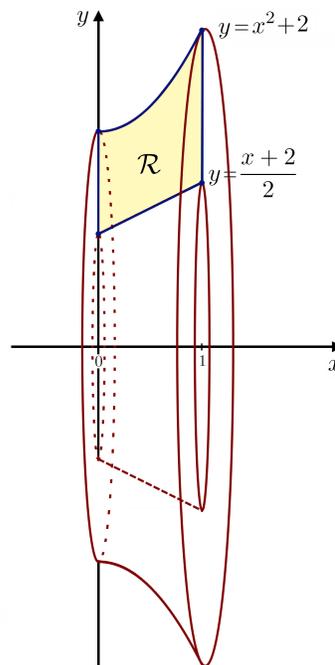


Figura 5.8. Sólido de revolución \mathcal{S} obtenido al rotar en torno al eje x la región entre las curvas $y = x^2 + 2$ e $2y - x = 2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Entonces,

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^1 \left((x^2 + 2)^2 - \left(\frac{x+2}{2} \right)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(x^4 + 4x^2 + 4 - \frac{x^2}{4} - x - 1 \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{15}{12}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{79}{20} \pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.1.5 Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno a la recta $y = 3$ la región:

$$\mathcal{R} = \begin{cases} x^2 = y - 2 \\ 2y - x = 2 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Solución. La región \mathcal{R} de este ejemplo es exactamente la misma región que aquella del ejemplo anterior, pero en vez de girarla en torno al eje x (que equivale a girarla en torno a la recta $y = 0$), la giraremos en torno a la recta $y = 3$. Notemos que el sólido de revolución \mathcal{S} obtenido difiere totalmente del sólido del ejemplo anterior, tal como se puede apreciar al comparar la Figura 5.8 previa con la Figura 5.9 siguiente:

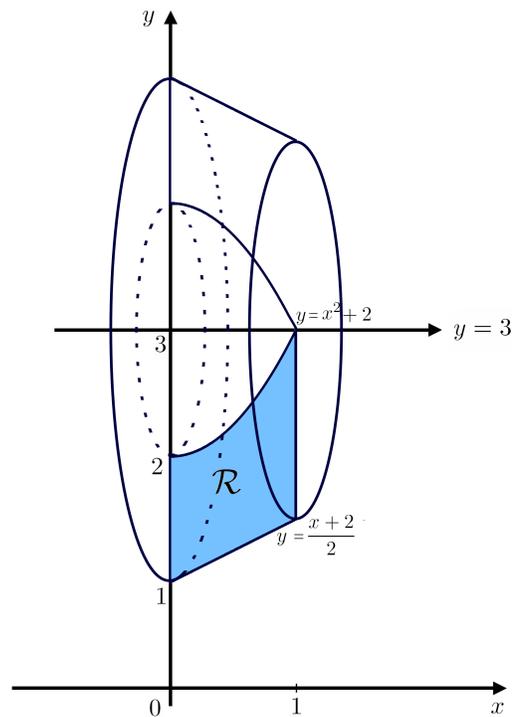


Figura 5.9. Sólido de revolución obtenido al rotar en torno a la recta $y = 3$ la región entre las curvas $y = x^2 + 2$ e $2y - x = 2$.

En casos como este, conviene realizar un cambio de coordenadas adecuado que nos permita trasladar el sólido de revolución y verlo como si estuviésemos girando en torno al eje x , para aplicar nuestra teoría. En particular, en este ejemplo usaremos el cambio de coordenadas:

$$X = x \quad \text{e} \quad Y = y - 3.$$

Ahora vamos a reinterpretar la región \mathcal{R} en términos de los nuevas coordenadas. Tenemos

- $x^2 = y - 2 \Leftrightarrow y = x^2 + 2 \Leftrightarrow y - 3 = x^2 - 1 \Leftrightarrow Y = X^2 - 1$
- $2y - x = 2 \Leftrightarrow 2(y - 3) + 6 - x = 2 \Leftrightarrow 2Y - X = -4 \Leftrightarrow Y = \frac{X}{2} - 2.$

Luego,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{x,y} = \begin{cases} x^2 = y - 2 \\ 2y - x = 2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}_{X,Y} = \begin{cases} Y = X^2 - 1 \\ Y = \frac{X}{2} - 2 \\ X = 0 \\ X = 1. \end{cases}$$

Con esto, el nuevo sólido tiene el mismo volumen que el sólido \mathcal{S} anterior con la ventaja que se ha obtenido al girar \mathcal{R} en torno al eje X . (5.1):

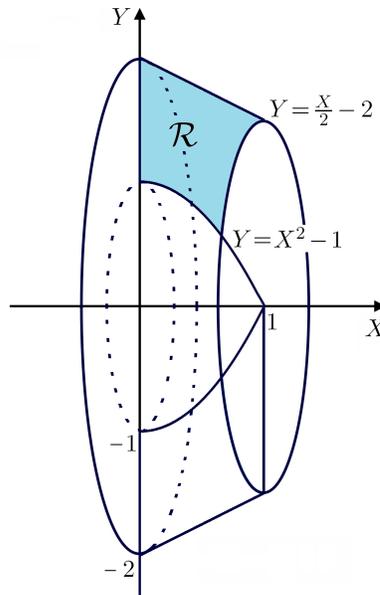


Figura 5.10. Sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje X la región entre las curvas $Y = X^2 - 1$ e $Y = \frac{X}{2} - 2$.

Luego,

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^1 \left(\left(\frac{X}{2} - 2 \right)^2 - \left(X^2 - 1 \right)^2 \right) dX \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{X^2}{4} - 2X + 4 - X^4 + 2X^2 - 1 \right) dX \\ &= \pi \int_0^1 \left(-X^4 + \frac{9}{4}X^2 - 2X + 3 \right) dX \\ &= \pi \left(-\frac{X^5}{5} + \frac{3}{4}X^3 - X^2 + 3X \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{51}{20} \pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 5.1.2 Considera la región finita limitada por las curvas $y = \frac{1}{8}x^3$ e $y = 2x$, que se encuentra en el semiplano $y \geq 0$. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicha región en torno:

- a) al eje x
- b) al eje y
- c) a la recta $x = 6$
- d) a la recta $y = -2$.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 5.1.2 presiona aquí 

5.1.3. Método de las capas cilíndricas

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y consideremos la región \mathcal{R} del plano ubicada entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si hacemos girar la región \mathcal{R} en torno al eje y se obtiene un sólido de revolución \mathcal{S} y nos interesa calcular su volumen.

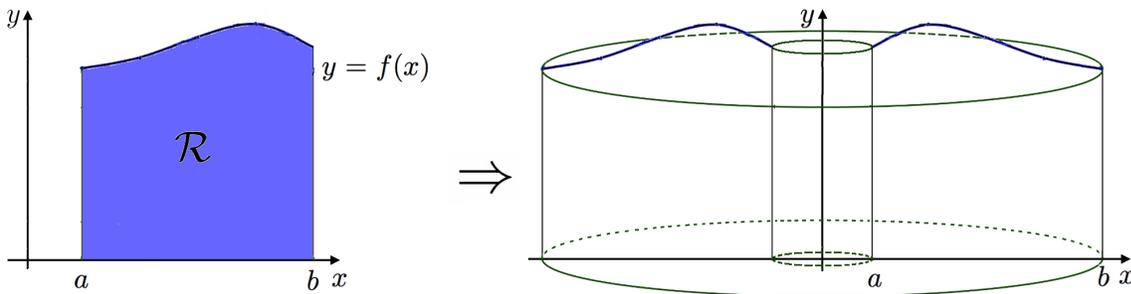


Figura 5.11. Sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje y la región ubicada entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ el punto medio de este intervalo, a saber: $w_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$. Construyamos anillos circulares (con lados rectos) de radio menor x_{k-1} , radio mayor x_k y altura $f(w_k)$. Como Δx_k es de tamaño pequeño estos anillos circulares parecen capas cilíndricas.

Si V_k denota el volumen de esta capa cilíndrica, entonces

$$\begin{aligned}
 V_k &= \pi x_k^2 f(w_k) - \pi x_{k-1}^2 f(w_k) \\
 &= \pi f(w_k) (x_k^2 - x_{k-1}^2) \\
 &= \pi f(w_k) (x_k + x_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) \\
 &= 2\pi f(w_k) \frac{(x_k + x_{k-1})}{2} \Delta x_k \\
 &= 2\pi w_k f(w_k) \Delta x_k.
 \end{aligned}$$

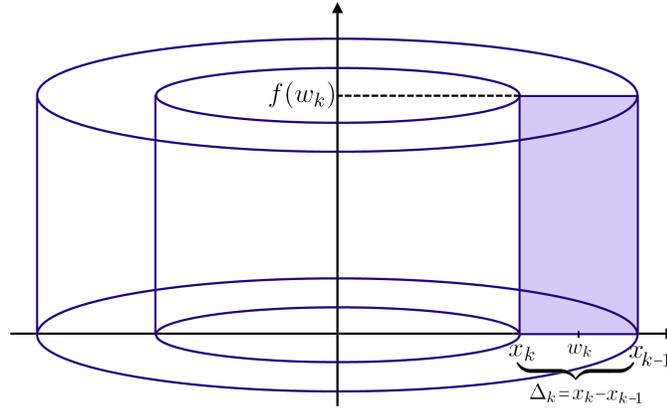


Figura 5.12. Anillo circular de radio menor x_{k-1} , radio mayor x_k y altura $f(w_k)$.

Luego el volumen V del sólido de revolución total \mathcal{S} debe ser aproximadamente igual a la sumatoria de todos los V_k :

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &\approx \sum_{k=1}^n V_k \\ &= \sum_{k=1}^n 2\pi w_k f(w_k) \Delta x_k. \end{aligned}$$

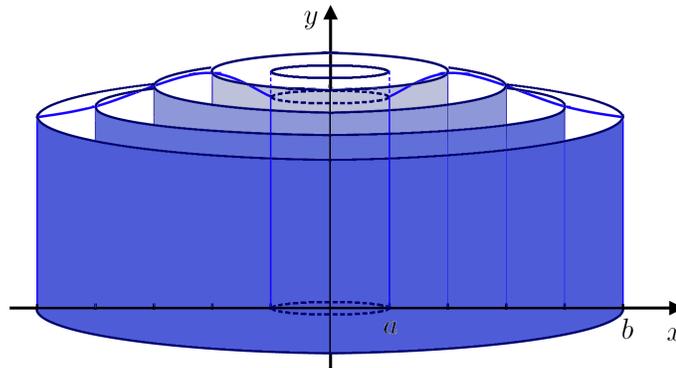


Figura 5.13. Aproximación por capas cilíndricas del sólido de revolución obtenido al rotar en torno al eje y la región entre las curvas $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Entonces, usando la idea de aproximación de Riemann, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &= 2\pi \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k f(w_k) \Delta x_k \\ &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \end{aligned}$$

TEOREMA 5.1.3 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. El sólido de revolución \mathcal{S} obtenido al girar en torno al eje y la región acotada \mathcal{R} limitada por las curvas $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x , tiene volumen $V(\mathcal{S})$ dado por la fórmula

$$V(\mathcal{S}) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (5.2)$$

EJEMPLO 5.1.6 Calcula el volumen del sólido que se obtiene al girar en torno al eje y la región entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje x .

Solución. Tenemos que

$$y = 2x - x^2 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2 - x)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \left(2 \cdot \frac{8}{3} - 4 \right) \\ &= \frac{8}{3}\pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 5.1.3

1. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al girar en torno a la recta $x = 3$ la región

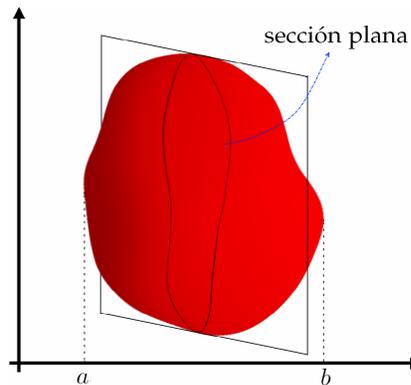
$$\mathcal{R} = \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

2. Considera la región acotada en el semiplano $y \geq 0$ que está limitada por las curvas $y = \frac{1}{8}x^3$, $y = 2x$. Encuentra el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región en torno al eje y .

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 5.1.3 presiona aquí 

5.2. Volumen de sólidos con secciones planas paralelas conocidas

DEFINICIÓN 5.2.1 Sea \mathcal{S} un sólido en \mathbb{R}^3 . Llamamos *sección plana* de \mathcal{S} a la intersección de un plano con \mathcal{S} .

Figura 5.14. Sección plana de un sólido \mathcal{S} .

Ahora, sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y consideremos $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Cortemos el sólido por medio de secciones planas en los extremos de los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$; siendo las secciones planas perpendiculares al eje x . Entonces estas secciones resultan paralelas entre sí. La idea es aproximar el volumen por cilindros.

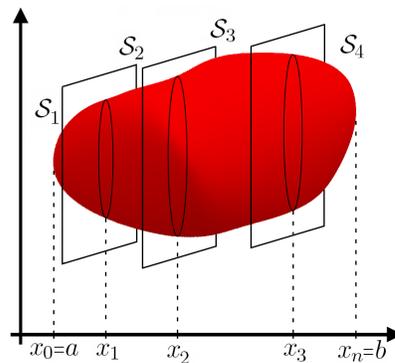


Figura 5.15. Secciones planas paralelas

OBSERVACIÓN 5.2.1 Los cilindros no necesariamente son circulares rectos. Por ejemplo, la Figura 5.16 a continuación representa un cilindro recto pues tiene dos caras paralelas llamadas bases y el lado está formado por la unión de rectas perpendiculares a sus bases.

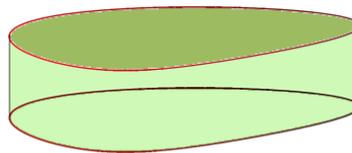


Figura 5.16. Cilindro recto que no posee base circular.

Luego, para cada sólido \mathcal{S}_k : consideramos la sección plana R_k que corresponde a la sección plana de \mathcal{S} que es la intersección del plano perpendicular al eje x que pasa por w_k y completamos un cilindro recto en $[x_{k-1}, x_k]$ cuya base tiene igual forma a R_k .

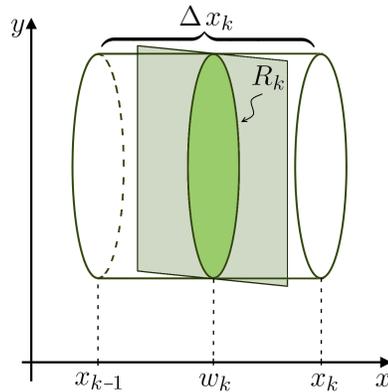


Figura 5.17. Sólido cilíndrico asociado al corte k -ésimo.

Ahora, notemos que el volumen del k -ésimo cilindro recto considerado está dado por

$$V_k = \text{Área basal} \cdot \text{altura} = A(w_k) \Delta x_k,$$

donde $A(w_k)$ representa un “área móvil” que depende de la elección de w_k . Entonces, el volumen del sólido S es aproximadamente igual a:

$$V(S) \approx \sum_{k=1}^n A(w_k) \Delta x_k.$$

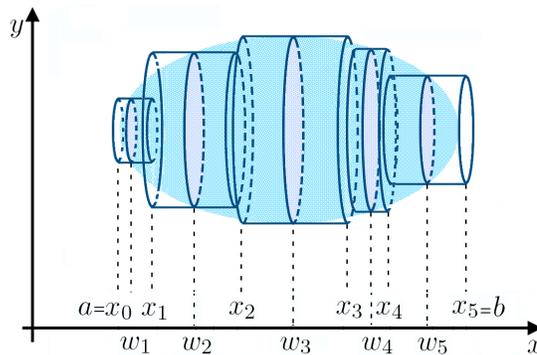


Figura 5.18. Volumen aproximado de un Sólido mediante cilindros.

Por último, usando la idea de aproximación de Riemann, se concluye que

$$V(S) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(w_k) \Delta x_k = \int_a^b A(x) dx,$$

donde $A(x_0)$ es el área de una sección plana del sólido S que es perpendicular al eje x en el plano x_0 , (A es una función continua en $[a, b]$).

TEOREMA 5.2.1 Sea \mathcal{S} un sólido tal que el área de cualquier sección plana del sólido que es perpendicular al eje x está determinada por la función $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Entonces el volumen V del sólido \mathcal{S} está dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (5.3)$$

EJEMPLO 5.2.1 Encuentra el volumen de un sólido cuya base es un círculo de radio 2 y cuyas secciones transversales a un diámetro fijo de la base son cuadrados.

Solución. Consideremos el círculo centrado en el origen de radio 2, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 2^2.$$

Despejando y obtenemos,

$$|y| = \sqrt{4 - x^2}.$$

Luego, el área de la sección transversal en un punto $x \in [-2, 2]$ es: $A(x) = (2|y|)^2 = 4(4 - x^2)$.

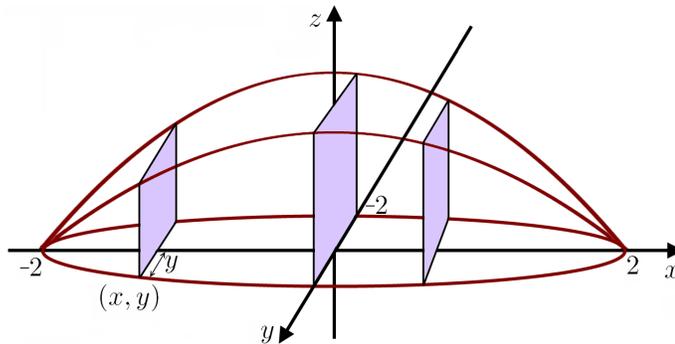


Figura 5.19. Sólido cuya base es un círculo de radio 2 y cuyas secciones transversales a un diámetro fijo de la base son cuadrados.

Por lo tanto el volumen del sólido es:

$$V = 4 \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{128}{3}. \quad \square$$

EJERCICIOS 5.2.1

1. La base de un sólido es un círculo que tiene un radio de r unidades. Encuentra el volumen si todas las secciones planas perpendiculares (secciones transversales) a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.
2. Una cuña se corta de un sólido en forma de cilindro circular recto con un radio de r pulgadas, por un plano que pasa a través de un diámetro de la base y forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Encuentra el volumen de la cuña.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 5.2.1 presiona aquí

5.3. Longitud de arco de una curva

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que f' es continua en $]a, b[$. Queremos determinar la longitud ℓ de la curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$. Para ello, consideremos una partición $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ de $[a, b]$ y los segmentos cuyos extremos son $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$, para $k = \{1, 2, \dots, n\}$.

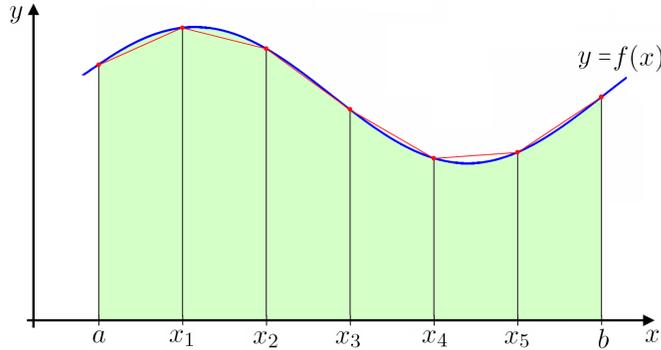


Figura 5.20. Longitud aproximada de una curva mediante una poligonal.

Notemos que la longitud ℓ_k del segmento que une $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ es:

$$\ell_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Luego, por el Teorema de Valor Medio, existe $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$\begin{aligned} \ell_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(w_k)(x_k - x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{\Delta x_k^2 + (f'(w_k))^2 \Delta x_k^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(w_k))^2} \Delta x_k \quad (\Delta x_k > 0). \end{aligned}$$

Entonces la longitud total de la curva es aproximadamente

$$\ell \approx \sum_{k=1}^n \ell_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(w_k))^2} \Delta x_k,$$

y usando la idea de Riemann obtenemos

$$\ell = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(w_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

TEOREMA 5.3.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que f' es continua en $]a, b[$. La longitud ℓ de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por la fórmula

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

EJEMPLO 5.3.1 Sea $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 10$. Encuentra la longitud de la curva $y = f(x)$, para $x \in [8, 27]$.

Solución. Notar que

$$f'(x) = \frac{2}{3} 3x^{-\frac{1}{3}}$$

Luego,

$$\ell = \int_8^{27} \sqrt{1 + 4x^{-\frac{2}{3}}} dx = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 4} dx.$$

Usando el cambio de variables $u = x^{\frac{2}{3}} + 4$, obtenemos

$$\begin{cases} x = 8 & \Rightarrow u = \sqrt[3]{8^2} + 4 = 8 \\ x = 27 & \Rightarrow u = \sqrt[3]{27^2} + 4 = 13 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} du = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx \Rightarrow \frac{3}{2} du = x^{-\frac{1}{3}} dx. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\ell = \frac{2}{3} \int_8^{13} \sqrt{u} du = \frac{2}{3} 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_8^{13} = \left(13^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{3}{2}} \right) = 13\sqrt{13} - 16\sqrt{2}. \quad \square$$

EJERCICIOS 5.3.1

1. Calcula la longitud de arco de la curva $y = \ln x$ en $1 < x < 2$.
2. Calcula la longitud de arco de la curva $y = \sin x$ en $0 \leq x \leq \pi$.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 5.3.1 presiona aquí [A](#)

5.4. Áreas de superficies de revolución

El problema que queremos resolver en esta sección es el de calcular el área de una superficie de revolución. Para ello, y siguiendo la notación dada en la Figura 5.21 a continuación,

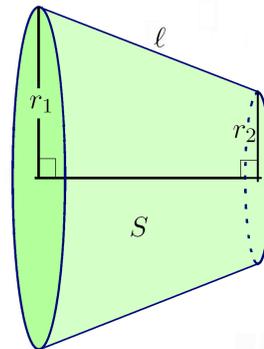


Figura 5.21. Cono circular recto truncado.

conviene recordar lo siguiente: el área de la superficie lateral curvada de un cono circular recto truncado está dada por la fórmula:

$$A(S) = \ell(r_1 + r_2) \pi.$$

Ahora, sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, con $f \geq 0$. Al girar en torno al eje x la curva $y = f(x)$ ubicada entre las rectas $x = a$ y $x = b$, obtenemos una superficie de revolución. Sea $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ con

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

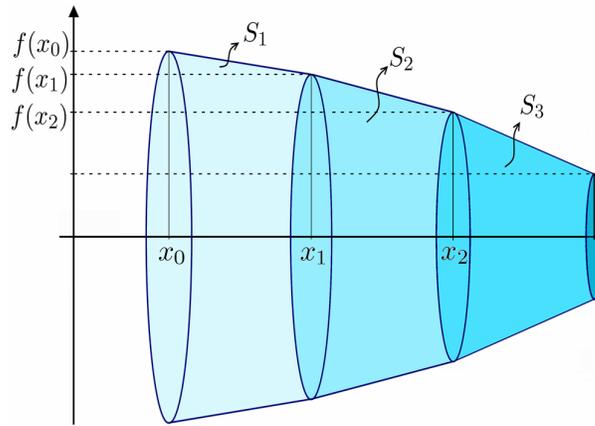


Figura 5.22. Aproximación de una superficie de revolución mediante superficies laterales de conos truncados

Si consideramos el k -ésimo cono truncado correspondiente a los radios $r_1 = f(x_k)$ y $r_2 = f(x_{k-1})$, entonces su longitud lateral ℓ_k asociada está dada por:

$$\ell_k = d\left((x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))\right) = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Así, desde el Teorema del Valor Medio obtenemos:

$$\begin{aligned} \ell_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(w_k))^2 (x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{1 + (f'(w_k))^2} \Delta x_k. \\ \therefore A(S_k) &= \ell_k (f(x_k) + f(x_{k-1})) \pi. \end{aligned}$$

Luego,

$$A(S) \approx \pi \sum_{k=1}^n (f(x_k) + f(x_{k-1})) \sqrt{1 + (f'(w_k))^2} \Delta x_k \approx 2\pi \sum_{k=1}^n f(w_k) \sqrt{1 + (f'(w_k))^2} \Delta x_k.$$

Y usando la idea de aproximación de Riemann, obtenemos

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

TEOREMA 5.4.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que f' es continua en $]a, b[$ y sea S la superficie de revolución obtenida al girar en torno al eje x la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. El área de la superficie S , denominada $A(S)$, está dada por la fórmula

$$A(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

EJEMPLO 5.4.1 Encuentra el área de la superficie de revolución al hacer girar en torno al eje x la curva $y = \sin x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Solución. En este problema podemos considerar $f(x) = \sin x$, y así $f'(x) = \cos x$.

Luego,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \quad \begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 & \text{si } x = 0, \\ u = 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &= -2\pi \int_1^0 \sqrt{1 + u^2} du \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du \end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\int \sqrt{1 + u^2} du = \int \sec^3 \theta d\theta \quad \begin{cases} u = \tan \theta \\ du = \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1 + u^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sec \theta.$$

Siguiendo con algunos cálculos directos, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \theta d\theta &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta \tan^2 \theta d\theta & \begin{cases} \bar{u} = \sec \theta & d\bar{v} = \sec^2 \theta d\theta \\ d\bar{u} = \sec \theta \tan \theta d\theta & \bar{v} = \tan \theta \end{cases} \\ &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \int \sec \theta d\theta \\ \Rightarrow 2 \int \sec^3 \theta d\theta &= \tan \theta \sec \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \\ \Rightarrow \int \sec^3 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \left(u \sqrt{1 + u^2} + \ln |\sqrt{1 + u^2} + u| \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \pi \left(u \sqrt{1 + u^2} + \ln |\sqrt{1 + u^2} + u| \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\sqrt{2} + \ln |\sqrt{2} + 1| \right) \\ &\approx 2,29558715 \pi. \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.4.2 Encuentra el área de la superficie de revolución generada al girar en torno al eje x la curva $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$, para $0 \leq x \leq a, y \geq 0$.

Solución. Despejando y y poniendo $y = f(x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{a^2x^2 - x^4}{8a^2}} = x\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{8a^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2x^2 - x^4}{8a^2}}} \frac{1}{8a^2} (2a^2x - 4x^3) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + (f'(x))^2 &= \frac{8a^2(a^2 - x^2) + a^4 - 4a^2x^2 + 4x^2}{8a^2(a^2 - x^2)} \\ &= \frac{9a^4 - 12a^2x^2 + 4x^4}{8a^2(a^2 - x^2)} \\ &= \frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^a f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^a x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{8a^2}} \cdot \sqrt{\frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)}} dx \\ &= \frac{2\pi}{8a^2} \int_0^a x \cdot (3a^2 - 2x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{4a^2} \left[\frac{3a^2x^2}{2} - \frac{1}{2}x^4 \right] \Big|_0^a = \frac{\pi}{4a^2} [a^4] \\ &= \frac{\pi}{4} a^2. \quad \square \end{aligned}$$

EJERCICIOS 5.4.1 Halla el área de la superficie de revolución obtenida al girar el gráfico de $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $[1, 4]$ en torno a:

- a) el eje x
- b) el eje y
- c) la recta $x = -3$
- d) la recta $y = 4$.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 5.4.1 presiona aquí 

5.5. Centro de masa

Imaginemos por un instante que se colocan 2 masas, m_1 y m_2 , en puntos x_1 y x_2 del eje x , respectivamente. Representemos esta situación por dos bolas de plastilina sobre una regla (el eje x)

ubicadas en ciertas partes de ella (los puntos x_1 y x_2). Nos interesa saber cual es el punto \bar{x} de la regla donde se produce el equilibrio:

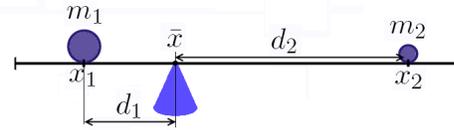


Figura 5.23. Punto de equilibrio de masas

Según la ecuación de equilibrio $m_1 d_1 = m_2 d_2$; es decir:

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

esta idea se puede extender a n masas: m_1, m_2, \dots, m_n ubicadas en puntos x_1, x_2, \dots, x_n respectivamente del eje x . Entonces el punto \bar{x} de equilibrio de las masas, conocido como **centro de masa**, está dado por la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

El numerador se llama **primer momento de masa** del sistema y el denominador corresponde a la **masa total** del sistema.

La idea anterior se puede extender a una masa distribuida de forma continua en un intervalo $[a, b]$, con densidad variable $\rho(\cdot)$ conocida, la cual se mide en unidades de masa por unidades de longitud. Antes, conviene notar que si la densidad es constante igual a ρ_0 en el intervalo $[a, b]$, entonces tendremos

$$m = \rho_0 (b - a).$$

Ahora, si la densidad es variable de forma continua en cada punto del intervalo, podemos considerar una partición $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, y escoger un punto $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$, de manera que la masa m_k en el k -ésimo intervalo aproximadamente viene dada por

$$m_k \approx \rho(w_k) \Delta x_k.$$

Luego, la **masa total** es

$$m \approx \sum_{k=1}^n \rho(w_k) \Delta x_k.$$

Entonces, usando la idea de aproximación de Riemann, obtenemos que la masa total viene dada por la fórmula

$$m = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(w_k) \Delta x_k = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Similarmente, en el k -ésimo intervalo se tiene que el primer momento de masa M_k viene dado aproximadamente por

$$M_k \approx w_k m_k = w_k \rho(w_k) \Delta x_k.$$

Luego, el **primer momento de masa** es

$$M \approx \sum_{k=1}^n w_k \rho(w_k) \Delta x_k.$$

Entonces, usando la idea de aproximación de Riemann, obtenemos que el primer momento de masa viene dada por la fórmula

$$M = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k \rho(w_k) \Delta x_k = \int_a^b x \rho(x) dx.$$

Por lo tanto, el punto \bar{x} de equilibrio de las masas, llamado **centro de masa**, está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}.$$

EJEMPLO 5.5.1 Calcula la masa de un bate de beisbol de 30 pulgadas ($0 \leq x \leq 30$) con densidad $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2$ slugs por pulgada [$1 \text{ slug} = 1 \frac{\text{pie}}{\text{s}^2}$] y hallar su centro de masa.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad m &= \int_0^{30} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx \\ &= \frac{690}{3} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^3 \Big|_0^{30} = \frac{690}{3} \left(\left(\frac{1}{46} + \frac{30}{690}\right)^3 - \left(\frac{1}{46}\right)^3 \right) \approx 0,06144 \text{ slugs.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad M &= \int_0^{30} x \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4232} + \frac{x^2}{47610} + \frac{x^4}{1904400} \right) \Big|_0^{30} \approx 1,205 \text{ slugs.} \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{M}{m} \approx \frac{1,205}{0,06144} \approx 19,6 \text{ pulgadas.} \quad \square$$

OBSERVACIÓN 5.5.1 En un bate de beisbol el centro de masa es candidato a ser el punto óptimo para batear (o punto dulce).

5.6. Centroide de una región plana

Sea L una lámina homogénea, cuya densidad de área constante es $\rho_0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$, la cual se encuentra limitada en el plano cartesiano por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde f es una función continua en $[a, b]$, con $f \geq 0$ en $[a, b]$.

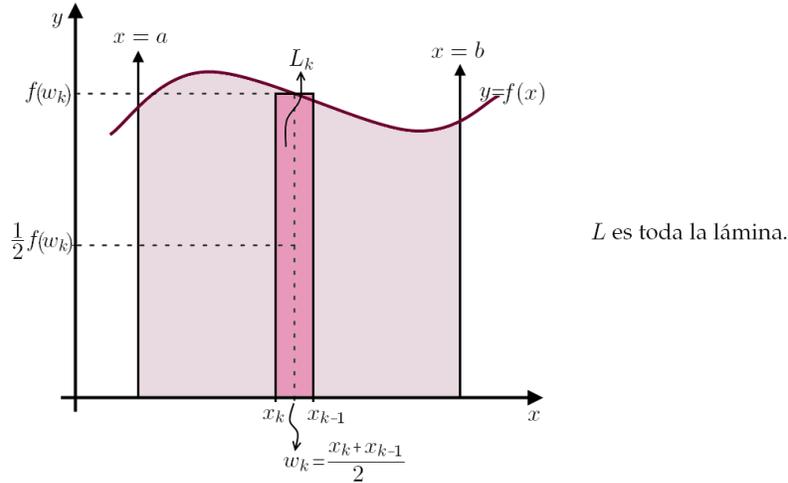


Figura 5.24. Centroide de una región plana

Sea $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. El **centro de masa** de la lámina L_k está ubicado en el punto donde ésta se equilibra, a saber $(w_k, \frac{1}{2} f(w_k))$, con $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Notar que esto es así porque la lámina es homogénea. Ahora, es claro que el momento de masa con respecto al eje y de la k -ésima lámina L_k está dado por

$$M_y^k = w_k \cdot \underbrace{\rho_0}_{\substack{\text{Densidad} \\ \text{en } \frac{\text{unidades de peso}}{\text{unidades de área}}}} \cdot \underbrace{f(w_k) \cdot \Delta x_k}_{\text{Área de } L_k}$$

Luego, el **Momento de masa de L con respecto al eje y** es:

$$M_y \approx \sum_{k=1}^n M_y^k = \sum_{k=1}^n w_k \rho_0 f(w_k) \Delta x_k$$

$$\therefore M_y = \rho_0 \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k f(w_k) \Delta x_k = \rho_0 \int_a^b x f(x) dx.$$

Ahora, el momento de masa de L con respecto al eje x está dado por:

$$M_x^k = \frac{1}{2} f(w_k) \underbrace{\rho_0 f(w_k) \Delta x_k}_{\text{Masa de } L_k}.$$

Luego, el **Momento de masa de L con respecto al eje x** es:

$$M_x \approx \sum_{k=1}^n M_k = \frac{1}{2} \rho_0 \sum_{k=1}^n (f(w_k))^2 \Delta x_k$$

$$\therefore M_x = \frac{1}{2} \rho_0 \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(w_k))^2 \Delta x_k = \frac{1}{2} \rho_0 \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Por otro lado, la masa total m de lámina L es:

$$m \approx \sum_{k=1}^n m_k,$$

donde m_k representa la masa de la lámina L_k ; a saber

$$m_k = \rho_0 f(w_k) \Delta x_k$$

$$\therefore m \approx \rho_0 \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k$$

$$= \rho_0 \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_k) \Delta x_k = \rho_0 \int_a^b f(x) dx.$$

Finalmente, deducimos que el **centro de masa o centroide** de la lámina L está ubicado en el punto:

$$(\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{con} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \wedge \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

OBSERVACIÓN 5.6.1 *Notar que*

$$\tilde{M}_y = \int_a^b x f(x) dx$$

corresponde a $\frac{1}{2\pi}$ del volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región \mathcal{R} bajo la curva de f en $[a, b]$ en torno al eje y , mientras que

$$\tilde{M}_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

corresponde a $\frac{1}{2\pi}$ del volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región \mathcal{R} bajo la curva de f en $[a, b]$ en torno al eje x , y $A = \int_a^b f(x) dx$ corresponde al área de la región \mathcal{R} . Entonces, resulta evidente que hemos pasado de un problema físico a uno geométrico.

DEFINICIÓN 5.6.1 La cantidad \tilde{M}_x recibe el nombre de *momento de \mathcal{R} con respecto al eje x* . La cantidad \tilde{M}_y recibe el nombre de *momento de \mathcal{R} con respecto al eje y* . Llamamos *centro de masa de una región plana \mathcal{R} o centroide* al punto (\bar{x}, \bar{y}) de la región \mathcal{R} , con $\bar{x} = \frac{\tilde{M}_y}{A}$ e $\bar{y} = \frac{\tilde{M}_x}{A}$.

EJEMPLO 5.6.1 Halla el centroide de la región en el primer cuadrante limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

Solución. Poniendo $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$. Queremos calcular \bar{x} , para lo cual necesitamos calcular A , \tilde{M}_x y \tilde{M}_y . Tenemos,

$$A = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 2x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{28}{3},$$

$$\tilde{M}_y = \int_1^4 x f(x) dx = \int_1^4 x (2x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 = \frac{124}{5},$$

$$\tilde{M}_x = \frac{1}{2} \int_1^4 (f(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^4 4x dx = x^2 \Big|_1^4 = 15.$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{124}{3}}{\frac{28}{3}} = \frac{93}{35} \quad \wedge \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{15}{\frac{28}{3}} = \frac{45}{28}.$$

\therefore El centroide se halla en el punto $\left(\frac{93}{35}, \frac{45}{28}\right)$. \square

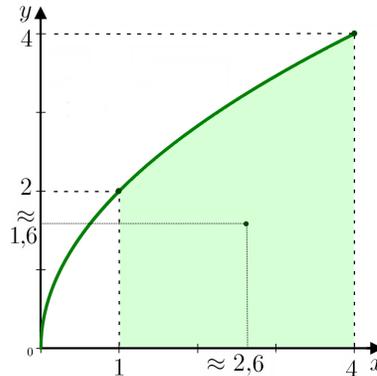


Figura 5.25. Centroides de la región limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$

EJEMPLO 5.6.2 Halla el centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x + 3$.

Solución. Ponemos $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$. Notar que $f(x) = g(x)$ si y sólo si $x^2 - 2x - 3 = 0$, o bien $(x - 3)(x + 1) = 0$, de donde obtenemos los límites de integración para x . Notar también que $g(x) \geq f(x)$ para $x \in [-1, 3]$. Como queremos calcular \bar{x} , necesitamos calcular primero A , \tilde{M}_x y \tilde{M}_y . Tenemos,

$$A = \int_{-1}^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \frac{32}{3},$$

$$\tilde{M}_y = \int_{-1}^3 x (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^3 x (2x + 3 - x^2) dx = \frac{32}{3},$$

$$\tilde{M}_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 ((2x+3)^2 - x^4) dx = \frac{1}{2} (4x^2 + 12x + 9 - x^4) \Big|_{-1}^3 = \frac{544}{15}.$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1 \quad \wedge \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{544}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{17}{5}.$$

∴ El centroide se halla en $(1, \frac{17}{5})$. □

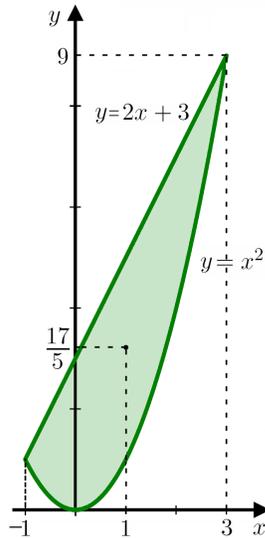


Figura 5.26. Centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x + 3$

5.7. Centroide de un sólido de revolución

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f \geq 0$ en $[a, b]$. Sea S un sólido homogéneo cuya densidad de volumen constante es $\rho_0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, obtenido al girar en torno a eje x la región \mathcal{R} que está limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $y = b$.

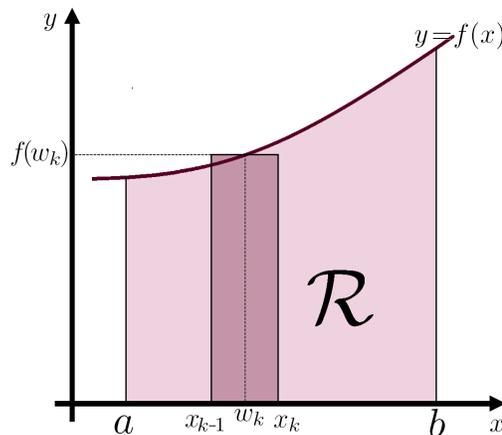


Figura 5.27. Para una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, ponemos $w_k \in [w_{k-1}, w_k]$, con $w_k = \frac{w_{k-1} + w_k}{2}$.

Notar que el centro de masa del disco circular recto de radio $f(w_k)$ y altura Δx_k en la figura es el punto $(w_k, 0, 0)$.

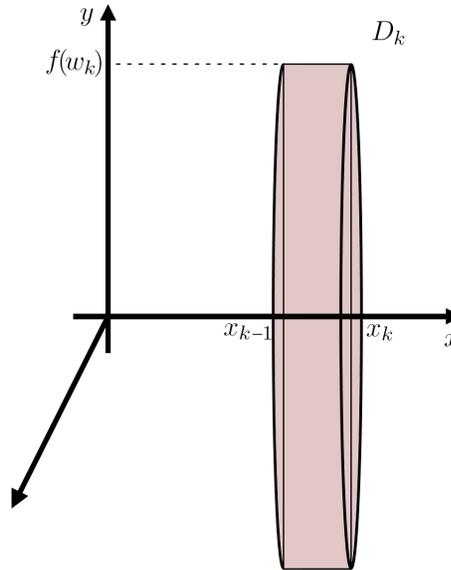


Figura 5.28. El momento de masa del disco S_k con respecto al plano yz (es decir, con respecto al plano $x = 0 \forall y, \forall z$) es: $M_{yz}^k = w_k \rho_0 \pi (f(w_k))^2 \Delta x_k$, donde ρ_0 es la densidad medida en unidades de peso sobre unidades de volumen, y la cantidad $\pi (f(w_k))^2 \Delta x_k$ representa el volumen de S_k .

Luego, el momento de masa del sólido S con respecto al plano yz es:

$$\begin{aligned} M_{yz} &\approx \sum_{k=1}^n M_{yz}^k = \pi \rho_0 \sum_{k=1}^n w_k (f(w_k))^2 \Delta x_k \quad \Rightarrow \quad M_{yz} = \pi \rho_0 \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k (f(w_k))^2 \Delta x_k \\ &= \rho_0 \pi \int_a^b x (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Se deduce directamente que $M_{xz} = 0$ y $M_{xy} = 0$; y que $m = \rho_0 \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$, donde M_{xz} representa el momento de masa de S con respecto al plano xz (es decir, con respecto al plano $y = 0 \forall x, \forall z$); M_{xy} representa el momento de masa de S con respecto al plano xy . (es decir, con respecto al plano $z = 0 \forall x, \forall y$) y m representa la masa de S .

Entonces el centro de masa de S queda determinado por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\pi \int_a^b x (f(x))^2 dx}{\pi \int_a^b (f(x))^2 dx} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = 0 \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = 0,$$

y podemos llamar a $(\bar{x}, 0, 0)$ el **centroide** de S (pues no depende de la densidad de masa; sino mas

bien de aspectos geométricos). Notar que si ponemos

$$\tilde{M}_{yz} = \pi \int_a^b x (f(x))^2 dx \quad \wedge \quad V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (\text{volumen del sólido})$$

entonces

$$\bar{x} = \frac{\tilde{M}_{yz}}{V}.$$

EJEMPLO 5.7.1 Halla el centroide del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje x , la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$.

Solución. Notar que

$$M_{yz}^k = \pi \int_0^3 x(x^2)^2 dx = \frac{243}{2} \pi$$

$$V = \pi \int_0^3 (x^2)^2 dx = \frac{243}{5} \pi.$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{5}{2}.$$

Por lo tanto, el centroide está en el punto $\left(\frac{5}{2}, 0, 0\right)$. \square

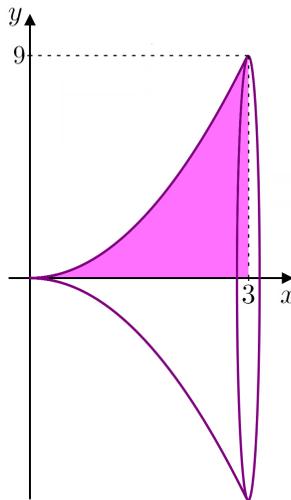


Figura 5.29. Centroides del sólido de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje x , la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$.

EJEMPLO 5.7.2 Obtén el centroide del sólido de revolución generado por la rotación, alrededor del eje x , de la región limitada por la curva $y = x^2 + 1$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$.

Solución.

$$M_{yz}^k = \pi \int_0^1 x [(x^2 + 1)^2 - 1^2] dx = \frac{2}{3} \pi$$

$$V = \pi \int_0^1 ((x^2 + 1)^2 - 1^2) dx = \frac{13}{15} \pi$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{10}{13}.$$

Luego, el centroide está en el punto $\left(\frac{10}{13}, 0, 0\right)$. \square

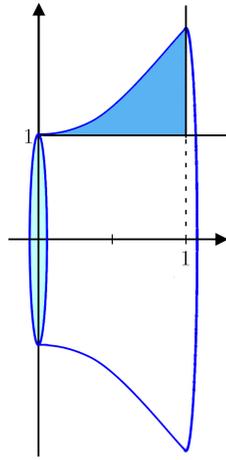


Figura 5.30. Centroide del sólido de revolución generado por la rotación, alrededor del eje x , de la región limitada por la curva $y = x^2 + 1$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$.

5.8. Trabajo Mecánico

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $f(x)$ el número de unidades de fuerza que actúa sobre un objeto representado por un punto sobre el eje x . Si denotamos por W al trabajo efectuado por la fuerza cuando el objeto se mueve desde a hasta b , entonces

$$W = \int_a^b f(x) dx.$$

Cuando $f(x) = K$, K siendo una constante, entonces

$$W = K \cdot d$$

donde d es la distancia recorrida desde a hasta b , esto es $d = (b - a)$. Luego, en el caso general para f podemos proceder de la siguiente forma: sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea

$w_k \in [x_{k-1}, x_k]$. El trabajo aproximado en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ está dado por

$$W_k = f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

EJERCICIOS DE REPASO 5.8.1

I. Área entre curvas

- Determina por integración el área del triángulo rectángulo con vértices en $(5, 1)$, $(1, 3)$ y $(-1, -2)$.
- Encuentra el área de la región limitada por las curvas dadas en los siguientes ejercicios.
 - $y = 4 - x^2$; eje x .
 - $y = 4x - x^2$; eje x ; $x = 2$; $x = 3$.
 - $y = \sin x$; eje x ; $x = \frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$.
 - $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$.
 - $y = \cos x - \sin x$; $x = 0$; $y = 0$.
- Determina el área determinada por las tres curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ y $4x - y + 12 = 0$.
- Determina m de tal forma que la región sobre la curva $y = mx^2$ ($m > 0$), a la derecha del eje y , y bajo la recta $y = m$ tenga un área de K unidades cuadradas, donde $K > 0$.
- Determina m de tal forma que la región sobre la recta $y = mx$ y bajo la parábola $y = 2x - x^2$ tenga un área de 36 unidades cuadradas.
- Obtén el área de la región limitada por la curva $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$ y la recta $x = 4$. (SUGERENCIA: Resuelva la ecuación cúbica para y en términos de x , y exprese y como dos funciones de x .)

II. Volumen de un Sólido de revolución. Métodos del Disco y del Anillo Circular

- Encuentra el volumen del sólido de revolución generado al girar, alrededor de la recta indicada, la región limitada por la curva $x = y^2$, el eje x y la recta $x = 4$.
 - La recta $x = 4$,
 - El eje y .
- Encuentra el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje x , la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje x , y la recta $x = 2$.
- Calcule el volumen de la esfera generada al girar alrededor del diámetro, la región encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.
- La región limitada por la curva $y = \sec x$, el eje x y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$ es girada alrededor del eje x . Determina el volumen del sólido generado.

5. Determina el volumen del sólido de revolución generado, si la región limitada por un arco de la senoide o curva seno es girada alrededor del eje x . (SUGERENCIA: Usa la identidad $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)
6. Encuentre el volumen del sólido que se genera, si la región del ejercicio 6 se gira alrededor de la recta $y = 1$.
7. La región acotada por la curva $y = \cot x$, la recta $x = \frac{1}{6}\pi$ y el eje x es girada alrededor del eje x . Calcule el volumen del sólido que se genera.
8. Determina el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor de la recta $x = -4$, de la región limitada por dicha recta y la parábola $x = 4 + 6y - 2y^2$
9. Encuentra el volumen del sólido generado al girar la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$ alrededor de la recta $x = 4$.
10. Encuentra el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor de la recta $y = -3$, de la región acotada por las dos parábolas $y = x^2$ y $y = 1 + x - x^2$.
11. Un paraboloides de revolución se obtiene por la rotación de la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x . Encuentra el volumen limitado por un paraboloides de revolución y un plano perpendicular a su eje si el plano se encuentra a 10cm del vértice, y si la sección plana de la intersección es una circunferencia de 6cm de radio.
12. Encuentra el volumen del sólido generado cuando la región limitada por un lazo de la curva cuya ecuación es $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$ gira alrededor del eje x .
13. Un sólido de revolución se forma por la rotación, alrededor del eje x , de la región acotada por la curva $y = \sqrt{2x + 4}$, el eje x , el eje y y la recta $x = c$ ($c > 0$). ¿Con qué valor de c el volumen será de 12π unidades cúbicas?
14. La región acotada por la curva $y = \csc x$ y las rectas $y = 2$, $x = \frac{1}{6}\pi$, y $x = \frac{5}{6}\pi$ se gira alrededor del eje x . Obtén el volumen del sólido que se genera.

III. Volumen de un Sólido de revolución. Método de las Capas Cilíndricas

1. La región limitada por las curvas $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$ es girada alrededor de los ejes indicados. Determina el volumen del sólido generado al rotar la región en torno a:
 - a) El eje x .
 - b) El eje y .
 - c) La recta $x = 2$.
 - d) La recta $y = 2$.
2. Encuentra el volumen del sólido generado si la región limitada por la parábola $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) y la recta $x = a$ se hace girar alrededor de $x = a$.

- Encuentra el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor de la recta $y = 1$, de la región limitada por dicha recta y la parábola $x^2 = 4y$. Considere los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.
- Encuentra el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje y , de la región limitada por la curva $y = \sin x^2$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $x = \sqrt{\pi}$.
- Encuentra el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje y , de la región exterior a la curva $y = x^2$ y entre las rectas $y = 2x - 1$ y $y = x + 2$.
- Se hace un hoyo de $2\sqrt{3}plg$ de radio a través del centro de un sólido de forma esférica con un radio de $4plg$. Encuentra el volumen de la porción del sólido que fue cortada.
- Encuentra el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje y , de la región acotada por la gráfica de $y = |x - 3|$, las rectas $x = 1$, $x = 5$ y $y = 0$. Considera los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.
- Un sólido de revolución forma por la rotación, alrededor del eje y , de la región acotada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$, el eje x y la recta $x = c$ ($c > 0$). Considera los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución para determinar el valor de c que dará un volumen de 12π unidades cúbicas.

IV. Volumen de un Sólido con secciones planas paralelas conocidas

- La base de un sólido es la región acotada por una elipse que tiene ecuación $3x^2 + y^2 = 6$. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son cuadrados.
- La base de un sólido es la región encerrada por una circunferencia que tiene un radio de $7cm$. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.
- La base de un sólido es la región del ejercicio 2. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles, cuya altura es igual a la distancia de la sección plana desde el centro de la circunferencia.
- La base de un sólido es la región acotada por una circunferencia con radio de r unidades, y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles rectos, cuya hipotenusa está en el plano de la base. Encuentra el volumen del sólido.
- Halla el volumen de un tetraedro con tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas también perpendiculares entre sí, cuyas longitudes son 3 , 4 y $7plg$.
- La base de un sólido es la región limitada por una elipse cuya ecuación es $2x^2 + y^2 = 8$. Encuentra el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con igual altura y longitud de base.

7. La base de un sólido es la región acotada por una circunferencia de radio 9cm y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un cuadrado que tiene una cuerda de la circunferencia como su diagonal. Encuentra el volumen del sólido.
8. La base de un sólido es la región acotada por la curva $x = 2\sqrt{y}$ y las rectas $x + y = 0$ y $y = 9$. Encuentra el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje y son cuadrados que tienen una diagonal con un punto extremo en la recta $x + y = 0$ y el otro punto extremo en la curva $x = \sqrt{y}$.
9. Una cuña se corta de un sólido, con forma de cilindro circular recto con un radio de $r\text{ cm}$, por un plano que pasa por un diámetro de la base y tiene una inclinación de 45° respecto al plano de dicha base. Encuentra el volumen de dicha cuña.

V. Longitud de arco de la gráfica de una función

1. Calcula la longitud del segmento de la recta $y = 3x$ del punto $(1, 3)$ al punto $(2, 6)$ por medio de tres métodos:
 - a) Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos.
 - b) Usando la fórmula estudiada en clase con respecto a x .
 - c) Usando la fórmula estudiada en clase con respecto a y .
2. Calcula el segmento de la recta $4x + 9y = 36$ entre sus intersecciones con el eje x y el eje y mediante tres métodos:
 - a) Usando el Teorema de Pitágoras.
 - b) Usando la fórmula estudiada en clase con respecto a x .
 - c) Usando la fórmula estudiada en clase con respecto a y .
3. Encuentra la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ del origen al punto $(3, 2\sqrt{3})$.
4. Halle la longitud del arco de la curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ desde el punto donde $x = 1$ al punto donde $x = 2$.
5. Encuentra la longitud del arco de la curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ del punto donde $x = 0$ al punto donde $x = 3$.
6. Obtén la longitud del arco de la curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$ del punto donde $x = 1$ al punto donde $x = 4$.
7. Halla la longitud del arco de la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ del punto donde $x = \frac{1}{8}$ hasta el punto donde $x = 1$.
8. Encuentra la longitud del arco de la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ en el primer cuadrante, desde el punto donde $x = \frac{1}{8}a$ hasta donde $x = a$.
9. Encuentra la longitud del arco de la curva $9y^2 = x(x-3)^2$, en el primer cuadrante, desde donde $x = 1$ hasta donde $x = 3$.

10. Si $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$, encuentra la longitud del arco de la gráfica de f desde el punto donde $x = 0$ hasta donde $4x = \pi$. (SUGERENCIA: Emplea el Teorema Fundamental del Cálculo, así como la identidad $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$).

VI. Área de una Superficie de revolución

- En los ítemes a)-f), hallar el área de la superficie de revolución generada al girar el arco dado alrededor del eje que se indica.
 - $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 2$, el eje y ,
 - $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$, $0 \leq x \leq 3$, el eje x ,
 - $y = \frac{1}{3}(2+x^2)^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 2$, el eje y ,
 - $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, el eje y ,
 - $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ el eje x ,
 - $y = 2\sqrt{x}$, $2 \leq x \leq 8$, el eje x .
- El arco de la parábola $x^2 = 4py$ entre $(0, 0)$ y $(2p, p)$ gira alrededor del eje y . Halla el área de la superficie de revolución:
 - Integrando respecto a x .
 - Integrando respecto a y .
- El lazo de $9y^2 = x(3-x)^2$ gira alrededor del eje y . Halla el área de la superficie generada de este modo.

VII. Centro de masa de una barra

- *1. Una partícula se mueve en línea horizontal. Calcula la fuerza ejercida sobre ella si tiene la masa y la aceleración que se indican.
 - La masa es de 50 *slugs* y la aceleración de 5 *pies*².
 - La masa es de 80 *g* y la aceleración de 50 *cm*/*s*².
- En los siguientes ejercicios halla la masa total de la barra dada y el centro de masa correspondiente.
 - La barra tiene 20 *cm* de largo, y su densidad lineal en un punto a x *cm* de un extremo es de $(2x + 3)$ *kg*/*m*.
 - La barra tiene 9 *plg* de longitud y su densidad lineal en un punto a x *plg* de uno de sus extremos es de $(4x + 1)$ *slugs*/*plg*.
 - La barra tiene 12 *cm* de largo y la medida de su densidad lineal en un punto, es una función lineal de la medida de la distancia desde el extremo izquierdo de la barra. La densidad lineal en el extremo izquierdo es de 3 *g*/*cm* y en el extremo derecho de 4 *g*/*cm*. Determina la masa total de la barra.

- d) La medida de la densidad lineal en cualquier punto de una barra de 6 m de largo varía directamente con la distancia del punto a un punto externo en la línea de la barra y a 4 cm de un extremo, donde la densidad es de 3 kg/m .

NOTA: Los ejercicios marcados con * no se resuelven con el uso de una integral.

VIII. Centroides de una región plana

- * 1. Halla el centro de masa de las partículas cuyas masas son 1, 2 y 3 kg y están ubicadas en los puntos $(-1, 3)$, $(2, 1)$ y $(3, -1)$, respectivamente.
- * 2. La coordenada y del centro de masa de cuatro partículas es 5. Sus masas son 2, 5, 4 y $m\text{ slugs}$ y se hallan en los puntos $(3, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 20)$, $(2, -2)$, respectivamente. Encuentre m .
- * 3. Encuentra el centro de masa de las tres partículas, de igual masa, que se localizan en los puntos $(4, -2)$, $(-3, 0)$ y $(1, 5)$.
- 4. Halla el centroide de la región que tiene las fronteras indicadas.
 - a) La parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x .
 - b) La parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.
 - c) Las curvas $y = x^3$ y $y = 4x$ en el primer cuadrante.
 - d) Las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 2x - x^2$.
- 5. Encuentra el centro de masa de la lámina limitada por la parábola $2y^2 = 18 - 3x$ y el eje y , si la densidad de área en cualquier punto (x, y) es $\sqrt{6 - x}\text{ kg/m}^2$.
- 6. Si el centroide de la región limitada por la parábola $y^2 = 4px$ y la recta $x = a$ se encuentra en el punto $(p, 0)$, calcule el valor de a .
- 7. Utiliza el teorema de Pappus para hallar el centroide de la región limitada por una semicircunferencia y su diámetro.
- 8. Utiliza el teorema de Pappus para calcular el volumen de una esfera cuyo radio tiene r unidades.
- 9. Sea R la región limitada por la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x , emplee el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R alrededor de la recta $x - y = r$.

Integración en coordenadas paramétricas y polares

6.1. Coordenadas paramétricas

El movimiento de una partícula en el plano \mathbb{R}^2 se puede representar mediante el gráfico de una curva \mathcal{C} , donde las coordenadas $(x, y) \in \mathcal{C}$ representan la posición de la partícula en un instante t ; es decir, la posición de la partícula en un instante t se puede representar mediante las ecuaciones

$$x = x(t) \quad \text{e} \quad y = y(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la curva \mathcal{C} .

De forma más rigurosa, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.1.1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en I . Las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t) \quad \forall t \in I,$$

reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* y la variable t se denomina *parámetro*. El conjunto de puntos en el plano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t) \wedge y = g(t) : t \in I\}$$

se denomina *gráfica de las ecuaciones paramétricas* $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para $t \in I$; mientras que la reunión de las ecuaciones paramétricas con su gráfica se denomina *curva parametrizada en \mathbb{R}^2* o *curva plana*, usualmente denotada por \mathcal{C} . Si $I = [a, b]$, entonces:

- el punto de coordenadas $(f(a), g(a))$ se denomina *punto inicial* de la curva \mathcal{C}
- el punto de coordenadas $(f(b), g(b))$ se denomina *punto terminal* de la curva \mathcal{C}
- en el caso en que el punto inicial y terminal de la curva coincidan, decimos que la *curva \mathcal{C} es cerrada*
- si $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2))$ para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$, con $t_1 \neq t_2$, salvo tal vez para $t_1 = a$ y $t_2 = b$, decimos que *la curva es simple*.

EJEMPLO 6.1.1 Sea C la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$ e $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, con $a > 0$ fijo. Determina la ecuación cartesiana de la curva C y traza su gráfica en el plano \mathbb{R}^2 .

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} x = a \cos t \quad \wedge \quad y = a \sin t &\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación cartesiana de la curva C está dada por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, que corresponde a la ecuación de la circunferencia de radio a centrada en el origen (vea la figura 6.1). \square

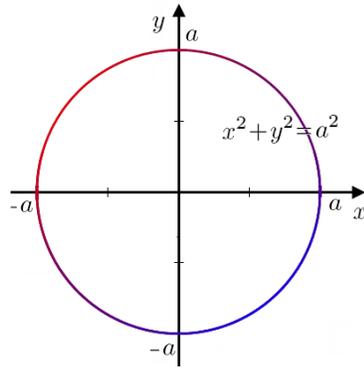


Figura 6.1. La gráfica de la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \cos t \wedge y = a \sin t\}$, con $a > 0$ fijo, es la circunferencia centrada de radio a centrada en el origen.

EJEMPLO 6.1.2 Sea C la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = t^2$ e $y = t^3$, $t \geq 0$. Determina la ecuación cartesiana de la curva C y traza su gráfica en el plano \mathbb{R}^2 .

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} x = t^2 \quad \wedge \quad y = t^3 &\Rightarrow t = y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación cartesiana de la curva C está dada por la ecuación $y = x^{\frac{3}{2}}$, con $x \geq 0$ (vea la figura 6.4). \square

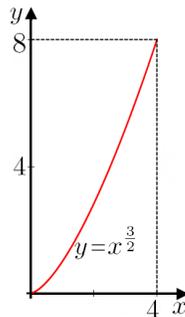


Figura 6.2. La gráfica de la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{1}{2}} = t \wedge y^{\frac{1}{3}} = t : t \geq 0\}$ es la gráfica de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$.

OBSERVACIÓN 6.1.1 Una ecuación cartesiana puede tener más de una representación paramétrica. Por ejemplo, tanto $x = t^2$ e $y = t^3$ (con $t \geq 0$), como $x = t^4$ e $y = t^6$ (con $t \geq 0$) representan a la curva de ecuación cartesiana $y = x^{\frac{3}{2}}$ (con $x \geq 0$).

EJEMPLO 6.1.3 Sea \mathcal{C} la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = \cosh(t)$ e $y = \sinh(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Determina la ecuación cartesiana de la curva \mathcal{C} y traza su gráfica en el plano \mathbb{R}^2 .

Solución. Recordemos que

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1,$$

de donde obtenemos la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1, \quad \text{con } x \geq 1,$$

pues $\cosh(t)$ tiene como imagen sólo a valores mayores o iguales que 1. \square

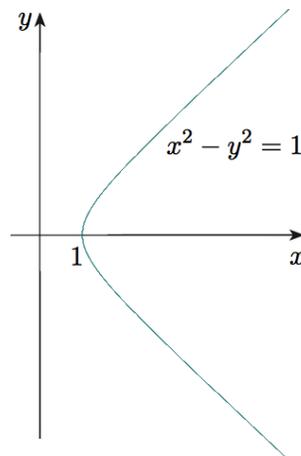


Figura 6.3. La gráfica de la curva $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cosh(t) \wedge y = \sinh(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es la gráfica de la curva $x^2 - y^2 = 1$ con $x \geq 1$.

EJEMPLO 6.1.4 Encuentra un conjunto de ecuaciones paramétricas que represente a la gráfica de la función $y = 1 - x^2$, usando el parámetro:

a) $t = x$

b) $m = \frac{dy}{dx}$, la pendiente de la gráfica en el punto (x, y) .

Solución.

- a) Si ponemos $x = t$, obtenemos $y = 1 - t^2$, constituyendo ambas ecuaciones las ecuaciones paramétricas de la función $y = 1 - x^2$ en este caso.

b) Notemos que

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x,$$

de donde obtenemos las ecuaciones $x = -\frac{m}{2}$ e $y = 1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$, que vienen a ser las ecuaciones paramétricas de la función $y = 1 - x^2$ en este caso. \square

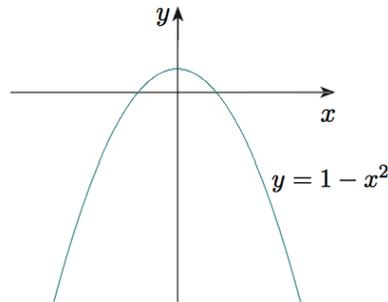


Figura 6.4. Gráfica de la curva $y = 1 - x^2$.

EJERCICIOS 6.1.1

1. Construye una tabla de valores y traza la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 1$ e $y = t + 1$, para $t \in [-2, 2]$, indicando su punto inicial y terminal, y si es simple y/o si es cerrada. Además, determina la ecuación cartesiana asociada a la curva.
2. Construye una tabla de valores y traza la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 1$ e $y = 1 - t$, para $t \in [-2, 2]$, indicando su punto inicial y terminal, y si es simple y/o si es cerrada. Además, determina la ecuación cartesiana asociada a la curva. ¿Es esta curva plana igual a la curva plana en la pregunta 1. previa? Justifica tu respuesta.
3. Construye una tabla de valores y traza la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = 3 \cos t$ e $y = 4 \sin t$, para $t \in [0, 2\pi]$, indicando su punto inicial y terminal, y si es simple y/o si es cerrada. Además, determina la ecuación cartesiana asociada a la curva.
4. Construye una tabla de valores y traza la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = a(t - \sin t)$ e $y = a(1 - \cos t)$, para $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ fijo. Esta curva es conocida como *cicloide*.

Para ver los Desarrollos de los Ejercicios 6.1.1 presiona aquí

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 6.1.1

- Para visitar un sitio web donde se encuentra una poderosa herramienta para trazar curvas paramétricas online, presiona aquí . En esta página web podrás obtener gráficas de curvas paramétricas en la forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$ y, de paso, chequear que aquellas curvas que has trazado estén correctas.

6.1.1. Pendientes y derivadas en coordenadas paramétricas

Estamos interesados en derivar funciones definidas paramétricamente. Para ello, observemos que la ecuación cartesiana de una curva \mathcal{C} definida paramétricamente por las ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $t \in [a, b]$, puede obtenerse considerando $y = h(x)$, donde $x = f(t)$ y $y = g(t) = h(f(t))$. En este caso, podemos obtener $y' = \frac{dy}{dx}$ como sigue:

$$\underbrace{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}_{\text{Regla de la Cadena}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

De igual forma, y siempre que sea posible, podemos encontrar

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{\frac{d(y'')}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

y así sucesivamente. Es decir, tenemos que

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\frac{d(y^{(n-1)})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{si } \frac{d(y^{(n-1)})}{dt} \text{ está bien definido y si } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

EJEMPLO 6.1.5 Encuentra la pendiente y la concavidad en el punto $(1, -1)$ de la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t}$ e $y = t^2 - 2$ para $t \in [0, +\infty[$.

Solución. Notemos en primer lugar que el punto $(1, -1)$ pertenece a la curva pues para $t = 1$ tenemos que $x(1) = \sqrt{1} = 1$ e $y(1) = (1)^2 - 2 = -1$. Además,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 4t^{\frac{3}{2}}.$$

Por lo tanto, la pendiente de la curva en $(1, -1)$ es

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 4.$$

También tenemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 12t.$$

Por lo tanto,

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \frac{1}{2} > 0,$$

que implica que la función es convexa (o cóncava hacia arriba). \square

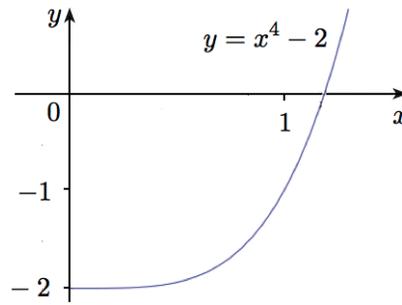


Figura 6.5. La gráfica de la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{t} \wedge y = t^2 - 2 : t \geq 0\}$ es la gráfica de la curva $y = x^4 - 2$ con $x \geq 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.1.1

- La curva plana de ecuaciones paramétricas $x = 2t - \pi \sin t$ e $y = 2 - \pi \cos t$, para $t \in \mathbb{R}$, es conocida como *cicloide alargada*. Determina los puntos de máximo y mínimo de la cicloide alargada, así como también las ecuaciones cartesianas de las rectas tangentes a la curva en los puntos donde ella se corta así misma.
- Encuentra, si es posible, la pendiente y la concavidad de la curva de ecuaciones paramétricas
 - $x = \sqrt{t}$ e $y = 3t - 1$, en el valor del parámetro $t = 1$
 - $x = \cos^3 t$ e $y = \sin^3 t$, en el valor del parámetro $t = \frac{\pi}{4}$
 - $x = (t + 2)(t + 1)$ e $y = 2t$, en el valor del parámetro $t = -1$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 6.1.1 presiona aquí **B**

6.2. Integración en coordenadas paramétricas: área de una región limitada por una curva parametrizada

Por simplicidad supondremos que $f \in C^1([a, b])$ es estrictamente creciente, de manera que $f(a) < f(b)$ y $f'(t) > 0$ para toda $t \in [a, b]$, y que $g \in C([a, b])$ es positiva. Entonces, poniendo $x = f(t)$ e $y = g(t)$, para $t \in [a, b]$, el área de la región \mathcal{R} bajo la curva $y = h(x)$, con $g = h \circ f$, queda determinada por la fórmula

$$A(\mathcal{R}) = \int_{f(a)}^{f(b)} h(x) dx = \int_a^b h(f(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $y = g(t) = h(f(t))$ y que $\frac{dx}{dt} = f'(t)$, obtenemos

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b g(t) f'(t) dt.$$

Más generalmente, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 6.2.1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, sean $f \in C^1([a, b])$ y $g \in C([a, b])$, y sea \mathcal{C} la curva paramétrica de ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$, para $t \in [a, b]$. Si \mathcal{C} es una curva simple para $t \in [a, b]$, entonces el área de la región \mathcal{R} limitada por la curva \mathcal{C} para $t \in [a, b]$, está dada por

$$A(\mathcal{R}) = \left| \int_a^b g(t) f'(t) dt \right|.$$

EJEMPLO 6.2.1 Determina el área de la región encerrada por la hipocicloide de tres ramas de ecuaciones paramétricas $x = 2 \sin t - \sin(2t)$ e $y = 2 \cos t + \cos(2t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Ponemos

$$f(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \quad \text{y} \quad g(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Luego,

$$f'(t) = 2 \cos t - 2 \cos(2t) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Además, notemos que la hipocicloide de tres ramas dada es una curva simple cerrada en $[0, 2\pi]$. Ahora calculamos el área $A(\mathcal{R})$ de la región \mathcal{R} encerrada por la cicloide:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \left| \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \cos(2t))(2 \cos t - 2 \cos(2t)) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 2 \cos^2(2t) - 2 \cos t \cos(2t)) dt \right| \\ &= \left| 2 \int_0^{2\pi} \left(2 \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) - \left(\frac{1 + \cos(4t)}{2} \right) - \cos^3 t + \sin^2 t \cos t \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos(2t) - \cos(4t) - 2 \cos t + 4 \sin^2 t \cos t) dt \right| \\ &= \left| \left(t + \sin(2t) - \frac{\sin(4t)}{4} - 2 \sin(t) + 4 \frac{\sin^3 t}{3} \right) \right|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

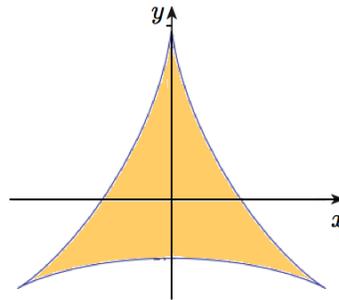


Figura 6.6. Gráfica de la hipocicloide de tres ramas de ecuaciones paramétricas $x = 2 \sin t - \sin(2t)$ e $y = 2 \cos t + \cos(2t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.2.1

1. Determina el área de la elipse de ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, para $t \in [0, 2\pi]$, con $a > 0$ y $b > 0$ fijos.
2. Expresa en términos integrales el área de la región en el primer cuadrante que se encuentra en el exterior de la astroide de ecuaciones paramétricas $x = 4 \cos^3 t$ e $y = 4 \sin^3 t$, y al interior de la circunferencia de ecuación $x = \sqrt{7} \cos t$ e $y = \sqrt{7} \sin t$.
3. Determina el área de la región limitada por un arco de la cicloide de ecuaciones paramétricas $x = 4(t - \sin t)$ e $y = 4(1 - \cos t)$ y el eje x .
4. Determina el área de una hipocicloide de ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t + 4 \cos(2t)$ e $y = 8 \sin t - 4 \sin(2t)$.
5. Determina el área bajo las siguientes curvas dadas en ecuaciones paramétricas:
 - a) $x = 4t^2$ e $y = 2t^3$ para $t \in [0, 2]$
 - b) $x = \tan t$ e $y = \sec^2 t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 6.2.1 presiona aquí **B**

6.3. Longitud de arco en coordenadas paramétricas

Recordemos que si $h \in C^1([\bar{a}, \bar{b}])$, entonces la longitud de arco ℓ de una curva de ecuación dada en coordenadas rectangulares

$$\mathcal{C} : y = h(x) \quad \forall x \in [\bar{a}, \bar{b}],$$

es igual a

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

donde $\frac{dy}{dx} = h'(x)$.

Si ahora consideramos $f, g \in C^1([a, b])$, nos interesa saber como calcular la longitud de arco ℓ de una curva dada en coordenadas paramétricas

$$\mathcal{C} : x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Nuestra idea aquí es aprovechar lo que ya sabemos. Por simplicidad, supondremos que $f, g \in C^1([a, b])$ son estrictamente crecientes, de manera que $f(a) < f(b)$, $f'(t) > 0$ y $g'(t) > 0$ para toda $t \in [a, b]$. Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = g'(t) \quad \forall t \in]a, b[.$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) \left(\frac{dt}{dx}\right)^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \left(\frac{dt}{dx}\right) dx.$$

Por lo tanto, la longitud de arco de la curva plana de ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ con $t \in [a, b]$ es

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{C}) &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

TEOREMA 6.3.1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $f, g \in C^1([a, b])$. La longitud ℓ la longitud de arco de la curva en coordenadas paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ desde $t = a$ hasta $t = b$, está dada por

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt.$$

EJEMPLO 6.3.1 Calcula la longitud de arco de la epicicloide de tres ciclos de ecuación paramétrica $x = 4 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(4t)$ e $y = 4 \cos t - \cos(4t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Sea \mathcal{C} la curva de ecuaciones paramétricas: $x = 4 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(4t)$ e $y = 4 \cos t - \cos(4t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces, la longitud de arco de la curva \mathcal{C} es

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{C}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(4 \cos t - 4 \cos(4t))^2 + (-4 \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen}(4t))^2} dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2(4t) + \operatorname{sen}^2(4t) - 2 \cos(t) \cos(4t) - 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(4t)} dt \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(3t)} dt \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{3}{2} t \right) \right| dt \\ &= 24 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen} \left(\frac{3}{2} t \right) dt \\ &= 16 \cos \left(\frac{3}{2} t \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= 32. \quad \square \end{aligned}$$

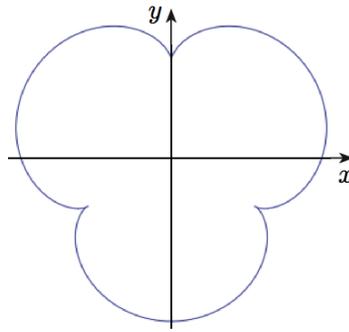


Figura 6.7. Gráfica de la epicloide de tres ciclos de ecuaciones paramétricas $x = 4 \sin t - \sin(4t)$ e $y = 4 \cos t - \cos(4t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.3.1

1. Calcula la longitud de arco de la astroide de ecuaciones paramétricas $x = 4 \cos^3 t$ e $y = 4 \sin^3 t$, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.
2. Calcula la longitud de arco de la curva de ecuaciones paramétricas $x = t^3 - 1$ e $y = t^2 + 1$, desde $t = -2$ hasta $t = 2$.
3. Calcula la longitud de arco de un ciclo completo de la cicloide de ecuaciones paramétricas $x = 3(1 - \sin t)$ e $y = 3(1 - \cos t)$, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.
4. Calcula la longitud de arco de la curva de ecuaciones paramétricas $x = 4t^2$ e $y = 2t^3$, desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 6.3.1 presiona aquí **B**

6.4. Coordenadas polares

El sistema de coordenadas polares en el plano se determina de la siguiente forma. Se fija un punto O llamado *origen* o *polo*, a partir del cual se traza un rayo inicial llamado *eje polar*. Ahora, dado un punto P del plano, se le asignan *coordenadas polares* (r, θ) , donde r es la distancia dirigida desde el punto P al polo O , y θ es el ángulo, dirigido en sentido antihorario, que se forma entre el eje polar y el segmento \overline{OP} .

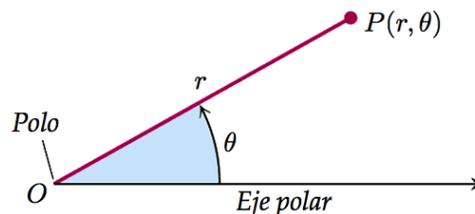


Figura 6.8. Coordenadas polares.

A diferencia del sistema de coordenadas rectangulares, en el sistema de coordenadas polares no todo punto tiene una única representación. De hecho, se tiene que:

- $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$,
- $(r, \theta) = (-r, \theta + (2k + 1)\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$,
- $O = (0, \theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 6.4.1 Considera el punto $P(3, \frac{\pi}{3})$ del plano polar. Determina Q en el plano polar tal que:

- a) es igual a P , pero teniendo radio negativo
- b) es opuesto a P respecto al polo
- c) es simétrico a P respecto al eje polar
- d) es simétrico a P respecto a la recta perpendicular al eje polar.

Solución. Tenemos,

- a) Podemos escoger $Q = (-3, \frac{\pi}{3} + \pi)$ (o más generalmente, $Q = (-3, \frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- b) Podemos escoger $Q = (3, \frac{\pi}{3} + \pi)$ (o más generalmente, $Q = (3, \frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- c) Podemos escoger $Q = (3, -\frac{\pi}{3})$ (o más generalmente, $Q = (3, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- d) Podemos escoger $Q = (3, \pi - \frac{\pi}{3})$ (o más generalmente, $Q = (3, (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{3})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.4.1

Para cada uno de los puntos $P_1(2, \frac{\pi}{4})$ y $P_2(-2, \frac{\pi}{6})$ del plano polar, determina respectivos puntos en el plano polar tales que:

- a) son iguales a P_i , pero teniendo radio con signo opuesto
- b) son opuestos a P_i respecto al polo
- c) son simétricos a P_i respecto al eje polar
- d) son simétricos a P_i respecto a la recta perpendicular al eje polar.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 6.4.1 presiona aquí **B**

6.4.1. Transformación o cambio de coordenadas

Podemos relacionar las coordenadas polares con las coordenadas rectangulares de la siguiente forma. Hacemos coincidir el Polo en coordenadas polares con el origen del plano cartesiano, y el eje polar con el eje de las abscisas (eje x). Luego, la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Además, sabemos que la pendiente de la recta que pasa por $(0, 0)$ y (x, y) nos permite establecer la relación

$$\tan \theta = \frac{y}{x},$$

y desde este hecho y las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos, podemos poner

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

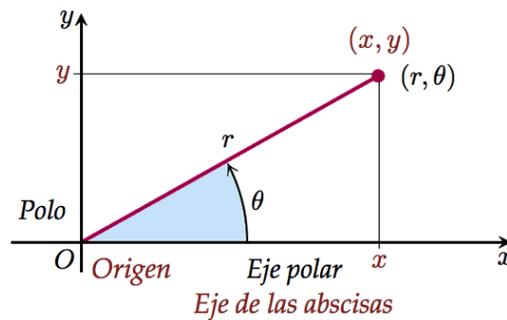


Figura 6.9. Relación entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares.

EJEMPLO 6.4.2 Transforma el punto $(3, \frac{\pi}{6})$ dado en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución. El punto $(3, \frac{\pi}{6})$ en coordenadas polares equivale en coordenadas rectangulares al punto

$$\left(3 \cos \frac{\pi}{6}, 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right). \quad \square$$

EJEMPLO 6.4.3 Transforma el punto $(-2, \frac{\pi}{4})$ dado en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución. El punto $(-2, \frac{\pi}{4})$ en coordenadas polares equivale en coordenadas rectangulares al punto

$$\left(-2 \cos \frac{\pi}{4}, -2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \quad \square$$

EJEMPLO 6.4.4 Transforma el punto $(-3, 3)$ dado en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Solución. Tenemos que $(-3, 3)$ está ubicado en el segundo cuadrante, así que

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{-3}\right) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

de donde obtenemos que el punto $(-3, 3)$ en coordenadas rectangulares equivale en coordenadas polares al punto

$$\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right). \quad \square$$

EJEMPLO 6.4.5 Transforma la ecuación $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ dada en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución. Notemos que si ponemos $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, entonces al multiplicar por r la ecuación se sigue que

$$r^2 = 3r \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3y.$$

Completando ahora un cuadrado de binomio, obtenemos que la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares está dada por

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

que corresponde a la circunferencia de radio $\frac{3}{2}$ y centro en $(0, \frac{3}{2})$. \square

EJEMPLO 6.4.6 Transforma la ecuación $2r \operatorname{sen} \theta - 3r \cos \theta = 2$ dada en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Solución. Notemos que si ponemos $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, entonces se sigue que

$$2r \operatorname{sen} \theta - 3r \cos \theta = 2 \Leftrightarrow 2y - 3x = 2,$$

que corresponde a la ecuación de una recta. \square

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.4.2

1. Escribe en coordenadas polares cada uno de los siguientes puntos dados en coordenadas rectangulares:

$$a) P(-1, 0) \quad b) P(2, -2) \quad c) P(-\sqrt{3}, 1).$$

2. Escribe en coordenadas rectangulares cada uno de los siguientes puntos dados en coordenadas polares:

$$a) P\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right) \quad b) P\left(1, -\frac{\pi}{6}\right) \quad c) P(0, -11\pi).$$

3. Escribe en coordenadas rectangulares cada una de las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas polares:

a) $r = \cos \theta$

b) $r = \frac{2}{\cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta}$

c) $r^2 = \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$

d) $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$

e) $r = \tan \theta$

f) $r = \frac{4}{1 - \cos \theta}$.

4. Escribe en coordenadas polares cada una de las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas rectangulares:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

d) $xy = 4$

e) $x = 5$

f) $x^2 + y^2 = 4 \left(\operatorname{arc} \tan \frac{y}{x} \right)^2$

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 6.4.2 presiona aquí **B**

6.5. Gráficas en coordenadas polares

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si ponemos

$$r = f(\theta) \quad \forall \theta \in D,$$

el conjunto

$$G = \{(f(\theta), \theta) \in \mathcal{P} : \theta \in D\},$$

donde \mathcal{P} es el plano polar, corresponde a la gráfica de $r = f(\theta)$ en coordenadas polares, que en coordenadas cartesianas corresponde al conjunto

$$G = \{(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \operatorname{sen} \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in D\}.$$

El conjunto G recibe el nombre de *gráfica polar de f* y la ecuación que la origina se denomina *ecuación polar de f* .

6.5.1. Intersecciones

Para trazar una curva polar, siempre es recomendable encontrar las intersecciones con la recta que contiene al eje polar y con la recta perpendicular al eje polar, cuando tales intersecciones existen. Una forma de proceder es la siguiente.

- Para estudiar las intersecciones con respecto a la recta que contiene al eje polar se calcula r para $\theta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Para estudiar las intersecciones con respecto a la recta perpendicular al eje polar se calcula r para $\theta = \frac{2k+1}{2}\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

6.5.2. Simetrías

Decimos que la gráfica polar es	
simétrica respecto a	si la ecuación polar no se altera, o se transforma en una ecuación equivalente cuando
el eje polar	a) se sustituye θ por $-\theta$, ó b) se sustituye θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$
el eje perpendicular a polar	a) se sustituye θ por $\pi - \theta$, ó b) se sustituye θ por $-\theta$ y r por $-r$
el polo	a) se sustituye θ por $\pi + \theta$, ó b) se sustituye r por $-r$

6.5.3. Extensión

- Si r es finito para todo $\theta \in \mathbb{R}$, entonces la curva $r = f(\theta)$ es cerrada.
- Si r es infinito para ciertos valores de θ , la curva no puede ser cerrada.
- Si r es complejo para ciertos valores de θ , entonces los correspondientes pares asociados (r, θ) no forman parte de la curva.
- Si la gráfica resulta cerrada es de utilidad determinar los valores de θ que den un valor máximo o mínimo para r , y ubicar estos pares en el plano polar.

6.5.4. Trazado de la gráfica

Para trazar una gráfica polar, es conveniente tener en cuenta las intersecciones, las simetrías y la extensión. Adicionalmente, conviene:

- Calcular algunos puntos relevantes para ángulos conocidos (por ejemplo para $\theta = \frac{k\pi}{3}$, con $k \in \mathbb{Z}$ y/o $\theta = \frac{k\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$). Para ello conviene tener en cuenta la circunferencia unitaria.

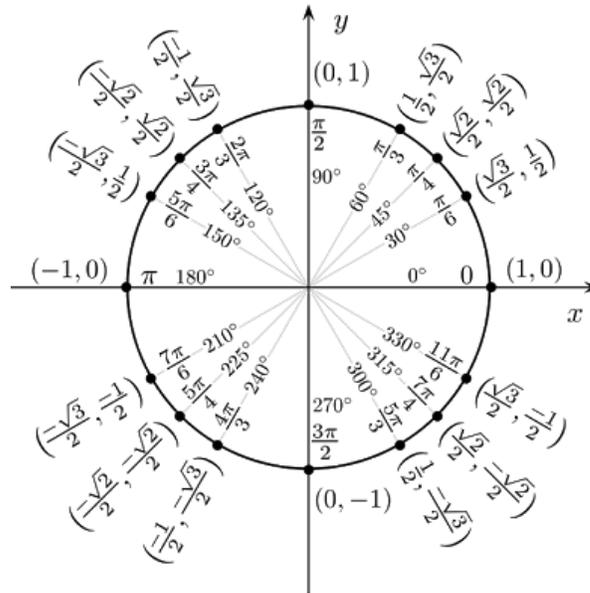


Figura 6.10. Circunferencia unitaria con puntos de la forma $(\cos \theta, \text{sen } \theta)$.

- Trazar la curva mediante la unión *continua* de los puntos determinados en el ítem anterior, chequeando que se verifican las intersecciones, las simetrías y la extensión.
- Adicionalmente, cuando sea fácil, transformar la ecuación polar en una rectangular, y chequear que la curva rectangular es la misma que la polar.
- Es recomendable conocer distintos tipos de ecuaciones y gráficas polares tales como rosas, caracoles (caracoles con lazo interior, cardioides, caracoles con hoyuelo, caracoles convexos), espirales, lemniscatas, rectas, secciones cónicas (circunferencias, parábolas, elipses, hipérbolas), concoides de Nicomedes, cisoides de Diocles, nefroides de Freeth.

RECURSOS MULTIMEDIA (ES NECESARIA UNA CONEXIÓN A INTERNET) 6.5.1

- Para visitar un sitio web donde se encuentra una poderosa herramienta para trazar curvas polares online, presiona aquí [✓](#). En esta página web podrás escribir una curva polar en la forma $r = f(\theta)$ en un intervalo de θ que estimes conveniente y, de paso, chequear que aquellas curvas que has trazado estén correctas.

Rosas

En general, las rosas provienen de curvas de la forma

$$r = a \text{sen}(n\theta) \quad \text{ó} \quad r = a \text{cos}(n\theta),$$

con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se verifica que:

- Si n es par, entonces $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$. En este caso la rosa tendrá $2n$ pétalos.
- Si n es impar y mayor que 1, entonces $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$. En este caso la rosa tendrá n pétalos.
- $|a|$ indica la máxima distancia desde un punto de la curva hasta el polo.
- Si $a > 0$ y $r = a \operatorname{sen}(n\theta)$, con n impar, entonces la rosa tendrá un pétalo hacia abajo si $n = 3 + 4k$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o hacia arriba si $n = 5 + 4k$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; en ambos casos con eje de simetría la recta perpendicular al eje polar.
- Si $a < 0$ y $r = a \operatorname{sen}(n\theta)$, con n impar, entonces la rosa tendrá un pétalo hacia arriba si $n = 3 + 4k$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o hacia abajo si $n = 5 + 4k$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; en ambos casos con eje de simetría la recta perpendicular al eje polar.
- Si $a > 0$ y $r = a \operatorname{sen}(n\theta)$, n par, entonces la rosa tendrá igual cantidad de pétalos en cada cuadrante, y ninguno ubicado en el eje polar ni tampoco en la recta perpendicular al eje polar.
- Si $a > 0$ y $r = a \operatorname{cos}(n\theta)$, n impar, entonces la rosa tendrá un pétalo hacia la derecha sobre el eje polar y eje de simetría el eje polar.
- Si $a < 0$ y $r = a \operatorname{cos}(n\theta)$, n impar, entonces la rosa tendrá un pétalo hacia la izquierda sobre el eje polar y eje de simetría el eje polar.
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $r = a \operatorname{cos}(n\theta)$, n par, entonces la rosa tendrá dos pétalos opuestos por el polo en el eje polar, otros dos pétalos opuestos por el polo sobre la recta perpendicular al eje polar, y el resto de los pétalos, de haberlos, a repartir equitativamente en cada cuadrante.

EJEMPLO 6.5.1 (Rosa de 3 pétalos) Traza la gráfica de la curva $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$.

Solución. Usamos la simetría respecto al eje perpendicular al eje polar (en el origen) y el hecho que se trata de una rosa de tres pétalos, junto a una apropiada tabla de valores, para obtener

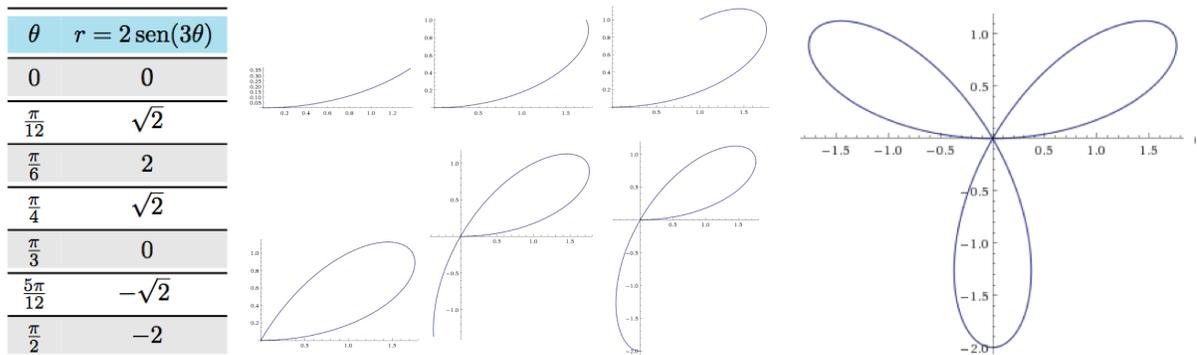


Figura 6.11. Rosa de tres pétalos de ecuación $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$.

Caracoles

En general, los caracoles provienen de curvas de la forma

$$r = a + b \operatorname{sen} \theta \quad \text{ó} \quad r = a + b \operatorname{cos} \theta,$$

con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se verifica que:

- Si $|a| < |b|$ decimos que el caracol es un *caracol con lazo interior*
- Si $|a| = |b|$ decimos que el caracol es una *cardioide*
- Si $|b| < |a| < 2|b|$ decimos que el caracol es un *caracol con hoyuelo*
- Si $|a| \geq 2|b|$ decimos que el caracol es un *caracol convexo*
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b > 0$ y $r = a + b \operatorname{sen} \theta$, entonces se tratará de un caracol apuntando hacia arriba que tendrá como eje de simetría a la recta perpendicular al eje polar
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b < 0$ y $r = a + b \operatorname{sen} \theta$, entonces se tratará de un caracol apuntando hacia abajo que tendrá como eje de simetría a la recta perpendicular al eje polar
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b > 0$ y $r = a + b \operatorname{cos} \theta$, entonces se tratará de un caracol apuntando hacia la derecha que tendrá como eje de simetría al eje polar
- Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b < 0$ y $r = a + b \operatorname{cos} \theta$, entonces se tratará de un caracol apuntando hacia la izquierda que tendrá como eje de simetría al eje polar.

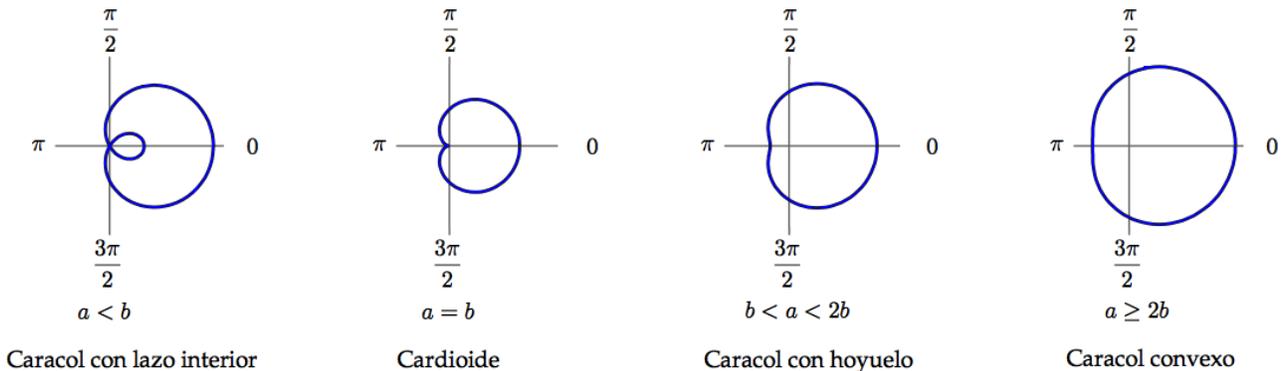


Figura 6.12. Clasificación de caracoles en coordenadas polares, donde sólo se han trazado aquellos de la forma $r = a + b \operatorname{cos} \theta$, con $a > 0$ y $b > 0$.

EJEMPLO 6.5.2 (Cardioide) Traza la gráfica de la curva $r = 2(1 - \operatorname{cos} \theta)$.

Solución. Usamos la simetría respecto al eje polar y el hecho que sabemos que se trata de una cardioide, junto a una apropiada tabla de valores, para obtener

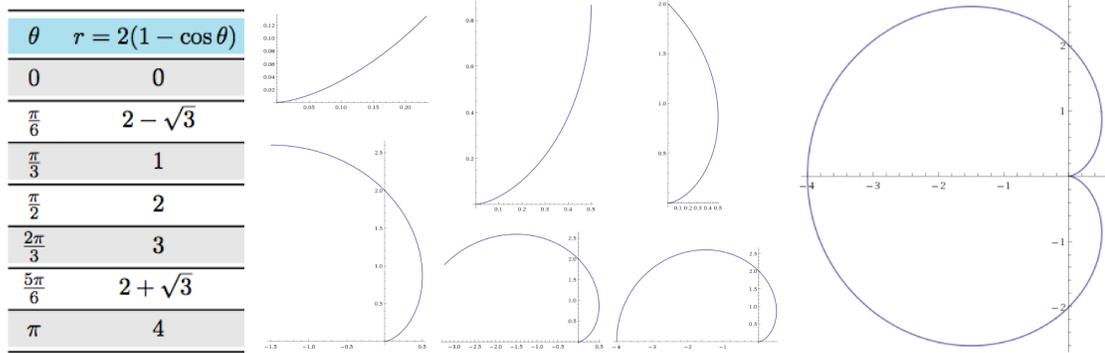


Figura 6.13. Trazado de la cardioide $r = 2(1 - \cos \theta)$.

Espirales

En general, las espirales provienen de curvas de la forma

$$r = a + b\theta^q,$$

con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}^+$. Se verifica que:

- En el caso $q = 1$, la espiral es usualmente denominada *espiral de Arquímedes*.
- Si $r = a + b\theta^q$ es complejo, el par (r, θ) correspondiente no es parte de la gráfica.
- Si $r = a + b\theta^q$ es real para todo $\theta \leq 0$, entonces la espiral tiene dos ramas, una para $\theta \geq 0$, y otra para $\theta \leq 0$.
- Una rama de espiral, en caso que exista, tiene punto de inicio el punto $(a, 0)$.

EJEMPLO 6.5.3 (Espiral) Traza la gráfica de la curva $r = \theta$, $\theta \geq 0$

Solución. Usamos el hecho que sabemos que se trata de una espiral, junto a una apropiada tabla de valores, para obtener

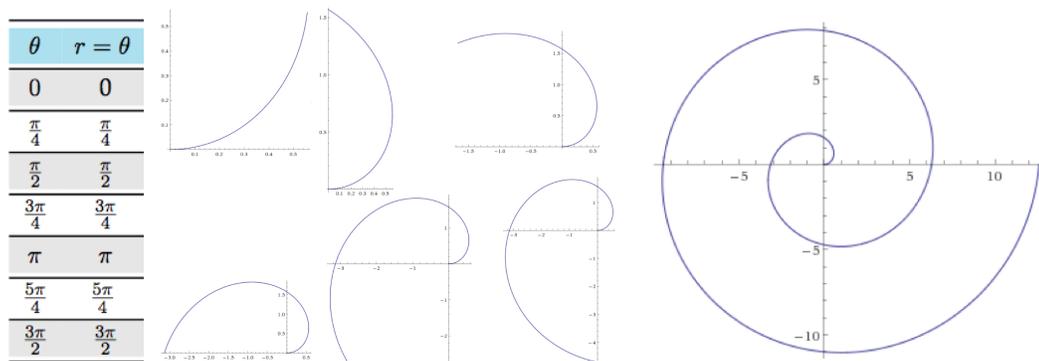


Figura 6.14. Trazado de la espiral $r = \theta$.

Lemniscatas

En general, las lemniscatas provienen de curvas de la forma

$$r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta) \quad \text{ó} \quad r^2 = a^2 \operatorname{cos}(2\theta),$$

con $a > 0$. Se verifica que:

- Si $r = \pm a\sqrt{\operatorname{cos}(2\theta)}$ es complejo, entonces el par (r, θ) correspondiente no es parte de la gráfica $r^2 = a^2 \operatorname{cos}(2\theta)$.
- Si $r = \pm a\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}$ es complejo, entonces el par (r, θ) correspondiente no es parte de la gráfica $r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta)$.
- Si $r^2 = a^2 \operatorname{cos}(2\theta)$, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje polar.
- Si $r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta)$, entonces la gráfica es simétrica respecto al polo.

EJEMPLO 6.5.4 (Lemniscata) Traza la gráfica de la curva $r^2 = 4 \operatorname{sen}(2\theta)$.

Solución. Usamos la simetría respecto al origen y el hecho que se trata de una lemniscata, junto a una apropiada tabla de valores, para obtener

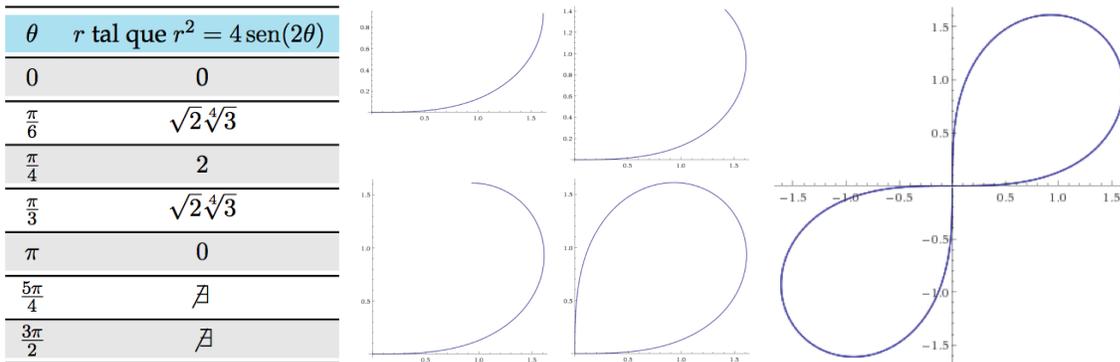


Figura 6.15. Trazado de la lemniscata $r^2 = 4 \operatorname{sen}(2\theta)$.

Rectas y secciones cónicas

- Una ecuación de recta en coordenadas polares tiene la forma

$$ar \operatorname{cos} \theta + br \operatorname{sen} \theta = c,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con al menos uno de los dos valores no nulo, y $c \in \mathbb{R}$.

- Una ecuación de circunferencia en coordenadas polares tiene la forma

$$r = a \cos \theta \quad , \quad r = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{ó} \quad r = a,$$

donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La forma $r = a \cos \theta$ representa en coordenadas rectangulares a la circunferencia de centro $(\frac{a}{2}, 0)$ y radio $|a|$, mientras que $r = a \operatorname{sen} \theta$ representa en coordenadas rectangulares a la circunferencia de centro $(0, \frac{a}{2})$ y radio $|a|$. La forma $r = a$ representa en coordenadas rectangulares a la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $|a|$.

- Una ecuación de elipse en coordenadas polares tiene la forma

$$r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \cos \theta} \quad \text{ó} \quad r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \operatorname{sen} \theta},$$

donde $p > 0$ y $0 < \epsilon < 1$. La forma $r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \cos \theta}$ representa en coordenadas rectangulares a una elipse de excentricidad ϵ , con un foco en $(0, 0)$ y correspondiente directriz en la recta $x = \pm p$; mientras que la forma $r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \operatorname{sen} \theta}$ representa en coordenadas rectangulares a una elipse de excentricidad ϵ , con un foco en $(0, 0)$ y correspondiente directriz en la recta $x = \pm p$.

- Una ecuación de parábola en coordenadas polares tiene la forma

$$r = \frac{p}{1 \pm \cos \theta} \quad \text{ó} \quad r = \frac{p}{1 \pm \operatorname{sen} \theta},$$

donde $p > 0$. La forma $r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \cos \theta}$ representa en coordenadas rectangulares a una parábola con foco en $(0, 0)$ y directriz en la recta $x = \pm p$; mientras que la forma $r = \frac{p}{1 \pm \operatorname{sen} \theta}$ representa en coordenadas rectangulares a una parábola con foco en $(0, 0)$ y directriz en la recta $x = \pm p$.

- Una ecuación de hipérbola en coordenadas polares tiene la forma

$$r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \cos \theta} \quad \text{ó} \quad r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \operatorname{sen} \theta},$$

donde $p > 0$ y $\epsilon > 1$. La forma $r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \cos \theta}$ representa en coordenadas rectangulares a una hipérbola de excentricidad ϵ , con un foco en $(0, 0)$ y correspondiente directriz en la recta $x = \pm p$; mientras que la forma $r = \frac{\epsilon p}{1 \pm \epsilon \operatorname{sen} \theta}$ representa en coordenadas rectangulares a una hipérbola de excentricidad ϵ , con un foco en $(0, 0)$ y correspondiente directriz en la recta $x = \pm p$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.5.1

Justificando apropiadamente, traza la gráfica de las siguientes curvas, señalando claramente donde se producen las intersecciones

a) $r = \sqrt{3} \cos \theta$ y $r = \operatorname{sen} \theta$

b) $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

c) $r = 2 \cos(2\theta)$ y $r = 1$

d) $r = 2 \cos \theta$ y $r^2 = 4 \cos(2\theta)$.

Para ver las Soluciones de los Ejercicios 6.5.1 presiona aquí **B**

6.5.5. Pendientes y rectas tangentes a curvas en coordenadas polares

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\text{int}(D)$. Como la relación entre coordenadas polares y rectangulares está dada por

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta),$$

al poner

$$r = f(\theta) \quad \forall \theta \in D,$$

los puntos de la gráfica polar en coordenadas rectangulares quedarán determinados por

$$(x, y) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \operatorname{sen} \theta) \quad \forall \theta \in D.$$

De esta forma, para calcular la pendiente en un punto de la gráfica, calculando primero

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta}$$

y luego evaluando en el valor θ correspondiente.

OBSERVACIÓN 6.5.1 Es conveniente observar lo siguiente:

- Si $\frac{dy}{d\theta} = 0$ y $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$, entonces la gráfica polar de f tiene una recta tangente que es horizontal (o bien, paralela al eje polar).
- Si $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ y $\frac{dx}{d\theta} = 0$, entonces la gráfica polar de f tiene una recta tangente que es vertical (o bien, perpendicular al eje polar).
- Si $\frac{dy}{d\theta} = 0$ y $\frac{dx}{d\theta} = 0$, entonces no se puede concluir nada acerca de posibles rectas tangentes a la gráfica polar de f .

EJEMPLO 6.5.5 Determina la pendiente de la recta tangente a la cardioide $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{6})$.

Solución. Notemos que $(1, \frac{\pi}{6})$ pertenece a la gráfica polar de f , con $f(\theta) = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$. Además,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + 2(1 - \operatorname{sen} \theta) \cos \theta}{-2 \cos \theta \cos \theta - 2(1 - \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta'}$$

de donde obtenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{-2 \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + 2(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{6}}{-2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - 2(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} = \frac{-2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} + 2(1 - \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{3}}{2}}{-2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2(1 - \frac{1}{2}) \frac{1}{2}} = \frac{0}{-2} = 0. \quad \square$$

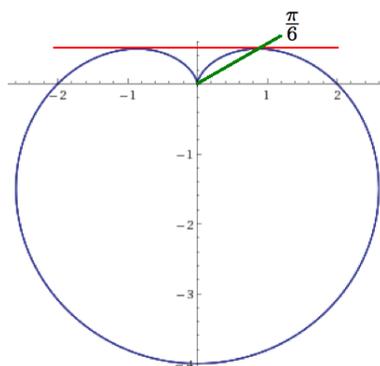


Figura 6.16. La pendiente de la cardioides $r = 2(1 - \text{sen } \theta)$ en el punto $(1, \frac{\pi}{6})$ es 0.

EJEMPLO 6.5.6 Determina en coordenadas polares las ecuaciones de las rectas tangentes en el polo a la curva $r = \cos(3\theta)$.

Solución. Notemos que $(0, \frac{\pi}{6})$ pertenece a la gráfica polar de f , con $f(\theta) = \cos(3\theta)$. Además,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-3 \text{sen}(3\theta) \text{sen } \theta + \cos(3\theta) \cos \theta}{-3 \text{sen}(3\theta) \cos \theta - \cos(3\theta) \text{sen } \theta'}$$

de donde obtenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{-3 \text{sen } \frac{\pi}{2} \text{sen } \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6}}{-3 \text{sen } \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{2} \text{sen } \frac{\pi}{6}} = \frac{-3 \frac{1}{2} + 0 \frac{\sqrt{3}}{2}}{-3 \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

También, tenemos que $(0, \frac{\pi}{2})$ pertenece a la gráfica polar de f y en este caso

$$\left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -3 \text{sen } \frac{3\pi}{2} \text{sen } \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -3(-1) + 0 = 3$$

y

$$\left. \frac{dx}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -3 \text{sen } \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \text{sen } \frac{\pi}{2} = -3(-1)0 - 0 = 0.$$

De esta forma, tomando en cuenta las simetrías de la curva, concluimos que las rectas tangentes a la curva en el polo son las rectas radiales

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \theta = -\frac{\pi}{6}. \quad \square$$

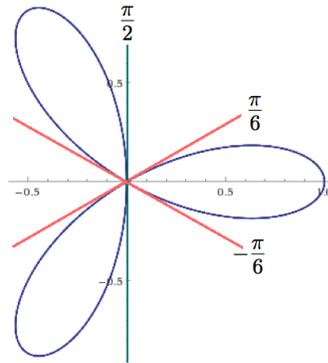


Figura 6.17. Las rectas tangentes a la rosa de 3 pétalos $r = \cos(3\theta)$ en el polo son las rectas radiales $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

6.6. Integración en coordenadas polares: área de una región polar

En primer lugar, conviene recordar que el área de un sector circular S de radio r y ángulo θ , medido en radianes, está dada por

$$A(S) = \frac{1}{2}\theta r^2.$$

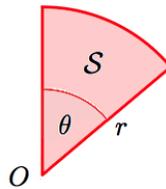


Figura 6.18. El sector circular S tiene área $A(S) = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Ahora, sea $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa, y pongamos

$$r = f(\theta).$$

Estamos interesados en obtener el área de la región \mathcal{R} limitada por la gráfica de la función f y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.

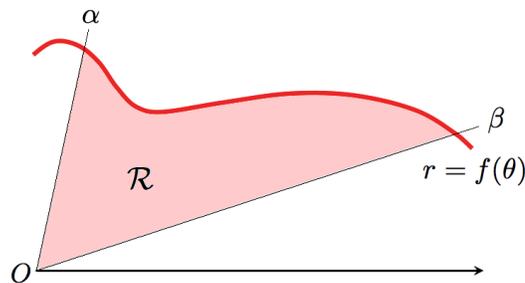


Figura 6.19. El sector circular S tiene área $A(S) = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Para lograr nuestro objetivo, consideramos una partición $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ del intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de igual longitud, a saber

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta,$$

con

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1} = \frac{\beta - \alpha}{n} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

y los puntos

$$\omega_i = \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

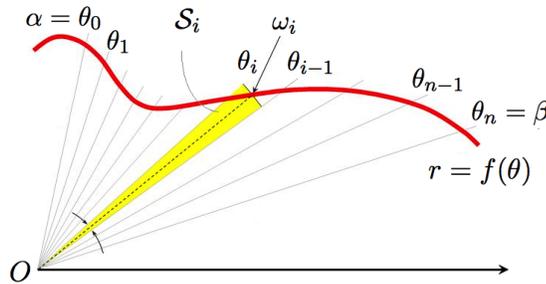


Figura 6.20. Partición de la región \mathcal{R} y elección de sectores circulares $\mathcal{S}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ que aproximan a las subregiones generadas por la partición.

Notemos que el área de cada sector circular \mathcal{S}_i de radio $r = f(\omega_i)$ y ángulo $\theta_i - \theta_{i-1}$ está dada por

$$A(\mathcal{S}_i) = \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})(f(\omega_i))^2 = \frac{1}{2}(f(\omega_i))^2 \Delta\theta_i.$$

Luego, aproximamos el área de la región \mathcal{R} por medio de la suma de las áreas de los n sectores circulares \mathcal{S}_i .

$$A(\mathcal{R}) \approx \sum_{i=1}^n A(\mathcal{S}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(\omega_i))^2 \Delta\theta_i.$$

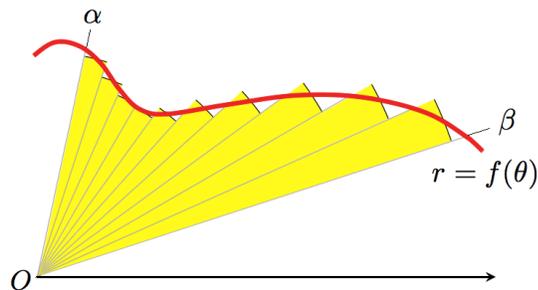


Figura 6.21. Aproximación del área de la región \mathcal{R} mediante la suma de las áreas de los sectores circulares $\mathcal{S}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

La aproximación será más precisa mientras más elementos tenga la partición con las características que hemos considerado. Por lo tanto, es razonable esperar que

$$A(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(\omega_i))^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta.$$

TEOREMA 6.6.1 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ y sea $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa. Entonces el área de la región \mathcal{R} acotada por la gráfica polar de f , $r = f(\theta)$, con $\theta \in [\alpha, \beta]$ y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$A(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta.$$

EJEMPLO 6.6.1 Calcula el área de la región acotada por la rosa $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$.

Solución. La rosa $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$ tiene tres pétalos de igual área, por lo que, para obtener el área de la región \mathcal{R} correspondiente a la región acotada por la rosa, bastará con calcular el área determinada por un pétalo y multiplicarla por tres. Notemos que si ponemos $f(\theta) = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$, y consideramos $(0, 0)$ como el punto de inicio del trazado de la gráfica polar de f , entonces el siguiente punto donde el radio se vuelve a anular es en $(0, \frac{\pi}{3})$.

Por lo tanto, el área de solicitada es

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \operatorname{sen}(3\theta))^2 d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos(6\theta)}{2} d\theta \\ &= 6 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(6\theta)}{12} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \pi. \quad \square \end{aligned}$$

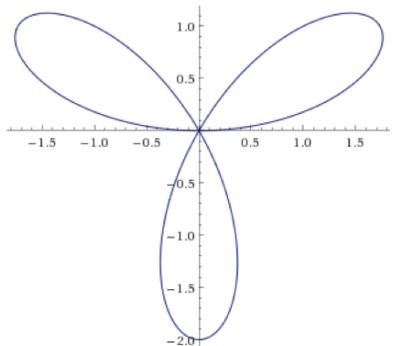


Figura 6.22. Rosa de tres pétalos de ecuación $r = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$.

TEOREMA 6.6.2 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ y sean $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(\theta) \geq g(\theta)$ para cada $\theta \in [\alpha, \beta]$. Entonces el área de la región \mathcal{R} entre las gráficas polares de f y g , $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, con $\theta \in [\alpha, \beta]$ y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$A(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ((f(\theta))^2 - (g(\theta))^2) d\theta.$$

EJEMPLO 6.6.2 Calcula el área de la región acotada exterior a la curva $r = 2$ e interior a la curva $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$.

Solución. En primer lugar, intersectemos ambas curvas (se trata de la circunferencia $r = 2$ y el caracol con hoyuelo $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$).

$$3 + 2 \operatorname{sen} \theta = 2 \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(-\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \vee \theta = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.$$

Además, notemos que

$$3 + 2 \operatorname{sen} \theta \geq 2 \quad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right].$$

Por lo tanto, el área de solicitada es

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} ((3 + 2 \operatorname{sen} \theta)^2 - 2^2) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (5 + 12 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(5\theta - 12 \cos \theta + 4 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \\ &= 11 \frac{\sqrt{3}}{2} + 14 \frac{\pi}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

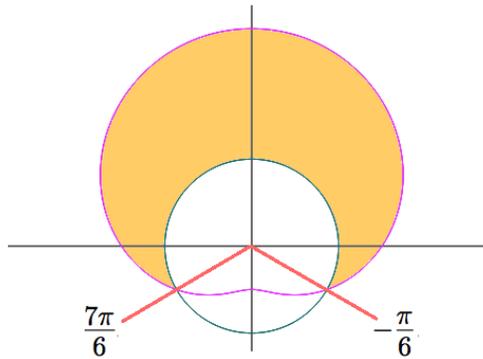


Figura 6.23. Región acotada exterior a la circunferencia $r = 2$ e interior al caracol con hoyuelo $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$.

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.6.1

1. Encuentra el área de la región limitada por las curvas $r = 3 \operatorname{sen}(3\theta)$ y $r = 2 \operatorname{sen} \theta$, que está en el interior de ambas curvas
2. Encuentra el área de la región limitada por las curvas $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ y $r = -4 \operatorname{cos} \theta$, que está en el interior de ambas curvas
3. Encuentra el área de la región que está ubicada en el interior de la circunferencia $r = 6 \operatorname{sen} \theta + 8 \operatorname{cos} \theta$ y en el exterior de la lemniscata $r^2 = 16 \operatorname{cos}(2\theta)$
4. Encuentra el área de la región que está ubicada en el interior de la circunferencia $r = 1$ y en el exterior de la cardioide $r = 1 - \operatorname{cos} \theta$
5. Encuentra el área de un pétalo de la curva rosa dada por $r = \operatorname{sen}(3\theta)$
6. Encuentra el área de la región ubicada dentro del caracol con lazo interior $r = 1 - 2 \operatorname{cos} \theta$ que está fuera de la región encerrada por su lazo interior
7. Hallar el área de la región ubicada al interior de la cardioide $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$ circunferencia $r = 6 \operatorname{sen} \theta$.

Para ver las Soluciones de algunos de los Ejercicios Propuestos 6.6.1 presiona aquí **B**

6.7. Longitud de arco en coordenadas polares

Recordemos que si $h \in C^1([a, b])$, entonces la longitud de arco ℓ de una curva de ecuación dada en coordenadas rectangulares

$$\mathcal{C} : y = h(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

es igual a

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

donde $\frac{dy}{dx} = h'(x)$.

Si ahora consideramos $f \in C^1([\alpha, \beta])$, nos interesa saber como calcular la longitud de arco ℓ de una curva dada en coordenadas polares

$$\mathcal{C} : r = f(\theta) \quad \forall \theta \in [\alpha, \beta].$$

Nuestra idea aquí es aprovechar lo que ya sabemos y proceder de la siguiente forma. Ponemos

$$x = x(\theta) = f(\theta) \operatorname{cos} \theta \quad \text{e} \quad y = y(\theta) = f(\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

Luego,

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta$$

y

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right) \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 \\ &= ((f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2) (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 \\ &= ((f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2) \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} \left(\frac{d\theta}{dx}\right) dx.$$

Por lo tanto, la longitud de arco en coordenadas polares de la curva $r = f(\theta)$ con $\theta \in [\alpha, \beta]$ es

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

TEOREMA 6.7.1 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sea $f \in C^1([\alpha, \beta])$. La longitud ℓ de la curva polar $\mathcal{C} : r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, está dada por

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

EJEMPLO 6.7.1 Calcula la longitud de arco de la curva $r = R \operatorname{sen} \theta$ para $\theta \in [0, 2\pi]$, donde $R > 0$ está fijo.

Solución. Sea $\mathcal{C} : r = R \operatorname{sen} \theta$ para $\theta \in [0, 2\pi]$. Entonces,

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R \operatorname{sen} \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R.$$

Notemos que el trazado de la curva comienza en $(0, 0)$ y recorre dos veces la circunferencia que en el plano cartesiano tiene centro $(0, \frac{R}{2})$ y radio $\frac{R}{2}$. \square

EJERCICIOS PROPUESTOS 6.7.1

1. Determina la longitud del segmento de la espiral $r = e^{-\theta}$, comprendido entre $\theta = 0$ y $\theta = 3\pi$.
2. Determina la longitud de la cardioide de ecuación $r = 2(1 - \cos \theta)$
3. Determina la longitud del arco de la curva $r = 3 \cos \theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

Para ver las Soluciones de algunos de los Ejercicios Propuestos 6.7.1 presiona aquí **B**

Desarrollos de los Ejercicios

Para volver a los ejercicios del capítulo y sección respectiva, presiona sobre el trío de letras y/o números en rojo correspondiente.

Desarrollos de los Ejercicios 1.1.1

a) Como ya sabemos: $\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$ y $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)\right) = x + 1$. Luego,

$$\int (x + 1) dx = \frac{1}{2}(x^2 + 2x). \quad \square$$

b) Sabemos que $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ y $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \operatorname{sen} x$. Luego,

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x. \quad \square$$

c) Sabemos que $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ y que $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$. Luego, por regla de la cadena, poniendo $u(x) = x^4$, obtenemos que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4} \arctan u(x)\right) = \frac{1}{1+(u(x))^2} u'(x)$ de donde obtenemos que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4} \arctan(x^4)\right) = \frac{x^3}{1+x^8}$

Desarrollos de los Ejercicios 1.1.2

$$\begin{aligned} 1. \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) dx &= \int ((\sec^2 x - 1) + (\csc^2 x - 1) + 2) dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\ &= \tan x - \cot x + c. \quad \square \end{aligned}$$

2. $y = y(x)$ implica que $y' = \frac{dy}{dx} = 4x - 5$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto x cualquiera. Luego,

$$dy = (4x - 5) dx \Rightarrow \int dy = \int (4x - 5) dx = 2x^2 - 5x + c.$$

Por otro lado, como la curva contiene al punto $(3, 7)$, se sigue que

$$\begin{aligned} y(3) = 7 &\Leftrightarrow 7 = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + c \\ &\Leftrightarrow 7 = 18 - 15 + c \\ &\Leftrightarrow c = 4. \end{aligned}$$

\therefore La ecuación de la curva es $y = 2x^2 - 5x + 4$. \square

Desarrollos de los Ejercicios 1.2.1

$$a) \quad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \Rightarrow -du = \operatorname{sen} x dx$$

$$\Rightarrow I = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + c = -\ln(\cos x) + c. \quad \square$$

$$b) \quad u = 3 - 2x \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow -\frac{1}{2} du = x dx$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} u^{-2} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3-2x)^2} + c. \quad \square$$

$$c) \quad u = a^2 + b^2 x^2 \Rightarrow du = 2b^2 x dx \Rightarrow \frac{1}{2b^2} du = x dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2b^2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2b^2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{1}{3b^2} (a^2 + b^2 x)^{3/2} + c. \quad \square$$

$$d) \quad u = 1 + z^2 \Rightarrow du = 2z dz \Rightarrow \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{z dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+z^2} + c. \quad \square$$

Desarrollos de los Ejercicios 1.2.2

$$a) \quad \begin{cases} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{cases} \Rightarrow I = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c. \quad \square$$

$$b) \quad \begin{cases} u = xe^x & dv = \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ du = e^x(x+1) dx & v = \frac{-1}{(1+x)} \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{xe^x}{(1+x)} + \int \frac{(x+1)e^x}{(x+1)} dx$$

$$= -\frac{xe^x}{(1+x)} + e^x + c. \quad \square$$

$$c) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \quad dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad v = x \end{array} \Rightarrow I = x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I_1} \right\} (*)$$

Notemos que, para I_1

$$\begin{aligned} \bar{u} = 1 - x^2 &\Rightarrow d\bar{u} = -2x dx \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} d\bar{u} = x dx \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{d\bar{u}}{\bar{u}^{1/2}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\bar{u}^{1/2} = -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Luego, desde (*) tenemos

$$I = x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \sqrt{1-x^2} + c. \quad \square$$

Desarrollos de los Ejercicios 2.5.1

a) Sea $f(x) = x$ en un intervalo $[a, b]$, y sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Entonces

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} x = x_k \quad \wedge \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} x = x_{k-1} \quad \wedge \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} x_{k-1} < \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) < x_k & \quad / \cdot \Delta x_k \Rightarrow x_{k-1} \cdot \Delta x_k < \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) < x_k \Delta x_k \\ \Rightarrow m_k \Delta x_k < \frac{1}{2}(x_k^2 - x_{k-1}^2) < M_k \Delta x_k. \end{aligned}$$

Luego,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) < \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S(f, \mathcal{P}). \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, directamente podemos realizar el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) &= \frac{1}{2} \left((x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \dots + (x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) + (x_n^2 - x_{n-1}^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

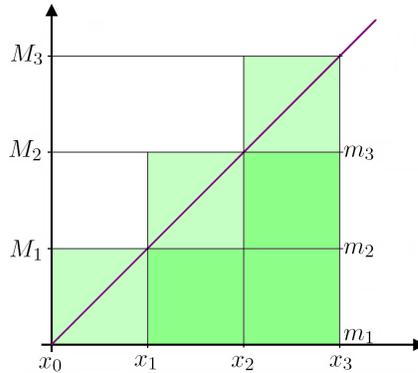


Figura A.1. Función $f(x) = x$ en $[a, b]$, con $a \geq 0$.

Ahora, para simplificar nuestra demostración, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = 0$, y escogemos la siguiente la siguiente partición del intervalo $[0, b]$: fijamos $n \in \mathbb{N}$ y ponemos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{b}{n}, \quad x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}, \quad x_n = b; \quad \mathcal{P}_n = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}.$$

Entonces, para cada $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tenemos que

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} x = x_k = \frac{kb}{n} \quad \wedge \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = x_{k-1} = \frac{(k-1)b}{n} \quad \wedge \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b}{n}.$$

Luego,

$$S(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k = b^2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{(n+1)}{n},$$

$$s(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k = b^2 \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)}{n^2} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n 1 = b^2 \left(\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n}{n^2} \right)$$

$$= \frac{b^2}{2} \frac{(n+1)}{n} - \frac{b^2}{n}.$$

De esta forma, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b^2}{2} \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{P}_n) = \frac{b^2}{2}.$$

Desde (A.1) se sigue que

$$\int_0^b x \, dx = \overline{\int_0^b x \, dx} = \frac{b^2}{2}.$$

$$\therefore \int_0^b f(x) \, dx = \frac{b^2}{2}. \quad \square$$

b) En general, se prueba que si $b \geq a \geq 0$, entonces

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Basta notar que

$$x_{k-1}^n < \frac{1}{n+1} (x_k^n + x_k^{n-1} x_{k-1} + x_k^{n-2} x_{k-1}^2 + \dots + x_k x_{k-1}^{n-1} + x_{k-1}^n) < x_k^n$$

y que

$$(x_k^n + x_k^{n-1} x_{k-1} + x_k^{n-2} x_{k-1}^2 + \dots + x_k x_{k-1}^{n-1} + x_{k-1}^n) (x_k - x_{k-1}) = x_k^{n+1} - x_{k-1}^{n+1}.$$

Por lo tanto, la demostración es similar a la del caso $n = 2$ y se deja su desarrollo al lector. \square

Desarrollos de los Ejercicios 2.9.1

1. Ponemos $u = \ln x$, luego $u' = \frac{1}{x}$. Entonces si definimos

$$F(x) = \tilde{F}(u) = \int_0^u (t^3 + \cos t) \, dt \Rightarrow F'(x) = \tilde{F}'(u) u' = (u^3 + \cos u) u' = (\ln^3 x + \cos(\ln x)) \frac{1}{x}. \quad \square$$

2. Ponemos $u = x^3$, luego $u' = 3x^2$. Entonces si definimos

$$F(x) = \tilde{F}(u) = \int_u^2 \frac{(2t+1)u}{\sqrt[3]{t^2}} \, dt = -u \int_2^u \frac{(2t+1)}{\sqrt[3]{t^2}} \, dt = -u G(u).$$

Luego,

$$F'(x) = (-u G(u))' = -u' \int_2^u \frac{(2t+1)}{\sqrt[3]{t^2}} \, dt - u \frac{(2u+1)}{\sqrt[3]{u^2}} u' = -3x^2 \left(\int_2^{x^3} \frac{(2t+1)}{\sqrt[3]{t^2}} \, dt + x(2x^3 + 1) \right).$$

$$\therefore F'(\sqrt[3]{2}) = -30. \quad \square$$

Desarrollos de los Ejercicios 2.10.1

1. Intersectamos las tres curvas para obtener límites de integración adecuados.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow (x^2 = 2x + 3) \Rightarrow (x^2 - 2x - 3 = 0) \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow (x = 3 \vee x = -1).$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow (x^2 = 2 - x^2) \Rightarrow (2x^2 = 2) \Rightarrow (x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1 \vee x = -1).$$

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow (2 - x^2 = 2x + 3) \Rightarrow (x^2 + 2x + 1 = 0) \Rightarrow ((x + 1)^2 = 0) \Rightarrow (x = -1).$$

Ahora podemos trazar un gráfico aproximado de las curvas para tener mayor claridad sobre los cálculos que hemos de realizar:

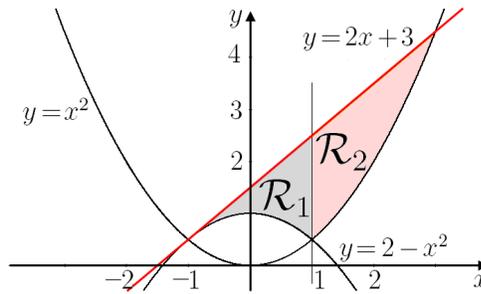


Figura A.2. Las curvas $y = x^2$, $y = 2x + 3$ e $y = 2 - x^2$.

Concluimos desde la Figura A.2 que el área A que deseamos calcular está dada por

$$\begin{aligned} A &= A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2) = \int_{-1}^1 [(2x + 3) - (2 - x^2)] dx + \int_1^3 [(2x + 3) - x^2] dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^3 (2x + 3 - x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^1 + \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 \\ &= \left[\left(\frac{1}{3} + 1 + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) \right] + \left[(9 + 9 - 9) - \left(1 + 3 - \frac{1}{3} \right) \right] \\ &= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8 \quad \square \end{aligned}$$

2. Notemos que $1 \leq x \leq e$; luego $x > 0$. Por lo tanto, podemos despejar sin dificultad $y = \frac{\ln x}{x}$. Si llamamos \mathcal{R} a la región por la cual nos preguntan, obtenemos:

$$A(\mathcal{R}) = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

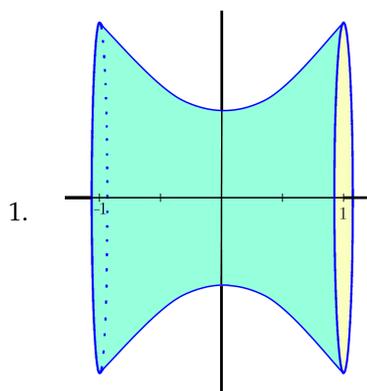
Notemos que si ponemos $u = \ln x$, entonces $du = \frac{dx}{x}$. Luego,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2}$$

Volviendo a la variable x se sigue que

$$A(\mathcal{R}) = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Desarrollos de los Ejercicios 5.1.1

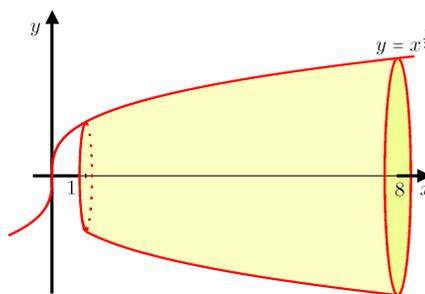
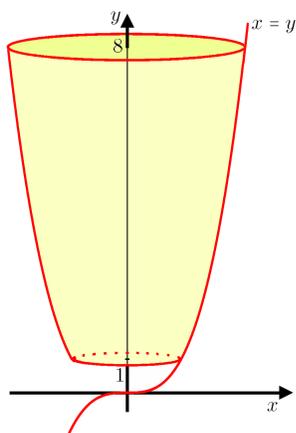


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 [x^2 + 1]^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = 2\pi \left(\frac{3 + 10 + 15}{15} \right) \\ &= \pi \frac{56}{15}. \quad \square \end{aligned}$$

2. Cambiamos x por y

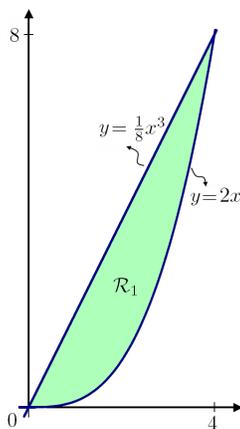
$$x = y^3 \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \quad 1 \leq x \leq 8$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^8 [x^{\frac{1}{3}}]^2 dx \\ &= \pi \int_1^8 x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= \pi \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3}{5} \pi (2^5 - 1) = \frac{93}{5} \pi. \quad \square \end{aligned}$$

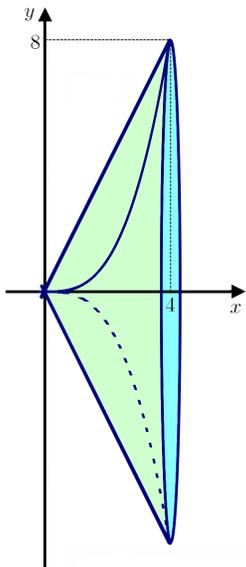


Desarrollos de los Ejercicios 5.1.2

a) Hagamos una representación de la región

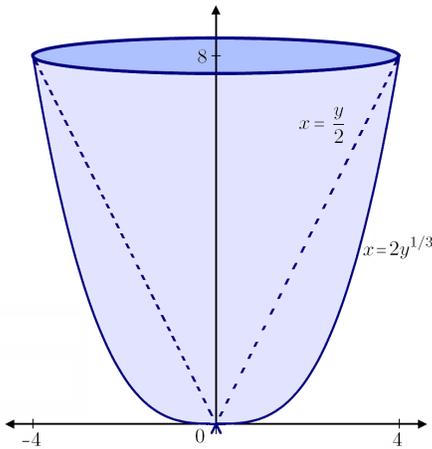


$$\begin{aligned}
 y = \frac{1}{8}x^3 \quad \wedge \quad y = 2x &\Rightarrow x^3 = 16x \\
 &\Rightarrow x(x^2 - 16) = 0 \\
 &\Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 4 \\
 x = 4 &\Rightarrow y = 8.
 \end{aligned}$$



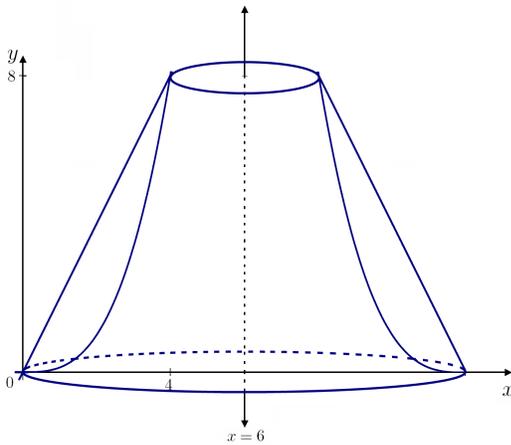
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^4 \left([2x]^2 - \left[\frac{x^3}{8} \right]^2 \right) dx \\
 &= \pi \cdot \left(4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{448} \right) \Big|_0^4 \\
 &= \pi \left(\frac{256}{3} - \frac{256}{7} \right) \\
 &= \frac{1024}{21} \pi. \quad \square
 \end{aligned}$$

b) $y = \frac{1}{8}x^3 \Leftrightarrow x = 2y^{1/3}$ y $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^8 \left([2y^{1/3}]^2 - \left[\frac{y}{2} \right]^2 \right) dy \\
 &= \pi \left(\frac{12}{5} y^{5/3} - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_0^8 \\
 &= \pi \left(\frac{12}{5} \cdot 32 - \frac{512}{12} \right) \\
 &= \frac{512}{15} \pi. \quad \square
 \end{aligned}$$

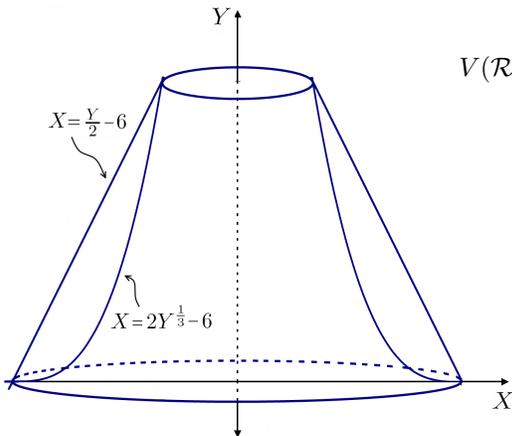
c) Hacemos el cambio de variables: $X = x - 6$ e $Y = y$.



$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{x,y} \begin{cases} y = \frac{1}{8}x^3 & \Leftrightarrow x = 2y^{1/3} \\ y = 2x & \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

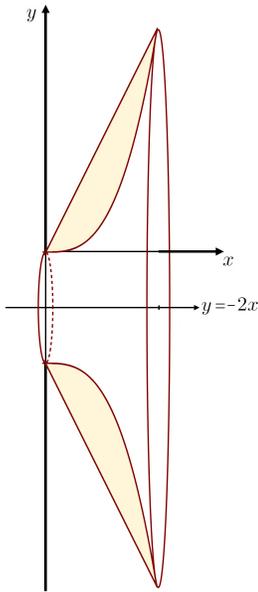
\Updownarrow

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{X,Y} \begin{cases} X + 6 = 2Y^{1/3} & \Leftrightarrow X = 2Y^{1/3} - 6 \\ X + 6 = \frac{Y}{2} & \Leftrightarrow X = \frac{Y}{2} - 6 \\ Y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 V(\mathcal{R}', Y) &= \pi \int_0^8 \left(\left[\frac{Y}{2} - 6 \right]^2 - \left[2Y^{1/3} - 6 \right]^2 \right) dY \\
 &= \pi \int_0^8 \left(\frac{Y^2}{4} - 6Y + 36 - 4Y^{2/3} + 24Y^{1/3} - 36 \right) dY \\
 &= \pi \left(\frac{Y^3}{12} - 3Y^2 - \frac{12}{5} y^{5/3} + 18Y^{4/3} \right) \Big|_0^8 \\
 &= \pi \left(\frac{512}{12} - 192 - \frac{12}{5} \cdot 32 + 288 \right) = \frac{928}{15} \pi. \quad \square
 \end{aligned}$$

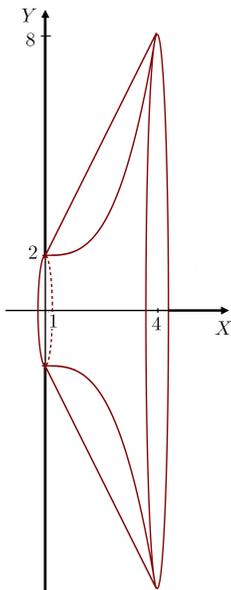
d) Hacemos el cambio de variables: $X = x$ e $Y = y + 2$.



$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{x,y} \begin{cases} y = \frac{1}{8}x^3 \\ y = 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

⇕

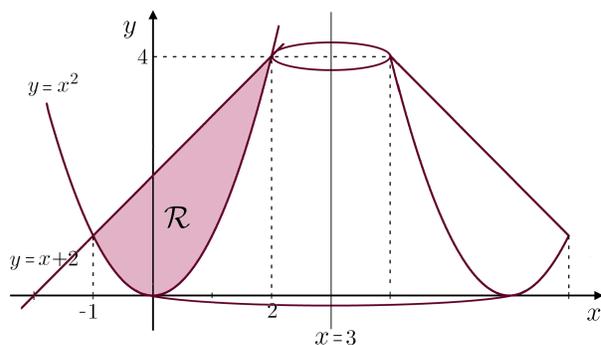
$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{X,Y} \begin{cases} Y = \frac{1}{8}X^3 + 2 \\ Y = 2X + 2 \\ Y \geq 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} V(\mathcal{R}', X) &= \pi \int_0^4 \left([2X + 2]^2 - \left[\frac{1}{8}X^3 + 2 \right]^2 \right) dX \\ &= \pi \int_0^4 \left(4X^2 + 8X - \frac{1}{64}X^6 - \frac{1}{2}X^3 \right) dX \\ &= \pi \left(\frac{3}{4}X^3 + 4X^2 - \frac{X^7}{448} - \frac{1}{8}X^4 \right) \Big|_0^4 \\ &= \frac{1696}{21} \pi. \quad \square \end{aligned}$$

Desarrollos de los Ejercicios 5.1.3

1. Hacemos el cambio de variables: $X = x - 3$ e $Y = y$. Entonces $x = -1 \Leftrightarrow X = -4$ y $x = 2 \Leftrightarrow X = -1$.



Así,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{x,y} \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{X,Y} \begin{cases} Y = (X + 3)^2 \\ Y = X + 5 \end{cases}$$

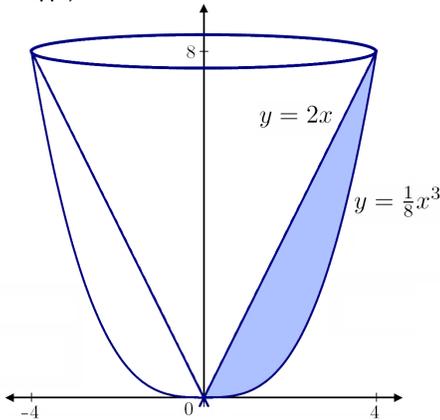
$$f(X) = (X + 5) - (X + 3)^2 = -(X^2 + 6X + 9 - X - 5) = -(X^2 + 5X + 4).$$

Luego,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-4}^{-1} -(X^2 + 5X + 4) X dX = -2\pi \left(\frac{X^4}{4} + \frac{5X^3}{3} + 2X^2 \right) \Big|_{-4}^{-1} \\ &= -2\pi \left(64 - \frac{320}{3} + 32 - \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 2 \right] \right) \\ &= -2\pi \left(94 - \frac{315 \cdot 4 + 3}{12} \right) \\ &= \frac{45}{2}\pi. \quad \square \end{aligned}$$

2. Notar que $(y = 2x \wedge y = \frac{1}{8}x^3) \Rightarrow (16x = x^3) \Rightarrow (x(x^2 - 16) = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee x = \pm 4).$

Luego,



$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^4 x \cdot \left(2x - \frac{1}{8}x^3\right) dx \\
 &= 2\pi \int_0^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx \\
 &= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{40}\right) \Big|_0^4 \\
 &= 2\pi \left(\frac{256}{3} - \frac{256}{40}\right) \\
 &= \frac{512}{15}\pi. \quad \square
 \end{aligned}$$

Desarrollos de los Ejercicios 5.2.1

1. Consideremos el círculo centrado en el origen con radio r

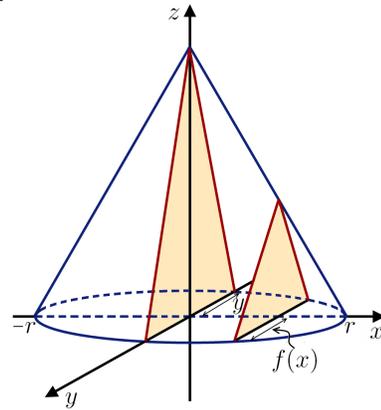
$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego, el área de la sección transversal perpendicular al eje x corresponde a un triángulo equilátero cuya área asociada a un punto $x \in [-r, r]$ es:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot [2|y|]^2 = \sqrt{3}(r^2 - x^2)$$

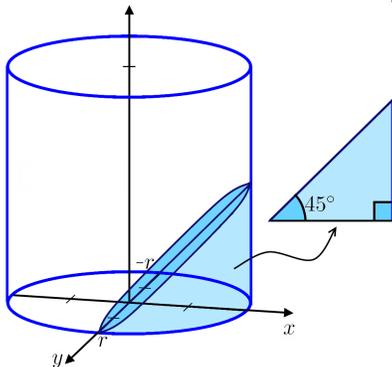
Luego, el volumen del sólido es:

$$\begin{aligned}
 V &= \sqrt{3} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= \sqrt{3} \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-r}^r \\
 &= 2\sqrt{3} \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{3}r^3. \quad \square
 \end{aligned}$$



2. Consideremos el círculo centrado en el origen con radio r pulgadas:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{r^2 - y^2}.$$



Las secciones transversales perpendiculares al eje y corresponden a triángulos rectángulos isósceles cuya área asociada a un punto $y \in [-r, r]$ es:

$$A(y) = \frac{x^2}{2} = \frac{r^2 - y^2}{2}$$

Luego, el volumen del sólido es:

$$V = \frac{1}{2} \int_{-r}^r (r^2 - y^2) dy = \frac{2}{3}r^3. \quad \square$$

Desarrollos de los Ejercicios 5.3.1

1. Tenemos

$$\begin{aligned}
 f(x) = 1 + \ln x &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\
 \Rightarrow \ell &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.
 \end{aligned}$$

Ahora, hacemos un cambio de variables

$$\begin{aligned}
 u = \sqrt{1+x^2} &\Rightarrow x^2 = u^2 - 1 \\
 du = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x dx &\Rightarrow u du = \frac{x^2}{x} dx \\
 &\Rightarrow \frac{u}{(u^2-1)} du = \frac{1}{x} dx.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx &= \int \frac{u^2}{u^2-1} du \quad (+1-1) \\
 &= \int du + \int \frac{1}{u^2-1} du \\
 &= u + \int \frac{A}{u-1} du + \frac{B}{u+1} du
 \end{aligned}$$

donde

$$1 = Au + A + Bu - B \Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ A-B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Así que,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx &= u + \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| \Rightarrow \ell = \sqrt{1+x^2} + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}} \Big|_1^2 \\
 &= \sqrt{5} + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} \\
 &= \sqrt{2} + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \\
 &\approx 1,222016177. \quad \square
 \end{aligned}$$

Este ejercicio muestra que incluso para una curva sencilla la evaluación de la integral longitud de arco puede ser un reto complicado.

$$2. f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow \ell = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \approx 3,8202. \quad \square$$

Desarrollos de los Ejercicios 5.4.1

$$\begin{aligned}
 a) \quad A &= 2\pi \int_1^4 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx && \text{pues } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \Rightarrow [f'(x)]^2 = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \\
 &= 4\pi \int_1^4 \sqrt{x+1} dx && u = x + 1 \Rightarrow du = dx \quad \wedge \int (u)^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \\
 &= 4\pi \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 \\
 &= \frac{8\pi}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}). \quad \square
 \end{aligned}$$

b) Notar que $(1 \leq x \leq 4) \Rightarrow (2 \leq y \leq 4)$ y que $(y = 2\sqrt{x}) \Rightarrow \left(\frac{y^2}{4} = x\right)$.

Luego, observando que $f(y) = \frac{y^2}{4} \Rightarrow f'(y) = \frac{y}{2}$, obtenemos

$$A = 2\pi \int_2^4 \frac{y^2}{4} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy = \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^2 (4 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy.$$

Hacemos un cambio de variables:

$$y = 2 \tan \theta \Rightarrow y^2 = 4 \tan^2 \theta \quad \wedge \quad 4 + y^2 = 4 \sec^2 \theta \quad \wedge \quad dy = 2 \sec^2 \theta d\theta,$$

donde $2 \leq y \leq 4 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan(2)$. Entonces

$$\int y^2 (4 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy = 16 \int \tan^2 \theta \sec^3 \theta d\theta = 16 \int \sec^5 \theta d\theta - 16 \int \sec^3 \theta d\theta.$$

Notar que

$$\begin{aligned}
 \int \sec^5 \theta d\theta &= \tan \theta \cdot \sec^3 \theta - 3 \int \sec^3 \theta \cdot \tan^2 \theta d\theta \\
 &= \tan \theta \cdot \sec^3 \theta - 3 \int \sec^5 \theta d\theta + 3 \int \sec^3 \theta d\theta \\
 \Rightarrow \int \sec^5 \theta d\theta &= \frac{1}{4} \left(\tan \theta \cdot \sec^3 \theta + 3 \int \sec^3 \theta d\theta \right) \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \int y^2 (4 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy &= \pi \tan \theta \cdot \sec^3 \theta - \pi \int \sec^3 \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta|.$$

Se sigue que

$$A = \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^2 (4 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \pi \left(\tan \theta \sec^3 \theta - \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta - \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)}$$

y obtenemos,

$$A \approx 17,72216 \pi. \quad \square$$

c) Pongamos $X = x + 3$ e $Y = y$. Luego,

$$y = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow Y = 2\sqrt{X-3} \Leftrightarrow \frac{Y^2}{4} + 3 = X.$$

Además, $2 \leq y \leq 4 \Rightarrow 2 \leq Y \leq 4$. Ponemos

$$f(Y) = \frac{Y^2}{4} + 3 \Rightarrow f'(Y) = \frac{Y}{2},$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_2^4 \left(\frac{Y^2}{4} + 3\right) \sqrt{1 + \frac{Y^2}{4}} dY & u = \frac{Y}{2} \Rightarrow 2du = dY \\ &= 4\pi \int (u^2 + 3) \sqrt{1 + u^2} du & u = \tan \theta \Rightarrow u^2 = \tan^2 \theta \\ &= 4\pi \int u^2 \sqrt{1 + u^2} du + 12\pi \int \sqrt{1 + u^2} du & \sqrt{1 + u^2} = \sec \theta \quad du = \sec^2 \theta d\theta \\ &= 4\pi \int \tan^2 \theta \sec^3 \theta d\theta + 12\pi \int \sec^3 \theta d\theta & \bar{u} = \sec^3 \theta \quad d\bar{u} = \sec^2 \theta d\theta \\ &= 4\pi \int \sec^5 \theta d\theta + 8\pi \int \sec^3 \theta d\theta & d\bar{u} = 3 \sec^3 \theta \tan \theta d\theta \quad \bar{v} = \tan \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \pi \tan \theta \cdot \sec^3 \theta + 11\pi \int \sec^3 \theta d\theta \\ &= \pi u \cdot \sqrt{1 + u^2} + \frac{11}{2} \pi \left(u \sqrt{1 + u^2} + \ln |\sqrt{1 + u^2} + u| \right) \\ &= \pi \frac{Y}{2} \left(\sqrt{\frac{4 + Y^2}{4}} \right) + \frac{11}{2} \pi \left(\frac{y}{2} \sqrt{\frac{4 + Y^2}{4}} + \ln \left| \sqrt{\frac{4 + Y^2}{4}} + \frac{Y}{2} \right| \right) \Big|_2^4 \\ &= \left[2\sqrt{5}^3 - \sqrt{2}^3 + \frac{11}{2} \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln |\sqrt{5} + 2| - \ln |\sqrt{2} + 1| \right) \right] \pi \\ &\approx 39,44326619 \pi. \quad \square \end{aligned}$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} X = x \\ Y = y - 4 \end{array} \right. \wedge \left(y = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow Y = f(X) = 2\sqrt{X} - 4 \wedge f'(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} \right).$$

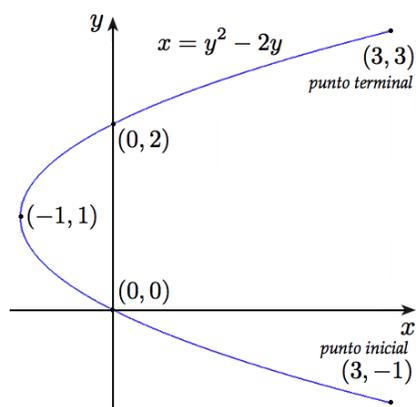
$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^4 (2\sqrt{X} - 4) \sqrt{1 + \frac{1}{X}} dX \\ &= 4\pi \int_1^4 \sqrt{X+1} dX - 8\pi \int_1^4 \frac{\sqrt{X+1}}{\sqrt{X}} dX \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) - 4\pi \left(\sqrt{X} \cdot \sqrt{1+X} + \ln |\sqrt{1+X} + \sqrt{X}| \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \right) - 4\pi \left(2\sqrt{5} + \ln |\sqrt{5} + 2| - \sqrt{2} - \ln |\sqrt{2} + 1| \right). \quad \square \end{aligned}$$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.1.1

1. En primer lugar confeccionamos una tabla de valores

t	$x = t^2 - 1$	$y = t + 1$
-2	3	-1
-1	0	0
0	-1	1
1	0	2
2	3	3

Ahora ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos la curva



Observamos que el punto inicial es $(3, -1)$ y el punto terminal es $(3, 3)$, siendo esta curva simple pero no cerrada. Por último, notemos que

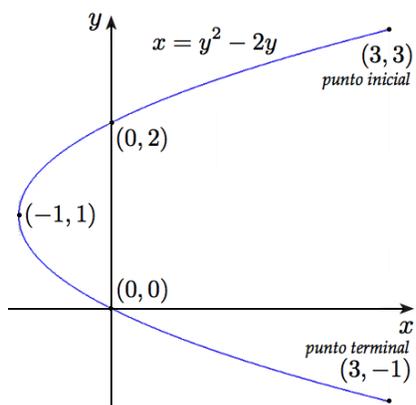
$$x = t^2 - 1 \quad \wedge \quad y = t + 1 \quad \Rightarrow \quad x = (y - 1)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 2y,$$

de donde obtenemos que la ecuación cartesiana asociada a la curva es $x = y^2 - 2y$ para $y \in [-1, 3]$.

2. En primer lugar confeccionamos una tabla de valores

t	$x = t^2 - 1$	$y = 1 - t$
-2	3	3
-1	0	2
0	-1	1
1	0	0
2	3	-1

Ahora ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos la curva



Observamos que el punto inicial es $(3, 3)$ y el punto terminal es $(3, -1)$, siendo esta curva simple pero no cerrada. Notemos también que

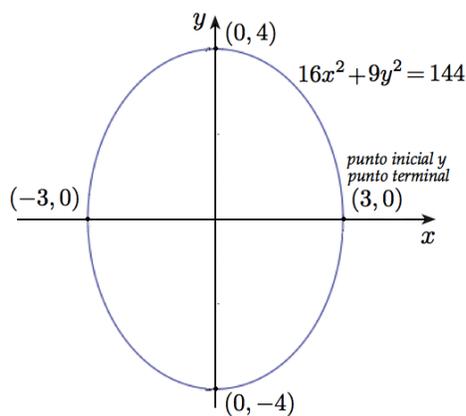
$$x = t^2 - 1 \quad \wedge \quad y = 1 - t \quad \Rightarrow \quad x = (1 - y)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 2y,$$

de donde obtenemos que la ecuación cartesiana asociada a la curva es $x = y^2 - 2y$ para $y \in [-1, 3]$. Por último, notemos que esta curva no es igual a la curva en la Pregunta 1., toda vez que tienen distinto punto inicial y terminal, aunque sus gráficas coincidan.

3. En primer lugar confeccionamos una tabla de valores

t	$x = 3 \cos t$	$y = 4 \operatorname{sen} t$
0	3	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	4
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$
π	-3	0

Ahora ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos la curva



Observamos que el punto inicial es $(3, 0)$ y el punto terminal es $(3, 0)$, siendo esta curva simple y cerrada. Notemos también que

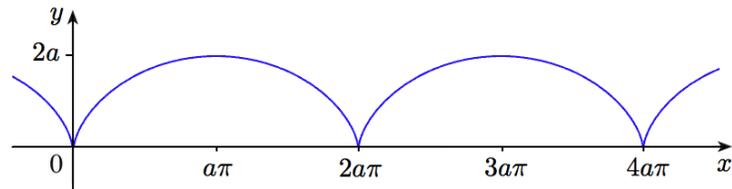
$$x = 3 \cos t \quad \wedge \quad y = 4 \operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad 16x^2 + 9y^2 = 144,$$

de donde obtenemos que la ecuación cartesiana asociada a la curva es $16x^2 + 9y^2 = 144$ para $x \in [-3, 3]$.

4. Confeccionamos una tabla de valores

t	$x = a(t - \operatorname{sen} t)$	$y = a(1 - \cos t)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$	a
π	$a\pi$	$2a$
$\frac{3\pi}{2}$	$a\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$	a
2π	$2a\pi$	0

Ahora ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos la cicloide



Soluciones de algunos Ejercicios Propuestos

Para volver a los ejercicios propuestos del capítulo y sección respectiva, presiona sobre el trío de números en **rojo** correspondiente.

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 1.1.1

a) $\frac{3}{5}x^5 + c.$

b) $6x \sqrt[3]{x^2} + c.$

c) $2\sqrt{x} \left(\frac{x}{3} - 1 \right).$

d) $5 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{cos} x + c.$

e) $-\operatorname{csc} x + c.$

f) $-4 \operatorname{csc} x + 2 \tan x + c.$

g) $3 \operatorname{sec} \theta - 4 \operatorname{sen} \theta + c.$

h) $-2 \cot \theta - 3 \tan \theta + \theta + c.$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 1.2.1

1. a) $\frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + c.$

b) $\frac{1}{18(1-8x^3)^3} + c.$

c) $\frac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + c.$

d) $-2 \cos \sqrt{x} + c.$

2. a) $2,5\text{cm}^2.$

b) $1,5\text{cm}^2.$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 1.2.2

a) $2\sqrt{x} \operatorname{arc} \cot \sqrt{x} + \ln |1+x| + c.$

b) $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.$

$$c) \frac{1}{2}x^2 \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \right) + c.$$

$$d) \frac{1}{2} \left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \right) + c.$$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 1.2.3

$$a) \ln|x-3| - \ln(x-2) + c$$

$$b) \frac{7}{11} \ln|x-4| + \frac{19}{22} \ln \left| x + \frac{3}{2} \right| + c$$

$$c) \frac{5}{11} \ln|x-3| - \frac{5}{22} \ln|x^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{11} \left(\pi - 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \right) + c$$

$$d) 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c$$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 1.3.1

$$1. v(t) = t^2 - t + 3 \text{ y } s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{7}{6}.$$

2. a) 8 segundos,

b) $|-128|$ pies por segundos cuadrados,

c) 256 pies.

3. —

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 2.10.1

$$1. A(\mathcal{R}) = \frac{1}{6}$$

$$2. A(\mathcal{R}) = 12$$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 4.1.1

1. a) converge

b) converge

c) converge

d) diverge

2. a) diverge para todo $p \in \mathbb{R}$

b) converge para todo $p > \frac{9}{2}$, diverge para todo $p \leq \frac{9}{2}$

c) converge para todo $p \in \mathbb{R}$

d) converge para todo $p > 0$ diverge para todo $p \leq 0$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 4.2.1

1. a) diverge
b) converge
2. a) converge para todo $0 < p < 1$, diverge para todo $p \geq 1$
b) converge para todo $p < \frac{3}{2}$, diverge para todo $p \geq \frac{3}{2}$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 4.3.1

1. Estudia la convergencia de las siguientes integrales.
 - a) diverge
 - b) diverge
 - c) converge
 - d) converge
2. Calcula, si es posible, el valor de cada integral.
 - a) 1
 - b) $\frac{\pi}{2}$
 - c) 1
 - d) -4
3. Determina los valores de p para los cuales las siguientes integrales convergen.
 - a) converge para todo $p \in \mathbb{R}$
 - b) converge para todo $p > 1$, diverge para todo $0 < p \leq 1$
 - c) converge para todo $p < 1$, diverge para todo $p \geq 1$
 - d) converge para todo $p > 1$, diverge para todo $p \leq 1$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.1.1

1. Los mínimos son alcanzados en puntos de la forma $(4k\pi, 2 - \pi)$ y los máximos en puntos de la forma $((4k - 2)\pi, 2 + \pi)$. Los puntos donde la recta se corta así misma son de la forma $(4k\pi, 2)$ y las rectas tangentes a la cicloide alargada en estos puntos están dadas por las ecuaciones $y - 2 = \frac{\pi}{2}(x - 4k\pi)$ e $y - 2 = -\frac{\pi}{2}(x - 4k\pi)$.
2. a) pendiente 6 y $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1} = 6 > 0$, que implica que la función es convexa (cóncava hacia arriba)
b) pendiente -1 y $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} > 0$, que implica que la función es convexa (cóncava hacia arriba)
c) pendiente 2 y $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=-1} = -4 < 0$, que implica que la función es cóncava (cóncava hacia abajo)

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.2.1

1. πab

$$2. \left| 7 \int_{\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)}^{\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)} \sin^2(t) dt \right| - \left| 48 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t \cos^2 t dt \right|$$

3. 48π

4. 32π

5. a) $\frac{512}{5}$
b) $\frac{10}{9\sqrt{3}}$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.3.1

1. $\int_0^{2\pi} \sqrt{(12 \cos^2 t \sin t)^2 + (12 \sin^2 t \cos t)^2} dt = 24$

2. $\int_{-2}^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} dt = \frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

3. $\int_0^{2\pi} \sqrt{(3 \cos t)^2 + (3 \sin t)^2} dt = 6\pi$

4. $\int_0^2 \sqrt{(8t)^2 + (6t^2)^2} dt = \frac{16}{27}(13\sqrt{13} - 8)$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.4.1

a) $\left(-2, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $\left(2, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)$

b) $\left(2, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $\left(-2, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)$

c) $\left(2, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $\left(-2, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

d) $\left(2, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$; $\left(-2, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.4.2

1. a) $(1, \pi)$

b) $(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$

c) $(4, \frac{5\pi}{6})$

2. a) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

b) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

c) $(0, 0)$

3. a) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4}$

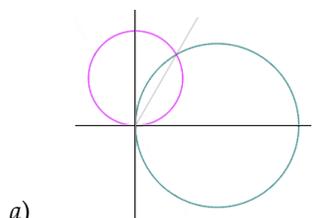
b) $x + 3y = 2$

c) $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x + 2y$

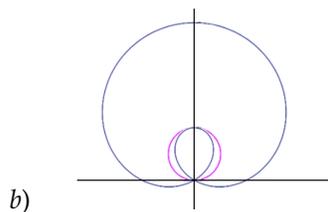
d) $y^2 = 1 - 2x$

- e) $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}$
 - f) $y^2 = 8(2 + x)$
- 4.
- a) $r = 2$
 - b) $r = 4 \cos \theta$
 - c) $9r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta = 36$
 - d) $r^2 \sin(2\theta) = 8$
 - e) $r \cos \theta = 5$
 - f) $r = 2\theta$

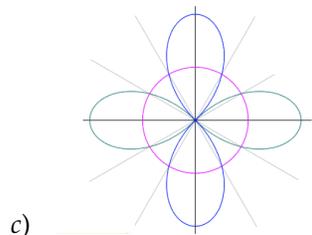
Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.5.1



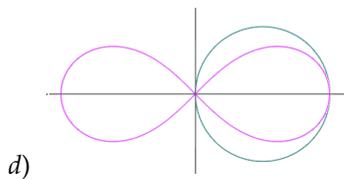
Las curvas se intersectan en $(r, \theta) = (0, 0)$ y $(r, \theta) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3})$



Las curvas se intersectan en $(r, \theta) = (0, 0)$ y $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{2})$



Las curvas se intersectan en $(r, \theta) = (1, \frac{n\pi}{6}), n \in \{1, 2, \dots, 8\}$



Las curvas se intersectan en $(r, \theta) = (0, 0)$ y $(r, \theta) = (2, 0)$.

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.6.1

1. $\frac{3\pi}{4} - \frac{5}{2} \arccos \sqrt{\frac{11}{12}} - \frac{1}{18} \sqrt{11}$
2. $4\pi - 8$
3. $25\pi - 8$

4. $2 - \frac{\pi}{4}$

5. $\frac{3\pi}{4}$

6. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

7. $\frac{5\pi}{2}$

Soluciones a los Ejercicios Propuestos 6.7.1

1. $\sqrt{2}(1 - e^{-\frac{3\pi}{4}})$

2. 16

3. $\frac{3\pi}{2}$

Soluciones de algunos Ejercicios de Repaso

Para volver a los ejercicios de repaso del capítulo y sección respectiva, presiona sobre el trío de números en **rojo** correspondiente.

Soluciones de algunos de los Ejercicios de Repaso 1.2.1

1.
 - a) $-\cos(1 + x^2) + c.$
 - b) $\frac{1}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + c.$
 - c) $\frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + c.$
 - d) $\frac{1}{4(3 - 2x)^2} + c.$
 - e) $\frac{1}{3b^2}(a^2 + b^2x)^{\frac{3}{2}} + c.$
 - f) $\frac{(3 \ln|x| - 5)^5}{15} + c.$
2.
 - a) $\operatorname{sen}(e^x) - e^x \cos(e^x) + c$
 - b) $\frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + c.$
 - c) $-\frac{2}{45} \sqrt{(6 - 3x^5)^3} + c.$
 - d) $\frac{2}{3} \operatorname{sen}(2x) \cos x - \frac{1}{3} \cos(2x) \operatorname{sen} x + c.$
 - e) $x(\ln|x|)^2 - 2x \ln|x| + 2x + c.$
 - f) $\operatorname{sen} x \ln|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen} x + c.$
3.
 - a) $\ln \left| \frac{(x - 2)x}{(x + 1)^2} \right| + c.$
 - b) $\ln \left| \frac{x(2x + 1)^{\frac{3}{4}}}{(2x - 1)^{\frac{1}{4}}} \right| + c.$
 - c) $\ln \left| \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)} \right| + c.$
 - d) $-\ln|x - 2| + \arctan \frac{x}{2} + c.$
 - e) $\ln \left| \frac{x}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} \right| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + 3x + c.$

- f) $-\arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + c.$
4. a) $\frac{1}{7} \frac{\sqrt{w^2-7}}{w} + c.$
 b) $\frac{1}{2} \frac{t^2}{25-t^2} - \ln \left| \frac{5}{\sqrt{25-t^2}} \right| + c.$
 c) $\frac{1}{4} \frac{\tan x}{\sqrt{4-\tan^2 x}} + c.$
 d) $\frac{-1}{(e^z+4)\sqrt{e^{2z}+8e^z+7}} + \frac{\sqrt{e^{2z}+8e^z+7}}{9(e^z+4)} + c.$
 e) $\frac{\theta}{9\sqrt{\theta^2-6\theta+18}} + c.$
 f) $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^2 s - 4} \cdot \ln s + \frac{8}{3} \sqrt{\ln^2 s - 4} + c.$
5. a) $\frac{1}{9} \tan^9 x + \frac{2}{7} \tan^7 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c.$
 b) $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + c.$
 c) $-\frac{1}{2} \cot(2x) - \frac{1}{2} \operatorname{csc}(2x) + c.$
 d) **Sugerencia:** Usa la sustitución $z = \tan \frac{x}{2}.$
 e) **Sugerencia:** Amplifica el integrando por $\sqrt{1+x}.$
 f) **Sugerencia:** Amplifica el integrando por $1 - \cos x.$

Soluciones de algunos de los Ejercicios de Repaso 2.10.1

1. a) $\frac{2\sqrt{8}}{3} - \frac{2}{3}$
 b) $\frac{\pi}{4}$
 c) $e - 5e^{-1}$
 d) $\frac{3}{13}e^{3\pi} - \frac{3}{13}$

2. **Sugerencia:** *Procede como sigue*

- (1°) Prueba que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1].$
 (2°) Define $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - [f(x)]^2.$ Prueba que φ es creciente en $[0, 1]$ y deduce que $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1].$
 (3°) Define $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $\psi(x) = \left(\int_0^x f(t) dt\right)^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt.$ Prueba que $\psi'(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ y establece que tipo de crecimiento tiene ψ en $[0, 1].$ Luego, deduce que $\psi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1].$
 (4°) Concluye el resultado.

Bibliografía

- [1] Tom Apostol, *Análisis Matemático*. Editorial Reverté, S.A., segunda edición, reimpresión, 2006. Impreso en España.
- [2] Louis Leithold, *El Cálculo*. Oxford University Press – Harla México, S.A. de C.V., séptima edición, 1998. Impreso en México.
- [3] Charles Lehmann, *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, S.A. de C.V., primera edición, decimo tercera reimpresión, 1989. Impreso en México.
- [4] George Thomas jr., *Cálculo. Una variable*. Pearson Educación de México, S.A. de C.V., decimosegunda edición, 2010. Impreso en México.
- [5] Michael Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté Ediciones, S.A. de C.V., segunda edición, tercera reimpresión, 1996. Impreso en México.