

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

APUNTES MAT 247

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

VERSIÓN 2018

Salomón Alarcón Araneda

SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA

APUNTES

**MAT 247 | ECUACIONES
DIFERENCIALES
PARCIALES**

VERSIÓN 30 de Octubre de 2019

Prefacio

Estimados alumnos, en el contexto de la asignatura MAT 247 que se dicta en nuestra Universidad, me es grato presentar esta versión actualizada de mis apuntes de Ecuaciones Diferenciales Parciales, la cual incluye correcciones de la versión anterior. El principal objetivo de estas notas es ofrecer un material de consulta acorde a los contenidos tratados en clases.

Es importante señalar que estos apuntes no reemplazan a los libros de la Bibliografía del programa de la asignatura, ni tampoco a los que cito en la Bibliografía al finalizar estos apuntes. Por esta razón, recomiendo revisar aquellos libros con la finalidad que puedan profundizar en el estudio de los contenidos aquí tratados y, de esta forma, puedan conocer puntos de vista diferentes a los expuestos aquí.

Agradezco desde ya los comentarios y sugerencias que ustedes puedan hacerme llegar para mejorar estas notas y corregir erratas que puedan existir. Para ello, pueden contactarme por correo e-mail a:

salomon.alarcon@usm.cl.

Espero que este material les sea de utilidad.

Atte.

SALOMÓN ALARCÓN ARANEDA.

Valparaíso, Octubre de 2019

Índice general

<i>Prefacio</i>	I
Índice general	III
Índice de figuras	VII
Notación	IX
1. Introducción	1
1.1. Modelos Matemáticos	1
1.2. Algunos modelos básicos	2
1.2.1. La ecuación de Laplace	3
1.2.2. La ecuación del calor	4
1.2.3. La ecuación de ondas	7
1.3. Clasificación de las EDP de segundo orden	8
1.4. Algunos modelos más sofisticados (*Optativo)	11
1.4.1. Un modelo elíptico: equilibrio de un gas en un contenedor	11
1.4.2. Un modelo parabólico: cooperación entre especies	15
1.4.3. Un modelo hiperbólico: cuerda vibrante	18
1.5. Condiciones sobre una EDP de segundo orden	20
1.5.1. Condiciones iniciales y de frontera	21
1.6. Problemas bien puestos para una EDP de segundo orden	22
1.6.1. Estabilidad	23
1.6.2. Unicidad	23
1.7. Linealidad y superposición (*Optativo)	28
1.7.1. Ecuaciones diferenciales parciales lineales	28
1.7.2. Problemas lineales	29
1.7.3. Propiedades de los problemas lineales	29
1.7.4. Principio de superposición	34
1.8. Existencia de soluciones vía separación de variables (*Optativo)	36

1.9. Problemas propuestos	42
Bibliografía del Capítulo 1	45
2. Espacios de Sobolev en dimensión N	47
2.1. Espacios de Sobolev	47
2.1.1. Motivación	47
2.1.2. La derivada débil	49
2.1.3. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$	51
2.1.4. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$	63
2.2. Teoremas de densidad	66
2.2.1. Aproximación interior mediante funciones $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$	66
2.2.2. Aproximación global por funciones $C^\infty(\Omega)$	67
2.2.3. Aproximación global por funciones $C^\infty(\bar{\Omega})$	69
2.3. Extensión de una función en $W^{1,p}(\Omega)$	72
2.4. Teoremas de Trazas	76
2.5. Inyecciones de Sobolev	83
2.5.1. Inyecciones de Sobolev: el caso unidimensional	84
2.5.2. Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev y sus consecuencias	89
2.5.3. Desigualdad de Morrey y sus consecuencias	93
2.5.4. Desigualdades generales de Sobolev	95
2.6. El Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov	95
2.7. Problemas propuestos	96
Bibliografía del Capítulo 2	99
3. Formulación variacional de algunos problemas elípticos	101
3.1. Motivación	101
3.2. Regularidad de las soluciones débiles	102
3.3. Resolución de algunos problemas de valores de frontera	104
3.4. El principio del máximo	112
3.5. Valores propios	114
3.6. Problemas propuestos	115
Bibliografía del Capítulo 3	118
4. La ecuación de Laplace	119
4.1. La solución fundamental	119
4.1.1. Las identidades de Stokes	121
4.1.2. La solución fundamental de la ecuación de Laplace	122
4.1.3. La solución fundamental de la ecuación de Poisson	123
4.2. La propiedad del valor medio y sus consecuencias	123

4.2.1.	Los principios del máximo	126
4.2.2.	Regularidad de las funciones armónicas	130
4.2.3.	El Teorema de Liouville	131
4.2.4.	Estimaciones locales: analiticidad de funciones armónicas	132
4.2.5.	La desigualdad de Harnack	136
4.3.	Representación de Green de la solución	138
4.3.1.	La integral de Poisson para la bola	139
4.3.2.	La integral de Poisson para el semiespacio	144
4.3.3.	Teoremas de convergencia	146
4.4.	El método de Perron (*Optativo)	149
4.5.	El potencial Newtoniano (*Optativo)	158
4.5.1.	Existencia de soluciones	159
4.6.	Problemas propuestos	160
	Bibliografía del Capítulo 4	162
5.	La ecuación del calor	163
5.1.	La solución fundamental	163
5.2.	La fórmula del valor medio	165
5.2.1.	El principio fuerte del máximo	169
5.3.	El principio débil del máximo y sus consecuencias	170
5.3.1.	Regularidad de las soluciones de la ecuación del calor	174
5.3.2.	Estimaciones locales para soluciones de la ecuación del calor	179
5.4.	La desigualdad de Harnack	180
5.5.	Representación de la solución del problema de Cauchy	181
5.5.1.	El problema de Cauchy con ecuación homogénea	181
5.5.2.	El problema de Cauchy con ecuación no homogénea	182
5.6.	Problemas propuestos	183
	Bibliografía del Capítulo 5	184
6.	La ecuación de ondas	187
6.1.	Solución para $N = 1$. La fórmula de D'Alembert	187
6.1.1.	Un método de reflexión	189
6.2.	Soluciones por medias esféricas	190
6.2.1.	Una formulación equivalente para el problema de Cauchy	191
6.2.2.	Solución para $N = 3$. La fórmula de Kirchhoff	194
6.2.3.	Solución para $N = 2$. La fórmula de Poisson.	196
6.2.4.	Solución para N impar, $N \geq 3$.	198
6.2.5.	Solución para N par, $N \geq 4$	201
6.3.	El problema no homogéneo	202

6.4. Problemas propuestos	203
Bibliografía del Capítulo 6	205
7. Ecuaciones lineales elípticas de segundo orden	207
7.1. Los principios del máximo	207
7.1.1. Principio débil del máximo	208
7.1.2. El Lema de Hopf	211
7.1.3. El principio fuerte del máximo	213
7.1.4. La desigualdad de Harnack	214
Bibliografía del Capítulo 7	214
A. Algunos teoremas de interés	215
A.1. El Teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias	215
A.2. Topologías débiles	216
A.3. Espacios reflexivos y separables	218
A.4. Espacios Hilbert	219
A.5. Los Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram	220
A.6. Teoremas generales sobre integrales	220
A.7. Teoremas de convergencia	221
A.8. Los espacios $L^p(\Omega)$	222
A.9. Molificadores	223
A.10. Criterios de compacidad	224
A.11. Integración en coordenadas polares	225
A.12. Delta de Dirac	225
A.13. Funciones Hölder continuas	226
A.14. Otros resultados	227
Bibliografía	229

Índice de figuras

1.1. Fuerzas en equilibrio sobre un elemento de volumen del fluido	13
2.1. Corrección de la frontera $\partial\Omega$ alrededor de un punto $\bar{x} \in \partial\Omega$	73
4.1. Una función barrera local en $z \in \partial\Omega$	155
4.2. Ω verifica la condición de esfera exterior en el punto $z \in \partial\Omega$	157
5.1. La región Ω_T y su frontera $\partial_*\Omega_T$	166
5.2. Una bola de calor	166
5.3. Cilindros cerrados	175

Antes de comenzar es conveniente introducir algunas notaciones y definiciones.

DEFINICIÓN 1 Diremos que Ω es un *dominio* en \mathbb{R}^N si Ω es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N , con $\text{int}(\Omega) \neq \emptyset$.

NOTACIÓN 1 Introducimos las siguientes notaciones:

- $B(x, R)$: La bola abierta de \mathbb{R}^N con centro en x y radio R
- $\overline{B(x, R)}$: La bola cerrada de \mathbb{R}^N con centro en x y radio R
- \mathbb{R}_+^N : el semiespacio en \mathbb{R}^N definido por el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$
- $\omega \Subset \Omega$: ω es un subconjunto abierto de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$.

De ahora en adelante, y a menos que se indique explícitamente otra cosa, asumiremos que Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N .

NOTACIÓN 2 Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Es usual escribir, en caso que existan:

- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$: La primera derivada de u respecto a la i -ésima coordenada
- $\nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$: El gradiente de u
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$: La derivada con respecto a la i -ésima coordenada de la primera derivada de u respecto a la j -ésima coordenada
- $D^2 u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] = \text{Hess}[u]$: La matriz Hessiana de las derivadas de segundo orden de u
- $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$, donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ es un *multi-índice* de orden

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

- $D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$
- $|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{tr}(D^2 u)$: El Laplaciano de u
- Sea $u : \Omega_{N_1} \times \Omega_{N_2} \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1}) \in \Omega_{N_1}$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_2}) \in \Omega_{N_2}$, entonces

$$\nabla_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{N_1}} \right) \quad \text{y} \quad \nabla_y u = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_{N_2}} \right).$$

DEFINICIÓN 2 Sea $k \in \mathbb{N}$. Se define el conjunto de las *funciones de clase C^k* en Ω , al conjunto

$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}.$$

DEFINICIÓN 3 Se define el conjunto de las *funciones de clase C^∞* en Ω , al conjunto

$$C^\infty(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

DEFINICIÓN 4 Sea $k \in \mathbb{N}$. Se define el conjunto de las *funciones uniformemente de clase C^k* en Ω , al conjunto

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \text{ es uniformemente continua para todo } |\alpha| \leq k\}.$$

DEFINICIÓN 5 Se define el conjunto de las *funciones uniformemente de clase C^∞* en Ω , al conjunto

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \text{ es uniformemente continua para todo } |\alpha| \leq k, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

DEFINICIÓN 6 Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se llama *soporte* de u al conjunto

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

DEFINICIÓN 7 Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se define el conjunto de *funciones con soporte compacto de clase C^k* al conjunto

$$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : \text{supp } u \text{ es compacto en } \Omega\}.$$

DEFINICIÓN 8 Sean $x_0 \in \Omega$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que u es *Lipschitz continua* en x_0 si verifica

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|} < \infty.$$

DEFINICIÓN 9 Sea Ω un conjunto medible en \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$. Se definen los espacios de funciones

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible Lebesgue} \wedge \int_{\Omega} |u|^p < \infty \right\}.$$

DEFINICIÓN 10 Sea Ω un conjunto medible en \mathbb{R}^N . Se define el espacio de funciones

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible Lebesgue} \wedge \sup_{\Omega} \text{ess}|u| < \infty \right\}.$$

Sea Ω un conjunto medible en \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$, y consideremos en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ la relación de equivalencia \mathcal{R} dada por

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f = g \text{ c.t.p en } \Omega.$$

DEFINICIÓN 11 Sea Ω un conjunto medible en \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$. Se definen los espacios de funciones

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{R}\},$$

a los cuales se les asocia, respectivamente, la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

DEFINICIÓN 12 Sea Ω un conjunto medible en \mathbb{R}^N . Se define el espacio de funciones

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{R}\},$$

al cual se le asocia la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} \text{ess}|u|.$$

DEFINICIÓN 13 Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se definen los espacios de funciones

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(\omega) \text{ para cada } \omega \Subset \Omega\}.$$

NOTACIÓN 3 Introducimos las siguientes notaciones:

- $\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$
- $\|D^2 u\|_{(L^p(\Omega))^{N \times N}} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}.$

DEFINICIÓN 14 Sea $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función tal que

$$\mathbf{U} = U_1 \mathbf{e}_1 + U_2 \mathbf{e}_2 + \dots + U_N \mathbf{e}_N,$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^N y las $U_i, i = 1, 2, \dots, N$, representan funciones a valores reales que son diferenciables en Ω . Llamamos *divergencia* de \mathbf{U} a la función

$$\operatorname{div} \mathbf{U} := \nabla \cdot \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i}{\partial x_i}.$$

OBSERVACIÓN 1 Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden existen en Ω . Si consideramos

$$\mathbf{U} = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right),$$

entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = \operatorname{div} (\nabla u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

DEFINICIÓN 15 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada, y sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que $\partial\Omega$ es de clase C^k si para cada punto $\bar{x} \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función $\eta \in C^k(\mathbb{R}^{N-1})$ que, salvo reordenamiento y reorientación de los ejes coordenados si es necesario, verifica

$$\Omega \cap B(\bar{x}, r) = \{x \in B(\bar{x}, r) : x_N > \eta(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})\}.$$

Además,

- Si $\partial\Omega$ es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$, diremos que $\partial\Omega$ es de clase C^∞ .
- Si η es analítica, diremos que $\partial\Omega$ es analítica.

Una de las grandes motivaciones y fuente de inspiración para los científicos ha sido la de resolver problemas de la vida cotidiana. En este sentido, son muchos los nombres que a través de la historia han dejado una profunda huella en el desarrollo de las ciencias; en particular de la matemática y sus aplicaciones.

Teniendo en cuenta que muchos de los problemas interesantes de estudiar son aquellos que evolucionan continuamente en el tiempo, y que una de las herramientas básicas para describir tales procesos es la derivada (total y/o parcial), resulta natural describir una gran cantidad de modelos matemáticos a través de ecuaciones diferenciales. En particular, las ecuaciones diferenciales surgen cuando se abordan, en un sentido amplio, problemas de diversa naturaleza; por ejemplo, problemas de Física: mecánica, dinámica, eléctrica, ...; Biología: dinámica de poblaciones, cooperación entre especies, ...; Economía: problemas de mercados financieros sin fricción, problemas de consumo en una cartera dinámica de un agente en tiempo continuo con procesos de difusión de precios; Astronomía: problemas de mecánica celeste (por ejemplo, problemas de interacción entre estrellas aglomeradas y problemas de dinámica entre cuerpos celestes, en particular el de la Tierra, la Luna y el Sol); Química: movimientos subsónicos de gases, equilibrio de un gas en un contenedor, ...; etcétera. Los problemas pueden ser de tipo estático o dinámico. Los estáticos usualmente son descritos por ecuaciones diferenciales elípticas, mientras que los dinámicos generalmente son descritos por ecuaciones diferenciales parabólicas o hiperbólicas.

En este capítulo se pretende entregar algunos argumentos necesarios para justificar, desde el punto de vista de las aplicaciones, el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP).

1.1. Modelos Matemáticos

Cuando se quiere abordar algún problema real, tanto desde el punto de vista científico como desde el tecnológico, es usual hacerlo por etapas.

Etapas 1: El problema real y el modelo matemático. Se requiere un profundo conocimiento del problema concreto que se ha de abordar; en particular, de las innumerables variables que están envueltas en el problema y de las diversas leyes o principios que influyen sobre ellas. El paso

del *problema real* al *modelo matemático* cae en un inmenso campo teórico relacionado con el cómo interpretamos y estudiamos la información y el conocimiento relacionado con el problema que se desea abordar. En nuestro caso, nos interesa estudiar determinados problemas mediante la creación de modelos matemáticos basados en el estudio de una EDP. Ahora, teniendo en cuenta que el modelo matemático es una aproximación del problema original, en la Etapa 1, parece razonable que la conformación de la EDP se guíe por el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l} \text{Leyes} \\ \text{asociadas al problema} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Hipótesis sobre} \\ \text{el problema particular} \end{array} \Rightarrow \text{Un Problema en EDP.}$$

A modo de ejemplo, para obtener la EDP de difusión del calor, se requiere considerar la *Ley de conservación de la energía calórica* y algunas hipótesis adicionales sobre el problema concreto de estudio, entre ellas, la *Ley de Fourier del flujo de calor*.

Etapa 2: El modelo matemático y el estudio de sus soluciones. En esta etapa interesa responder satisfactoriamente al modelo matemático formulado. Desde este punto de vista, algunas consideraciones a tomar en cuenta son:

1. Existencia de algún tipo de soluciones.
2. Unicidad y/o Multiplicidad de soluciones.
3. Dependencia continua de la solución con respecto a los datos del problema. Más generalmente, estabilidad de soluciones.
4. Regularidad de soluciones.
5. Validez de algún método numérico que permita aproximar la solución.

Etapa 3: Las soluciones del modelo matemático y el retorno al problema real. Esta es la etapa cúlmine del proceso de *modelación*. La estrategia consiste en verificar, de alguna forma, que las soluciones del modelo matemático estudiado sean consistentes con los datos que se conocen del problema real. Específicamente, para que una solución del modelo matemático sea una solución adecuada para el problema real, ésta debe validar la información que ya se conoce del problema en estudio, y debe ser capaz de predecir con cierta exactitud resultados futuros.

1.2. Algunos modelos básicos

Un resultado elemental para establecer algunos modelos matemáticos es el conocido *Teorema de Gauss* o *Teorema de la divergencia*. A continuación enunciamos el Teorema de Gauss, teniendo en cuenta la notación $\mathbf{n}(x) = (\hat{n}_1(x), \hat{n}_2(x), \dots, \hat{n}_N(x))$, que representa al vector normal exterior unitario a la frontera de cierto subconjunto en \mathbb{R}^N , en un punto x de tal frontera.

TEOREMA 1.2.1 (Teorema de Gauss) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Entonces:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} u \hat{n}_i \, dS \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

donde dS denota el elemento de área $(N - 1)$ -dimensional en $\partial\Omega$. En particular, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ es un campo vectorial tal que $u_i \in C^1(\overline{\Omega})$, para $i = 1, 2, \dots, N$, entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

1.2.1. La ecuación de Laplace

La *ecuación de Laplace* es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico, la cual recibe su nombre en reconocimiento al astrónomo, físico y matemático francés Pierre-Simon Laplace, quien fue el primero en estudiar sus propiedades en un trabajo sobre campos de potencial gravitatorio alrededor del año 1780. La ecuación usualmente se escribe en la forma

$$\Delta u = 0$$

donde u es una función escalar definida en una región de \mathbb{R}^N . Cabe señalar que la ecuación de Laplace surgió como tal antes de la época de Laplace, en el contexto del estudio de las funciones analíticas en \mathbb{R}^2 .

La interpretación física más conocida es aquella cuando se considera un potencial electrostático en una región de \mathbb{R}^3 donde no hay distribución de carga eléctrica del volumen. En efecto, es conocido que un campo electrostático \mathbf{E} satisface la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0},$$

donde ρ es la carga en un punto \mathbf{r} de la región considerada y ϵ_0 es la permisividad eléctrica del vacío. Si en la ecuación anterior el campo electrostático es obtenido a partir de un potencial V ; esto es, si $\mathbf{E} = \nabla V$, entonces obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

Luego, la ecuación de Laplace se verifica para el potencial V en cualquier región en que la carga eléctrica del volumen se anula; esto es, se verifica que

$$\Delta V = 0$$

si $\rho \equiv 0$ en la región.

Una interpretación física más general es aquella en que se considera la densidad u de alguna magnitud en equilibrio. Esto es, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 y $\mathbf{U} \in (C^1(\overline{\Omega}))^N$ denota el flujo de la densidad u de alguna magnitud en equilibrio, entonces para cada $\omega \Subset \Omega$ con $\partial\omega$ de clase C^1 , el flujo neto de \mathbf{U} a través de $\partial\omega$ es cero. En otras palabras, se cumple que:

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

donde \mathbf{n} el vector normal exterior unitario definido en cada punto sobre $\partial\omega$. Luego, desde el Teorema 1.2.1 de Gauss se sigue que

$$\int_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{U} \, dx = \int_{\partial\omega} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

de donde obtenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{1.1}$$

pues $\mathbf{U} \in (C^1(\overline{\Omega}))^N$. Luego, asumiendo que el flujo \mathbf{U} es proporcional al gradiente ∇u , lo cual es físicamente razonable de asumir, apuntando en dirección opuesta (pues el flujo va de regiones de alta concentración a regiones de baja concentración), obtenemos que

$$\mathbf{U} = -a \nabla u \quad \text{en } \Omega \quad (\text{con } a > 0). \tag{1.2}$$

Sustituyendo (1.2) en (1.1), obtenemos $-a \operatorname{div}(\nabla u) = 0$ en Ω , que equivale a la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Finalmente, cabe señalar que, entre otras aplicaciones, la ecuación de Laplace también aparece en la investigación probabilística del *movimiento Browniano* (nombre dado en honor al médico y botánico escocés Robert Brown), que es un movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido, como por ejemplo el polen en una gota de agua. Básicamente, el movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por moléculas en el fluido, sometidas a una agitación térmica. Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así, la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo, provocando el movimiento observado.

1.2.2. La ecuación del calor

La interpretación más común de la ecuación del calor en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 corresponde a la dada a comienzos del siglo XIX por el matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, quién inició el estudio del flujo de calor al observar que una mejor comprensión del fenómeno haría posible que el proceso de la fundición de metales fuese más eficiente, permitiendo

a los científicos determinar una aproximación de la temperatura al interior de un cuerpo en cualquier instante futuro, dada la temperatura en su frontera en un instante determinado.

Asumamos que $(x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[$, donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^3 con $\partial\Omega$ de clase C^1 , de manera que x representa la variable espacial y t la variable temporal. Consideremos además un medio físico conductor de calor contenido en Ω , cuya densidad está dada por $\rho(x)$. Asumamos que este medio físico está sometido a una fuente de calor $f(x, t)$ y denotemos por $u(x, t)$ a la temperatura que hay en el instante de tiempo t en el punto $x \in \Omega$.

Como sabemos, el vector

$$\nabla u(x, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x, t), \frac{\partial u}{\partial x_3}(x, t) \right)$$

está orientado en la dirección en que la temperatura es creciente. Por otro lado, el flujo de calor se mueve de zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura, mientras que la Ley de Fourier establece que el flujo térmico es proporcional al gradiente de las temperaturas, de modo que el flujo se puede escribir como

$$\mathbf{F}(x, t) = -\kappa(x)\nabla u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[,$$

donde $\kappa(x) \geq 0$ es una característica del medio llamada conductividad térmica. Asumiendo que las variaciones de temperatura son moderadas, tratamos de encontrar un modelo que gobierne la difusión del calor. De esta manera, es razonable asumir que las constantes físicas son independientes de la temperatura. Para altas temperaturas y grandes variaciones de la misma, la conductividad puede depender de la temperatura y de sus variaciones, razón por la que aquí excluimos esta situación ya que estamos considerando exacta la Ley de Fourier, la cual conlleva implícitamente la independencia de la conductividad respecto a la temperatura.

Sea $\omega \Subset \Omega$ con frontera $\partial\omega$ de clase C^1 . La Ley de Fourier implica que la cantidad q_1 de calor que se intercambia entre ω y su complemento a través de su frontera $\partial\omega$ en el tiempo t está dada por

$$q_1(t) = \int_{\partial\omega} \kappa(x)\nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \, dS(x),$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario definido en cada punto sobre $\partial\omega$. Luego, desde el Teorema 1.2.1 de Gauss, tenemos que

$$q_1(t) = \int_{\omega} \operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x, t)) \, dx.$$

Por otro lado, la fuente de calor $f(x, t)$ genera una cantidad q_2 de calor en ω en un tiempo t el cual está dado por

$$q_2(t) = \int_{\omega} f(x, t) \, dx.$$

Como la variación de la temperatura con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t),$$

en un intervalo de tiempo Δt , la variación de la cantidad de calor en un instante t en ω se puede aproximar por la cantidad q_3 dada por

$$q_3(t) = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\omega} c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt,$$

donde $c(x)$ es el valor específico del medio y q_3 es la energía calórica contenida en ω . Entonces para que exista equilibrio entre la energía calórica contenida en ω y el calor que se intercambia en $\partial\omega$ junto con la energía desde la fuente de calor, se debe cumplir que

$$\int_t^{t+\Delta t} (q_1(s) + q_2(s)) ds = q_3(t),$$

de donde obtenemos la igualdad

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\omega} \left(\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x, s)) + f(x, s) - c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) \right) dx ds = 0.$$

En vista que ω y Δt son arbitrarios en los puntos donde el integrando es continuo, obtenemos la igualdad

$$\operatorname{div}(\kappa(x)\nabla u(x, t)) + f(x, t) - c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[,$$

que corresponde precisamente a la ecuación del calor en una versión general. Notar que si asumimos que κ , c y ρ son constantes, con $\kappa(x) = \kappa^2 > 0$ y $c(x) = \rho(x) = 1$, entonces obtenemos la clásica ecuación del calor no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[.$$

Una interpretación física más general es aquella en que consideramos a u como la densidad de alguna magnitud que evoluciona en el tiempo. Esto es, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 y $\mathbf{U} \in (C^1(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[))^N$ denota el flujo de la densidad de alguna magnitud en el tiempo, entonces para cada $\omega \Subset \Omega$ con $\partial\omega$ de clase C^1 , la tasa de cambio en el tiempo de la densidad u de alguna magnitud en ω es igual al negativo del flujo neto de \mathbf{U} a través de $\partial\omega$. En otras palabras, para cada $t \in [0, +\infty[$ se cumple que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} u dx = - \int_{\partial\omega} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario definido en cada punto sobre $\partial\omega$. Luego, desde el Teorema 1.2.1 de Gauss se sigue que

$$\int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx = - \int_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{U} dx,$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{U} \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[, \tag{1.3}$$

pues $\mathbf{U} \in (C^1(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)))^N$. Luego, asumiendo que el flujo \mathbf{U} es proporcional al gradiente ∇u , lo cual es físicamente razonable de asumir, apuntando en dirección opuesta (pues el flujo va de regiones de alta concentración a regiones de baja concentración), obtenemos que

$$\mathbf{U} = -a \nabla u \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[\quad (a > 0). \quad (1.4)$$

Considerando $a = \kappa^2 > 0$ y sustituyendo (1.4) en (1.3), obtenemos la clásica ecuación del calor homogénea $u_t = \kappa^2 \operatorname{div} \nabla u$ en $\Omega \times]0, +\infty[$, que equivale a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[.$$

Entre otras aplicaciones, la ecuación del calor o de difusión aparece en estadística vinculándose al estudio del movimiento Browniano por medio de la *ecuación de Fokker-Planck* y en química por medio de la *segunda Ley de Fick*, la cual está vinculada a diversos casos de difusión de materia o energía en un medio en el que inicialmente no existe equilibrio químico o térmico. En situaciones en las que existen gradientes de concentración de una sustancia, o de temperatura, se produce un flujo de partículas o de calor que tiende a homogeneizar la disolución y a uniformizar la concentración o temperatura. El flujo homogeneizador es una consecuencia estadística del movimiento al azar de las partículas en su interior y da lugar al segundo principio de la termodinámica, conocido también como *movimiento térmico casual de las partículas*. Así, los procesos físicos de difusión pueden ser vistos como procesos físicos o termodinámicos irreversibles.

1.2.3. La ecuación de ondas

El estudio de la ecuación de ondas se remonta hasta la antigua Grecia, ante la pregunta

¿Cómo puede una cuerda de violín crear sonidos?

Los pitagóricos se dieron cuenta que si dos cuerdas del mismo tipo y tensión se relacionaban de forma adecuada, entonces se podían producir sonidos muy armoniosos; mientras que si la relación no era la adecuada, los sonidos producidos podían resultar desagradables. En 1727, Johann Bernoulli le dió sentido a estas observaciones, experimentando con una cuerda de violín, y concluyendo que la forma más simple para la vibración de una cuerda es la de una senoide. Sin embargo, la visión más influyente de la ecuación de ondas surgió desde el estudio de las *ecuaciones de Maxwell* sobre electromagnetismo. En resumen, la ecuación de ondas es un modelo simplificado para el estudio de una cuerda vibrante (caso $N = 1$), membrana vibrante (caso $N = 2$), o sólido elástico (caso $N = 3$). En aquellas aplicaciones físicas $u(x, t)$ representa el desplazamiento en alguna dirección de los puntos x en un tiempo t .

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^3 con $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sea $\omega \Subset \Omega$ con frontera $\partial\omega$ de clase C^1 y sea $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$ una función que mide el desplazamiento de la variable espacial en el tiempo. Entonces, para cada tiempo t la aceleración al interior de ω está dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\omega} u \, dx = \int_{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, dx,$$

y la fuerza de contacto neta está dada por

$$- \int_{\partial\omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

donde \mathbf{F} denota la fuerza actuando sobre ω a través de $\partial\omega$, \mathbf{n} denota el vector normal unitario definido en cada punto sobre $\partial\omega$ y la densidad de masa es considerada igual a 1. Las *leyes de Newton* afirman que la masa por la aceleración es igual a la fuerza neta; es decir

$$\int_{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, dx = - \int_{\partial\omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Luego, desde el Teorema 1.2.1 de Gauss obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \mathbf{F} \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[.$$

Ahora, para sólidos elásticos, \mathbf{F} es una función del gradiente del desplazamiento ∇u . Luego,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \operatorname{div} \mathbf{F}(\nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[,$$

y como para ∇u pequeño, en general es posible linealizar $\mathbf{F}(\nabla u)$ aproximadamente como $-a\nabla u$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[,$$

que para la elección $a = \kappa^2 > 0$ corresponde a la ecuación de ondas. Para efectos futuros, mencionamos aquí que las motivaciones físicas sugieren que el modelo matemático considere dos condiciones iniciales, una sobre el desplazamiento de u y otra sobre la velocidad $\frac{\partial u}{\partial t}$, en $t = 0$.

1.3. Clasificación de las EDP de segundo orden

En esta sección seleccionaremos, del inmenso mundo de las ecuaciones diferenciales parciales, algunas ecuaciones que están suficientemente relacionadas con problemas cotidianos.

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea L el operador diferencial definido por

$$L(u) := \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + M(x, u, \nabla u), \quad (1.5)$$

donde M es una expresión que incluye a los términos diferenciales de orden inferior a 2. Supongamos que los coeficientes a_{ij} son continuos en Ω y que para $x \in \Omega$, la matriz de los coeficientes de los términos diferenciales de segundo orden

$$A(x) = (a_{ij}(x)),$$

es simétrica. Entonces, dado $x \in \Omega$, todos los valores propios de $A(x)$ son reales. Sean estos valores propios

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_N(x),$$

e introduzcamos la siguiente notación:

- $N_+(x)$, el número de valores propios positivos de $A(x)$,
- $N_-(x)$, el número de valores propios negativos de $A(x)$,
- $N_0(x)$, el número de valores propios nulos de $A(x)$.

Es claro que estos números verifican lo siguiente:

$$N = N_+(x) + N_-(x) + N_0(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

DEFINICIÓN 1.3.1 Sea $x \in \Omega$. Decimos que el operador L definido por (1.5) es

- i) *elíptico* en x si o bien $N_+(x) = N$ o bien $N_-(x) = N$,
- ii) *parabólico* en x si $N_0(x) > 0$,
- iii) *hiperbólico* en x si o bien $N_+(x) = N - 1$ y $N_-(x) = 1$; o bien $N_-(x) = N - 1$ y $N_+(x) = 1$.

Si L es elíptico, parabólico o hiperbólico en cada $x \in \Omega$, entonces decimos que lo es en Ω . Además, decimos que la ecuación

$$L(u) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

es elíptica, parabólica o hiperbólica si el operador L de la ecuación es respectivamente elíptico, parabólico o hiperbólico.

EJEMPLO 1.3.1 Prueba que la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

es elíptica.

Solución. Tenemos que la matriz A de los coeficientes a_{ij} es constante en Ω ; a saber,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

y $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = -1$. Luego, $N_- = N$ en Ω y por lo tanto la ecuación es elíptica. \square

OBSERVACIÓN 1.3.1 *La ecuación de Poisson modela diversos tipos de modelos estacionarios y/o de equilibrios. Un caso particular de esta ecuación es cuando $f \equiv 0$, en cuyo caso la ecuación es conocida como ecuación de Laplace.*

EJEMPLO 1.3.2 Prueba que la ecuación del calor no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[$$

es parabólica.

Solución. Tenemos que la matriz A de los a_{ij} es constante en Ω ,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = -1$ y $\lambda_{N+1} = 0$. Luego, $N_0 = 1 > 0$ en Ω y por lo tanto la ecuación es parabólica. \square

OBSERVACIÓN 1.3.2 *La ecuación del calor modela una cantidad importante de problemas de difusión. Un caso particular de esta ecuación es cuando $f \equiv 0$, en cuyo caso la ecuación se denomina ecuación del calor homogénea.*

EJEMPLO 1.3.3 Prueba que la ecuación de ondas no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[$$

es hiperbólica.

Solución. Tenemos que la matriz A de los a_{ij} es constante en Ω ,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = -1$ y $\lambda_{N+1} = 1$. Luego, $N_- = N - 1$ en Ω y $N_+ = 1$ en Ω , por lo tanto la ecuación es hiperbólica. \square

OBSERVACIÓN 1.3.3 La ecuación de ondas modela una cantidad importante de fenómenos oscilatorios y de vibraciones. Un caso particular de esta ecuación es cuando $f \equiv 0$, en cuyo caso la ecuación se denomina ecuación de ondas homogénea.

EJEMPLO 1.3.4 Sea $N = 2$ y sea L un operador diferencial con coeficientes constantes como en (1.5), cuya parte principal de segundo orden es

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Asumiendo que u es de clase C^2 , encuentra condiciones sobre a , b y c para que el operador L sea o bien elíptico, o bien parabólico o bien hiperbólico.

Solución. Notemos que la matriz A asociada a los términos de segundo orden está dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4} = 0 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + b^2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = \frac{(a+c)^2 - (a-c)^2 - b^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = \frac{4ac - b^2}{4}. \end{aligned}$$

Luego, la clasificación de L , en términos de los valores propios de la matriz A , queda como sigue:

- L es elíptico $\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$,
- L es parabólico $\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$,
- L es hiperbólico $\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow b^2 > 4ac$. \square

1.4. Algunos modelos más sofisticados*

1.4.1. Un modelo elíptico: equilibrio de un gas en un contenedor

Por *electrohidrodinámica* nos referimos a la ciencia que estudia los movimientos de los fluidos bajo la influencia de ciertos campos eléctricos. Tales movimientos se producen en tubos de vacío, donde el fluido es un gas de electrones; en plasmas, donde el fluido es una mezcla neutra de iones, en la

ionosfera, etc. La modelación que aquí se expone es completamente macroscópica, a diferencia de aquella que proviene de la teórica cinética, donde se determinan los movimientos de las partículas individuales y a partir de ellos se calculan los movimientos macroscópicos. El fluido es tratado como un continuo, y de esta forma es posible considerar fluidos más generales y obtener resultados más precisos.

En este modelo consideramos el equilibrio de una masa M de gas cargado uniformemente dentro de un contenedor (por ejemplo un gas de electrones). Si el gas no tuviese presión, toda la carga debería reposar sobre la pared del contenedor, debido a la repulsión mutua de las cargas que constituyen el gas. Sin embargo, cuando tomamos en cuenta la presión, notamos que ésta impide que el gas se concentre completamente en una capa de la superficie de contenedor, y así el gas se distribuye en el contenedor con mayor densidad en la pared. Además la densidad toma el mismo valor en todos los puntos de la pared. Cuando M crece, la densidad en cada punto dentro del contenedor también crece.

El resultado encontrado no es físicamente obvio: en cada punto interior del contenedor la densidad no aumenta indefinidamente con la masa total de gas; en cambio, en cada punto interior la densidad tiene una cota superior que depende de la forma del contenedor y de la posición del punto. Cuando el punto interior se acerca a la frontera, la cota de la densidad crece indefinidamente. Así que, cuando la masa total de gas en el contenedor crece, la mayor parte del gas se acumula en una fina capa cerca de la superficie. Este comportamiento es similar a aquel descrito en la solución elemental, donde se descuida la presión.

En particular, encontramos que existe una solución en que M es infinita, pero la densidad en cada punto interior es finita.

Modelación del problema

- Consideramos el equilibrio de un fluido cargado dentro de un contenedor.
- Usamos la siguiente notación:
 - p : Presión,
 - ρ : Densidad de masa,
 - \mathbf{E} : Campo eléctrico.
 - a : Radio de la densidad de carga eléctrica para la densidad de masa en el fluido. Luego, a es constante pues estamos asumiendo que el gas es cargado uniformemente en el contenedor.

Veamos el detalle del modelo.

- Un fluido tal alcanza su equilibrio cuando las fuerzas de presión y las fuerzas electrostáticas en él se balancean unas con otras.

- La masa es igual al producto de la densidad de masa del fluido, por su volumen y por la densidad de carga eléctrica a , a saber :

$$a\rho S dx_i.$$

- La fuerza que ejerce el fluido sobre la cara inferior es

$$pS.$$

- La fuerza que ejerce el fluido sobre la cara superior es

$$\left(p + \frac{dp}{dx_i}\right)S,$$

donde $\frac{dp}{dx_i}$ es la variación de la presión para la coordenada i -ésima.

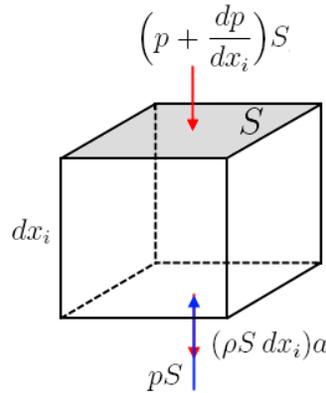


Figura 1.1. Fuerzas en equilibrio sobre un elemento de volumen del fluido

Entonces se espera que la suma de todas estas fuerzas, en el equilibrio, sea igual a cero. Así:

$$a\rho S dx_i + pS - pS + S \frac{dp}{dx_i} = 0,$$

de donde

$$\frac{dp}{dx_i} = -a\rho dx_i \quad \Leftrightarrow \quad \nabla p = a\rho \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

Aquí la constante la constante dieléctrica es 1 pues estamos trabajando en el vacío.

- Si cada molécula del fluido tiene masa m y carga e tal que $a = em^{-1}$, que es el caso cuando el fluido es un gas de electrones.
- El hecho que la carga (que es un fluido de electrones), sea una fuente del campo eléctrico se expresa en la siguiente ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi a\rho. \quad (1.7)$$

- Si la superficie $\partial\Omega$ del contenedor es un conductor perfecto de electricidad (es decir: las cargas circulan por la superficie sin ninguna resistencia y así el campo eléctrico siempre es normal a la superficie), entonces se debe verificar que la componente tangencial del campo eléctrico se anula en la superficie $\partial\Omega$; es decir:

$$\mathbf{E}_{\text{tangencial}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (1.8)$$

- El fluido es caracterizado por una ecuación de estado que expresa a p como una función de ρ y la temperatura.
- Cuando la temperatura es constante, como asumimos aquí, la ecuación de estado toma la forma

$$p = p(\rho). \quad (1.9)$$

- La función $p(\rho)$ es no-negativa y creciente definida para todo $\rho \geq 0$, tiende a ∞ cuando $\rho \rightarrow \infty$.
- La masa total del fluido dentro del contenedor Ω está dada por:

$$M = \int_{\Omega} \rho. \quad (1.10)$$

Físicamente parece que las condiciones precedentes son las únicas que deben ser satisfechas por un gas cargado en un contenedor de conducción ideal. Si esto es así, entonces las ecuaciones (1.6)-(1.10) deberían tener una única solución p , ρ y \mathbf{E} para cada valor M de la masa total. En 1956, Joseph Keller probó que éste es el caso, y determinó algunas propiedades de la solución.

Al eliminar \mathbf{E} desde (1.6) y (1.7) obtenemos:

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = 4\pi a^2 \rho. \quad (1.11)$$

Desde (1.9) tenemos que $p = p(\rho)$, luego (1.11) es una ecuación que sólo depende de ρ . Alternativamente, como $p(\rho)$ es monótona creciente, ρ puede expresarse en términos de p por medio de (1.9) y entonces (1.11) se convierte en una ecuación para p . Sin embargo, es más conveniente introducir una nueva función v definida por

$$v = \int_{p_0}^p \frac{d\xi}{\rho(\xi)}. \quad (1.12)$$

Aquí p_0 es una constante arbitrariamente grande, mayor o igual que $p(0)$. En términos de v , (1.11) se convierte en

$$\Delta v = \nabla^2 v = f(v). \quad (1.13)$$

La función $f(v)$ se define en términos de las funciones inversas $\rho(p)$ y $p(v)$ por

$$f(v) = 4\pi a^2 \rho(p(v)). \quad (1.14)$$

La función $f(v)$ resulta ser no-negativa y creciente en v .

El gas ideal

Para ejemplificar las precedentes consideraciones, consideramos un gas ideal, para el cual la ecuación de estado (1.9) es

$$p = \frac{RT}{m} \rho. \quad (1.15)$$

En (1.15) la temperatura T es constante, R es la constante del gas, y m es la masa promedio de las moléculas en el gas. Entonces, si $p_0 = 1$, se obtiene que

$$v = \frac{RT}{m} \ln p. \quad (1.16)$$

Desde (1.14), (1.15) y (1.16), se sigue que

$$f(v) = \frac{4\pi a^2 m}{RT} e^{\frac{m}{RT}v}. \quad (1.17)$$

Entonces desde (1.13), se sigue que

$$\Delta v = \nabla^2 v = \frac{4\pi a^2 m}{RT} e^{\frac{m}{RT}v}. \quad (1.18)$$

Si definimos una nueva variable u por

$$u = \frac{m}{RT}v + \ln 4\pi \left(\frac{am}{RT}\right)^2,$$

entonces (1.18) llega a convertirse en

$$\Delta u = \nabla^2 u = e^u.$$

De esta forma, obtenemos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = e^u & \text{en } \Omega \\ \lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0} u(x) = \infty. \end{cases} \quad (1.19)$$

Este problema posee una única solución, cuyo perfil asintótico cerca de la frontera del contenedor es conocido.

1.4.2. Un modelo parabólico: coepetición entre especies

Por *coepetición* nos referimos a la interacción entre organismos que compiten en una región a la vez que cooperan entre ellos, ya sea por su posición geográfica, edad, recursos, etc..., pudiendo además desarrollarse independientemente el uno del otro en ciertas subregiones. Algunos ejemplos: los organismos simbióticos, como los líquenes donde el alga suministra energía y el hongo aporta soporte y protección; dos empresas automotrices que intercambian desarrollo

tecnológico, que compiten en ventas en algunos lugares, mientras que en otros una de las empresas se excluye.

En este modelo consideramos organismos de dos especies insertas en un mismo hábitat bajo un régimen de coopección. La existencia de mecanismos cooperativos localizados en un contexto aparentemente competitivo, que en ocasiones son prácticamente imperceptibles, disminuyen la susceptibilidad del sistema a las invasiones e incrementan su productividad, evitando, por ejemplo, que la extinción de un depredador superior en un ecosistema pueda provocar el hundimiento completo del sistema. Esta relación determina la densidad de una especie en un lugar.

Los resultados son bastante diferentes a aquellos obtenidos por Lotka-Volterra donde un modelo depredador-presa es considerado. En aquel modelo las especies involucradas no establecen vínculos localizados de cooperación. Ellas autoregulan su crecimiento poblacional por ciclos y el depredador se asemeja a un devorador, más que a un ente que colabora para sostener un ecosistema. El modelo actual es por lo tanto una extensión del modelo de Lotka-Volterra cuando es permitido que las especies establezcan vínculos localizados de cooperación. Es esta doble acción cooperación-competición es la que constituye uno de los principales mecanismos reguladores de la vida.

Las aplicaciones prácticas de este modelo podrían facilitar la comprensión del comportamiento de una multitud de ecosistemas y mercados financieros, sobre todo en épocas de crisis. Áreas tan diversas como la biología, ecología, sociología, gestión empresarial y economía podrían beneficiarse de este modelo.

Modelación del problema

- Consideramos la coopección entre dos especies biológicas U y V en un hábitat común
- Usamos la siguiente notación:
 - Ω El hábitat donde se encuentran las especies,
 - u : Densidad de población de la especie U en el hábitat Ω ,
 - v : Densidad de población de la especie V en el hábitat Ω ,
 - λ : Tasa de natalidad intrínseca a la especie U (tasa de crecimiento en ausencia de V),
 - μ : Tasa de natalidad intrínseca a la especie V (tasa de crecimiento en ausencia de U),
 - b : Función-Tasa de crecimiento instantáneo de la especie U debida a los beneficios y/o pérdidas que obtiene como resultado de su interacción con V ,
 - c : Función-Tasa de crecimiento instantáneo de la especie V debida a los beneficios y/o pérdidas que obtiene como resultado de su interacción con U .

Veamos el detalle del modelo.

- La velocidad con que varía la población de U es proporcional a la población existente en el momento t . Luego,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda u. \quad (1.20)$$

- La velocidad con que varía la población de U depende directamente de los beneficios y/o pérdidas que obtiene como resultado de su interacción con V en los distintos lugares del hábitat Ω en un tiempo t . Luego, la relación interespecífica está dada por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b(x)uv. \quad (1.21)$$

- La velocidad con que varía la población de U interactúa con sí misma en los distintos lugares del hábitat Ω en un tiempo t . Esta relación intraespecífica en su caso más simple está dada por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^2. \quad (1.22)$$

(En general se considera $\frac{\partial u}{\partial t} = -a(x)u^2$).

- Ignorando la dinámica entre la especie U y V , la densidad de la población U dispersándose en el hábitat Ω vía difusión está dada por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta u, \quad (1.23)$$

donde D_1 describe la tasa del movimiento.

Entonces acoplando las ecuaciones (1.20)-(1.23) anteriores, y simplificando la mayor cantidad de constantes posibles, obtenemos la siguiente ecuación para la dinámica poblacional, con difusión, de U con respecto a V :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - u^2 - b(x)uv \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[. \quad (1.24)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, con los correspondientes modificaciones, obtenemos la siguiente ecuación para la dinámica poblacional, con difusión, de V con respecto a U :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \mu v - v^2 - c(x)uv \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[. \quad (1.25)$$

Una condición de frontera natural es que fuera del hábitat las especies no sobreviven en cualquier tiempo t , de esa forma se espera que

$$u = v = 0 \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times]0, +\infty[. \quad (1.26)$$

Por otro lado, la condición inicial natural es aquella en que nos encontramos al momento de comenzar a aplicar el modelo, esto es

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.27)$$

En definitiva, desde (1.24)–(1.27), el problema considerado es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - u^2 - b(x)uv & \text{en } \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \mu v - v^2 - c(x)uv & \text{en } \Omega \times]0, +\infty[\\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u = u_0 \geq 0 & \text{sobre } \Omega \times \{0\} \\ v = v_0 \geq 0 & \text{sobre } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (1.28)$$

donde Ω es un dominio suave acotado de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, con $\partial\Omega$ de clase C^3 , Δ representa el operador Laplaciano y $b, c \in C(\bar{\Omega})$.

Si consideramos el modelo para una especie en ausencia de la otra, observamos que cada una crece de acuerdo al siguiente modelo logístico

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \gamma w - w^2 & \text{en } \Omega \times]0, +\infty[\\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ w = w_0 \geq 0 & \text{sobre } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Luego, el límite correspondiente a la distribución de la población cuando $t \uparrow \infty$ está determinado por el estado estacionario no negativo de (1.29); es decir, por el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w = \gamma w - w^2 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

De forma similar, notemos que los estados estacionarios de (1.28) son las soluciones no negativas del siguiente problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u - u^2 - b(x)uv & \text{en } \Omega \\ -\Delta v = \mu v - v^2 - c(x)uv & \text{en } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

OBSERVACIÓN 1.4.1 *Biológicamente parece que las condiciones precedentes son las únicas que deben ser satisfechas por dos especies que compiten y cooperan en un hábitat, al menos en los casos especiales que aquí hemos considerado para simplificar el modelo. Si esto es así, entonces el sistema (1.28) debiese tener una solución u, v .*

1.4.3. Un modelo hiperbólico: cuerda vibrante

Una cuerda es un medio continuo unidimensional, elástico que no ofrece resistencia a la flexión.

Modelación del problema

Asumamos que una cuerda ubicada en el plano Oxu es sometida a vibraciones transversales, sin salir de dicho plano, respecto a su posición de equilibrio, que asumimos coincidente con el eje Ox a lo largo del intervalo $[0, L]$. Aquí,

- $u(x, t)$ denota la magnitud del desplazamiento de la cuerda en el punto x , en el instante t .
- Por simplicidad, estudiaremos pequeñas vibraciones, es decir, vibraciones tales que

$$\tan \alpha = \frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial x},$$

implican que $(\tan \alpha)^2$ es muy pequeño en relación a $\tan \alpha$, de forma que los términos conteniendo $(\tan \alpha)^2$ pueden ser despreciados en la modelación.

- $T(x, t)$ denota la tensión en cada punto x y cada instante t que se supone dirigida en la dirección de la tangente a la cuerda en el punto x con módulo $|T(x, t)|$. Esta hipótesis representa justamente la falta de resistencia a la flexión.
- La longitud de un segmento $]a, a + h[$ al deformarse se convierte en

$$s = \int_a^{a+h} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \sim h,$$

debido a la hipótesis hecha sobre el tamaño de las vibraciones. Esto quiere decir que bajo nuestras condiciones, la cuerda resulta aproximadamente inextensible. Por lo tanto, el módulo de la tensión, cuya variación es proporcional al estiramiento según la *Ley de Hooke*, resulta ser constante,

$$|T(x, t)| \equiv T_0.$$

- Sea $F(x, t)$ la magnitud de la fuerza que es aplicada perpendicularmente al eje Ox en el punto x y en el instante t ; sea $\rho(x)$ la función densidad de la cuerda que, razonablemente, se supone independiente del tiempo. La Ley del movimiento viene dada por la Ley de Newton

$$\text{Masa} \times \text{Aceleración} = \text{Fuerza}. \quad (1.30)$$

Las fuerzas que actúan sobre un elemento $[x, x + \Delta x]$ son aproximadamente:

- i) Las fuerzas de tensión

$$T_0 (\sin \alpha(x + \Delta x) - \sin \alpha(x))$$

se pueden aproximar por

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} \sim \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

pues al asumir vibraciones pequeñas podemos despreciar el término $(\tan \alpha)^2$.

ii) Las fuerzas externas las aproximamos por $F(x, t)\Delta x$, que es razonable con hipótesis de continuidad sobre F . Con estas consideraciones (1.30) se puede expresar por

$$T_0(\sin \alpha(x + \Delta x) - \sin \alpha(x)) + F(x, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

o bien, efectuando la sustitución de $\sin \alpha$ por $\tan \alpha$ como se indicó antes,

$$\frac{T_0}{\Delta x} \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Luego, pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación siguiente

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

que rige el movimiento en las hipótesis hechas.

- Una condición natural para una cuerda es que tenga los extremos fijos; es decir,

$$u(0, t) = 0 = u(L, t) \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Finalmente, obtenemos el siguiente problema mixto de valores iniciales y de frontera

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} & \text{en }]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in [0, L]. \end{array} \right.$$

1.5. Condiciones sobre una EDP de segundo orden

Supongamos que tenemos una EDP (lineal o no lineal) que modela un problema que queremos resolver. Desde el punto de vista físico es natural pensar que nuestra solución debe satisfacer ciertos requerimientos, que se traducen en ciertas condiciones prefijadas, como por ejemplo:

- condiciones sobre la frontera o borde de la región en estudio, conocidas como condiciones de frontera (CF). Por ejemplo, en el caso de que queramos estudiar la distribución del calor en una barra delgada o lámina delgada, podríamos preguntarnos si sobre la frontera la barra o la lámina es térmicamente aislada o bien si hay intercambio de calor con el medio;
- condiciones de temperatura prefijadas que esperamos tener sobre la frontera de la región en cualquier tiempo t ;

c) condiciones iniciales (CI) sobre el calor que deseamos aplicar en el instante $t = 0$; etc. . . .

De esta forma, nuestro problema general está compuesto por una EDP, alguna(s) CF, y en caso de tener dependencia en el tiempo, alguna(s) CI. En el caso de una ecuación como la del calor o la de ondas, deberíamos tener la siguiente estructura:

$$\left\{ \begin{array}{l} EDP \\ CF \\ CI. \end{array} \right.$$

En el caso de una ecuación como la de Laplace, deberíamos tener la siguiente estructura:

$$\left\{ \begin{array}{l} EDP \\ CF. \end{array} \right.$$

1.5.1. Condiciones iniciales y de frontera

A continuación vamos a precisar el asunto de las condiciones que permiten estudiar existencia y unicidad de soluciones de ciertas EDP. Aquí, Ω representa un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $\partial\Omega$ a su frontera, y I a un intervalo abierto de números reales.

Condiciones de frontera tipo Dirichlet

- En el caso en que u no depende de una variable temporal, la condición de Dirichlet está dada por

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

donde $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida.

- En el caso en que u depende de una variable temporal, la condición de Dirichlet está dada por

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \bar{I},$$

donde $g : \partial\Omega \times \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida.

Condiciones de frontera tipo Neumann

- En el caso en que u no depende de una variable temporal, la condición de Neumann está dada por

$$\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = h(x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

donde $h : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida.

- En el caso en que u depende de una variable temporal, la condición de Neumann está dada por

$$\nabla u(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = h(x, t) \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \bar{I},$$

donde $h : \partial\Omega \times \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida.

Condiciones de frontera mixtas

Las condiciones mixtas corresponden a un grupo de condiciones de frontera donde se emplean condiciones tipo Dirichlet y condiciones tipo Neumann en porciones de la frontera.

Condiciones iniciales o de Cauchy

Estas condiciones tienen sentido en problemas donde la variable temporal está presente. Más aun, cuando en la EDP aparece una derivada temporal de primer orden, una típica CI es

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

donde $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es dada como dato; mientras que si en la EDP aparece una derivada temporal de segundo orden, entonces es esperable que surja una segunda CI de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

donde $u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es dada como dato.

1.6. Problemas bien puestos para una EDP de segundo orden

En esta sección estamos interesados en averiguar qué requisitos le vamos a pedir a un problema de EDP para que realmente sea interesante el intentar resolverlo. La siguiente definición se debe a Hadamard.

DEFINICIÓN 1.6.1 Se dice que un problema de EDP es un *problema bien puesto* si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- i) Existencia: existe solución
- ii) Unicidad: la solución es única
- iii) Estabilidad: la solución depende continuamente de los datos del problema.

1.6.1. Estabilidad

Las dos primeras exigencias son naturales. Por otro lado, la condición de estabilidad parece razonable toda vez que es la que nos permite aproximar el problema real, pues garantiza que pequeñas variaciones en los datos del problema producen pequeñas variaciones con respecto a la solución del problema original. Pero en general,

Al hacer pequeños cambios en la EDP, o en las CF o en las CI, que modelan un problema ¿Son las soluciones obtenidas pequeñas variaciones respecto de la solución del problema original?

Aunque la mayoría de los problemas que se estudian en matemática están bien puestos, hay algunos que no lo están, como se observa en el siguiente ejemplo de Hadamard.

EJEMPLO 1.6.1 Sea $\varepsilon > 0$ y considere el problema elíptico

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (x, t) \in]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

¿Es este un problema bien puesto?

Solución. Una solución de este problema es $u \equiv 0$. Por otro lado, cuando uno varía levemente la segunda condición inicial pueden suceder cosas inesperadas. Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in]0, \varepsilon[\times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\text{sen}(Mx)}{M}, \end{cases}$$

con M muy grande. Una solución de este último problema es

$$u(x, t) = \frac{\text{sen}(Mx) \text{senh}(Mt)}{2M^2}.$$

Claramente, para $x_0 \in]0, \varepsilon[$ fijo, $u(x_0, t)$ crece exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$, pues $\text{senh}(t)$ es del mismo orden que e^t cuando $t \rightarrow \infty$; así, un pequeño cambio en los datos genera un gran cambio en las soluciones. Por esta razón, la solución no depende continuamente de los datos iniciales, en concreto de la velocidad inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$. Por lo tanto, el problema no es estable; y así el problema no está bien puesto. \square

1.6.2. Unicidad

Partimos recordando algunos resultados básicos para establecer unicidad. Estos resultados son

consecuencias del Teorema 1.2.1 de Gauss, y corresponden al Teorema de integración por partes y el Teorema de las identidades de Green. Aquí $\mathbf{n} = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_N)$ representa al vector normal exterior unitario sobre la frontera de cierto subconjunto en \mathbb{R}^N .

TEOREMA 1.6.1 (Teorema de integración por partes) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Entonces:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} u v \hat{n}_i \, dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

TEOREMA 1.6.2 (Identidades de Green) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Se verifica lo siguiente:

$$i) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} u \Delta v \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}), \forall v \in C^2(\bar{\Omega})$$

$$ii) \int_{\partial\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \quad \forall u, v \in C^2(\bar{\Omega})$$

$$iii) \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}).$$

Demostración.

i) Notar que $u \frac{\partial v}{\partial x_i} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2, \dots, N$. Entonces, desde el Teorema 1.2.1 de Gauss obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u \nabla v),$$

y como

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \nabla v + u \Delta v,$$

se concluye que

$$\int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u \Delta v).$$

Reordenando apropiadamente, obtenemos el resultado deseado.

ii) Desde la parte anterior, tenemos

$$\int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u \Delta v)$$

y

$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (\nabla v \nabla u + v \Delta u).$$

Restando apropiadamente las dos igualdades anteriores, obtenemos el resultado.

iii) Sea $v \equiv 1$ y $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Aplicando la primera parte de esta demostración después de intercambiar u por v , obtenemos directamente el resultado. ■

Unicidad de soluciones para problemas que involucran la ecuación de Poisson

Una ecuación de la forma

$$-\Delta u = f$$

recibe el nombre de ecuación de Poisson, de manera que la ecuación de Laplace puede ser vista como un caso particular de la ecuación de Poisson (esto es, cuando $f \equiv 0$).

TEOREMA 1.6.3 (Unicidad bajo condición Dirichlet sobre la frontera) Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\bar{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$. El problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.31)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Demostración. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ dos soluciones del problema (1.31) y definamos $w = u_1 - u_2$. Es claro que $w \in C^2(\bar{\Omega})$ y satisface:

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.32)$$

Por otra parte, por Teorema 1.6.2 parte i), obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w = \int_{\partial\Omega} w \nabla w \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} w \Delta w$$

y usando el hecho que w verifica (1.32), se sigue que

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0.$$

Esto implica que

$$|\nabla w|^2 = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

pero como $w \in C^2(\bar{\Omega})$, en verdad tenemos que

$$\nabla w = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

que conduce a que w sea constante en Ω . Así, como $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces

$$w \equiv 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Se concluye por tanto que

$$u_1 \equiv u_2 \quad \text{en } \Omega. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 1.6.4 (Unicidad bajo condición Neumann sobre la frontera) Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\bar{\Omega})$ y $h \in C(\partial\Omega)$. El problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.33)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\bar{\Omega})$ salvo constante.

Unicidad de soluciones para problemas involucrando la ecuación del calor

TEOREMA 1.6.5 (Unicidad bajo condición Cauchy–Dirichlet sobre la frontera)

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$, $g \in C(\partial\Omega \times [0, +\infty[)$ y $u_0 \in C(\bar{\Omega})$. El problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, t) = g(x, t) & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.34)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$.

Demostración. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$ dos soluciones del problema (1.34) y definamos $w = u_1 - u_2$. Es claro que $w \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$ y satisface:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - \Delta w(x, t) = 0 & (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[\\ w(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[\\ w(x, 0) = 0 & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.35)$$

Definamos ahora

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w(x, t))^2 dx.$$

Gracias a la condición inicial, se verifica que $c(0) = 0$. Por otro lado, desde la ecuación diferencial en (1.35), el Teorema 1.6.2 parte i), y el hecho que $w(x, t) = 0$ si $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[$, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= \int_{\Omega} w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} w(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} w(x, t) \nabla w(x, t) \mathbf{n}(x) dS - \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego, por el criterio de la primera derivada, obtenemos que

$$c \text{ es decreciente en } [0, +\infty[,$$

y como $c(0) = 0$ y, por definición de c , $c(t) \geq 0$ para toda $t \geq 0$, se sigue que

$$c(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces, nuevamente desde la definición de c , concluimos que

$$w \equiv 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, +\infty[,$$

que conduce a

$$u_1 \equiv u_2 \quad \text{en } \Omega \times [0, +\infty[. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 1.6.6 (Unicidad bajo condición Cauchy–Neumann sobre la frontera)

Sea Ω un conjunto

abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\bar{\Omega} \times]0, +\infty[)$, $h \in C(\partial\Omega \times [0, +\infty[)$ y $u_0 \in C(\bar{\Omega})$. El problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = h(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (1.36)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$.

Unicidad de soluciones para problemas que involucran la ecuación de ondas

TEOREMA 1.6.7 (Unicidad bajo condición Cauchy–Dirichlet sobre la frontera)

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\bar{\Omega} \times]0, +\infty[)$, $g \in C(\partial\Omega \times [0, +\infty[)$, $u_{0,1} \in C(\bar{\Omega})$ y $u_{0,2} \in C(\bar{\Omega})$. El problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, t) = g(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_{0,1}(x) \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_{0,2}(x) \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (1.37)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$.

TEOREMA 1.6.8 (Unicidad bajo condición mixta sobre la frontera) Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\overline{\Omega} \times]0, +\infty[)$, $g \in C(\partial\Omega \times [0, +\infty[)$, $u_{0,1} \in C(\overline{\Omega})$ y $u_{0,2} \in C(\overline{\Omega})$. El problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) = h(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_{0,1}(x) \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_{0,2}(x) \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (1.38)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, +\infty[)$.

1.7. Linealidad y superposición*

1.7.1. Ecuaciones diferenciales parciales lineales

Una EDP es llamada *ecuación diferencial parcial lineal* (EDPL) si el operador diferencial asociado a la EDP es lineal en la función u y en todas sus derivadas parciales.

EJEMPLO 1.7.1 Muestra que la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

es lineal.

Solución. El operador diferencial asociado a la EDP es

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

que es lineal, pues verifica

$$L(u + \alpha v) = \frac{\partial}{\partial x}(u + \alpha v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = L(u) + \alpha L(v). \quad \square$$

EJEMPLO 1.7.2 Muestra que la ecuación del calor no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t)$$

es lineal.

Solución. El operador diferencial asociado a la EDP es

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$$

que es lineal, pues verifica

$$L(u + \alpha v) = \frac{\partial}{\partial t}(u + \alpha v) - \Delta(u + \alpha v) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \right) = L(u) + \alpha L(v). \quad \square$$

OBSERVACIÓN 1.7.1 La EDPL de segundo orden general en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, es la siguiente

$$L(u) = f$$

donde

$$L(u) := \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\ell=1}^N a_{\ell} \frac{\partial u}{\partial x_{\ell}} + a_0 u \quad (1.39)$$

y a_{ij} , a_{ℓ} , a_0 y f son funciones conocidas. Eventualmente, para $N \geq 2$, la N -ésima variable puede considerarse como un valor $t \in I$, con I un intervalo en \mathbb{R} , y considerar $\Omega = \Omega' \times I$. En consecuencia, para convenientes elecciones de a_{ij} , a_{ℓ} , a_0 y f , este operador se puede asociar a las ecuaciones de Laplace, Poisson, del Calor y de Ondas, entre otras.

1.7.2. Problemas lineales

Sabemos que para obtener una solución concreta de una EDP de segundo orden se requiere cierta información adicional denominada condiciones de frontera (CF) y/o condiciones iniciales (CI), la que también podemos expresar a través de operadores lineales, de orden inferior al de la EDP. Así, tenemos que en \mathbb{R}^N el problema lineal más general posible en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(u) = f & \text{en } \Omega \\ B_1(u) = g_1 & \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(u) = g_2 & \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots & \dots \\ B_K(u) = g_K & \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (1.40)$$

donde L es el operador definido en (1.39), con a_{ij} , a_{ℓ} , a_0 y f funciones conocidas;

$$B_k(u) := \sum_{i=1}^N b_{i,k} u_{x_i} + b_{0,k} u \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

con $b_{i,k}$, $b_{0,k}$ y g_k funciones conocidas; y $\Lambda_k \subset \partial\Omega$, para $k = 1, 2, \dots, K$, con

$$\partial\Omega = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_K.$$

1.7.3. Propiedades de los problemas lineales

- **Homogeneización de la EDP.** Si conocemos una solución particular de la EDP en (P_u) , digamos \bar{u} (por lo tanto se cumple que $L(\bar{u}) = f$ en Ω), entonces se puede homogeneizar la EDP del problema (1.40) a través del cambio de variables

$$v = u - \bar{u}$$

y obtener un problema equivalente a (1.40), a saber

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(v) = 0 & \text{en } \Omega \\ B_1(v) = G_1 & \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(v) = G_2 & \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots & \dots \\ B_K(v) = G_K & \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (1.41)$$

donde $G_i = g_i - B_i(\bar{u})$ sobre Λ_i , $i = 1, 2, \dots, K$.

- **Homogeneización de una CF.** Si conocemos una función G que verifica una condición de frontera, por ejemplo

$$B_1(G) = g_1,$$

entonces se puede homogeneizar la correspondiente condición de frontera de (1.40) usando el cambio de variables

$$w = u - G,$$

y obtener un problema equivalente a (1.40), a saber

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(w) = F & \text{en } \Omega \\ B_1(w) = 0 & \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(w) = G_1 & \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots & \dots \\ B_K(w) = G_K & \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (1.42)$$

donde $F(x) = f - L(G)$ en Ω y $G_i = g_i - B_i(G)$ sobre Λ_i , $i = 2, 3, \dots, K$.

- **Desacoplamiento de un problema lineal.** El problema (1.40) se puede descomponer en la suma de $K + 1$ problemas simples, tal como se muestra a continuación

$$\left\{ \begin{array}{ll} L(u_0) = f & \text{en } \Omega \\ B_1(u_0) = 0 & \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(u_0) = 0 & \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots & \dots \\ B_K(u_0) = 0 & \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (P_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(u_1) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ B_1(u_1) = g_1 \quad \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(u_1) = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots \quad \dots \\ B_K(u_1) = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (P_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(u_2) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ B_1(u_2) = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(u_2) = g_2 \quad \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots \quad \dots \\ B_K(u_2) = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (P_2)$$

.....

$$\left\{ \begin{array}{l} L(u_K) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ B_1(u_K) = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(u_K) = 0 \quad \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots \quad \dots \\ B_K(u_K) = g_K \quad \text{sobre } \Lambda_K, \end{array} \right. \quad (P_K)$$

De esta forma, la solución u del problema (1.40) puede ser considerada como la suma de las soluciones u_i de los respectivos problemas (P_i) ; es decir

$$u = \sum_{i=0}^K u_i$$

es una solución de (1.40).

EJEMPLO 1.7.3 Considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \text{sen}(\pi x) \quad \text{en }]0, 1[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = 0 \quad t \in [0, +\infty[\\ u(1, t) = 0 \quad t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = 0 \quad x \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Estudia la linealidad del problema (1.43) y homogeneiza la ecuación sabiendo que la función $\bar{u}(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x)$ la satisface.

Solución. Sea $v = u - \bar{u}$, entonces

- $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - 0 = \frac{\partial u}{\partial t}$
- $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x) \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen}(\pi x)$
- $v(0, t) = u(0, t) - \frac{1}{\pi^2} \text{sen } 0 = 0$
- $v(1, t) = u(1, t) - \frac{1}{\pi^2} \text{sen } \pi = 0$
- $v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x) = -\frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x)$.

De esta forma, obtenemos un problema equivalente a (1.43), con EDP homogénea, a saber

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{en }]0, 1[\times]0, +\infty[\\ v(0, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ v(1, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ v(x, 0) = -\frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi x) & x \in [0, 1]. \quad \square \end{array} \right.$$

EJEMPLO 1.7.4 Considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{en }]0, 1[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(1, t) = e^t & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (1.44)$$

Estudia la linealidad del problema (1.44) y homogeneiza la condición de frontera en $x = 1$ sabiendo que $G(x, t) = xe^t$ satisface la condición de frontera cuando $x = 1$.

Solución. Sea $v = u - G$, entonces

- $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(xe^t) = \frac{\partial u}{\partial t} - xe^t$
- $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xe^t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- $v(0, t) = u(0, t) - G(0, t) = 0$
- $v(1, t) = u(1, t) - G(1, t) = e^t - e^t = 0$
- $v(x, 0) = u(x, 0) - G(x, 0) = -x$.

De esta forma, obtenemos un problema equivalente a (1.44), con condición de frontera en $x = 1$ homogénea, a saber

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -xe^t \quad \text{en }]0, 1[\times]0, +\infty[\\ v(0, t) = 0 \quad t \in [0, +\infty[\\ v(1, t) = 0 \quad t \in [0, +\infty[\\ v(x, 0) = -x \quad x \in]0, 1[. \quad \square \end{array} \right.$$

EJEMPLO 1.7.5 Resuelve el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 6xy \quad (x, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R} \\ u(0, y) = y \quad y \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \quad y \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Solución.

- Integrando $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dos veces con respecto a x , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + C_1(y) \\ &\Rightarrow u = x^3y + C_1(y)x + C_2(y). \end{aligned}$$

- Usando la forma de la solución obtenida, consideramos ahora la primera condición de frontera para encontrar $C_2(y)$. Tenemos

$$\begin{aligned} u(0, y) = y &\Rightarrow u(0, y) = (0)^3y + C_1(y) \cdot 0 + C_2(y) = y \\ &\Rightarrow C_2(y) = y. \end{aligned}$$

- Usando la forma de la solución obtenida, consideramos ahora $C_2(y) = y$ y la segunda condición de frontera para encontrar $C_1(y)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 3 \cdot 1^2 \cdot y + C_1(y) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 3y + C_1(y) = 0 \\ &\Rightarrow C_1(y) = -3y. \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos que la solución del problema (1.45) es

$$u(x, y) = x^3y - 3yx + y. \quad \square$$

EJEMPLO 1.7.6 Resuelva el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2x & (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, y) = 0 & y \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = x^2 & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (1.46)$$

Solución.

- Integrando $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dos veces con respecto a y , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + C_1(x) \\ &\Rightarrow u = xy^2 + C_1(x)y + C_2(x). \end{aligned}$$

- Usando la forma de la solución obtenida, consideramos ahora la segunda condición de frontera para encontrar $C_2(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) = x^2 &\Rightarrow u(x, 0) = x \cdot 0^2 + C_1(x) \cdot 0 + C_2(x) = x^2 \\ &\Rightarrow C_2(x) = x^2. \end{aligned}$$

- Usando la forma de la solución obtenida, consideramos ahora $C_2(x) = x^2$ y la primera condición de frontera para encontrar $C_1(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0 \cdot y^2 + C_1(0)y + C_2(0) &\Rightarrow u(0, y) = C_1(0)y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow C_1(0) = 0. \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos que una solución del problema (1.46) es

$$u(x, y) = xy^2 - C_1(x)y + x^2,$$

donde $C_1 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua cualquiera tal que $C_1(0) = 0$. \square

1.7.4. Principio de superposición

- Supongamos que queremos resolver el problema:

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ B_1(u) = g_1(x) & \text{sobre } \Lambda_1 \\ B_2(u) = 0 & \text{sobre } \Lambda_2 \\ \dots & \dots \\ B_K(u) = 0 & \text{sobre } \Lambda_K, \end{cases} \quad (1.47)$$

y supongamos que u_1, u_2, \dots, u_K son cada una, una solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ B_i(u) = 0 & \text{sobre } \Lambda_i, \quad \forall i = 2, 3, \dots, K. \end{cases}$$

Si es posible escribir g_1 en la forma

$$g_1 = c_1 B_1(u_1) + c_2 B_1(u_2) + \dots + c_K B_1(u_K) \quad \text{sobre } \Lambda_1,$$

entonces

$$u = \sum_{i=1}^K c_i u_i$$

es una solución del problema (1.47).

- Otro caso en que tenemos superposición de soluciones es el siguiente. Supongamos que queremos resolver el problema

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ B(u) = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.48)$$

y supongamos que u_1, u_2, \dots, u_n son soluciones de la EDP

$$L(u) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si es posible escribir

$$g = \sum_{i=1}^n c_i B(u_i) \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

entonces

$$u = \sum_{i=1}^n c_i u_i$$

es una solución de (1.48).

OBSERVACIÓN 1.7.2 Si Ω es un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y $\{u_i\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones que conforman un sistema ortogonal completo en $L^2(\Omega)$, siendo cada una de las u_i una solución de la EDP

$$L(u) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

y tales que $\{B(u_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es un sistema ortogonal completo en $L^2(\Omega)$ y

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i B(u_i),$$

entonces es razonable pensar que una solución del problema (1.48) este dada por

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i.$$

1.8. Existencia de soluciones vía separación de variables*

Partimos recordando algunos resultados, que son los ingredientes que nos permiten abordar el problema de existencia vía separación de variables en dimensiones pequeñas. Este método es constructivo, y consiste en suponer que las soluciones tienen una forma predeterminada, y entonces separar el problema en otros problemas que de ser resueltos de forma independiente, conducen a una solución del problema original mediante superposición de soluciones.

TEOREMA 1.8.1 La ecuación diferencial

$$u'' + pu' + qu = 0$$

tiene ecuación característica

$$m^2 + pm + q = 0$$

cuyas raíces o soluciones son

$$m_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

i) Si m_1 y m_2 son raíces reales diferentes, entonces la familia de soluciones u está dada por

$$u(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}.$$

ii) Si m_1 y m_2 son raíces reales e iguales. La familia de soluciones u está dada por

$$u(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x}.$$

iii) Si $m_1 \in \mathbb{C}$, digamos $m_1 = a + bi$, entonces $m_2 = a - bi$; es decir m_1 y m_2 son raíces complejas conjugadas. En este caso, la familia de soluciones u está dada por

$$u(x) = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx).$$

El siguiente resultado es debido a los matemáticos franceses Jacques Charles François Sturm y Joseph Liouville.

TEOREMA 1.8.2 Sobre el problema regular de Sturm–Liouville

$$\begin{cases} (p(x) u'(x))' + q(x) u(x) = \lambda u(x) & x \in]a, b[\\ a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0 \\ b_0 u(b) + b_1 u'(b) = 0, \end{cases}$$

donde $|a_0| + |a_1| > 0$ y $|b_0| + |b_1| > 0$, se verifica lo siguiente:

i) $\exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ familia numerable de valores propios reales y simples tales que

$$|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| < \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

ii) Las correspondientes funciones propias asociadas a $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ forman una base ortogonal para el espacio $L^2(a, b)$

iii) Si φ es continua y satisface las CF, entonces

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle \varphi, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|_{L^2(a,b)}} \varphi_n,$$

con $\langle \varphi, \varphi_n \rangle = \int_a^b \varphi \varphi_n \, dx$, siendo la convergencia uniforme y absoluta.

Algunos sistemas ortogonales trigonométricos completos sobre el intervalo $[0, L]$ están dados en los siguientes dos teoremas

TEOREMA 1.8.3 El conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \dots \right\},$$

es un sistema ortogonal completo en $L^2([0, L])$.

Poniendo

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \dots, \varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \dots \right\},$$

para $f \in L^2([0, L])$, la serie

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi_k$$

se llama *serie de Fourier* generada por f con respecto al sistema \mathcal{S} , y se escribe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

TEOREMA 1.8.4 El conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \dots, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \dots \right\},$$

es un sistema ortogonal completo en $L^2([0, L])$.

Poniendo

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi_1(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right), \varphi_2(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{L} x \right), \dots, \varphi_n(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \dots \right\},$$

para $f \in L^2([0, L])$, la serie

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k$$

se llama *serie de Fourier* generada por f con respecto al sistema \mathcal{S} , y se escribe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right),$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

PROBLEMA 1.8.1 Resuelve el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación del calor homogénea unidimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(L, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1.49)$$

con $g \in C^2([0, L])$ tal que $g(0) = g(L) = 0$.

Físicamente, el problema (1.49) puede interpretarse como la difusión de calor a través de una barra delgada de longitud L , con distribución de temperatura inicial dada, y cuyos extremos se mantienen a temperatura constante nula. Aquí:

- $u(x, t)$ representa la temperatura en cada punto x de la barra, en el tiempo t
- κ^2 es una constante no nula que representa la difusividad térmica de la barra, la cual depende sólo de las propiedades del material con que está hecha la barra.
- Las condiciones de frontera (CF) son de tipo Dirichlet homogéneas, y ellas son las que fijan la temperatura igual a cero en los extremos de la barra en cualquier instante t .
- La condición inicial (CI) señala la distribución de la temperatura sobre la barra en el tiempo $t = 0$. A partir de ese momento es cuando la dinámica de la distribución de la temperatura queda gobernada por la EDP y las CF.

Solución. Supongamos que el problema posee una solución de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[.$$

Notar que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = X(x) \frac{dT}{dt}(t) = X(x)T'(t) \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)T(t)) = \frac{d^2 X}{dx^2}(x)T(t) = X''(x)T(t) \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[.$$

Reemplazando esta forma de solución en la EDP, obtenemos

$$X(x)T'(t) - \kappa^2 X''(x)T(t) = 0 \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[,$$

de donde

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[.$$

Por lo tanto, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0 & \forall t \in]0, +\infty[& (ET) \\ X''(x) - \mu X(x) = 0 & \forall x \in]0, L[& (EX), \end{cases} \quad (1.50)$$

con $\mu = \frac{\lambda}{\kappa^2}$.

Análisis de las condiciones de frontera. Ahora usamos las CF en (1.49) para obtener adecuadas CF para X en (1.50). Tenemos,

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[&\Rightarrow X(0)T(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[\\ &\Rightarrow X(0) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[&\Rightarrow X(L)T(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[\\ &\Rightarrow X(L) = 0. \end{aligned}$$

Luego, desde (1.50)-(EX) y los resultados previos, formamos el siguiente problema de Sturm–Liouville

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 & \forall x \in]0, L[\\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0. \end{cases} \quad (1.51)$$

La ecuación característica asociada a la EDO del problema previo es

$$m^2 - \mu = 0,$$

de donde

$$m = \pm\sqrt{\mu}.$$

A continuación analizamos los valores propios asociados al problema de Sturm–Liouville.

1º) Al multiplicar en la ED en (1.51) por X e integrando entre 0 y L , obtenemos

$$\int_0^L X''(s)X(s) ds = \mu \int_0^L |X(s)|^2 ds.$$

Integrando por partes, y usando las CF para X dadas en (1.51), se sigue que

$$- \int_0^L |X'(s)|^2 ds = \mu \int_0^L |X(s)|^2 ds,$$

que implica que $\mu < 0$, dado que $X \neq 0$ en $]0, L[$. Por lo tanto, $\mu \geq 0$ no es valor propio.

2º) Caso $\mu < 0$. Sabemos que en este caso las posibles soluciones son de la forma

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\mu}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\mu}x) \quad \forall x \in [0, L].$$

Desde las CF en (1.51), se sigue que

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cos(\sqrt{-\mu}L) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\mu}L) = 0,$$

de donde obtenemos

$$C_1 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\mu}L) = 0,$$

y considerando $C_2 \neq 0$, concluimos que

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\mu}L) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sqrt{-\mu}L = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N} &\Leftrightarrow \mu = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\kappa^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lambda_n = -\kappa^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

son todos sus valores propios, cuyas respectivas funciones propias asociadas son

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, desde (1.50)-(ET), notamos que nuestra ecuación para T es

$$T'(t) - \lambda_n T(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como buscamos $T \neq 0$ tal que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda_n \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ integramos y obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \lambda_n \int dt &\Rightarrow \ln(T(t)) = \lambda_n t + C_{0,n} \quad \forall t \in]0, +\infty[\\ &\Rightarrow \ln(T(t)) - \ln C_n = \lambda_n \quad \text{con } C_{0,n} = \ln C_n \quad \forall t \in]0, +\infty[, \\ &\Rightarrow \frac{T(t)}{C_n} = e^{\lambda_n t} \quad \forall t \in]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Así, podemos considerar

$$T_n(t) = C_n e^{-\kappa^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, por construcción, la función

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-\kappa^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

satisface la EDP y las CF.

Ahora, por el principio de superposición, es válido suponer que la solución del problema tiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\kappa^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[.$$

Análisis de la condición inicial. Ahora usamos la CI de (1.49) para obtener la única solución que resuelve el problema, para ello usaremos el hecho que las funciones propias X_n forman un sistema ortogonal completo en $L^2([0, L])$.

Desde la CI se sigue que

$$\begin{aligned} u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in [0, L] &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = g(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (\text{serie de Fourier de } g) \\ &\Rightarrow C_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} s \right) ds \quad (\text{coeficientes de Fourier de } g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única solución del problema es

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L g(s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} s \right) ds \right) e^{-\kappa^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[.$$

1.9. Problemas propuestos

1. Considera el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace bidimensional homogénea en un rectángulo

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x) & (x, y) \in]0, L[\times]0, M[\\ u(0, y) = \alpha(y) & y \in [0, M] \\ u(L, y) = \beta(y) & y \in [0, M] \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \\ u(x, M) = h(x) & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1.52)$$

con $f \in C([0, L] \times [0, M])$, $\alpha, \beta \in C^2([0, L])$ y $g, h \in C^2([0, L])$.

- a) Resuelve el problema considerando $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 0$ en $[0, M]$, $f \equiv 0$, $g \neq 0$ y $h \neq 0$ en $[0, L]$. (**Sugerencia:** Primero resuelve considerando $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 0$ en $[0, M]$, $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ y $h \neq 0$ en $[0, L]$, y luego considerando $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 0$ en $[0, M]$, $f \equiv 0$, $h \equiv 0$ y $g \neq 0$ en $[0, L]$. Encuentra la solución requerida usando superposición de soluciones).
- b) Resuelve el problema considerando $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 0$ en $[0, M]$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ y $h \neq 0$ en $[0, L]$. (**Sugerencia:** Homogeneiza apropiadamente la ecuación considerando una solución de la forma

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) + U(x) \quad \forall (x, y) \in]0, M[\times]0, L[.$$

Traspasa la no homogeneidad a las condiciones de frontera en $y = 0$ e $y = M$ y llama G y H , respectivamente, a estas no homogeneidades. Resuelve el problema usando la solución del problema a), mediante superposición de soluciones y apropiados cambios de variables).

- c) Finalmente, resuelve el problema (1.52).

2. Considera el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace bidimensional homogénea en un rectángulo

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in]-L, L[\times]0, M[\\ u(-L, y) = 0 & y \in [0, M] \\ u(L, y) = 0 & y \in [0, M] \\ u(x, 0) = 0 & x \in [-L, L] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = h(x) & x \in [-L, L], \end{cases} \quad (1.53)$$

con $h \in C^2([0, L])$. ¿Posee solución el problema? En caso de que exista, exhibe una.

3. Considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times]0, +\infty[\\ u\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 & y \in [0, +\infty[\\ u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 & y \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = 0 & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = h(x) & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{array} \right. \quad (1.54)$$

Se pretende estudiar la estabilidad de las soluciones cuando $h \equiv 0$.

a) Para $n \in \mathbb{N}$, n impar, considera la familia de funciones

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}y} \cos(nx) \sinh(ny).$$

Encuentra una familia de funciones h_n tal que u_n sea solución del problema (1.54) con h reemplazado por la respectiva h_n .

b) Concluye acerca de la estabilidad de las soluciones de (1.54).

4. Considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & (x, y) \in]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = \alpha(t) & t \in [0, +\infty[\\ u(L, t) = \beta(t) & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in [0, L], \end{array} \right. \quad (1.55)$$

con $f \in C^1([0, L] \times [0, +\infty[)$, $\alpha, \beta \in C^1([0, +\infty[)$ y $g, h \in C^2([0, L])$.

a) Resuelve el problema asumiendo que $\alpha \equiv 0$ y $\beta \equiv 0$ en $[0, +\infty[$, $g(x) \neq 0$ y $h(x) \neq 0$ en $[0, L]$, y que $f(x, t) \neq 0$ en $[0, L] \times [0, +\infty[$. Además, asume que en este caso la solución tiene la forma

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[.$$

¿Cómo justificarías esta elección?. Encuentra el problema de valores iniciales que satisface A_n (**Sugerencia:** Reemplaza \bar{u} en el problema bajo las condiciones indicadas sobre las funciones, y plantea una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden asociada a A_n , junto a las respectivas condiciones iniciales $A_n(0)$ y $A_n'(0)$).

b) Resuelve el caso general (1.55) asumiendo que todas las funciones al lado derecho de las igualdades son no nulas. (**Sugerencia:** Usa superposición de soluciones).

5. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Calcula Δu en:

- a) Coordenadas polares si $N = 2$
- b) Coordenadas esféricas si $N = 3$
- c) Coordenadas cilíndricas si $N = 3$
- d) Coordenadas radiales para cualquier $N \in \mathbb{N}$, es decir, asume que

$$r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$$

y pon $u(x) = v(r)$; entonces, calcula Δv en términos de v y r .

6. Resuelve el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace bidimensional homogénea en un anillo \mathcal{A} de radio mayor R_2 y radio menor R_1 ,

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{en } \mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\} \\ u(x, y) = f(x, y) & \text{sobre } \partial\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R_1^2\} \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{sobre } \partial\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R_2^2\}, \end{cases}$$

con $f, g \in C^2(\overline{\mathcal{A}})$.

7. Demuestra los teoremas de unicidad: Teorema 1.6.4 y Teorema 1.6.6.

8. Sea $p > 1$. Prueba que la ecuación de medios porosos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta(u^p(x, t)) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[,$$

con $u \geq 0$ en \mathbb{R}^N , posee una solución de la forma

$$u(x, t) = v(t)|x|^q.$$

Determina explícitamente $v(t)$ y q . Aquí $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$.

Bibliografía del Capítulo 1

- [1] L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, Surveys in applied Mathematics III, New York, Wiley, 1958.
- [2] H. Brezis, F. Browder, *Partial Differential Equations in the 20th Century**, Advances in Mathematics **135** (1998) 76–144.
- [3] J.C. Cox, C-F. Huang, *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process*, Journal of Economic Theory, **49** (1989) 33–83.
- [4] E. B. Dynkin, *Superdiffusions and positive solutions of non-linear partial differential equations*, Russian Math. Surveys **59** (2004) 147–157.
- [5] J. Engländer, *Branching diffusions, superdiffusions and random media*, Probability Surveys **4** (2007) 303–364.
- [6] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez, J. C. Sabina de Lis, *Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs*, Arch. Rational Mech. Anal. **145** (1998) 261–289.
- [7] J. B. Keller, *Electrohydrodynamics I. The equilibrium of a charged gas in a container*, J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956) 715–724.
- [8] J. López-Gómez, M. Molina-Meyer, *Superlinear indefinite systems: Beyond Lotka-Volterra models*, J. Differential Equations **221** (2006) 343–411.
- [9] S. L. Pohozaev, *The Dirichlet problem for the equation $\Delta u = u^2$* , Soviet Math. Dokl. **1** (1961) 1143–1146.
- [10] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, first edition 2008, Printed in Italy.

Espacios de Sobolev en dimensión N

En el presente capítulo introduciremos una noción débil del concepto de derivada de una función, la cual corresponde a una generalización del concepto de derivada que conocemos. Este concepto nos conducirá a desarrollar la teoría de ciertos espacios de funciones, los así llamados *espacios de Sobolev*, los que serán de gran utilidad en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales en un contexto más amplio que el usual.

2.1. Espacios de Sobolev

En esta sección daremos la noción de derivada débil con la finalidad de definir y estudiar las principales propiedades de los espacios de Sobolev, que son espacios donde naturalmente adquieren protagonismo aquellas funciones que poseen derivadas débiles. Veremos que estos espacios resultan ser muy apropiados para aplicar algunas ideas y herramientas del análisis funcional, con la finalidad de obtener información relevante acerca de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

Comenzaremos mostrando una motivación para estudiar estos espacios.

2.1.1. Motivación

Consideremos el siguiente problema:

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, con $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sea $f \in C(\overline{\Omega})$. Hallar una función u que verifique:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

El Método

- Sea u es una solución clásica de (2.1); es decir, sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una función tal que verifica (2.1) en el sentido usual.
- Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Es claro que en esta situación uno tiene que $\varphi = 0$ en toda una vecindad de $\partial\Omega$. Luego, como $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$, se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \in C_c(\Omega)$ y así, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \equiv 0$ en toda una

vecindad de $\partial\Omega$. De esta forma, como $u \in C^2(\bar{\Omega})$, podemos aplicar el Teorema 1.6.2 y obtener

$$\begin{aligned} -\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega &\Rightarrow -\Delta u \varphi + u \varphi = f \varphi \quad \text{en } \Omega \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \\ &\Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi. \end{aligned}$$

Como φ es arbitraria, podemos formular el problema variacional

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.2)$$

Notemos que (2.2) tiene sentido si $u \in C^1(\Omega)$, diferente a la situación en (2.1), donde se supone que u es dos veces derivable. Más aún, en verdad en (2.2) se puede asumir que $u \in L^1(\Omega)$ y $\nabla u \in (L^1(\Omega))^N$. A las soluciones de (2.2) las llamamos soluciones débiles de (2.1).

Las siguientes etapas describen el enfoque variacional que se pretende implementar para resolver ciertos problemas en derivadas parciales. Este enfoque consiste en probar que existe una solución del problema variacional (2.2), y que bajo adecuadas condiciones sobre los datos del problema, esta solución puede llegar a ser una solución clásica del problema (2.1).

- **Etapas 1.** Se precisa la noción de solución débil para el problema en cuestión, que es donde intervienen los espacios de Sobolev, que son la herramienta fundamental.
- **Etapas 2.** Se establecen resultados de existencia y unicidad, si es posible, de una solución débil. En algunos casos se puede usar el Teorema de Stampacchia A.5.1 o bien el de Lax-Milgram A.5.1.
- **Etapas 3.** En la medida de lo posible, se demuestra que la solución débil del problema (2.1), que es la solución del problema variacional (2.2), es de clase C^2 o suficientemente suave, mediante algún resultado de regularidad (probablemente tendremos que imponer condiciones a los datos del problema para obtener la regularidad deseada).
- **Etapas 4.** Se recupera la solución clásica. Básicamente tratamos de probar que toda solución débil del problema (2.1) que pertenezca a $C^2(\bar{\Omega})$, es una solución clásica de (2.1).

Esta última etapa es muy fácil de verificar. En efecto, supongamos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ (más adelante especificaremos con claridad por qué podemos asignar este valor a u en la frontera). Al integrar por partes en (2.2), para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi &\Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) \varphi = 0, \end{aligned}$$

y puesto que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, entonces

$$-\Delta u + u - f = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

pero en realidad esto último vale en todo Ω pues $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y $f \in C(\bar{\Omega})$, y como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, se tiene que u efectivamente satisface el problema (2.1) en el sentido usual.

2.1.2. La derivada débil

DEFINICIÓN 2.1.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea α un multi-índice y sea $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Decimos que $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ es la α -ésima derivada parcial débil de u en Ω si se verifica que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 2.1.1 En la definición previa, el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ es usualmente conocido como el espacio de las funciones test.

NOTACIÓN 2.1.1 Usualmente, la α -ésima derivada débil de una función $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ se denota por $D^\alpha u$, como en el sentido usual; es decir,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ y $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Luego, en la definición previa,

$$v = D^\alpha u.$$

Para ilustrar la notación previa, veremos algunos casos particulares.

- Para $N = 1$, $\alpha = 1$ y $\Omega =]0, 1[$, para $u \in L_{\text{loc}}^1(]0, 1[)$ tendremos que $v \in L_{\text{loc}}^1(]0, 1[)$ será la derivada débil de u si verifica que

$$\int_0^1 u \varphi' = - \int_0^1 v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(]0, 1[),$$

y podremos poner $v = u'$.

- Para $N = 2$, $\alpha = (1, 2)$ y Ω siendo un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , para $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ tendremos que $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ será la α -ésima derivada débil de u si verifica que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = - \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y podremos poner $v = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$.

- Para $N = 3$, $\alpha = (1, 0, 1)$ y Ω siendo un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 , para $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tendremos que $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ será la α -ésima derivada débil de u si verifica que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y podremos poner $v = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.

En lo que resta de este apuntes, y a menos que se indique otra cosa, usaremos la notación previa para referirnos a las derivadas débiles.

LEMA 2.1.1 (Unicidad de la derivada débil) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ un multi-índice y sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si existe la α -ésima derivada parcial débil de u , entonces ella es única salvo en un conjunto de medida nula.

Demostración. Sean $v, w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dos derivadas débiles de u . Entonces, desde la definición de derivada parcial débil, se verifica que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se sigue que

$$\int_{\Omega} (v - w) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y desde el Corolario A.9.2 concluimos que $v = w$ c.t.p. en Ω . ■

EJEMPLO 2.1.1 De existir, calcula la derivada débil de la función $u(x) = |x|$ en \mathbb{R} .

Solución. Debemos encontrar una función $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi' = - \int_{-\infty}^{\infty} v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi' &= - \int_{-\infty}^0 x \varphi' + \int_0^{\infty} x \varphi' \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi - \int_0^{\infty} \varphi. \end{aligned}$$

Luego, como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ es arbitraria, concluimos que existe la derivada débil de u , y, salvo conjunto de medida nula, está definida por

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \quad \square \end{cases}$$

2.1.3. El espacio $W^{1,p}(\Omega)$

DEFINICIÓN 2.1.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. Se define el *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ por:

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

NOTACIÓN 2.1.2 En el caso $p = 2$ es común usar la notación

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 2.1.2

- Es usual dotar al espacio $W^{1,p}(\Omega)$ de la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, la cual se define como sigue:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- Es usual dotar al espacio $H^1(\Omega)$ del producto interno $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$, el cual se define como sigue:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

que induce a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

- En $W^{1,p}(\Omega)$ también se puede considerar la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ definida por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

la cual es equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. De esta forma, podremos usar indistintamente una u otra norma en las demostraciones, según convenga.

PROPOSICIÓN 2.1.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ es

- Banach si $1 \leq p \leq \infty$,
- Reflexivo si $1 < p < \infty$,
- Separable si $1 \leq p < \infty$.

Además, el espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio Hilbert separable.

Demostración.

i) Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y (∇u_n) es una sucesión de Cauchy en $(L^p(\Omega))^N$. Por completitud de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que existe $u \in L^p(\Omega)$ y existen $v_i \in L^p(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, N$, tales que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla u_n \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{en } (L^p(\Omega))^N,$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.

Debemos probar que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\nabla u = \mathbf{v}$.

Caso $1 \leq p < \infty$. Sea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tenemos,

$$\begin{aligned} u_n \rightarrow u \quad \text{en } (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}) &\Rightarrow u_n \rightarrow u \quad \text{en } \sigma(L^p(\Omega), L^q(\Omega)) \\ &\Rightarrow \langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle \quad \forall f \in L^q(\Omega) \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

pues dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, podemos considerar $f_{i,\varphi} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$u \mapsto f_{i,\varphi}(u) = \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

que corresponde a un funcional lineal continuo; es decir, $f_{i,\varphi} \in L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))^*$. En efecto, $f_{i,\varphi}$ está claramente bien definido para cada $i = 1, 2, \dots, N$, y es lineal pues dados $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} f_{i,\varphi}(u_1 + \lambda u_2) &= \int_{\Omega} (u_1 + \lambda u_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \lambda \int_{\Omega} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= f_{i,\varphi}(u_1) + \lambda f_{i,\varphi}(u_2) \end{aligned}$$

y por otra parte, dada $u \in L^p(\Omega)$, se verifica que

$$\begin{aligned} |\langle f_{i,\varphi}, u \rangle| &= |f_{i,\varphi}(u)| \\ &= \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \\ &\leq \|\nabla \varphi\|_{(L^q(\Omega))^N} \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{por desigualdad de Hölder, donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &= C_\varphi \|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \rightarrow \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Ahora, como

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

pasando al límite, obtenemos desde la unicidad del límite que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

con $v_i \in L^p(\Omega)$. Por lo tanto, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\nabla u = \mathbf{v}$.

Caso $p = \infty$. La prueba es similar al caso anterior. Se omiten algunos detalles.

$$\begin{aligned} u_n \rightarrow u \quad \text{en } (L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}) &\Rightarrow u_n \rightharpoonup u \quad \text{en } \sigma(L^\infty(\Omega), (L^\infty(\Omega))^*) \\ &\Rightarrow u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{en } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega)) \\ &\Rightarrow \langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle \quad \forall f \in L^1(\Omega) \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \rightarrow \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Ahora, como

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

pasando al límite, concluimos desde la unicidad del límite que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

con $v_i \in L^\infty(\Omega)$. Por lo tanto,

$$u \in W^{1,\infty}(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla u = \mathbf{v}.$$

Conclusión. De esta forma, como

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

concluimos que para cada sucesión (u_n) de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$, existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que (u_n) converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$. Por lo tanto, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio Banach.

ii) Consideremos el espacio $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$ dotado de la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N}$ definida por

$$\|[u, \mathbf{v}]\|_{L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall [u, \mathbf{v}] \in L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N,$$

y el operador $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$ definido por

$$u \mapsto T(u) = [u, \nabla u].$$

Es fácil chequear que:

- T está bien definido. En efecto, dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se tiene que

$$T(u) = [u, \nabla u] \in L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N,$$

que está definido de forma única para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, por definición de $W^{1,p}(\Omega)$.

- T es lineal. En efecto, por definición de T , dados $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(u_1 + \lambda u_2) &= [u_1 + \lambda u_2, \nabla(u_1 + \lambda u_2)] \\ &= [u_1, \nabla u_1] + \lambda [u_2, \nabla u_2] \\ &= T(u_1) + \lambda T(u_2). \end{aligned}$$

- T es continuo e inyectivo. En efecto,

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N} &= \|[u, \nabla u]\|_{L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T define un isomorfismo isométrico de $W^{1,p}(\Omega)$ en $T(W^{1,p}(\Omega))$ (aquí estamos considerando la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ en $W^{1,p}(\Omega)$). Ahora, como $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio Banach, entonces $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$, y como $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$, entonces $T(W^{1,p}(\Omega))$ resulta ser un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$. Se concluye que $W^{1,p}(\Omega)$ también es reflexivo.

- iii) Consideramos el operador T definido en ii). Como $T(W^{1,p}(\Omega))$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$, siendo $L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$ un espacio separable para $1 \leq p < \infty$, entonces $T(W^{1,p}(\Omega))$ resulta ser un espacio separable para $1 \leq p < \infty$. Se concluye que $W^{1,p}(\Omega)$ también es separable.

Por último, es claro que $H^1(\Omega)$ con el producto interno $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ es un espacio Hilbert separable. ■

EJEMPLO 2.1.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. Prueba que si $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ y si $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, donde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada usual, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y las derivadas en el sentido de $W^{1,p}(\Omega)$ coinciden con aquellas en el sentido usual.

Solución. Sea $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para cada $i = 1, 2, \dots, N$, siendo $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ su derivada usual, y sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Entonces, $u\varphi \in C_c^1(\Omega)$ y se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, considerando $\text{supp}_\Omega \varphi \subset \omega \Subset \Omega$, con ω abierto en \mathbb{R}^N con $\partial\omega$ de clase C^1 usando el Teorema 1.2.1 de Gauss y el Teorema de integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi) = \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi) \\ &= \int_{\partial\omega} u\varphi \hat{n}_i \, dS \\ &= \int_\omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_\omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{aligned}$$

para toda $i = 1, 2, \dots, N$. De esta forma,

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Como $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para toda $i = 1, 2, \dots, N$, concluimos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, verificándose además que la derivada usual de u es precisamente la derivada débil de u . \square

TEOREMA 2.1.1 (Friedrichs) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- i) $u_n|_\Omega \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$,
- ii) $\nabla u_n|_\omega \rightarrow \nabla u|_\omega$ en $(L^p(\omega))^N \quad \forall \omega \Subset \Omega$.

Más aún, si $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- i') $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$,
- ii') $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ en $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$.

NOTACIÓN 2.1.3 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función, sea $\omega \Subset \Omega$ y sea $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$; entonces es usual denotar a una traslación de la función u por

$$\tau_h u(x) = u(x+h) \quad \forall x \in \omega.$$

PROPOSICIÓN 2.1.2 (Caracterización de las funciones $W^{1,p}(\Omega)$) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 < p \leq \infty$. Si $u \in L^p(\Omega)$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$

ii) $\exists C > 0$ tal que $\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N,$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

iii) $\exists C > 0$ tal que $\forall \omega \in \Omega$ y $\forall h \in \mathbb{R}^N$ con $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$ se verifica

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

Además, se puede tomar $C = \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$ en ii) y iii). Más aún, si $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N}.$$

Demostración. Sea $u \in L^p(\Omega)$.

i) \Rightarrow ii) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, 2, \dots, N$. Además, dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, se tiene que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Por otro lado, notar que φ es acotada en Ω y tiene soporte compacto en Ω , entonces tenemos que $\varphi \in L^q(\Omega)$. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| &= \left| \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \right| \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{por desigualdad de Hölder, donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &= C_u \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

ii) \Rightarrow i) Para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ consideramos el funcional lineal $F_{i,u} : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi \mapsto F_{i,u}(\varphi) = \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Claramente $F_{i,u}$ es un funcional lineal continuo definido sobre un subespacio denso de $L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En efecto,

- $F_{i,u}$ está bien definido, pues dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, es claro que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ es acotada en Ω , y como tiene soporte compacto en Ω , entonces tenemos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$. Luego,

$$\begin{aligned} |F_{i,u}(\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{por desigualdad de Hölder, donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

y además el valor de una integral, de existir, es único. Esto muestra que dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $F_{i,u}(\varphi) \in \mathbb{R}$ y está definido de forma única, por lo que $F_{i,u}$ es una función.

- $F_{i,u}$ es lineal, pues dadas $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} F_{i,u}(\varphi) &= \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi + \lambda\psi) \\ &= \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \right) \\ &= \int_{\Omega} u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \lambda \int_{\Omega} u \frac{\partial\psi}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

- $F_{i,u}$ es continuo, por hipótesis (aquí estamos asumiendo que *ii*) se cumple).
- $C_c^\infty(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^q(\Omega)$.

Luego, por Corolario A.1.1 del Teorema A.1.1 de Hahn-Banach, tenemos que $F_{i,u}$ se extiende a una forma lineal continua definida sobre todo $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, la que denominaremos $\tilde{F}_{i,u}$. Ahora, por el Teorema A.8.7 de Representación de Riesz, como $\tilde{F}_{i,u} \in (L^q(\Omega))^* = L^p(\Omega)$, entonces

$$\exists! \tilde{g}_i \in L^p(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \tilde{F}_{i,u}(f) = \int_{\Omega} \tilde{g}_i f \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

En particular, poniendo $g_i = -\tilde{g}_i$, obtenemos

$$\exists! g_i \in L^p(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

i) ⇒ iii) Sea $\omega \Subset \Omega$ tal que $\text{supp}_{\Omega}\varphi \subset \omega \Subset \Omega$ y sea $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$.

Caso $1 < p < \infty$.

(1°) Asumamos que $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Para h , definamos $v(t) = u(x + th)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$v'(t) = \nabla u(x + th) \cdot h.$$

Luego, por Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\begin{aligned} \tau_h u(x) - u(x) &= u(x + h) - u(x) \\ &= v(1) - v(0) \\ &= \int_0^1 v'(s) \, ds \\ &= \int_0^1 \nabla u(x + sh) \cdot h \, ds. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
|\tau_h u(x) - u(x)|^p &= \left| \int_0^1 \nabla u(x + sh) \cdot h \, ds \right|^p \\
&= \left| \int_0^1 \nabla u(x + sh) \cdot h \chi_{[0,1]}(s) \, ds \right|^p \\
&\leq \left(\left(\int_0^1 |\nabla u(x + sh) \cdot h|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\chi_{[0,1]}(s)|^q \, ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \quad \text{donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&= \int_0^1 |\nabla u(x + sh) \cdot h|^p \, ds \\
&\leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + sh)|^p \, ds \quad \text{por desigualdad de Cauchy-Schwarz.}
\end{aligned}$$

De esta forma, integrando sobre ω , tenemos por Teorema A.6.1 de Fubini, que

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, dx &\leq |h|^p \int_{\omega} \left(\int_0^1 |\nabla u(x + sh)|^p \, ds \right) \, dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \left(\int_{\omega} |\nabla u(x + sh)|^p \, dx \right) \, ds \\
&= |h|^p \int_0^1 \left(\int_{\omega + sh} |\nabla u(y)|^p \, dy \right) \, ds.
\end{aligned}$$

Ahora, como $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$, entonces es claro que $\omega + th \subset \omega + h \Subset \Omega$ para toda $t \in [0, 1]$, y así

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} &= \left(\int_{\omega} |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |h| \left(\int_{\omega + h} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} |h|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos obtenido el resultado para $u \in C_c^\infty(\Omega)$, con $1 < p < \infty$.

(2º) Asumamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Por Teorema 2.1.1 de Friedrichs, existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{en } (L^p(\omega'))^N \quad \forall \omega' \Subset \Omega.$$

Entonces, para nuestro conjunto ω y vector h , obtenemos

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\omega)} \leq \|\nabla u_n\|_{L^p(\omega+h)} |h|,$$

y como $\omega + h \Subset \Omega$, pasando al límite, concluimos que

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\omega+h)} |h| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} |h|.
\end{aligned}$$

Caso $p = \infty$. Se deja como ejercicio.

iii) \Rightarrow ii) Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, sea $\omega \Subset \Omega$ tal que $\text{supp}_\Omega \varphi \subset \omega \Subset \Omega$ y sea $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$. Por desigualdad de Hölder y la hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (\tau_h u - u) \varphi \right| &\leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &\leq C|h| \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Notar ahora que como $\text{supp}_\Omega \varphi \subset \omega \Subset \Omega$ y $|h| < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$, entonces $\omega + h \Subset \Omega$ y

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x+h) \varphi(x) \, dx &= \int_\omega u(x+h) \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{\omega+h} u(y) \varphi(y-h) \, dy \\ &= \int_\Omega u(y) \varphi(y-h) \, dy. \end{aligned}$$

Restando a ambos lados $\int_\Omega u \varphi$ y dividiendo por $|h|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|} \int_\Omega (\tau_h u - u) \varphi &= \int_\Omega \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \varphi(x) \, dx \\ &= \int_\Omega u(y) \frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{|h|} \, dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

De esta forma, desde (2.3) y (2.4), se sigue que

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{|h|} \, dy \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.$$

Considerando ahora $h = t e_i, i = 1, 2, \dots, N$, y pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$, obtenemos

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN 2.1.3 Si $p = 1$, se verifica i) \Rightarrow ii) \Leftrightarrow iii).

PROPOSICIÓN 2.1.3 (Derivación de un producto) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Demostración.

Caso $1 \leq p < \infty$. Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Desde el Teorema 2.1.1 de Friedrichs, existen sucesiones $(u_n), (v_n)$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{en } (L^p(\omega))^N \quad \forall \omega \Subset \Omega, \\ v_n &\rightarrow v \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{y} \quad \nabla v_n \rightarrow \nabla v \quad \text{en } (L^p(\omega))^N \quad \forall \omega \Subset \Omega, \end{aligned}$$

y

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Por otro lado, dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, desde el Teorema 1.6.1 de integración por partes, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{\partial \Omega} u_n v_n \varphi \hat{n}_i \, dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como $u_n, v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\Omega)$, $u, v \in L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ entonces

$$|u_n v_n - uv| = |u_n v_n - u_n v + u_n v - uv| \leq |u_n| |v_n - v| + |u_n - u| |v|.$$

Luego, considerando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y usando el hecho que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, por desigualdad de Hölder, para cada $i = 1, 2, \dots, N$, obtenemos

$$\left| \int_{\Omega} (u_n v_n - uv) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \left(\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_n - v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \right) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0,$$

de donde

$$\int_{\Omega} u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Ahora, considerando $\omega = \text{supp}_{\Omega} \varphi$, por Teorema A.7.3 de la convergencia dominada, salvo subsucesiones, no es difícil probar que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi &= \int_{\omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi \\ &\rightarrow \int_{\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por lo tanto, salvo subsucesiones, pasando al límite en (2.5) y considerando (2.6) y (2.7), obtenemos

$$\int_{\Omega} uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Se concluye que $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Caso $p = \infty$. Se deja como ejercicio. ■

EJEMPLO 2.1.3 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $1 \leq p \leq \infty$, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define la función \bar{f} como la extensión por 0 fuera de Ω de la función f , es decir

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Prueba que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\psi \in C_c^1(\Omega)$, entonces

$$\overline{\psi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\psi u}) = \overline{\psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} u} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Solución. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para cada $i = 1, 2, \dots, N$, uno tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\psi u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{\Omega} \psi u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi u) \varphi \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} u + \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{\psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} u} \right) \varphi. \end{aligned}$$

Como $\overline{\psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} u} \in L^\infty(\text{supp}(\psi))$, la conclusión es inmediata. \square

TEOREMA 2.1.2 (Derivación de una composición. Regla de la cadena) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ una función tal que verifica

- i) $\psi(0) = 0$
- ii) $|\psi'(s)| \leq C$, para toda $s \in \mathbb{R}$, para alguna $C > 0$.

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\psi \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi \circ u) = (\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Solución.

(1°) Notemos que las condiciones i) y ii) que verifica la función ψ implican, después de integrar entre 0 y s , que

$$|\psi(s)| \leq C|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

En particular, obtenemos que $|\psi \circ u| \leq C|u|$. Luego, como $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se sigue fácilmente que

$$\psi \circ u \in L^p(\Omega).$$

(2°) Ahora vamos a probar que

$$\int_{\Omega} (\psi \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} (\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.8)$$

Primero, notemos que la condición *ii*) que verifica la función ψ también implica que para cada $i = 1, 2, \dots, N$, uno tiene que

$$\left| (\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq C \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|,$$

de donde se sigue que

$$\int_{\Omega} \left| (\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \leq C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, como $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se sigue que

$$(\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

A continuación vamos a separar nuestra demostración en casos.

Caso $1 \leq p < \infty$. Desde el Teorema 2.1.1 de Friedrichs y el Teorema A.8.4, podemos considerar una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ c.t.p. en Ω y $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ en $(L^p(\omega))^N$, para toda $\omega \Subset \Omega$. Es claro que

$$\int_{\Omega} (\psi \circ u_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} (\psi' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall n \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

Luego, como $\psi \circ u_n \rightarrow \psi \circ u$ en $L^p(\Omega)$ y $(\psi' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow (\psi' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\omega)$, para toda $\omega \Subset \Omega$, gracias al Teorema A.8.4 y considerando adecuadas subsucesiones, podemos aplicar el Teorema A.7.3 de la convergencia dominada, pasar al límite en (2.9) y entonces validar (2.8).

Caso $p = \infty$. Para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ consideramos $\omega_\varphi \Subset \Omega$ tal que $\text{supp} \varphi \subset \omega_\varphi$. Entonces, $u \in W^{1,p}(\omega_\varphi)$ para toda $1 \leq p < \infty$, y siguiendo ahora el razonamiento usado en el caso anterior, obtenemos (2.8). ■

PROPOSICIÓN 2.1.4 (Fórmula del cambio de variables) Sean Ω y Ω' dos subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^N , sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\Psi : \Omega' \rightarrow \Omega$ una aplicación biyectiva, con $x = \Psi(y)$, tal que verifica

$$\Psi \in C^1(\Omega'; \Omega), \quad \Psi^{-1} \in C^1(\Omega; \Omega'), \quad \text{Jac } \Psi \in (L^\infty(\Omega'))^{N \times N} \quad \text{y} \quad \text{Jac } \Psi^{-1} \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N}.$$

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$u \circ \Psi \in W^{1,p}(\Omega') \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y_j} (u \circ \Psi)(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} (\Psi(y)) \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} (y) \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

2.1.4. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$

DEFINICIÓN 2.1.3 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ un multi-índice, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. Se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por:

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

NOTACIÓN 2.1.4 En el caso $p = 2$ es común usar la notación

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 2.1.4

- Es usual dotar al espacio $W^{m,p}(\Omega)$ de la norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, la cual se define como sigue:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

- Es usual dotar al espacio $H^m(\Omega)$ del producto interno $(\cdot, \cdot)_{H^m(\Omega)}$, el cual se define como sigue:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

que induce a la norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)} = \|\cdot\|_{W^{m,2}(\Omega)}$.

- En $W^{m,p}(\Omega)$ también se puede considerar la norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega),$$

la cual es equivalente a la norma $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. De esta forma, podremos usar indistintamente una u otra norma en las demostraciones, según convenga.

TEOREMA 2.1.3 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es

- Banach si $1 \leq p \leq \infty$,
- Reflexivo si $1 < p < \infty$,
- Separable si $1 \leq p < \infty$.

Además, el espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio Hilbert separable.

TEOREMA 2.1.4 (Propiedades de las derivadas débiles) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sean $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ dos multi-índices, sea $m \in \mathbb{N}$, sea $1 \leq p \leq \infty$ y sean $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$. Se verifica que:

i) $D^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$, $|\alpha| + |\beta| \leq m$.

ii) Si Θ es un subconjunto abierto de Ω , entonces $u \in W^{m,p}(\Theta)$.

iii) Si $\vartheta \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\vartheta u \in W^{m,p}(\Omega)$ y se verifica la fórmula de Leibniz

$$D^\alpha(\vartheta u) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \vartheta D^{\alpha-\beta} u \quad \text{donde} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|!}{|\beta|!(|\alpha| - |\beta|)!}.$$

Demostración. Sean $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$.

i) Sean α, β dos multi-índices, con $|\alpha| \leq m$ y $|\beta| \leq m$ tales que

$$|\alpha| + |\beta| \leq m.$$

Es claro que

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $D^\gamma \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo multi-índice $\gamma \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. De esta forma, por definición del espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ obtenemos

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \varphi = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_{\Omega} D^{\alpha+\beta} u \varphi$$

y

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \varphi$$

que implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\beta \varphi &= (-1)^{-|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha+\beta} \varphi \\ &= (-1)^{-|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_{\Omega} D^{\alpha+\beta} u \varphi \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^{\alpha+\beta} u \varphi. \end{aligned}$$

Luego, como $|\beta| \leq m - |\alpha|$, se deduce que $D^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$, de donde concluimos que

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u.$$

ii) Es directo. En efecto, si $\varphi \in C_c^\infty(\Theta)$, su extensión por cero en Ω claramente pertenece a $C_c^\infty(\Omega)$. Además, es claro que si $v \in L^p(\Omega)$, entonces $v|_\Theta \in L^p(\Theta)$. De esta forma,

$$\forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m, \exists \hat{g}_\alpha = g_{\alpha|_\Theta} \in L^p(\Theta) \text{ tal que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Theta \hat{g}_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Theta).$$

iii) Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Se procede por inducción.

- Si $|\alpha| = 1$, entonces por regla de la derivada de un producto, obtenemos

$$\int_\Omega u D^\alpha(\vartheta \varphi) = \int_\Omega u \vartheta D^\alpha \varphi + \int_\Omega u \varphi D^\alpha \vartheta,$$

y como $\vartheta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, tenemos

$$\int_\Omega u D^\alpha(\vartheta \varphi) = - \int_\Omega \vartheta \varphi D^\alpha u.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \vartheta D^\alpha \varphi &= - \left(\int_\Omega \vartheta \varphi D^\alpha u + \int_\Omega u \varphi D^\alpha \vartheta \right) \\ &= - \int_\Omega (\vartheta D^\alpha u + u D^\alpha \vartheta) \varphi. \end{aligned}$$

- Sea $k < m$, y asumamos que la fórmula de Leibniz se verifica para todo multi-índice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ tal que $|\alpha| \leq k$ y para toda función $\vartheta \in C_c^\infty(\Omega)$. Sea ahora $\alpha \in \mathbb{R}^N$ un multi-índice tal que $|\alpha| = k + 1$. Entonces

$$\alpha = \beta + \gamma$$

para algunos multi-índices $\beta, \gamma \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ tales que $|\beta| = k$ y $|\gamma| = 1$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vartheta u D^\alpha \varphi &= \int_\Omega \vartheta u D^\beta(D^\gamma \varphi) \quad \text{pues } \alpha = \beta + \gamma \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta(\vartheta u)(D^\gamma \varphi) \quad \text{integrando por partes} \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \sum_{|\rho| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\rho} D^\rho \vartheta D^{\beta-\rho} u D^\gamma \varphi \quad \text{por H.I.} \\ &= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_\Omega \sum_{|\rho| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\rho} D^\gamma(D^\rho \vartheta D^{\beta-\rho} u) \varphi \quad \text{integrando por partes} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \sum_{|\rho| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\rho} (D^{\rho+\gamma} \vartheta D^{\beta-\rho} u + D^\rho \vartheta D^{\beta-\rho+\gamma} u) \varphi \quad \text{por H.I.} \end{aligned}$$

Como $\beta = \alpha - \gamma$ y $\beta - \rho = \alpha - \gamma - \rho$, se sigue que

$$\int_{\Omega} \vartheta u D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left(\sum_{|\rho| \leq |\alpha - \gamma|} \binom{\alpha - \gamma}{\rho} D^{\gamma + \rho} \vartheta D^{\alpha - \gamma - \rho} u \varphi + \sum_{|\rho| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\rho} D^{\rho} \vartheta D^{\alpha - \rho} u \varphi \right).$$

Notar por último que

$$\binom{\beta}{\rho - \gamma} + \binom{\beta}{\rho} = \binom{\beta + \gamma}{\rho} = \binom{\alpha}{\rho},$$

de forma que poniendo $\sigma = \rho + \gamma$ en la primera sumatoria y cambiando ρ por σ en la segunda, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vartheta u D^{\alpha} \varphi &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \left(\sum_{|\sigma| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\sigma - \gamma} D^{\sigma} \vartheta D^{\alpha - \sigma} u \varphi + \sum_{|\sigma| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\sigma} D^{\sigma} \vartheta D^{\alpha - \sigma} u \varphi \right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \sum_{|\sigma| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\sigma} D^{\sigma} \vartheta D^{\alpha - \sigma} u \varphi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Teoremas de densidad: aproximación de una función en un espacio de Sobolev mediante funciones suaves

En esta sección consideramos a Ω como un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. Mostraremos un procedimiento estándar de aproximación de una función en un espacio de Sobolev mediante funciones suaves. La herramienta principal consiste en usar *moficadores*, tomando en cuenta la Definición A.9.1 y la Notación A.9.1. En el resto de esta sección también consideramos para cada $\varepsilon > 0$ los siguientes conjuntos

$$\Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

2.2.1. Aproximación interior mediante funciones $C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$

El siguiente teorema muestra que una función en $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, se puede aproximar localmente por funciones suaves.

TEOREMA 2.2.1 (Aproximación local por funciones suaves) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y $u^{\varepsilon} = \rho_{\varepsilon} * u$ en Ω_{ε} , entonces se verifica que:

i) $u^{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$ para cada $\varepsilon > 0$

ii) $u^{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ en $W_{\text{loc}}^{m,p}(\Omega)$.

Demostración.

- i) Es evidente desde el Teorema A.9.1 parte i). En efecto, si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, de donde, al integrar $|u|$ sobre conjuntos abiertos $\omega \Subset \Omega$ y usando luego la desigualdad de Hölder, deducimos que $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ahora aplicamos el Teorema A.9.1 parte i) y concluimos que $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
- ii) Notar que para cada $x \in \Omega_\varepsilon$, uno tiene que $\rho_\varepsilon(x - \cdot) \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño; y para todo multi-índice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ tal que $|\alpha| \leq m$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x - y) u(y) \, dy \\
&= \int_{\Omega} D_x^\alpha \rho_\varepsilon(x - y) u(y) \, dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha \rho_\varepsilon(x - y) u(y) \, dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x - y) D^\alpha u(y) \, dy \\
&= \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x - y) D^\alpha u(y) \, dy \\
&= (\rho_\varepsilon * D^\alpha u)(x).
\end{aligned}$$

Por el Teorema A.9.1 parte iv), y por la parte i) de este teorema, se chequea directamente que para cada multi-índice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ tal que $|\alpha| \leq m$, uno tiene

$$D^\alpha u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D^\alpha u.$$

Entonces, dado $\omega \Subset \Omega$, directamente concluimos que

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{m,p}(\omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \blacksquare$$

2.2.2. Aproximación global por funciones $C^\infty(\Omega)$

El siguiente teorema muestra que una función en $W^{m,p}(\Omega)$ puede ser aproximada por funciones suaves en $W^{m,p}(\Omega)$. Notar que ahora pediremos que Ω sea acotado, aunque ninguna regularidad sobre la frontera será exigida. Notar también que las funciones suaves con las que aproximaremos estarán en $C^\infty(\Omega)$, pero no podremos asegurar que estén en $C^\infty(\bar{\Omega})$.

TEOREMA 2.2.2 (Aproximación global por funciones suaves) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces

\exists una sucesión (u_ε) en $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

Demostración. Sea

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i,$$

donde

$$\Omega_i = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i} \right\} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pongamos,

$$\Theta_i = \Omega_{i+3} \setminus \bar{\Omega}_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Notar que podemos definir un abierto $\Theta_0 \Subset \Omega$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Theta_i$, con $\Theta_0 \neq \emptyset$ traslapándose con $\Theta_{i_0} \neq \emptyset$, para algún $i_0 \in \mathbb{N}$, de forma que $\partial\Theta_{i_0} \subset \Theta_0$. Ahora sea $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ una partición suave de la unidad. Esto es (vea Lema A.14.2), las funciones $\theta_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, satisfacen

$$0 \leq \theta_i \leq 1, \quad \theta_i \in C_c^\infty(\Theta_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i = 1 \quad \text{sobre } \Omega.$$

Entonces, dada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, desde el Teorema 2.1.4 parte iii), y el hecho $\text{supp } \theta_i \subset \Theta_i$, tenemos que

$$\theta_i u \in W^{m,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \text{supp } \{\theta_i u\} \subset \Theta_i.$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ dado y pongamos $\Theta'_i = \Omega_{i+4} \setminus \bar{\Omega}_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y fijemos un conjunto Θ'_0 tal que $\Theta_0 \Subset \Theta'_0 \Subset \Omega$ y tal que Θ'_0 se traslapa con Θ'_{i_0} de forma que $\partial\Theta'_{i_0} \subset \Theta'_0$. Luego, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que $\Theta_i \Subset \Theta'_i \Subset \Omega$ y por Teorema 2.2.1 parte ii), podemos escoger un número $\lambda_i = \lambda_i(\varepsilon) > 0$ suficientemente pequeño de forma tal que la función $u^{\lambda_i} = \rho_{\lambda_i} * (\theta_i u)$ verifique

$$\|u^{\lambda_i} - \theta_i u\|_{W^{m,p}(\Theta'_i)} \leq \varepsilon \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{y} \quad \text{supp } u^{\lambda_i} \subset \Theta'_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Finalmente, escribamos

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} u^{\lambda_i}.$$

Claramente $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, pues para cada $\omega \Subset \Omega$ hay a lo sumo un número finito de términos no nulos en la suma. Como $u = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i u$, tenemos que para cada $\omega \Subset \Omega$ se verifica que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{m,p}(\omega)} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} u^{\lambda_i} - \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i u \right\|_{W^{m,p}(\omega)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^{\lambda_i} - \theta_i u\|_{W^{m,p}(\Theta'_i)} \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, como $\varepsilon > 0$ es finito, podemos tomar el supremo entre todos los $\omega \in \Omega$ para concluir que

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, vemos que hemos encontrado el resultado deseado. ■

OBSERVACIÓN 2.2.1 El Teorema 2.2.2 se puede interpretar de la siguiente forma: Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$.

2.2.3. Aproximación global por funciones $C^\infty(\overline{\Omega})$

El siguiente resultado establece una aproximación de funciones en $W^{m,p}(\Omega)$ mediante funciones en $C^\infty(\overline{\Omega})$. Entonces alguna condición extra será necesaria respecto del Teorema 2.2.1 anterior. Aquí, además de pedir que Ω sea acotado, pediremos que $\partial\Omega$ sea al menos de clase C^1 .

Antes de enunciar el resultado principal de esta subsección, conviene revisar la Definición 15, que corresponde a la definición de frontera de clase C^k .

TEOREMA 2.2.3 (Aproximación global por funciones uniformemente suaves) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces

$$\exists \text{ una sucesión } (u_\varepsilon) \text{ en } C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega) \text{ tal que } u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ en } W^{m,p}(\Omega).$$

Demostración. Sea $\bar{x} \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ es de clase C^1 , existe $r > 0$ y una función $\eta \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$ que, salvo reordenamiento y reorientación de los ejes coordenados si es necesario, verifica

$$\Omega \cap B(\bar{x}, r) = \{x \in B(\bar{x}, r) : x_N > \eta(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})\}.$$

Ahora pongamos $\Theta' = \Omega \cap B(\bar{x}, \frac{3r}{4})$ y para cada $x \in \Theta'$ y para cada $0 < \lambda < \frac{r}{4}$, definamos un punto x^λ que sea un desplazamiento de x en la coordenada N -ésima, de la siguiente forma:

$$x^\lambda = x + \lambda \delta \mathbf{e}_N.$$

Es claro que uno puede escoger $\delta = \delta_{x,\lambda} > 0$ tal que $B(x^\lambda, \lambda) \Subset \Omega \cap B(\bar{x}, r)$.

Definamos ahora $w_\lambda(x) = u(x^\lambda)$, $x \in \Theta'$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}^N$ un multi-índice tal que $|\alpha| \leq m$. Notar que $w_\lambda \in L^p(\Theta')$ y que

$$\|D^\alpha w_\lambda - D^\alpha u\|_{L^p(\Theta')} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Notar también que nos hemos movido lo suficiente como para molificar en Ω . Luego, podemos

considerar $v^\lambda \in C^\infty(\overline{\Theta'})$, definida por $v^\lambda = \rho_\lambda * w_\lambda$ y obtener para cada $x \in \Theta'$:

$$\begin{aligned}
D^\alpha v^\lambda(x) &= D^\alpha \int_{\Theta'} \rho_\lambda(x-y) w_\lambda(y) \, dy \\
&= \int_{\Theta'} D_x^\alpha \rho_\lambda(x-y) w_\lambda(y) \, dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Theta'} D_y^\alpha \rho_\lambda(x-y) w_\lambda(y) \, dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Theta'} \rho_\lambda(x-y) D^\alpha w_\lambda(y) \, dy \\
&= \int_{\Theta'} \rho_\lambda(x-y) D^\alpha w_\lambda(y) \, dy \\
&= (\rho_\lambda * D^\alpha w_\lambda)(x).
\end{aligned}$$

Así, por Teorema A.9.1 parte *iv*),

$$\|D^\alpha v^\lambda - D^\alpha w_\lambda\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \forall \omega \in \Theta',$$

y por definición de v^λ y w_λ , en particular obtenemos esta convergencia en todo $\Theta = \Omega \cap B(\bar{x}, \frac{r}{2})$. Luego,

$$\|D^\alpha v^\lambda - D^\alpha u\|_{L^p(\Theta)} \leq \|D^\alpha v^\lambda - D^\alpha w_\lambda\|_{L^p(\Theta)} + \|D^\alpha w_\lambda - D^\alpha u\|_{L^p(\Theta)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Ahora, como Ω es acotado en \mathbb{R}^N , entonces $\partial\Omega$ es un conjunto compacto en \mathbb{R}^N , por lo que podemos escoger puntos $\bar{x}_i \in \partial\Omega$ y números $r_i > 0$ con $i = 1, 2, \dots, n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, tales que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B\left(\bar{x}_i, \frac{r_i}{2}\right).$$

Además, de acuerdo al razonamiento previo, a cada conjunto

$$\Theta_i = \Omega \cap B\left(\bar{x}_i, \frac{r_i}{2}\right),$$

con $i = 1, 2, \dots, N$, le podemos asociar una función $v_i^\lambda \in C^\infty(\overline{\Theta}_i)$ tal que

$$\|v_i^\lambda - u\|_{W^{m,p}(\Theta_i)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que existe $\lambda_{i,\varepsilon} > 0$ tal que

$$\|v_i - u\|_{W^{m,p}(\Theta_i)} \leq \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

donde $v_i = v_i^{\lambda_{i,\varepsilon}}$.

Por otro lado, como Ω es acotado, existe $\Theta_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{n_0} \Theta_i,$$

y entonces podemos proceder para este caso como en la demostración del Teorema 2.2.1, en orden a obtener una función $v_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$\|v_0 - u\|_{W^{m,p}(\Theta_0)} \leq \varepsilon.$$

Finalmente, considerando $\{\theta_i\}_{i=1}^{n_0}$ como una partición de la unidad sobre Ω , tal que

$$0 \leq \theta_i \leq 1, \quad \theta_i \in C^\infty(\Theta_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i = 1 \quad \text{sobre } \Omega,$$

para

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n_0} \theta_i v_i$$

obtenemos que $u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Además, como

$$u = \sum_{i=0}^{n_0} \theta_i u,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^{n_0} \|D^\alpha(\theta_i v_i) - D^\alpha(\theta_i u)\|_{L^p(\Theta_i)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_0} \|v_i - u\|_{W^{m,p}(\Theta_i)} \\ &\leq (n_0 + 1) \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} (n_0 + 1) \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, (u_ε) es la sucesión deseada. ■

OBSERVACIÓN 2.2.2 El Teorema 2.2.3 se puede interpretar de la siguiente forma: Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N tal que $\partial\Omega$ de clase C^1 , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$.

2.3. Extensión de una función en $W^{1,p}(\Omega)$ a una función en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Sea $1 \leq p \leq \infty$. En esta sección buscamos una extensión de una función en $W^{1,p}(\Omega)$ a una función en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. La idea es que la extensión preserve las derivadas débiles a través de $\partial\Omega$.

Partimos con la siguiente resultado básico.

LEMA 2.3.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N tal que para cierto $\bar{x} \in \partial\Omega$ se cumple que $\partial\Omega$ es plana en un entorno de \bar{x} , y que toda esta parte plana de $\partial\Omega$ está contenida en el plano $\{x_N = 0\}$. Sea $B(\bar{x}, r)$, para algún $r > 0$, una bola tal que

$$B^+ = B(\bar{x}, r) \cap \{x_N \geq 0\} \subset \bar{\Omega} \quad \text{y} \quad B^- = B(\bar{x}, r) \cap \{x_N \leq 0\} \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$ y $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, entonces la función $\bar{u} : B(\bar{x}, r) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in B^+ \\ 4u\left(x_1, \dots, x_{N-1}, -\frac{x_N}{2}\right) - 3u\left(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N\right) & \text{si } x \in B^-, \end{cases}$$

verifica:

i) $\bar{u} \in C^1(B(\bar{x}, r))$

ii) $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B(\bar{x}, r))} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$ para alguna constante $C > 0$ independiente de u .

Demostración. Para simplificar notación, pondremos $u^- = \bar{u}|_{B^-}$ y $u^+ = \bar{u}|_{B^+}$.

i) Como $u \in C^1(\bar{\Omega})$, basta con probar que \bar{u} es derivable en $\partial\Omega$; lo que equivale a probar que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_i}(x)|_{\{x_N=0\}} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i}(x)|_{\{x_N=0\}} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Como $u^+ = u^-$ sobre $\{x_N = 0\}$ es fácil verificar que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_i}(x)|_{\{x_N=0\}} = \frac{\partial u^+}{\partial x_i}(x)|_{\{x_N=0\}} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

Ahora calculamos

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_N}(x) = -2 \frac{\partial u}{\partial x_N}\left(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, -\frac{x_N}{2}\right) + 3 \frac{\partial u}{\partial x_N}\left(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, -x_N\right).$$

Desde aquí, concluimos que

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_N}(x)|_{\{x_N=0\}} = \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, 0) = \frac{\partial u^+}{\partial x_N}(x)|_{\{x_N=0\}}.$$

La prueba de la parte i) ha finalizado.

ii) Es directa desde la parte i) y el hecho que las derivadas débiles y las derivadas clásicas coinciden cuando ambas existen. ■

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, conviene realizar la siguiente consideración. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , con $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sea \bar{x} un punto en $\partial\Omega$. En general, es necesario realizar un cambio de coordenadas para enderezar la frontera en un entorno de este punto. Más específicamente, de acuerdo a la Definición 15, podemos escoger $r > 0$ y $\eta \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$, y definir ciertas funciones ϕ_i para $i = 1, \dots, N$, de la siguiente forma

$$\phi_i(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } i = 1, \dots, N - 1 \\ x_N - \eta(x_1, \dots, x_{N-1}) & \text{si } i = N. \end{cases}$$

Pongamos ahora

$$y = \Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)).$$

Similarmente, definamos funciones ψ_i para $i = 1, \dots, N$, de la siguiente forma

$$\psi_i(y) = \begin{cases} y_i & \text{si } i = 1, \dots, N - 1 \\ \psi_N(y) = y_N + \eta(y_1, \dots, y_{N-1}) & \text{si } i = N, \end{cases}$$

y pongamos

$$x = \Psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y)).$$

Como $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, N$, es claro que $\Phi = \Psi^{-1}$ y que la aplicación Φ , definida sobre un entorno de \bar{x} contenido en Ω y usualmente denominada *corrección (rectificación) de la frontera en un entorno de \bar{x}* , endereza a la parte de $\partial\Omega$ asociada a ese entorno de \bar{x} . Más aún,

$$\det(\text{Jac}(\Phi)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\phi_N}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\phi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_N}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \det(\text{Jac}(\Psi)) = 1.$$

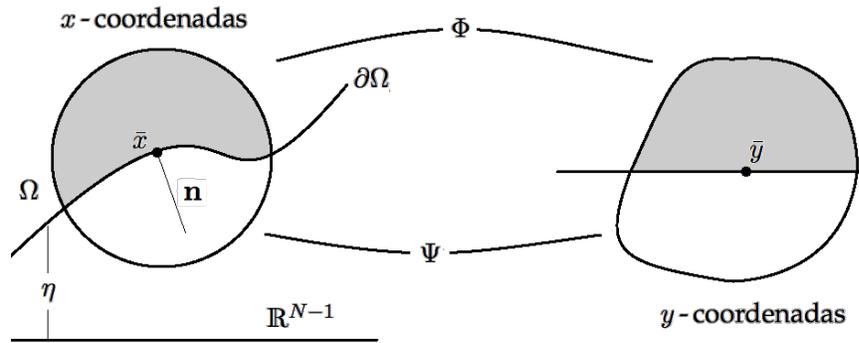


Figura 2.1. Corrección de la frontera $\partial\Omega$ alrededor de un punto $\bar{x} \in \partial\Omega$.

TEOREMA 2.3.1 (Teorema de extensión) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1 y sea $1 \leq p \leq \infty$. Si Ω' es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N tal que $\Omega \Subset \Omega'$, entonces existe un operador lineal continuo

$$E : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ uno tiene:

i) $E(u) = u$ c.t.p. en Ω

ii) $\text{supp } E(u) \subset \Omega'$

iii) $\exists C = C(p, \Omega, \Omega') > 0$ tal que $\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demostración.

(1°) Asumamos que $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Como $\partial\Omega$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^N , existen puntos $\bar{x}^j \in \mathbb{R}^N$ y números $r_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n_0$ tales que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} B_j,$$

con $B_j = B(\bar{x}^j, r_j)$. Ahora, usando la notación introducida en el comentario previo al enunciado de este teorema, en cada bola B_j definimos

$$y = \Phi_j(x) \quad \text{y} \quad x = \Psi_j(y),$$

y para cada $j = 1, 2, \dots, n_0$, ponemos

$$u^j(y) = u(\Psi_j(y)).$$

Entonces, poniendo $W_j = \Psi_j(B_j)$, para cada $j = 1, 2, \dots, n_0$, obtenemos

$$\int_{W_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi = - \int_{W_j} u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

y por otro lado, para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, de acuerdo al Teorema 2.1.4 del cambio de variables, para cada $j = 1, 2, \dots, n_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{W_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi &= \int_{\Psi_j^{-1}(W_j)} \frac{\partial u}{\partial x_i} (\Psi_j \circ \Psi_j^{-1}) |\det(\text{Jac}(\Psi_j^{-1}))| \varphi(\Psi_j \circ \Psi_j^{-1}) \\ &= \int_{B_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \end{aligned}$$

y

$$\int_{B_j} u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{W_j} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

de donde se sigue que

$$\int_{W_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi = \int_{B_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi = - \int_{B_j} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{W_j} u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Notar que la frontera corregida $\partial\Omega_N^{y,j}$ asociada al conjunto W_j , con $j = 1, 2, \dots, n_0$, puede ser cubierta con bolas $B_\ell^{y,j} = B(\bar{y}_\ell^{y,j}, r_\ell^{y,j}) \subset W_j$ de forma tal que

$$W'_j = \bigcup_{\ell=1}^{n_j} B_\ell^{y,j} \subset W_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_0,$$

también contenga a $\partial\Omega_N^{y,j}$; es decir, $\partial\Omega_N^{y,j} \subset W'_j$ para cada $j = 1, 2, \dots, n_0$. Ahora, desde el Lema 2.3.1 obtenemos

$$\|\bar{u}_j\|_{W^{1,p}(B_\ell^{y,j})} \leq C \|u_j\|_{W^{1,p}((B_\ell^{y,j})^+)} \quad \forall \ell = 1, 2, \dots, n_j,$$

donde $j = 1, 2, \dots, n_0$, y que implica que

$$\|\bar{u}_j\|_{W^{1,p}(W'_j)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n_0.$$

Ahora, por construcción y realizando algunos ajustes, podemos obtener

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{n_0} V_j,$$

con $V_j = \Psi^{-1}(W'_j) \subset B_j$, siendo V_j un abierto acotado de \mathbb{R}^N que se traslapa con cada uno de los conjuntos V_i , $i \neq j$, que están inmediatamente a su lado. De esta forma, también podemos escoger $V_0 \Subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{j=0}^{n_0} V_j$$

y asociar una partición de la unidad a estos conjuntos; digamos $\{\theta_j\}_{j=0}^{n_0}$. Ponemos ahora

$$\bar{u} = \sum_{j=0}^{n_0} \theta_j \bar{u}_j,$$

donde $\bar{u}_0 = u$ en V_0 . Entonces, desde nuestras estimaciones previas, obtenemos

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Notemos finalmente que podemos realizar algunos arreglos para que $\Omega \subset \text{supp } \bar{u} \Subset \Omega'$. Entonces, podemos definir el operador lineal

$$\begin{aligned} E : C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u &\rightarrow E(u) = \bar{u}. \end{aligned}$$

(2°) Asumamos ahora que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dividimos el estudio en dos casos:

Caso $1 \leq p < \infty$. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que u_n converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$ (tal sucesión existe por Teorema 2.2.3). Entonces, por linealidad del operador E , tenemos que

$$\begin{aligned} \|E(u_m) - E(u_n)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \|E(u_m - u_n)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(E(u_n))$ es una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que es un espacio completo, de donde concluimos que existe $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $E(u_n)$ converge a \bar{u} en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. En particular, notar que si (v_n) es otra sucesión de Cauchy en $C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que v_n converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \|E(v_n) - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &\leq \|E(v_n) - E(u_n)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|E(u_n) - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\|v_n - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|E(u_n) - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, \bar{u} no depende de la elección de la sucesión (u_n) . Finalmente definimos $E(u) = \bar{u}$, con lo que finaliza la demostración para este caso.

Caso $p = \infty$. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $C^\infty(\bar{\Omega})$. Notar que $C^\infty(\bar{\Omega})$ es un subconjunto de $W^{1,\infty}(\Omega)$ pues las derivadas débiles coinciden con las clásicas cuando ambas existen. Además, como (u_n) y $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, son sucesiones acotadas en $L^\infty(\Omega)$ obtenemos, salvo subsucesiones, que u_n converge a u en $W^{1,\infty}(\Omega)$. Por linealidad del operador E , tenemos que

$$\begin{aligned} \|E(u_m) - E(u_n)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} &= \|E(u_m - u_n)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\|u_m - u_n\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Razonando ahora como en el caso anterior, podemos finalizar la demostración. ■

2.4. Teoremas de Trazas

Asumamos que Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1 . El problema que se quiere tratar aquí está relacionado con la posibilidad de asignar valores sobre $\partial\Omega$ a una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Es claro que esto tiene sentido si $u \in C^1(\bar{\Omega})$, pero para una función cualquiera en $W^{1,p}(\Omega)$ esto no es claro, pues se trata de una función no necesariamente continua, definida en un sentido c.t.p. en Ω . El operador traza ataca este problema.

LEMA 2.4.1 Bajo las hipótesis generales del Lemma 2.3.1, si $1 \leq p < \infty$ y $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, entonces se tiene que

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

donde $\Gamma = \overline{B(\bar{x}, \frac{r}{2})} \cap \partial\Omega$.

Demostración.

Caso $1 < p < \infty$. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ pongamos $x = (x', x_N)$, y sea $\theta \in C_c^\infty(B(\bar{x}, r))$, con $0 \leq \theta \leq 1$ en $B(\bar{x}, r)$ y $\theta \equiv 1$ sobre $B(\bar{x}, \frac{r}{2})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u|^p dx &\leq \int_{\{x_N=0\}} \theta |u|^p dx' && \text{por definición de } \theta \\ &= - \int_{\{x_N=0\} \cap \partial B^+} \theta |u|^p \hat{n}_N dS && \text{pues en } \{x_N=0\} \cap \partial B^+: \hat{n} = (0, 0, \dots, 0, -1) \text{ y } \hat{n}_N = -1 \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_{\partial B^+} \theta |u|^p \hat{n}_i dS \\ &= - \sum_{i=1}^N \left(\int_{B^+} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} |u|^p + \int_{B^+} p \theta |u|^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) && \text{por integración por partes} \\ &\leq C \left(\int_{B^+} |u|^p + \sum_{i=1}^N \left(\int_{B^+} |u|^{q(p-1)} + \int_{B^+} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right) \right) && \text{por des. de Young, con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &\leq C \left(\int_{B^+} |u|^p + \sum_{i=1}^N \int_{B^+} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right) && \text{pues } q(p-1) = p \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}^p. \end{aligned}$$

De aquí, elevando a $\frac{1}{p}$ en ambos extremos de la desigualdad, y tomando en cuenta las equivalencias de las normas en $W^{1,p}(\Omega)$, concluimos que

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Caso $p = 1$. Se deja como ejercicio. ■

TEOREMA 2.4.1 (Teorema de Trazas) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1 , y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$\exists \text{ un operador lineal continuo } T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que:

i) Si $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, entonces $T(u) = u|_{\partial\Omega}$

ii) $\exists C = C(p, \Omega) > 0$ tal que $\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración.

(1°) Asumamos que $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Como $\partial\Omega$ es un conjunto compacto de \mathbb{R}^N , podemos escoger una cantidad finita de puntos, digamos n_0 puntos $\bar{x}_i \in \partial\Omega$, y fijar un radio $r > 0$ de manera que

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n_0} \Gamma_i \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B(\bar{x}_i, r) \cap \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B(\bar{x}_i, r),$$

con $\Gamma_i = \overline{B(\bar{x}_i, \frac{r}{2})} \cap \partial\Omega$, para toda $i = 1, 2, \dots, N$, donde entendemos que se ha aplicado un proceso de corrección (rectificación) de la frontera de manera local conveniente. Entonces, desde el Lema 2.4.1, obtenemos

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_0.$$

Por lo tanto, podemos definir el siguiente operador lineal

$$\begin{aligned} T : C^1(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow T(u) = u|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

el cual verifica

$$\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de u .

(2°) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces por Teorema 2.2.3 existe una sucesión (u_n) en $C^\infty(\overline{\Omega})$ que converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego,

$$\begin{aligned} \|T(u_m) - T(u_n)\|_{L^p(\partial\Omega)} &= \|T(u_m - u_n)\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &\leq C \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

De esta forma, $(T(u_n))$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\partial\Omega)$, que es un espacio completo, por lo cual $(T(u_n))$ converge en $L^p(\partial\Omega)$. Llamemos $T(u)$ al límite de la sucesión $(T(u_n))$, el cual pertenece a $L^p(\partial\Omega)$. Es fácil chequear que este límite es independiente de la particular sucesión (u_n) en $C^\infty(\overline{\Omega})$ que fue considerada convergiendo a u en $W^{1,p}(\Omega)$. En efecto, si (v_n) es otra sucesión en $C^\infty(\overline{\Omega})$ que converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \|T(u_n) - T(v_n)\|_{L^p(\partial\Omega)} &= \|T(u_n - v_n)\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &\leq \|u_n - v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalmente, si $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, es claro que u puede tomar un valor específico en $\partial\Omega$, pues por construcción de la sucesión (u_n) en $C^\infty(\overline{\Omega})$ en el Teorema 2.2.3, la convergencia a u en $W^{1,p}(\Omega)$ es uniforme. De esta forma, es válido poner $T(u) = u|_{\partial\Omega}$. ■

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

DEFINICIÓN 2.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$. Se define el *espacio de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

NOTACIÓN 2.4.1 En el caso $p = 2$ es común usar la notación

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 2.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N .

- El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio Banach si $1 \leq p < \infty$, es separable si $1 \leq p < \infty$, y es reflexivo si $1 < p < \infty$. El espacio $H_0^1(\Omega)$ es un espacio Hilbert con el producto interno de $H^1(\Omega)$.
- Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (vea Teorema 2.1.1 de Friedrichs), se tiene que

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En cambio, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, entonces en general $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$.

Las funciones $W_0^{1,p}(\Omega)$ son, de cierta forma, las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan sobre $\partial\Omega$. Sin embargo, es delicado dar un sentido preciso a esta afirmación ya que una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sólo está definida c.t.p., $\partial\Omega$ tiene medida cero, y u no posee necesariamente un representante continuo hasta la frontera de Ω . Las siguientes caracterizaciones sugieren que existen funciones que se anulan sobre $\partial\Omega$. Comenzamos con el siguiente resultado básico.

LEMA 2.4.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $\text{supp } u$ siendo un subconjunto compacto de Ω , entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Fijemos un conjunto abierto ω tal que $\text{supp } u \subset \omega \Subset \Omega$; y sea $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\theta \equiv 1$ en $\text{supp } u$ y $0 \leq \theta \leq 1$ en Ω . Por Teorema 2.1.1 de Friedrichs, existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que u_n converge a u en $L^p(\Omega)$ y ∇u_n converge a ∇u en $(L^p(\omega))^N$. Como $\theta u = u$ en $\text{supp } u$ y $\text{supp } \theta u = \text{supp } (\theta u)$, obtenemos que $\theta u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ converge a θu en $W^{1,p}(\Omega)$. Luego, por definición de $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtenemos que $\theta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y como $\theta u = u$ en $\text{supp } u$, concluimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

TEOREMA 2.4.2 (Funciones de traza cero en $W^{1,p}(\Omega)$) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea $1 \leq p < \infty$. Si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, entonces son equivalentes:

- i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$
- ii) $T(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Asumamos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces, por definición de $W_0^{1,p}(\Omega)$ existe una sucesión de funciones (u_n) en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que u_n converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$. Ahora, por Teorema 2.4.1, el operador traza $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ es un operador lineal continuo. Luego, como $T(u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, se sigue que $T(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$.

$ii) \Rightarrow i)$ Asumamos que $T(u) = 0$ sobre $\partial\Omega$. Como Ω es acotado, entonces $\text{supp } u$ es acotado. Fijemos una función $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$|\psi(t)| \leq 4|t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leq 1 \\ t & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Claramente $\psi(0) = 0$ y podemos suponer que $|\psi'(t)| \leq 4$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Luego, desde el Teorema 2.1.2, se sigue que $u_n = \frac{1}{n}\psi(nu)$ pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$. Notemos que para n suficientemente grande, $u_n = u$, de donde tenemos que

$$|u_n - u|^p \rightarrow 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

y

$$|u_n - u|^p \leq 2^p |u|^p,$$

con $2^p |u|^p \in L^1(\Omega)$. Por lo tanto, desde el Teorema A.7.3 de la convergencia dominada obtenemos

$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Por otro lado, como

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \psi'(nu) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

y $|\psi'(t)| = 1$ para $t > 2$, para n suficientemente grande obtenemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

de donde

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \rightarrow 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

y

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \leq 5^p \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

con $5^p \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \in L^1(\Omega)$, y por Teorema A.7.3 de la convergencia dominada obtenemos

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Se deduce que

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Finalmente, dado que $u \in C(\overline{\Omega})$, es claro que

$$\text{supp } u_n \subset \left\{ x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

de donde concluimos que $\text{supp } u_n \Subset \Omega$. Así, por el Lema 2.4.2, obtenemos que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y concluimos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

TEOREMA 2.4.3 (Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. Existe una constante $C = C_{p,\Omega} > 0$ tal que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se verifica que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}.$$

En particular, $\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$ representa una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ que es equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, mientras que $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ representa un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ que induce a $\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}$, la que a su vez representa una norma en $H_0^1(\Omega)$ que es equivalente $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demostración. Sólo probaremos el caso $1 \leq p < \infty$. El caso $p = \infty$ se prueba de forma similar.

(1°) Partimos considerando

$$\Omega = \prod_{i=1}^N]-a, a[,$$

donde $a > 0$, y $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces

$$u(x) = \int_{-a}^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', s) ds,$$

donde $x = (x', x_N)$. Ahora para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, desde la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left(\int_{-a}^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', s) \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-a}^{x_N} 1^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{-a}^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', s) \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} |x_N + a|^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$|u(x)|^p \leq \left(\int_{-a}^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', s) \right|^p ds \right) |x_N + a|^{\frac{p}{q}}.$$

Integrando ahora sobre x' , obtenemos

$$\int_{\prod_{i=1}^{N-1}]-a, a[} |u(x', x_N)|^p dx' \leq (2a)^{\frac{p}{q}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right|^p.$$

Por lo tanto, integrando ahora en la N -ésima variable, se sigue que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right|^p,$$

de donde

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq 2a \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2a \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}. \end{aligned}$$

(2°) En el caso general, notemos que dado un subconjunto Ω abierto y acotado de \mathbb{R}^N , siempre podemos encontrar un conjunto

$$\Omega' = \prod_{i=1}^N]-a, a[,$$

donde $a > 0$, tal que $\Omega \Subset \Omega'$. Luego, dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos extender esta u por 0 en $\Omega' \setminus \Omega$ y llamar a esta extensión \bar{u} . Entonces $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega')$ y por definición de $W_0^{1,p}(\Omega')$, existe una sucesión (\bar{u}_n) en $C_c^\infty(\Omega')$ tal que \bar{u}_n converge a \bar{u} en $W^{1,p}(\Omega')$. Por lo probado en la primera parte,

$$\|\bar{u}_n\|_{L^p(\Omega')} \leq 2a \|\nabla \bar{u}_n\|_{(L^p(\Omega'))^N},$$

y pasando al límite, obtenemos el resultado esperado, restringiendo \bar{u} a Ω . ■

OBSERVACIÓN 2.4.2 *La desigualdad de Poincaré permanece válida si consideramos Ω de medida finita, o si Ω es acotado en una sola dirección.*

El espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , y sean $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se designa por $W^{-1,q}(\Omega)$ al espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, y por $H^{-1}(\Omega)$ al dual de $H_0^1(\Omega)$.

Se identifican $L^2(\Omega)$ y su dual, pero no se identifican $H_0^1(\Omega)$ y su dual. Más aún, se tiene el esquema

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

con inyecciones continuas y densas.

Si Ω es acotado, se tiene

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty,$$

con inyecciones continuas y densas.

Si Ω no es acotado, se tiene

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2,$$

con inyecciones continuas y densas.

Los elementos de $W^{-1,q}(\Omega)$ se caracterizan en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , y sean $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $F \in W^{-1,q}(\Omega)$, entonces existen funciones f_0, f_1, \dots, f_N en $L^q(\Omega)$ tales que

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f_0 v + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y

$$\|F\|_{W^{-1,q}(\Omega)} = \max_{0 \leq i \leq N} \|f_i\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si Ω es acotado, se puede tomar $f_0 = 0$.

El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$

DEFINICIÓN 2.4.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Se define el espacio de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.

NOTACIÓN 2.4.2 En el caso $p = 2$ es común usar la notación

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 2.4.3 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$.

- El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio Banach. $H_0^m(\Omega)$ es un espacio Hilbert con el producto interno de $H^m(\Omega)$.
- En cierta forma, una función u pertenece a $W_0^{m,p}(\Omega)$ si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y $D^\alpha u = 0$ sobre $\partial\Omega$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m - 1$. Es conveniente distinguir entre $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{m,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para $m \geq 2$.

2.5. Inyecciones de Sobolev

En esta sección buscamos establecer relaciones de contención entre dos espacios de funciones. Estas relaciones son usualmente denominadas *inyecciones*. Aquí estamos interesados en inyecciones que involucren a espacios de Sobolev. Veremos que existen diferencias sustanciales entre las relaciones que se pueden establecer cuando trabajamos en dimensión uno o cuando lo hacemos en dimensiones superiores. Esta distinción quedará reflejada en un resultado básico en dimensión uno: si Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R} , entonces la inyección

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

es continua para toda $1 \leq p \leq \infty$; mientras que en dimensiones superiores, una inyección como ésta sólo es válida para $p > N$.

En consecuencia, conviene separar el estudio de las inyecciones de Sobolev, considerando primero el caso unidimensional y luego las dimensiones superiores. A su vez, en dimensiones superiores conviene separar el estudio en los casos,

$$1 \leq p < N$$

y

$$N < p \leq \infty,$$

incluyendo cuando sea posible el caso límite $p = N$.

2.5.1. Inyecciones de Sobolev: el caso unidimensional

TEOREMA 2.5.1 (Inyecciones de Sobolev en dimensión uno) Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} y sea $1 \leq p \leq \infty$. Existe una constante $C = C_I \geq 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I). \quad (2.10)$$

En particular, la inyección $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ es continua.

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.3.1 de extensión, es suficiente considerar el caso $I = \mathbb{R}$.

Caso $1 < p < \infty$.

(1º) Sea $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ definida por $G(s) = |s|^{p-1}s$. Entonces la función $G \circ v$ pertenece a $C_c^1(\mathbb{R})$ y además se verifica que

$$G'(v(t))v'(t) = p|v(t)|^{p-1}v'(t).$$

De esta forma, desde el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$G(v(t)) = p \int_{-\infty}^t |v(s)|^{p-1}v'(s) ds.$$

Ahora, por desigualdad de Hölder, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} |v(t)|^p &= |G(v(t))| \\ &\leq p \| |v|^{p-1} \|_{L^q(\mathbb{R})} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= p \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= p \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \text{pues } q = \frac{p}{p-1} \\ &= p \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
 |v(t)| &\leq p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{q}} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{p} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \right) \quad \text{por desigualdad de Young} \\
 &\leq p^{\frac{1}{p}} (\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}) \\
 &= p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}.
 \end{aligned}$$

Como $p^{\frac{1}{p}} \leq e^{\frac{1}{e}}$ para todo $p \geq 1$, se sigue que

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad (2.11)$$

donde $C = e^{\frac{1}{e}}$, que es una constante universal independiente de p .

(2°) Sea ahora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Por Teorema 2.1.1 de Friedrichs, existe una sucesión (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que u_n converge a u en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Luego, de acuerdo a (2.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|u_m - u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \\
 &\xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R})$, que es un espacio Banach. Luego, (u_n) converge en $L^\infty(\mathbb{R})$, y como $u_n \rightarrow u$ c.t.p., concluimos que u_n converge a u en $L^\infty(\mathbb{R})$. Finalmente, por (2.11) obtenemos

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y pasando al límite concluimos que (2.10) se cumple.

Caso $p = \infty$. Este caso es directo, pues $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ implica que $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ y

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

Caso $p = 1$. Se deja como ejercicio.

Conclusión. En resumen, hemos probado que el operador lineal

$$\begin{aligned}
 i : W^{1,p}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \\
 u &\rightarrow i(u) = u,
 \end{aligned}$$

es continuo, pues

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Por lo tanto, la inyección $W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ es continua para todo $1 \leq p \leq \infty$. ■

Antes de enunciar un resultado relativo a inyecciones compactas de Sobolev sobre intervalos acotados, estableceremos un resultado que muestra que las funciones en los espacios de Sobolev siempre tienen un representante continuo. Partimos con unos resultados previos.

LEMA 2.5.1 Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} y sea $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Si

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I),$$

entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f = C$ c.t.p. en I .

LEMA 2.5.2 Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} y sea $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$. La función $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(t) = \int_a^t g(s) ds \quad \forall t \in I,$$

para algún elemento $a \in I$, pertenece a $C(I)$ y tiene por derivada débil a g .

TEOREMA 2.5.2 Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} y sea $u \in W^{1,p}(I)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Existe una función $u^* \in C(\bar{I})$ tal que

$$u = u^* \quad \text{c.t.p. en } I$$

y

$$u^*(t_2) - u^*(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u'(s) ds \quad \forall t_1, t_2 \in \bar{I}.$$

TEOREMA 2.5.3 (Inyecciones compactas de Sobolev en intervalos abiertos y acotados) Sea I un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} . Entonces

- i) módulo representante continuo, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ con inyección compacta para toda $1 < p \leq \infty$,
- ii) $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ con inyección compacta para toda $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Sea I un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} .

i) Sea $1 < p \leq \infty$ y sea

$$\mathcal{F} = B_{W^{1,p}(I)} = \{u \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq 1\},$$

la bola unitaria de $W^{1,p}(I)$. Para probar que el operador lineal

$$\begin{aligned} i : W^{1,p}(I) &\rightarrow C(\bar{I}) \\ u &\rightarrow i(u) = u, \end{aligned}$$

define una inyección compacta, es suficiente probar que la clausura de $i(\mathcal{F})$ es compacta en la topología de $C(\bar{I})$, donde hemos identificado los elementos de $W^{1,p}(I)$ con sus respectivos representantes continuos, de acuerdo al Teorema 2.5.2. La idea es mostrar que se verifican las hipótesis del Teorema A.10.1 de Arzelà-Ascoli, y entonces obtener la conclusión deseada.

Sea $u \in \mathcal{F}$ y $t_1, t_2 \in I$. Como $]\min\{t_1, t_2\}, \max\{t_1, t_2}[\subseteq I$, desde el Lema 2.5.2 y la desigualdad de Hölder, dados $t_1, t_2 \in I$, para cada $1 < p \leq \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned} |u(t_2) - u(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} u'(s) \, ds \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^p(I)} \left| \int_{t_1}^{t_2} 1^q \, ds \right|^{\frac{1}{q}} \\ &\leq |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists \delta = \varepsilon^q > 0 \text{ tal que } (\forall t_1, t_2 \in I)(|t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow |u(t_2) - u(t_1)| < \varepsilon) \quad \forall u \in \mathcal{F}.$$

Esto quiere decir que la familia \mathcal{F} es uniformemente equicontinua. Por otra parte, \bar{I} es un subconjunto compacto del espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $\mathcal{F} \subset C(\bar{I})$, con $\mathcal{F} = i(\mathcal{F})$ siendo acotado en la topología fuerte de $C(\bar{I})$, pues por Teorema 2.5.1, existe una constante $C = C_I > 0$ tal que para cada $u \in \mathcal{F}$ se verifica

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\bar{I})} &= \sup_{t \in I} |u(t)| \\ &= \|u\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Luego, tenemos todas las condiciones para aplicar el Teorema A.10.1 de Arzelà-Ascoli y concluir que $i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ es compacta en la topología fuerte de $C(\bar{I})$.

ii) Sea $1 \leq q < \infty$. Consideremos el operador lineal

$$\begin{aligned} i : W^{1,1}(I) &\rightarrow L^q(I) \\ u &\rightarrow i(u) = u \end{aligned}$$

y el conjunto

$$\mathcal{H} = B_{W^{1,1}(I)} = \{u \in W^{1,1}(I) : \|u\|_{W^{1,1}(I)} \leq 1\}.$$

Es suficiente probar que \mathcal{H} es compacto en la topología de $L^q(I)$. Lo haremos mediante el uso del Teorema A.10.2 de Fréchet-Kolmogorov-Riesz. Fijemos arbitrariamente un intervalo abierto y acotado I' tal que $I \subseteq I'$. Si definimos $\mathcal{F} = E(\mathcal{H})$, siendo E el operador extensión definido en el Teorema 2.3.1, entonces \mathcal{H} es un subconjunto acotado de $L^q(I)$, pues como I es acotado, entonces $L^\infty(I) \subset L^q(I)$ para toda $1 \leq q \leq \infty$. En efecto, desde la desigualdad de Hölder y el Teorema 2.5.1 obtenemos que existe una constante $C = C_I > 0$ tal que para cada

$u \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(I)} &\leq \left(\int_I 1 \, ds \right) \|u\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,1}(I)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Por otro lado, \mathcal{F} también es acotado, pues por Teorema 2.3.1 parte iii), se sigue que existe una constante $C = C_{I,I'} > 0$ tal que para cada $u \in \mathcal{H}$ se verifica

$$\begin{aligned} \|E(u)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} &\leq C \|u\|_{W^{1,1}(I)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ dado. Por Proposición 2.1.2 parte iii) y el Teorema 2.3.1 parte iii), existe $C = C_{I,I'} > 0$ tal que uno tiene

$$\begin{aligned} \|\tau_h E(u) - E(u)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq |h| \|(E(u))'\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq |h| \|E(u)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} \\ &\leq C|h| \|u\|_{W^{1,1}(I)} \\ &\leq C|h|, \end{aligned}$$

y entonces, desde el Teorema 2.5.1, tenemos que $E(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Más aún, existe una constante $C = C_{I,I'} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |E(u)(s+h) - E(u)(s)|^q \, ds &= \int_{\mathbb{R}} |E(u)(s+h) - E(u)(s)|^{q-1} |E(u)(s+h) - E(u)(s)| \, ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (|E(u)(s+h)| + |E(u)(s)|)^{q-1} |E(u)(s+h) - E(u)(s)| \, ds \\ &\leq (2\|E(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{q-1} \left(\int_{I'} ds \right) \int_{\mathbb{R}} |E(u)(s+h) - E(u)(s)| \, ds \\ &\leq C \|E(u)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}^{q-1} \|\tau_h E(u) - E(u)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,1}(I)}^{q-1} \|\tau_h E(u) - E(u)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq C|h|. \end{aligned}$$

En consecuencia, hemos probado que para alguna constante $C = C_{I,I'} > 0$, se tiene

$$\|\tau_h E(u) - E(u)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C|h|^{\frac{1}{q}} \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h E(u) - E(u)\|_{L^q(\mathbb{R})} = 0 \quad \text{uniformemente} \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Desde el Teorema A.10.2 de Kolmogorov-Riesz-Fréchet, concluimos que la clausura de $\mathcal{F}|_I$ en $L^q(I)$ es compacta. Pero por Teorema 2.3.1 parte i), $\mathcal{F}|_I = \mathcal{H}$, por lo que \mathcal{H} es compacta en $L^q(I)$. ■

OBSERVACIÓN 2.5.1 Sea I un intervalo abierto de \mathbb{R} .

- Módulo representante continuo, $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ es una inyección continua, pero no es compacta. Sin embargo, si (u_n) es una sucesión acotada en $W^{1,1}(I)$, entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que $(u_{n_k}(x))$ converge para toda $x \in I$.
- Si I no es acotado y $1 < p \leq \infty$, entonces $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ es una inyección continua, pero no es compacta. Sin embargo, si (u_n) es una sucesión acotada en $W^{1,p}(I)$, con $1 < p \leq \infty$, entonces existe una sucesión (u_{n_k}) y una $u \in W^{1,p}(I)$ tales que (u_{n_k}) converge a u en $L^\infty(J)$, para cada subconjunto J de I .

2.5.2. Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev y sus consecuencias

En esta sección estamos interesados en estudiar especialmente el caso

$$1 \leq p < N.$$

Una primera desigualdad que nos interesa validar tiene la siguiente forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N}, \quad (2.12)$$

para ciertas constantes $C > 0$, $1 \leq q < \infty$ y todas las funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Lo interesante aquí es que la constante C llegue a ser independiente de q y de u .

Para ver qué valores de q pueden ser considerados, procedemos de la siguiente forma. Sea $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, y definamos la siguiente familia de funciones reescaladas,

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Si una desigualdad como (2.12) vale, entonces también debiese cumplirse

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u_\lambda\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N}.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^q &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^q dx \\ &= \frac{1}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\lambda x)|^p dx \\ &= \frac{\lambda^p}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p, \end{aligned}$$

entonces debiésemos tener

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{N}{q}}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{N}{p}}} \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N},$$

de donde

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\lambda^{1+\frac{N}{q}-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N}.$$

Evidentemente,

$$1 + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} = 0$$

sino, al tomar λ tendiendo a 0, concluiríamos que

$$u \equiv 0,$$

lo cual es contradictorio. Luego, despejando q , obtenemos

$$q = \frac{Np}{N-p}.$$

DEFINICIÓN 2.5.1 Sea $1 \leq p < N$. El *conjugado de Sobolev* de p es

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Notar que p^* verifica

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{y} \quad p^* > p \quad \forall 1 \leq p < N.$$

TEOREMA 2.5.4 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Sea $1 \leq p < N$. Existe una constante $C = C_{p,N} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ con inyección continua.

COROLARIO 2.5.1 Sea $1 \leq p < N$ y sea $p \leq q \leq p^*$. Existe una constante $C = C_{p,N} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ con inyección continua.

Demostración. Sea $1 \leq p < N$ y sea $p \leq q \leq p^*$ dado. Pongamos

$$\frac{1}{q} = \frac{\eta}{p} + \frac{1-\eta}{p^*} \quad \text{para algún } 0 \leq \eta \leq 1.$$

Por desigualdad de interpolación y desigualdad de Young, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^\eta \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{1-\eta} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando directamente el Teorema 2.5.4, obtenemos

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

para alguna constante $C = C_{p,N} > 0$. Por lo tanto, hemos probado que el operador lineal

$$\begin{aligned} i : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \\ u &\rightarrow i(u) = u, \end{aligned}$$

es continuo para toda $p \leq q \leq p^*$. Es decir, si $1 \leq p < N$, entonces $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ con inyección continua para toda $p \leq q \leq p^*$. ■

TEOREMA 2.5.5 (Estimaciones para $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < N$) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea $1 \leq p < N$. Existe una constante $C = C_{\Omega,p,N} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

En particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ con inyección continua.

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Como Ω es acotado y $\partial\Omega$ es de clase C^1 , por Teorema 2.3.1 tenemos que $E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, verificando

- $E(u) = u$ c.t.p. en Ω
- $\text{supp } E(u) \Subset \Omega'$, donde $\Omega \Subset \Omega'$ es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , y
- Existe una constante $C = C_{\Omega,\Omega'} > 0$ tal que $\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

De esta forma, como $E(u)$ tiene soporte compacto en Ω' , por Teorema 2.1.1 de Friedrichs, existe (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightarrow E(u)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, de donde

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla(E(u)) \quad \text{en } (L^p(\Omega))^N.$$

Por otro lado, por Teorema 2.5.4 de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, también tenemos

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \text{y} \quad \|u_m - u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_m - \nabla u_n\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Luego, como $L^p(\Omega)$ es un espacio Banach, entonces (∇u_n) es de Cauchy en $(L^p(\Omega))^N$. Así, por la segunda desigualdad en (2.13), obtenemos que (u_n) es de Cauchy en $L^{p^*}(\Omega)$, que también es un espacio Banach, y por lo tanto (u_n) converge en $L^{p^*}(\Omega)$. Luego, para una subsucesión (vea el Teorema A.8.4), por el Teorema A.7.3 de la convergencia dominada, y la unicidad del límite, podemos concluir que $u_{n_k} \rightarrow E(u)$ en $L^{p^*}(\Omega)$, y podemos pasar al límite en la primera desigualdad en (2.13) para tal subsucesión y obtener

$$\|E(u)\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla(E(u))\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N}.$$

Finalmente, por las propiedades de $E(u)$, la definición de $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ y el Teorema 2.5.4 de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev concluimos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} &= \|E(u)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &\leq C\|\nabla(E(u))\|_{(L^p(\Omega))^N} \\ &\leq C\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

TEOREMA 2.5.6 (Estimaciones para $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < N$) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea $1 \leq p < N$ y sea $1 \leq q \leq p^*$. Existe una constante $C = C_{N,p,q,\Omega} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particular, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección continua.

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea (u_n) una sucesión de elementos en $C_c^\infty(\Omega)$ que converge a u . Consideremos ahora la sucesión (\bar{u}_n) correspondiente a la respectiva sucesión de extensiones por cero de las u_n ; esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$\bar{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por Teorema 2.5.4 de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, tenemos que

$$\|\bar{u}_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla \bar{u}_n\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \text{y} \quad \|\bar{u}_n - \bar{u}_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla \bar{u}_n - \nabla \bar{u}_m\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Evidentemente, por definición de las \bar{u}_n , las desigualdades previas equivalen a

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u_n\|_{(L^p(\Omega))^N} \quad \text{y} \quad \|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{(L^p(\Omega))^N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

Ahora, como $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, entonces $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ en $(L^p(\Omega))^N$, y como $L^p(\Omega)$ es un espacio Banach, entonces (∇u_n) es de Cauchy en $(L^p(\Omega))^N$. Por la segunda desigualdad en (2.14), se sigue que (u_n) es de Cauchy en $L^{p^*}(\Omega)$, que también es un espacio Banach, y por lo tanto (u_n) converge en $L^{p^*}(\Omega)$. Luego, para una subsucesión (vea el Teorema A.8.4), por el Teorema A.7.3 de la convergencia dominada, y la unicidad del límite, podemos concluir que $u_{n_k} \rightarrow \bar{u}$ en $L^{p^*}(\Omega)$, y podemos pasar al límite en la primera desigualdad en (2.14) para tal subsucesión y obtener

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}.$$

Finalmente, como Ω es acotado, tenemos que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

para toda $1 \leq q \leq p^*$, y por transitividad de la desigualdad, obtenemos la desigualdad deseada. \blacksquare

OBSERVACIÓN 2.5.2 *Notar que el Teorema 2.5.6 valida la desigualdad de Poincaré obtenida en el Teorema 2.4.3. Esto es, bajo las condiciones del Teorema 2.5.6, se tiene que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

2.5.3. Desigualdad de Morrey y sus consecuencias

En esta sección estamos interesados en estudiar el caso

$$N < p \leq \infty.$$

TEOREMA 2.5.7 (Desigualdad de Morrey) *Sea $N < p \leq \infty$.*

i) *Existe una constante $C = C_{N,p} > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ con inyección continua.

ii) *Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces u tiene un representante u^* en $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)$, donde $\gamma = 1 - \frac{N}{p}$. Además, existe una constante $C = C_{N,p} > 0$ tal que*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, módulo representante continuo, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^N)$ con inyección continua.

Desde aquí en adelante, cuando el dominio considerado sea \mathbb{R}^N , para $N < p \leq \infty$ identificaremos a una función $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con su representante continuo u^* , el que continuaremos denotando por u .

COROLARIO 2.5.2 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces:*

i) *$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, donde $q = \frac{Np}{N-pm}$ si $m < \frac{N}{p}$*

ii) *$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, donde $p \leq q < \infty$ si $m = \frac{N}{p}$*

iii) *$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ si $m > \frac{N}{p}$.*

En todos los casos las inyecciones son continuas. Además, si $m > \frac{N}{p}$ y $m - \frac{N}{p}$ no es un entero, se considera $k = \left[m - \frac{N}{p} \right]$ y $\theta = m - \frac{N}{p} - k$, de manera que $0 < \theta < 1$; y

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k$$

y

$$\|D^\alpha u\|_{C^{0,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| = k.$$

En particular, módulo representante derivable hasta el orden k , $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^N)$ con inyección continua.

TEOREMA 2.5.8 (Estimaciones para $W^{1,p}(\Omega)$, $N < p \leq \infty$) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea $N < p \leq \infty$.

i) Existe una constante $C = C_{N,p,\Omega} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

En particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ con inyección continua.

ii) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces u tiene un representante u^* en $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, donde $\gamma = 1 - \frac{N}{p}$. Además, existe una constante $C = C_{N,p,\Omega} > 0$ tal que

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

En particular, módulo representante continuo, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ con inyección continua.

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Como Ω es acotado y $\partial\Omega$ es de clase C^1 , por Teorema 2.3.1 tenemos que $E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, verificando

- $E(u) = u$ c.t.p. en Ω
- $\text{supp } E(u) \subset \Omega'$, donde Ω' es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , y
- Existe una constante $C = C_{\Omega,\Omega'} > 0$ tal que $\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

De esta forma, como $E(u)$ tiene soporte compacto en Ω' , por Teorema 2.1.1 de Friedrichs, existe una sucesión de funciones (u_n) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightarrow E(u) \quad \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, por Teorema 2.5.7 de Morrey, tenemos

$$\|u_m - u_n\|_{C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_m - \nabla u_n\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Luego, argumentando apropiadamente, podemos concluir que existe $u^* \in C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u = u^*$ c.t.p. en \mathbb{R}^N , y

$$u_n \rightarrow u^* \quad \text{en } C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N).$$

También desde el Teorema 2.5.7 de Morrey tenemos,

$$\|u_n\|_{C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

De esta forma, después de pasar al límite, obtenemos

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Finalmente, por las propiedades de $E(u)$, u^* la definición de $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ concluimos que

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)} \leq C\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

De aquí en adelante, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1 y $N < p \leq \infty$, entonces identificaremos a $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con su representante continuo u^* .

2.5.4. Desigualdades generales de Sobolev

TEOREMA 2.5.9 (Desigualdades generales de Sobolev) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 , sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. Se verifica lo siguiente:

i) Si $m < \frac{N}{p}$, entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N'}$$

con inyección continua.

ii) Si $m > \frac{N}{p}$ y $u \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces u tiene un representante $u^* \in C^{m-\lceil \frac{N}{p} \rceil - 1, \gamma}(\bar{\Omega})$, donde

$$\gamma = \begin{cases} \lceil \frac{N}{p} \rceil + 1 - \frac{N}{p} & \text{si } \frac{N}{p} \text{ no es un entero} \\ \ell & \text{si } \frac{N}{p} \text{ es un entero,} \end{cases}$$

con $0 < \ell < 1$ arbitrario, y existe una constante $C = C_{m,N,p,\Omega} > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{m-\lceil \frac{N}{p} \rceil - 1, \gamma}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

2.6. El Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov

Como ya hemos visto, la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev implica que

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \text{para toda } 1 \leq p < N,$$

donde $p^* = \frac{Np}{N-p}$, con inyección continua.

A continuación veremos que en verdad uno tiene que

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{para toda } 1 \leq q < p^*,$$

es una inyección compacta. La compacidad es fundamental para las aplicaciones del análisis no lineal a las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

TEOREMA 2.6.1 (Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov) Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 . Se verifica que:

- i) Si $1 \leq p < N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para cada $1 \leq q < p^*$, con inyección compacta.
- ii) Si $p = N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para cada $p \leq q < \infty$, con inyección compacta.
- iii) Si $N < p \leq \infty$, entonces, módulo representante continuo, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, con inyección compacta.

En particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con inyección compacta.

OBSERVACIÓN 2.6.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con inyección compacta, incluso sin asumir que $\partial\Omega$ es de clase C^1 .

2.7. Problemas propuestos

1. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. Prueba que $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$.
2. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Prueba que si (u_n) es una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y (∇u_n) tiene límite en $(L^p(\Omega))^N$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$. **Sugerencia.** Toma como referencia demostración de la Proposición 2.1.1, donde se prueba que $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio Banach.
3. Sea I un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} y sea $1 \leq p \leq \infty$. Prueba que si $u \in W^{1,p}(I)$ y $u' \in C(\bar{I})$, entonces $u \in C^1(\bar{I})$.
4. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $1 < p \leq \infty$. Prueba que si $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y (∇u_n) está acotada en $(L^p(\Omega))^N$, entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
5. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^3 . Prueba que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluye que en $H_0^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual.

6. Prueba que si $u \in W^{1,p}(0,1)$ para algún $1 < p < \infty$, entonces

$$|u(t_2) - u(t_1)| \leq |t_2 - t_1|^{1-\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(0,1)} \quad \text{para casi toda } t_2, t_1 \in]0, 1[.$$

7. Sea $1 < p < \infty$. Dada $u \in L^p(0, 1)$ se define

$$Tu(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u(t) dt \quad \text{para } x \in]0, 1].$$

Prueba que $Tu \in C(]0, 1]) \cap L^q(0, 1)$ para cada $1 < q < p$. Más aún, $Tu \in L^p(0, 1)$ y

$$\|Tu\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{p}{p-1} \|u\|_{L^p(0,1)} \quad \forall u \in L^p(0, 1).$$

8. a) Prueba que si $u \in W^{1,p}(0, 1)$ con $1 < p < \infty$, siendo $u(0) = 0$, entonces $\frac{u(x)}{x} \in L^p(0, 1)$ y se verifica que

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^p(0,1)} \leq \frac{p}{p-1} \|u'\|_{L^p(0,1)}.$$

b) Asume que $u \in W^{1,p}(0, 1)$ con $1 < p < \infty$ y que $\frac{u(x)}{x} \in L^p(0, 1)$. Muestra que $u(0) = 0$.

c) Sea $u(x) = (1 + |\ln x|)^{-1}$. Muestra que $u \in W^{1,1}(0, 1)$, $u(0) = 0$, pero $\frac{u(x)}{x} \notin L^1(0, 1)$.

d) Asume que $u \in W^{1,p}(0, 1)$ con $1 \leq p < \infty$ y $u(0) = 0$. Fija una función $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ cualquiera tal que $\eta(x) = 0 \forall x \in]-\infty, 1]$ y $\eta(x) = 1 \forall x \in [2, +\infty[$. Pon $\eta_n(x) = \eta(nx)$ y $u_n(x) = \eta_n(x)u(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Muestra que $u_n \in W^{1,p}(0, 1)$ y prueba que $u_n \rightarrow u$ en $W^{1,p}(0, 1)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

9. Sea $u \in W^{2,p}(0, 1)$ con $1 < p < \infty$. Asume que $u(0) = u'(0) = 0$. Muestra que $\frac{u(x)}{x^2} \in L^p(0, 1)$ y $\frac{u'(x)}{x} \in L^p(0, 1)$, verificando para alguna $C = C_p > 0$ que

$$\left\| \frac{u(x)}{x^2} \right\|_{L^p(0,1)} + \left\| \frac{u'(x)}{x} \right\|_{L^p(0,1)} \leq C \|u''\|_{L^p(0,1)}.$$

a) Deduce que $v(x) = \frac{u(x)}{x} \in W^{1,p}(0, 1)$ con $v(0) = 0$.

b) Asume que $u \in W^{2,p}(0, 1)$ con $1 < p < \infty$ y $u(0) = 0$. Fija una función $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ cualquiera tal que $\eta(x) = 0 \forall x \in]-\infty, 1]$ y $\eta(x) = 1 \forall x \in [2, +\infty[$. Pon $\eta_n(x) = \eta(nx)$ y $u_n(x) = \eta_n(x)u(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Muestra que $u_n \in W^{2,p}(0, 1)$ y prueba que $u_n \rightarrow u$ en $W^{2,p}(0, 1)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

c) Más generalmente, sea $m \in \mathbb{N}$, y sea $1 < p < \infty$. Asume que $u \in X_m$, donde

$$X_m = \{u \in W^{m,p}(0, 1) : u(0) = Du(0) = \dots = D^{m-1}u(0) = 0\}.$$

Muestra que $\frac{u(x)}{x^m} \in L^p(0, 1)$ y que $\frac{u(x)}{x^{m-1}} \in X_1$.

10. Si Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada y suficientemente regular, entonces la norma de $W^{m,p}(\Omega)$ es equivalente a la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

11. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N tal que $\partial\Omega$ es de clase C^2 . Prueba que el operador extensión construido en el Teorema 2.3.1 es lineal continuo desde $W^{2,p}(\Omega)$ a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, y mediante un contraejemplo, muestra que la construcción previa no provee una extensión para los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, si $m > 2$.
12. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 y sea $1 < p < \infty$. Si $u \in L^p(\Omega)$. Prueba que las siguientes propiedades son equivalentes:

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii) Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N, \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

iii) La función $\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y en este caso

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

13. Sea $1 < p < \infty$ y Ω acotado.

a) Prueba que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

b) Prueba que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{c.t.p. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{c.t.p. en } \{u \leq 0\} \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{c.t.p. en } \{u < 0\} \end{cases}$$

Sugerencia: Nota que $u^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_{\varepsilon}(u)$ para

$$v_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

c) Prueba que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\nabla u = 0 \quad \text{c.t.p. en } \{u = 0\}.$$

14. Sea Ω un abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío y frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Prueba que existe una constante $C = C_{N,\Omega} > 0$ tal que

$$\|u - m_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $u \in H^1(\Omega)$, donde

$$m_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dy.$$

Bibliografía del Capítulo 2

- [1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, *Universitext*, Springer, 2011, Printed in the United States of America.
- [2] M. Clapp, *Análisis matemático*, colección Papirhos, Serie Textos 2, Instituto de Matemática, UNAM, primera edición 2015, Impreso en México.
- [3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, *Graduate Studies in Mathematics*, Volume 19, American Mathematical Society, Reprint whit corrections 2002, Printed in the United States of America.
- [4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Reprint of the 1998 edition, Printed in Germany.
- [5] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons Inc., first edition 1989, Printed in India.

Formulación variacional de algunos problemas elípticos

En este capítulo estudiaremos algunos resultados relativos a las soluciones débiles de ciertos problemas elípticos de valores de frontera. Nos enfocaremos principalmente en la regularidad de las soluciones, en el principio del máximo y en un problema de valores propios.

3.1. Motivación

Consideremos la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

Asumamos por un instante que u es suficientemente suave y que decae muy rápidamente en infinito. Entonces,

¿Cuál es la regularidad de u si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$?

Veamos esto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |D^2 u|^2. \end{aligned}$$

En el cálculo previo vimos que la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de u puede ser estimada por la norma en

$L^2(\mathbb{R}^N)$ de f . Ahora, asumamos que f es derivable, con $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Entonces, derivando en la ecuación de Poisson, obtenemos

$$\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, siguiendo el mismo razonamiento anterior, concluimos que la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de las derivadas de tercer orden de u pueden ser estimadas por la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de la primera derivada de f . Es claro que podemos extender este procedimiento; esto es, si f es m veces derivable, tal que cada derivada pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N)$, entonces la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de las derivadas de $(m+2)$ -ésimo orden de u pueden ser estimadas por la norma en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de la m -ésima derivada de f . Los cálculos previos sugieren que si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, las soluciones $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ de la ecuación de Poisson en \mathbb{R}^N debiesen pertenecer a $H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$. Notar que si $m = \infty$, la conclusión debiese ser que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

3.2. Regularidad de las soluciones débiles

Entregaremos dos resultados relacionados con la regularidad de las soluciones débiles. Dejamos en claro que este tema es delicado, y requiere un estudio cuidadoso.

Regularidad de soluciones para el problema de Dirichlet

El siguiente resultado concierne a la regularidad de las soluciones débiles del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada.

TEOREMA 3.2.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada y de clase C^2 o bien sea $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces

$$u \in H^2(\Omega) \quad \text{con} \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

donde $C = C_{\Omega} > 0$. Además, si $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, entonces

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \text{con} \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)},$$

donde $C = C_{\Omega} > 0$. En particular:

- Si $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, con $m > \frac{N}{2}$, entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
- Si $\partial\Omega$ es de clase C^∞ y si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Regularidad de soluciones para el problema de Neumann

El siguiente resultado concierne a la regularidad de las soluciones débiles del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada, y \mathbf{n} representa al vector normal exterior unitario sobre $\partial\Omega$.

TEOREMA 3.2.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada y de clase C^2 ; o bien sea $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Entonces

$$u \in H^2(\Omega) \quad \text{con} \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

donde $C = C_{\Omega} > 0$. Además, si $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, entonces

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \text{con} \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)},$$

donde $C = C_{\Omega} > 0$. En particular:

- Si $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, con $m > \frac{N}{2}$, entonces $u \in C^2(\bar{\Omega})$.
- Si $\partial\Omega$ es de clase C^{∞} y si $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, entonces $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

Regularidad de soluciones para problemas más generales

Las mismas conclusiones se obtienen para la solución del problema de Dirichlet o del problema de Neumann asociado a un operador elíptico general de segundo orden.

A continuación mostraremos algunas conclusiones sólo para un problema general de Dirichlet.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 . Consideremos el problema de encontrar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique la ecuación

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde para cada $i, j = 1, 2, \dots, N$, las funciones $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ satisfacen la condición de elipticidad

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \eta |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

para algún $\eta > 0$, $a_i \in C(\bar{\Omega})$ y $a_0 \in C(\bar{\Omega})$, y $f \in L^2(\Omega)$.

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema; es decir, satisface

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + \int_{\Omega} a_0 u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

entonces, bajo las condiciones dadas se verifica que

$$u \in H^2(\Omega).$$

Mas aún, para $m \geq 1$, si $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y

$$f \in H^m(\Omega), \quad a_{ij} \in C^{m+1}(\bar{\Omega}) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N, \quad \text{y} \quad a_i \in C^m(\bar{\Omega}) \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

entonces

$$u \in H^{m+2}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 3.2.1 Aunque aquí no probaremos los resultados enunciados anteriormente, cabe señalar que la idea de la demostración del Teorema 3.2.1 (o el Teorema 3.2.2) es comenzar estableciendo los resultados para $\Omega = \mathbb{R}^N$ y a continuación para $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. En el caso en que Ω es un abierto general se procede en dos etapas:

- **Etapa 1: Regularidad en el interior**, inspirada en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, se realizan estimaciones en todo $\omega \Subset \Omega$.
- **Etapa 2: Regularidad en la frontera**, inspirada en el caso $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, se realizan estimaciones sobre la frontera.

El ingrediente esencial de la demostración es el **método de las traslaciones** (también conocida como técnica de los cocientes incrementales) de Nirenberg.

3.3. Resolución de algunos problemas de valores de frontera

Un problema con Laplaciano bajo condiciones de frontera Dirichlet cero

PROBLEMA 3.3.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $f \in C(\bar{\Omega})$. Encuentra condiciones sobre $\partial\Omega$ y f de manera que exista una solución clásica para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Solución. Procederemos por etapas:

- Etapa 1: Noción de solución débil para el problema (3.1).** Una solución clásica de (3.1) es una función $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Con la finalidad de usar el Teorema 1.6.2, en esta etapa asumiremos adicionalmente que $\partial\Omega$ es de clase C^1 si $N > 1$. Como Ω es acotado, $u \in H^1(\Omega)$. En particular, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, y como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, desde el Teorema 2.4.2 se sigue que $u \in H_0^1(\Omega)$. Por otro lado, desde la ecuación diferencial en (3.1), se sigue que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)\varphi = \int_{\Omega} f\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Luego, por Teorema 1.6.2 parte i), obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi - \int_{\partial\Omega} \nabla u \varphi \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $C_c^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ y $\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$, podemos llegar a la siguiente formulación débil para el problema (3.1):

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.2)$$

- Etapa 2: Existencia y unicidad de las soluciones débiles para el problema (3.1).** Consideremos la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

y la forma lineal $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Notar que dadas $u, v \in H_0^1(\Omega)$ uno tiene que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u \nabla v| + |u v|) \\ &\leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{por desigualdad de Hölder} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \\ &= \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $f \in C(\bar{\Omega})$ y Ω es acotado, entonces $f \in L^2(\Omega)$. Luego, $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, pues desde la desigualdad de Hölder uno tiene

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Así que, desde el Teorema de Lax-Milgram [A.5.1](#), concluimos que existe una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

que equivale a resolver [\(3.2\)](#).

- **Etapa 3: Regularidad de las soluciones débiles para el problema [\(3.1\)](#).** Este asunto es delicado y conviene separar el estudio en dos casos:

Caso $N = 1$. Es suficiente con considerar Ω como un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} . Como $f \in C(\bar{\Omega})$ y Ω es acotado, entonces $f \in L^2(\Omega)$, y así $u \in H^2(\Omega)$. En efecto, como $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema [\(3.1\)](#), entonces

$$\int_{\Omega} u' \varphi' = \int_{\Omega} (f - u) \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y así, $u'' = -(f - u) \in L^2(\Omega)$; de donde se deduce que $u' \in H^1(\Omega)$ y entonces $u \in H^2(\Omega)$. Ahora, por Teorema [2.5.9](#) parte *ii*), en verdad concluimos que

$$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Caso $N > 1$. Simplemente usaremos el Teorema [3.2.1](#). Esto es, para $N > 1$, asumiremos que $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, con $m > \frac{N}{2}$. Entonces

$$u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap H^{m+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

- **Etapa 4: Recuperación de la solución clásica para el problema [\(3.1\)](#).** Nuevamente separamos en casos.

Caso $N = 1$. Como $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, desde el Teorema [2.4.2](#), concluimos que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, u satisface

$$\int_{\Omega} u' \varphi' + u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Luego, por definición de $H^2(\Omega)$, tenemos que

$$-\int_{\Omega} u'' \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

o equivalentemente

$$\int_{\Omega} (-u'' + u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto $-u'' + u - f = 0$ c.t.p. en Ω . Ahora, como $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ y $f \in C(\bar{\Omega})$, podemos identificar u'' con una función continua y concluir que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, de donde la igualdad $-u'' + u - f = 0$ se verifica en todo Ω .

Caso $N > 1$. Como $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H^{m+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} , entonces, desde el Teorema 2.4.2 concluimos que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, u satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Luego, por Teorema 1.6.2 parte i), obtenemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \varphi + \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \mathbf{n} \, dS + u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

o equivalentemente

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto $-\Delta u + u - f = 0$ c.t.p. en Ω . Ahora, como $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $f \in C(\overline{\Omega})$, entonces la igualdad se cumple en realidad en todo Ω .

En conclusión:

- Si $N = 1$, no hemos asumido hipótesis adicional para concluir que el problema (3.1) posee una solución clásica $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
- Si $N > 1$, hemos asumido adicionalmente que $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in C(\overline{\Omega}) \cap H^m(\Omega)$, con $m > \frac{N}{2}$, para concluir que el problema (3.1) posee una solución clásica $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
□

Un problema con Laplaciano bajo condiciones de frontera Neumann cero

PROBLEMA 3.3.2 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $f \in C(\overline{\Omega})$. Encuentra condiciones sobre $\partial\Omega$ y f de manera que exista una solución clásica para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Solución. Procederemos por etapas:

- **Etapa 1: Noción de solución débil para el problema (3.3).** Una solución clásica de (3.3) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Con la finalidad de usar el Teorema 1.6.2, en esta etapa asumiremos adicionalmente que $\partial\Omega$ es de clase C^1 si $N > 1$. Como Ω es acotado, $u \in H^1(\Omega)$. Por otro lado, desde la ecuación diferencial en (3.3), se sigue que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u) \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Luego, por Teorema 1.6.2 parte i), obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Como $C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ (vea Teorema 2.2.3), y como $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sobre $\partial\Omega$, podemos llegar a la siguiente formulación débil para el problema (3.3)

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

- **Etap 2: Existencia y unicidad de las soluciones débiles para el problema (3.3).** Consideremos la forma bilineal $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u v) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

y la forma lineal $\varphi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Notar que dadas $u, v \in H^1(\Omega)$ uno tiene que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u \nabla v| + |u v|) \\ &\leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{por desigualdad de Hölder} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

y

$$a(u, u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Por otro lado, como $f \in C(\bar{\Omega})$ y Ω es acotado, entonces $f \in L^2(\Omega)$. Luego, $\varphi \in (H^1(\Omega))^*$, que es el dual de $H^1(\Omega)$, pues desde la desigualdad de Hölder uno tiene

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Así que, desde el Teorema A.5.1 de Lax-Milgram, concluimos que existe una única función $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

que equivale a resolver (3.4).

- **Etap 3: Regularidad de las soluciones débiles para el problema (3.3).** Este asunto es delicado y conviene separar el estudio en dos casos:

Caso $N = 1$. Es suficiente con considerar Ω como un intervalo abierto y acotado de \mathbb{R} .

Como $f \in C(\bar{\Omega})$ y Ω es acotado, entonces $f \in L^2(\Omega)$, y así $u \in H^2(\Omega)$. En efecto, como $u \in H^1(\Omega)$ es solución débil del problema (3.3), entonces

$$\int_{\Omega} u' \varphi' = \int_{\Omega} (f - u) \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Como $C_c^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$, tenemos que existe $u'' = -(f - u) \in L^2(\Omega)$; de donde se deduce que $u' \in H^1(\Omega)$ y entonces $u \in H^2(\Omega)$. Ahora, por Teorema 2.5.9 parte ii), en verdad concluimos que

$$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

Caso $N > 1$. Simplemente usaremos el Teorema 3.2.2. Esto es, para $N > 1$, asumiremos que $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, con $m > \frac{N}{2}$. Entonces

$$u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap H^{m+2}(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

- **Etapa 4: Recuperación de la solución clásica para el problema (3.3).** Nuevamente separamos en casos.

Caso $N = 1$. Notar $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Además, u satisface

$$\int_{\Omega} u' \varphi' + u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (3.5)$$

Luego, por definición de $H^2(\Omega)$ obtenemos

$$-\int_{\Omega} u'' \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

En particular, si en la igualdad anterior consideramos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtenemos

$$\int_{\Omega} (-u'' + u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto $-u'' + u - f = 0$ c.t.p. en Ω . Ahora como $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ y $f \in C(\bar{\Omega})$, podemos identificar u'' con una función continua y concluir que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, de donde la igualdad $-u'' + u - f = 0$ se verifica en todo Ω . Usando este hecho e integrando por partes en (3.5), obtenemos

$$\varphi u' \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

de donde

$$u' = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

- **Caso $N > 1$.** Como $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap H^{m+2}(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ y $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} , entonces, desde el Teorema 2.4.2 concluimos que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, u satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Luego, por Teorema 1.6.2 parte i), obtenemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \varphi + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

En particular, si en la igualdad anterior consideramos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtenemos

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (3.6)$$

Por lo tanto $-\Delta u + u - f = 0$ c.t.p. en Ω . Ahora, como $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y $f \in C(\bar{\Omega})$, la igualdad se cumple en realidad en todo Ω . Usando este hecho, desde (3.5) obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

de donde obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ c.t.p. sobre $\partial\Omega$, pero dado que $u \in C^2(\bar{\Omega})$, concluimos que en verdad

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

En conclusión:

- Si $N = 1$, no hemos asumido hipótesis adicional alguna para concluir que el problema (3.3) posee una solución clásica $u \in C^2(\bar{\Omega})$.
- Si $N > 1$, hemos asumido adicionalmente que $\partial\Omega$ es de clase C^{m+2} y $f \in C(\bar{\Omega}) \cap H^m(\Omega)$, con $m > \frac{N}{2}$, para concluir que el problema (3.3) posee una solución clásica $u \in C^2(\bar{\Omega})$.
□

Un problema de Sturm–Liouville

PROBLEMA 3.3.3 Sea $I =]0, 1[$, sea $f \in C(\bar{I})$, y sean $g \in C^1(\bar{I})$ y $h \in C(\bar{I})$ tales que

$$g(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad \text{y} \quad h(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$$

Encuentra una solución clásica $u \in C^2(\bar{I})$ para el problema

$$\begin{cases} -(g u')' + h u = f & \text{en } I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Solución. Procederemos por etapas:

- **Etap 1: Noción de solución débil para el problema (3.7).** Sea u una solución clásica de (3.7), entonces $u \in C^2(\bar{I})$. Como I es acotado y $u(0) = u(1) = 0$, entonces $u \in C^2(\bar{I}) \cap H_0^1(I)$. Por otro lado, desde la ecuación diferencial en (3.7), se sigue que

$$\int_I (-(g u')' + h u)\varphi = \int_I f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Luego, por Teorema 1.6.2 parte ii), obtenemos

$$\int_I g u' \varphi' - \varphi(1) g(1) u'(1) + \varphi(0) g(0) u'(0) + \int_I h u \varphi = \int_I f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Como $C_c^\infty(I)$ es denso en $H_0^1(I)$, obtenemos la siguiente formulación débil para el problema (3.7)

$$\int_I g u' v' + \int_I h u v = \int_I f v \quad \forall v \in H_0^1(I). \quad (3.8)$$

- **Etapa 2: Existencia y unicidad de las soluciones débiles para el problema (3.7).** Consideremos la forma bilineal $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_I (g u' v' + h u v) \quad \forall u, v \in H_0^1(I),$$

y la forma lineal $\varphi : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(v) = \int_I f v \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Notar que dadas $u, v \in H_0^1(I)$ uno tiene que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq (\|g\|_{L^\infty(I)} + \|h\|_{L^\infty(I)}) \int_I (|u' v'| + |u v|) \\ &\leq C (\|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)}) \quad \text{por desigualdad de Hölder} \\ &\leq C \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}, \end{aligned}$$

donde $C = C_{g,h} > 0$, y gracias a las hipótesis sobre g y h , se tiene

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_I (g |u'|^2 + h |u|^2) \\ &\geq \alpha \|u'\|_{L^2(I)}^2 \\ &\geq C \|u\|_{H_0^1(I)}^2, \end{aligned}$$

donde $C = C_{\alpha,I} > 0$. Por otro lado, como $f \in C(\bar{I})$ e I es acotado, entonces $f \in L^2(I)$. Se sigue que $\varphi \in H^{-1}(I)$, que es el dual de $H_0^1(I)$, pues desde la desigualdad de Hölder uno tiene

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Luego, por Teorema A.5.1 de Lax-Milgram, existe una única función $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

que equivale a resolver (3.8).

- **Etapa 3: Regularidad de las soluciones débiles para el problema (3.7).** Como $f \in L^2(I) \cap C(\bar{I})$, entonces $u \in H^2(I)$. En efecto, como $u \in H_0^1(I)$ es solución débil del problema (3.7), entonces por Teorema 2.5.1, $u \in C(\bar{I})$ y

$$\int_I g u' \varphi' = \int_I (f - hu) \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

y así, $(gu')' = -(f - hu) \in L^2(I) \cap C(\bar{I})$, de donde se deduce que $gu' \in H^1(I)$. Además $g, \frac{1}{g} \in C^1(\bar{I})$, así que $u' = \frac{1}{g} gu' \in H^1(I)$ (vea Proposición 2.1.3), entonces $u \in H^2(I)$. Ahora, por Teorema 2.5.9 parte ii), en verdad concluimos que

$$u \in C^1(\bar{I}) \cap H^2(I) \cap H_0^1(I).$$

- **Eta** **4: Recuperación de la solución clásica para el problema (3.7)**. Tenemos que $u \in C^1(\bar{I}) \cap H^2(I) \cap H_0^1(I)$ satisface

$$\int_I g u' \varphi' + \int_I h u \varphi = \int_I f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Luego, por definición de $H^2(I)$ obtenemos

$$-\int_I (g u')' \varphi + \int_I h u \varphi = \int_I f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

o equivalentemente

$$\int_I (-(g u')' + h u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Por lo tanto $-(g u')' + h u - f = 0$ c.t.p. en I . Ahora como $h u \in C(\bar{I})$ y $f \in C(\bar{I})$, se concluye que $g u' \in C^1(\bar{I})$, y $u' = \frac{1}{g} g u' \in C^1(\bar{I})$, pues $\frac{1}{g} \in C^1(\bar{I})$. Por lo tanto $u \in C^2(\bar{I})$. Finalmente, como $u \in H_0^1(I) \cap C^2(\bar{I})$, por el Teorema 2.4.2, concluimos que

$$u(1) = u(0) = 0. \quad \square$$

3.4. El principio del máximo

El principio del máximo para el problema de Dirichlet

El siguiente resultado concierne al principio del máximo para las soluciones débiles del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada.

TEOREMA 3.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada, y sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tales que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Entonces

$$\min \left\{ \inf_{\partial\Omega} \text{ess } u, \inf_{\Omega} \text{ess } f \right\} \leq u \leq \max \left\{ \sup_{\partial\Omega} \text{ess } u, \sup_{\partial\Omega} \text{ess } f \right\} \quad \text{en } \Omega.$$

COROLARIO 3.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada, y sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tales que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Entonces

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max \{ \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \}.$$

En particular, se verifica lo siguiente:

- i) Si $f \geq 0$ en Ω y $u \geq 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $u \geq 0$ en Ω .
- ii) Si $f = 0$ en Ω , entonces $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$.
- iii) Si $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

El principio del máximo para el problema de Neumann

El siguiente resultado concierne al principio del máximo para las soluciones débiles del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada, y \mathbf{n} representa al vector normal exterior unitario sobre $\partial\Omega$.

TEOREMA 3.4.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ acotada, y sean $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Entonces

$$\inf_{\Omega} \text{ess } f \leq u \leq \sup_{\Omega} \text{ess } f \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

El principio del máximo para problemas más generales

Las mismas conclusiones se obtienen para la solución del problema de Dirichlet o del problema de Neumann asociado a un operador elíptico general de segundo orden.

A continuación mostraremos algunas conclusiones sólo para un problema general de Dirichlet.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N . Consideremos el problema de encontrar una

función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique la ecuación

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde para cada $i, j = 1, 2, \dots, N$, las funciones $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ satisfacen la condición de elipticidad

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \eta |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \Omega,$$

para algún $\eta > 0$, $a_i \in C(\bar{\Omega})$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisface

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

entonces,

$$\min \left\{ \inf_{\partial\Omega} \text{ess } u, \inf_{\Omega} \text{ess } f \right\} \leq u \leq \max \left\{ \sup_{\partial\Omega} \text{ess } u, \sup_{\Omega} \text{ess } f \right\} \quad \text{en } \Omega.$$

3.5. Valores propios

En esta sección consideraremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N .

TEOREMA 3.5.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N . Existen una base de ortonormal (e_n) del espacio $L^2(\Omega)$ tal que

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$$

y una sucesión (λ_n) de números reales positivos tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots,$$

con $\lambda_n \uparrow \infty$, las cuales satisfacen la ecuación

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \text{en } \Omega.$$

Usando la notación introducida en el Teorema 3.5.1 previo, se tienen los siguientes resultados.

TEOREMA 3.5.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$. Consideremos también el cociente de Rayleigh

$$R(u) = \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}.$$

Entonces

$$\lambda_1 = R(e_1) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R(u).$$

$$\lambda_n = R(e_n) = \max_{\substack{u \in \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \\ u \neq 0}} R(u) = \min_{u \perp \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}} R(u) = \min_{\substack{W \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim W = m}} \max_{u \in W} R(u).$$

LEMA 3.5.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ tal que

$$R(u) = \lambda_1.$$

Entonces u es una función propia correspondiente al valor λ_1 .

TEOREMA 3.5.3 Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N . El primer valor propio λ_1 es simple y la correspondiente función propia no cambia de signo en Ω . Por lo tanto, es posible escoger e_1 tal que $e_1 > 0$ en Ω .

3.6. Problemas propuestos

1. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^4 . Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de frontera para el operador *bi-Laplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

si verifica

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Aquí $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

- a) Si $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$ y $f \in C(\bar{\Omega})$, prueba que u es una solución clásica de (3.9) si y sólo si u es una solución débil de (3.9).
- b) Prueba que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de (3.9).

2. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^2 . Considera la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde se verifica

- a) $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ con $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\forall x \in \Omega$
- b) $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ con $a_0 \geq 0$
- c) $a_i \in C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0$ en Ω , donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$.

Prueba que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

3. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Considera el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Muestra que si $f \in L^2(\Omega)$, con $\int_{\Omega} f \, dx = 0$, entonces existe una única función $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_{\Omega} u \, dx = 0$ que es solución débil del problema.

4. Sea $f \in L^2(0, 1)$. Considera la función $\varphi : H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 v^4 - \int_0^1 f v \quad \forall v \in H^1(0, 1).$$

- a) Muestra que φ es una función convexa y continua en $H^1(0, 1)$.
- b) Muestra que $\varphi(v) \rightarrow \infty$ cuando $\|v\|_{H^1(0,1)} \rightarrow \infty$.
- c) Muestra que

$$\exists! u \in H^1(0, 1) \quad \text{tal que} \quad \varphi(u) = \min_{v \in H^1(0,1)} \{\varphi(v)\}.$$

- d) Muestra que la función u encontrada cumple

$$\int_0^1 (u'v' + u^3v) = \int_0^1 f v \quad \forall v \in H^1(0, 1).$$

- e) Prueba que la función u encontrada pertenece a $H^2(0, 1)$ y satisface

$$\begin{cases} -u'' + u^3 = f & \text{c.t.p. en }]0, 1[\\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

5. Muestra que la aplicación $L : H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $L(u) = u(0)$ es lineal continua sobre $H^1(0, 1)$ tal que

$$u(0) = \int_0^1 (u'v_0' + uv_0) \quad \forall u \in H^1(0, 1).$$

Muestra que v_0 es la solución de alguna ecuación diferencial con adecuadas condiciones de frontera. Determine v_0 explícitamente.

Bibliografía del Capítulo 3

- [1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, *Universitext*, Springer, 2011, Printed in the United States of America.
- [2] M. Clapp, *Análisis matemático*, colección Papirhos, Serie Textos 2, Instituto de Matemática, UNAM, primera edición 2015, Impreso en México.
- [3] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, Volume 19, American Mathematical Society, Reprint with corrections 2002, Printed in the United States of America.
- [4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Reprint of the 1998 edition, Printed in Germany.
- [5] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons Inc., first edition 1989, Printed in India.

La ecuación de Laplace

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . En el presente capítulo profundizaremos en el estudio cualitativo de las soluciones de la *ecuación de Laplace*

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

así como también de la ecuación no homogénea, la *ecuación de Poisson*

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega,$$

donde f es una función en un espacio conveniente.

4.1. La solución fundamental

Una buena estrategia para buscar soluciones de una EDP consiste en identificar primero algunas soluciones explícitas y luego, suponiendo que la ecuación es lineal, superponer estas soluciones para obtener otras. Además, cuando buscamos soluciones explícitas, también es usual poner atención en alguna clase específica de soluciones con ciertas propiedades de simetría, por lo que tiene sentido buscar soluciones definidas en el espacio total o en dominios simétricos. Por otro lado, el operador Laplaciano es invariante bajo rotaciones o traslaciones de los ejes coordenados; esto es, dada una matriz de rotación \mathbf{M} de orden N , unitaria y ortonormal, y dado $\xi \in \mathbb{R}^N$, si ponemos $y = \mathbf{M}(x - \xi)$, entonces

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta_x.$$

Por lo tanto, tomando en cuenta las consideraciones previas, parece natural buscar soluciones radiales para la ecuación de Laplace en el espacio total. En otras palabras, buscamos soluciones u para la ecuación

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

que se puedan representar como funciones v de variable $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo v una función que verifica la ecuación (4.1). Así que,

$$u(x) = v(r).$$

Notar que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_N^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Entonces, para $x \neq 0$ y $r = |x|$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= v'(r) \frac{x_i}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Así, para $x \neq 0$ y $r = |x|$, se sigue que

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = v''(r) + \frac{N-1}{r} v'(r).$$

De este modo

$$\left(\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \right) \Leftrightarrow \left(v''(r) + \frac{N-1}{r} v'(r) = 0 \quad \forall r > 0 \right). \quad (4.2)$$

Pongamos ahora $w = v'$. Entonces el lado derecho en (4.2) se convierte en

$$w'(r) = \frac{1-N}{r} w(r) \quad \forall r > 0,$$

una EDO cuya solución tiene la forma

$$w(r) = A r^{1-N} \quad \forall r > 0,$$

para alguna constante $A \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$v'(r) = A r^{1-N} \quad \forall r > 0.$$

Luego, integrando directamente, obtenemos

$$v(r) = \begin{cases} B \ln r + C & \text{si } N = 2 \\ B' r^{2-N} + C' & \text{si } N > 2 \end{cases} \quad \forall r > 0,$$

para algunas constantes $B, B', C, C' \in \mathbb{R}$. De esta forma, hemos encontrado una solución radial de la ecuación de Laplace. En particular, dado $x \in \mathbb{R}^N$, la función $V^x : \mathbb{R}^N \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V^x(y) := \begin{cases} \ln |x - y| & \text{si } N = 2 \\ |x - y|^{2-N} & \text{si } N > 2 \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x\}, \quad (4.3)$$

es una función que satisface la ecuación de Laplace; es decir, $\Delta V^x(y) = 0$ para toda $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x\}$.

Los cálculos previos nos conducirán a definir con precisión una función que será de gran importancia en nuestros estudios posteriores, denominada *solución fundamental de la ecuación de Laplace*.

4.1.1. Las identidades de Stokes

El siguiente resultado, debido a Stokes, entrega una fórmula de representación de funciones suaves definidas sobre la clausura de un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N . En lo que sigue, ω_N representa el volumen de la bola unitaria en \mathbb{R}^N . También conviene recordar que el área de una esfera de radio r en \mathbb{R}^N es igual a $N \omega_N r^{N-1}$, mientras que el volumen de una bola de radio r en \mathbb{R}^N es igual a $\omega_N r^N$.

TEOREMA 4.1.1 (Identidades de Stokes) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$, entonces

i) para $N = 2$, se verifica

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \mathbf{n}} - \ln|x-y| \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS - \int_{\Omega} \ln|x-y| \Delta u(y) dy \right) \quad \forall x \in \Omega.$$

ii) para $N > 2$, se verifica

$$u(x) = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \left(\int_{\partial\Omega} \left(|x-y|^{2-N} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} - u(y) \frac{\partial |x-y|^{2-N}}{\partial \mathbf{n}} \right) dS - \int_{\Omega} |x-y|^{2-N} \Delta u(y) dy \right) \quad \forall x \in \Omega.$$

Demostración. Solo probaremos la parte ii). Sea $x \in \Omega$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Apliquemos el Teorema 1.6.2 parte ii) sobre la región $\mathcal{D}_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$ en $u(y)$ y $V^x(y)$, con V^x dada en (4.3). Como $\Delta V^x(y) = 0$ para toda $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$, obtenemos

$$\int_{\mathcal{D}_\varepsilon} V^x(y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\mathcal{D}_\varepsilon} \left(V^x(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} - u(y) \frac{\partial V^x(y)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \quad (4.4)$$

donde \mathbf{n} denota al vector normal unitario exterior a $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$. Observamos también que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} V^x(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} dS \right| &= \varepsilon^{2-N} \left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \\ &\leq N \omega_N \varepsilon^{N-1} \varepsilon^{2-N} \max_{\partial B(x, \varepsilon)} |\nabla u| \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $y \in \partial B(x, \varepsilon)$ uno tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^x(y)}{\partial \mathbf{n}} &= \nabla V^x(y) \cdot \mathbf{n}(y) \\ &= (2-N) \sum_{i=1}^N \frac{-(x_i - y_i)}{|x-y|^N} \frac{(y_i - x_i)}{|x-y|} \\ &= (2-N) \varepsilon^{1-N}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial V^x(y)}{\partial \mathbf{n}} dS &= \frac{(N-2)\omega_N}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) dS \\
&= N(N-2)\omega_N \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(x+\varepsilon z) dS(z) \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} N(N-2)\omega_N u(x).
\end{aligned}$$

Finalmente, pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en (4.4), y teniendo en cuenta que $x \in \Omega$ ha sido fijado arbitrariamente, obtenemos la identidad deseada para cualquier $u \in C^2(\bar{\Omega})$. ■

4.1.2. La solución fundamental de la ecuación de Laplace

Las identidades de Stokes motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.1.1 La función

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{si } N = 2 \\ \frac{1}{N(N-2)\omega_N|x|^{N-2}} & \text{si } N > 2, \end{cases} \quad (4.5)$$

definida para toda $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, es la *solución fundamental* de la ecuación de Laplace.

Notemos que Γ verifica

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{N\omega_N|x|^N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \quad (4.6)$$

y

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{x_i x_j}{\omega_N|x|^{N+2}} - \frac{\delta_{ij}}{N\omega_N|x|^N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad (4.7)$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

TEOREMA 4.1.2 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$, entonces

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(x-y) \right) dS(y) - \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.8)$$

En particular, tenemos que

i) Si $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_c^1(\Omega)$, entonces

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.9)$$

ii) Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es tal que $-\Delta u = 0$ en Ω , entonces

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y) - u(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(x-y) \right) dS(y) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.10)$$

4.1.3. La solución fundamental de la ecuación de Poisson

En esta subsección consideraremos $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Notemos que, dado $y \in \mathbb{R}^N$, la aplicación $x \mapsto \Gamma(x - y)f(y)$, satisface la ecuación de Laplace en cada punto $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$. Entonces parece razonable pensar que la convolución

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y)f(y) dy = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x - y|)f(y) dy & \text{si } N = 2 \\ \frac{1}{N(N - 2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x - y|^{N-2}} dy & \text{si } N > 2, \end{cases} \quad (4.11)$$

resuelve la ecuación de Laplace en \mathbb{R}^N . Sin embargo, este razonamiento es erróneo debido a la singularidad en $x = y$. De hecho, un cálculo más cuidadoso nos conduce al siguiente resultado.

TEOREMA 4.1.3 Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Entonces u definida por (4.11) verifica:

- i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$
- ii) $-\Delta u = f$ en \mathbb{R}^N .

4.2. La propiedad del valor medio y sus consecuencias

DEFINICIÓN 4.2.1 (Funciones armónica, subarmónica y superarmónica) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$. Diremos que:

- u es *armónica* si $-\Delta u = 0$ en Ω .
- u es *subarmónica* si $-\Delta u \leq 0$ en Ω .
- u es *superarmónica* si $-\Delta u \geq 0$ en Ω .

Si Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y u es una función armónica en Ω , nuestro primer objetivo, y uno de los principales en esta sección, es el de obtener la *propiedad del valor medio* para funciones armónicas. Esta propiedad establece que $u(x)$ es igual al promedio de u sobre la esfera $\partial B(x, r)$ y también al promedio de u sobre la bola $B(x, r)$, sobre cualquier bola $B(x, r) \subset \Omega$. Aunque las fórmulas obtenidas no son explícitas para u , a partir de ellas podremos obtener varios otros resultados importantes, como veremos más adelante.

TEOREMA 4.2.1 (Propiedad del valor medio para funciones armónicas) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$. Si u es armónica en Ω , entonces

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u dS = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x,r)} u dy, \quad (4.12)$$

para cada bola $B(x, r) \Subset \Omega$.

Demostración. Sea $x \in \Omega$ y sea $R = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ (tener en cuenta que si $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces $\text{dist}(x, \partial\Omega) = \infty$). Consideremos la función $F_x :]0, R[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r \mapsto F_x(r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS.$$

En primer lugar, notar que

$$F_x(r) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) \, dS(z) \quad \forall 0 < r < R.$$

Luego, para cada $0 < r < R$ obtenemos

$$\begin{aligned} F'_x(r) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, dS(z) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) \quad \text{cambio de variables } y = x + rz. \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} \, dS(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) \, dy \quad \text{por Teorema 1.6.2 parte iii)} \\ &= 0 \quad \text{pues } u \text{ es armónica.} \end{aligned}$$

Esto implica que F_x es constante en $]0, R[$, así que

$$\begin{aligned} F_x(r) &= \lim_{s \rightarrow 0} F_x(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{N\omega_N s^{N-1}} \int_{\partial B(x,s)} u(y) \, dS(y) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(x + sz) \, dS(z) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS \quad \forall 0 < r < R.$$

Por otro lado, desde el Teorema A.11.2 se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u \, dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u \, dS \right) ds \\ &= u(x) \int_0^r N\omega_N s^{N-1} \, ds \\ &= \omega_N r^N u(x), \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x,r)} u \, dy \quad \forall 0 < r < R. \quad \blacksquare$$

El Teorema 4.2.1 puede extenderse fácilmente a funciones subarmónicas o superarmónicas.

TEOREMA 4.2.2 (Propiedad del valor medio para funciones subarmónicas (superarmónicas)) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$. Si u es subarmónica (superarmónica), entonces

$$u(x) \leq \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS \quad \left(u(x) \geq \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS \right)$$

y

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x,r)} u \, dy \quad \left(u(x) \geq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x,r)} u \, dy \right),$$

para cada bola $B(x, r) \Subset \Omega$.

TEOREMA 4.2.3 (Recíproco de la propiedad del valor medio para funciones armónicas) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$. Si

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS, \quad (4.13)$$

para cada bola $B(x, r) \Subset \Omega$, entonces u es armónica en Ω .

Demostración. Argumentamos por reducción al absurdo. Supongamos que u no es armónica, entonces

$$\exists x_0 \in \Omega \quad \text{tal que} \quad \Delta u(x_0) \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\Delta u(x_0) > 0.$$

Entonces, como $u \in C^2(\Omega)$,

$$\exists r_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad B(x_0, r_0) \subset \Omega$$

y

$$\Delta u(z) > 0 \quad \forall z \in B(x_0, r_0).$$

Como $u(x_0)$ es un número real fijo (porque x_0 está fijo), desde la hipótesis (4.13) tenemos que la función $F_{x_0} :]0, r_0[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r \mapsto F_{x_0}(r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u \, dS,$$

es constante en $]0, r_0[$. De esta forma,

$$F'_{x_0}(r) = 0 \quad \forall 0 < r < r_0. \quad (4.14)$$

Por otro lado, argumentando como en la demostración del Teorema 4.2.2, podemos obtener

$$F'_{x_0}(r) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x_0, r)} \Delta u(y) dy > 0 \quad \forall 0 < r < r_0,$$

que contradice a (4.14). La contradicción viene de suponer que u no es armónica en Ω .

Por lo tanto, u es armónica en Ω . ■

4.2.1. Los principios del máximo

Con la ayuda del Teorema 4.2.1, de la propiedad del valor medio para funciones armónicas, deduciremos el *principio fuerte del máximo* para funciones armónicas, el cual establece que una función armónica no puede alcanzar su valor máximo ni su valor mínimo en un punto al interior de un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N con interior no vacío Ω , a menos que se trate de una función constante en todo Ω .

TEOREMA 4.2.4 (Principio fuerte del máximo (del mínimo)) Sea Ω un subconjunto abierto conexo y no vacío de \mathbb{R}^N , y sea $u \in C^2(\Omega)$ una función subarmónica (superarmónica) en Ω . Si existe un punto $x_0 \in \Omega$ para el cual

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u \quad \left(u(x_0) = \inf_{\Omega} u \right),$$

entonces u es constante en Ω .

Demostración. Como Ω es conexo, sabemos que la única partición por abiertos en Ω es la trivial, esto es, los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en la topología relativa a Ω son Ω y \emptyset . De esta forma, si consideramos el conjunto

$$\Omega_K = \{z \in \Omega : u(z) = K\},$$

donde

$$K = \sup_{\Omega} u = u(x_0),$$

y si probamos que Ω_K es un subconjunto abierto y cerrado en la topología relativa a Ω , que es no vacío, entonces usando el hecho que Ω es conexo podremos concluir que $\Omega_K = \Omega$, que es equivalente a probar que u es constante en Ω . Veamos esto,

1º) Como $x_0 \in \Omega_K$, tenemos que

$$\Omega_K \neq \emptyset.$$

2º) Como $u \in C(\Omega)$ y $\Omega_K = u^{-1}(\{K\})$, siendo $\{K\}$ un subconjunto cerrado de \mathbb{R} , entonces

Ω_K es un subconjunto cerrado relativo a la topología de Ω .

3º) Sea $z \in \Omega_K$, como $u \in C^2(\Omega)$ es subarmónica, entonces desde el Teorema 4.2.2 obtenemos

$$0 = u(z) - K \leq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(z,r)} (u(y) - K) dy \leq 0 \quad \forall 0 < r < \text{dist}(z, \partial\Omega),$$

pues $u(y) - K = u(y) - \sup_{\Omega} u \leq 0$ para toda $y \in \Omega$. Por lo tanto,

$$\int_{B(z,r)} (u(y) - K) dy = 0 \quad \forall 0 < r < \text{dist}(z, \partial\Omega),$$

que junto al hecho que $u \in C^2(\Omega)$ implican que $u(y) - K = 0$ en $B(z, r)$. En otras palabras, hemos probado que

$$(\forall z \in \Omega_K)(\exists R = \text{dist}(z, \partial\Omega) > 0) \text{ tal que } (0 < r < R \Rightarrow B(z, r) \subset \Omega_K),$$

de donde obtenemos que

Ω_K es un subconjunto abierto relativo a la topología de Ω .

4º) Como Ω es conexo, desde 1º), 2º) y 3º), concluimos que $\Omega_K = \Omega$.

En el caso en que u es superarmónica, la demostración sigue los mismos lineamientos. ■

OBSERVACIÓN 4.2.1 *Notar que una función armónica $u \in C^2(\Omega)$, es en particular subarmónica como también superarmónica. De esta forma, el Teorema 4.2.4 del principio fuerte del máximo (del mínimo) vale también para funciones armónicas.*

El principio fuerte del máximo y el principio fuerte del mínimo implican inmediatamente estimaciones globales conocidas como *principio débil del máximo y principio débil del mínimo*.

COROLARIO 4.2.1 (Principio débil del máximo (del mínimo)) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una función subarmónica (superarmónica) en Ω . Entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \left(\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \right).$$

En particular, para una función armónica u se verifica

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

Demostración. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una función subarmónica en Ω , entonces

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Además, es claro que $u \in C(\bar{\Omega})$ implica que existen $\max_{\bar{\Omega}} u$ y $\max_{\partial\Omega} u$; y que estos valores verifican la desigualdad

$$\max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u.$$

Resta probar que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Realizaremos esto en dos etapas.

- 1º) Asumamos por ahora que $-\Delta u < 0$ en Ω . Luego, si u tuviese un máximo en x_0 , un punto en el interior de Ω , por continuidad existiría $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$. Entonces de acuerdo al Teorema 4.2.4 del principio fuerte del máximo, u sería constante en $B(x_0, r)$, así que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } B(x_0, r),$$

lo cual es contradictorio. La contradicción viene de suponer que el máximo de u está en el interior de Ω , por lo cual este valor se debe hallar sobre $\partial\Omega$. Es decir,

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

- 2º) Ahora vamos a establecer la desigualdad en el caso general, esto es, cuando $-\Delta u \leq 0$ en Ω . Consideremos la función $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2 \quad \forall x \in \Omega.$$

Como Ω es acotado, es claro que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + 2\varepsilon x_i \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) + 2\varepsilon \quad \forall x \in \Omega \\ &\Rightarrow -\Delta v(x) = -\Delta u(x) - 2N\varepsilon < 0 \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

De esta forma, $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, con $-\Delta v < 0$. Por lo tanto podemos desde la etapa 1º) anterior, obtenemos que

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v,$$

que conduce a

$$\begin{aligned}
 \max_{\bar{\Omega}} u &\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} (u(x) + \varepsilon |x|^2) \\
 &= \max_{\bar{\Omega}} v \\
 &= \max_{\partial\Omega} v \\
 &= \max_{x \in \partial\Omega} (u(x) + \varepsilon |x|^2) \\
 &\leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \sup_{z \in \bar{\Omega}} |z|^2.
 \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Análogamente se prueba que si u es superarmónica, entonces

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Finalmente, si u es armónica en Ω , es fácil chequear que

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\bar{\Omega}} u \leq u(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

Por lo tanto,

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega. \quad \blacksquare$$

El siguiente resultado es conocido como *principio de comparación*, el cual establece que si menos el Laplaciano de la diferencia entre dos funciones en un conjunto tiene un signo, y la diferencia entre ellas sobre la frontera del mismo conjunto tiene el mismo signo, entonces la diferencia entre las funciones en todo el conjunto tiene el mismo signo.

COROLARIO 4.2.2 (Principio de comparación) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sean $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ verificando

$$\begin{cases} -\Delta u \leq -\Delta v & \text{en } \Omega \\ u \leq v & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces $u \leq v$ en Ω .

Demostración. Sea $w = u - v$. Entonces $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y

$$\begin{cases} -\Delta w \leq 0 & \text{en } \Omega \\ w \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando a w el Corolario 4.2.1 del Principio débil del máximo, obtenemos que

$$\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w \leq 0.$$

Por lo tanto $w \leq 0$ sobre Ω , de donde se concluye que $u \leq v$ en Ω . ■

El siguiente corolario es un resultado de unicidad para el clásico problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en subconjuntos abiertos y acotados de \mathbb{R}^N . Es recomendable comparar el resultado a continuación con el Teorema de 1.6.3.

COROLARIO 4.2.3 (Unicidad bajo condición Dirichlet sobre la frontera) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sean $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$. El problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.15)$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Demostración. Sean $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ dos soluciones de (4.15) y pongamos $w = u - v$. Entonces $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando a w el Corolario 4.2.1 del principio débil del máximo, obtenemos que

$$0 = \min_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \max_{\partial\Omega} w = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Por lo tanto $w = 0$ sobre Ω , de donde se concluye que $u = v$ en Ω . ■

4.2.2. Regularidad de las funciones armónicas

TEOREMA 4.2.5 (Regularidad de las funciones armónicas) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Si $u \in C(\Omega)$ satisface la propiedad del valor medio

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS, \quad (4.16)$$

para cada bola $B(x,r) \Subset \Omega$, entonces

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Demostración. Sea ρ el molificador estándar definido en la Definición A.9.1 (vea también la Observación A.9.1 y Teorema A.9.1), y consideremos la sucesión $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ en $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Nuestra intención es probar que gracias a la propiedad del valor medio (4.16) uno tiene que $u = u_\varepsilon$ en Ω_ε , para todo $\varepsilon > 0$, y concluir de este hecho que $u \in C^\infty(\Omega)$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado y sea $x \in \Omega_\varepsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy \quad \text{por definición de } u_\varepsilon \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B(x,\varepsilon)} \rho\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy \quad \text{por definición de } \rho_\varepsilon \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x,r)} \rho\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) \, dS(y) \right) dr \quad \text{por Teorema A.11.2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \rho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) \right) dr \quad \text{porque } \rho \text{ es radial} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N} N\omega_N u(x) \int_0^\varepsilon r^{N-1} \rho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dr \quad \text{propiedad del valor medio (4.16)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N} u(x) \int_0^\varepsilon \rho\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(0,r)} dS(y) \right) dr \quad \text{valor del área de una esfera} \\
&= u(x) \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dS(y) \right) dr \quad \text{porque } \rho \text{ es radial} \\
&= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(z) \, dz \quad \text{por Teorema A.11.2} \\
&= u(x) \quad \text{por propiedad de los molificadores.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u = u_\varepsilon$ en Ω_ε para toda $\varepsilon > 0$, lo cual implica que $u \in C^\infty(\Omega)$. ■

La importancia del Teorema 4.2.5 radica en el hecho que nos permite deducir que las derivadas parciales de cualquier orden de una función u verificando (4.16), la propiedad del valor medio, existen y son continuas a pesar de la estructura algebraica de la ecuación de Laplace, donde sólo disponemos información acerca de la traza de la matriz D^2u .

4.2.3. El Teorema de Liouville

El primer objetivo de esta sección es probar el Teorema de Liouville, el cual establece que no existen soluciones armónicas no triviales que sean acotadas sobre todo el espacio \mathbb{R}^N . Para ello establecemos una estimación local previa.

LEMA 4.2.1 Sea $u \in C^2(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B(x_0, R)})$ una función armónica no negativa en $B(x_0, R)$. Entonces,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{R} u(x_0) \quad \forall j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.17)$$

Demostración. Como u es armónica, desde el Teorema 4.2.1 obtenemos

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \int_{B(x_0, \tau R)} u(y) \, dy \quad \forall 0 < \tau < 1$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \int_{B(x_0, \tau R)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y) dy \quad \forall 0 < \tau < 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

Por otro lado, por Teorema 1.2.1 de Gauss, obtenemos

$$\int_{B(x_0, \tau R)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y) dy = \int_{\partial B(x_0, \tau R)} u(y) \hat{n}_j(y) dS(y) \quad \forall 0 < \tau < 1,$$

de donde para cada $0 < \tau < 1$ y cada $j = 1, 2, \dots, N$,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \int_{\partial B(x_0, \tau R)} |u| dS \quad \forall 0 < \tau < 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

y como $u = |u|$, pues u es no negativa, desde el Teorema 4.2.1 obtenemos que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{\tau R} u(x_0) \quad \forall 0 < \tau < 1.$$

Finalmente, pasando al límite cuando $\tau \rightarrow 1$, concluimos la validez de (4.17). ■

TEOREMA 4.2.6 (Teorema de Liouville) Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ una función armónica que es acotada, entonces u es constante.

Demostración. Asumamos que $\|u\|_\infty < M$ para alguna $M > 0$. Luego, si ponemos $v = u + M$ en \mathbb{R}^N , entonces se verifica que $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ es armónica y no negativa en \mathbb{R}^N . Sea $x \in \mathbb{R}^N$. Por el Lema 4.2.1 aplicado a v en $B(x, r) \subset \mathbb{R}^N$, obtenemos

$$\begin{aligned} |\nabla v(x)| &\leq \frac{N}{r} v(x) \\ &\leq \frac{2MN}{r} \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\nabla v(x)| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

de donde se concluye que v es constante en \mathbb{R}^N , y en consecuencia u también es constante en \mathbb{R}^N . ■

4.2.4. Estimaciones locales: analiticidad de funciones armónicas

Estimaciones locales interiores de las derivadas de las funciones armónicas también pueden obtenerse desde la propiedad del valor medio. Primero establecemos la siguiente estimación local.

LEMA 4.2.2 Sea $u \in C^2(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B(x_0, R)})$ una función armónica en $B(x_0, R)$. Entonces,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{R} \max_{B(x_0, R)} |u| \quad \forall j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.18)$$

Demostración. Sea $0 < \tau < 1$. Argumentando como en el Lema 4.2.1, obtenemos para cada $j = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| &\leq \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \max_{\partial B(x_0, \tau R)} |u| \int_{\partial B(x_0, \tau R)} dS \\ &= \frac{N}{\tau R} \max_{\partial B(x_0, \tau R)} |u|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq \frac{N}{\tau R} \max_{B(x_0, R)} |u| \quad \forall 0 < \tau < 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N,$$

y pasando al límite cuando $\tau \rightarrow 1$, concluimos la validez de (4.18). ■

El resultado a continuación extiende los resultados correspondientes al Lema 4.2.2 y al Lema 4.2.1, y constituye la base para probar la analiticidad de las funciones armónicas.

TEOREMA 4.2.7 (Estimaciones de derivadas de funciones armónicas) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una función armónica en Ω . Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{N^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{B(x_0, R)} |u|, \quad (4.19)$$

para cada bola $B(x_0, R) \subset \Omega$ y cada multi-índice α de orden $|\alpha| = m$.

Demostración. Procederemos por inducción. Sea

$$S = \{m \in \mathbb{N} : (4.19) \text{ se cumple}\}.$$

Sea $x_0 \in \Omega$ y sea $B(x_0, R) \subset \Omega$.

1º) Sea $m = 1$. Como $u \in C^2(B(x_0, R) \cap C(\overline{B(x_0, R)}))$, por Lema 4.2.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_0) \right| &\leq \frac{N}{R} \max_{B(x_0, R)} |u| \\ &= \frac{N^1}{R^1} e^{1-1} 1! \max_{B(x_0, R)} |u|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $1 \in S$.

2º) Asumamos que $k \in S$. Es decir, asumamos que si $|\alpha| = k$, entonces

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{N^k e^{k-1} k!}{R^k} \max_{B(x_0, R)} |u|. \quad (4.20)$$

Debemos probar que $k + 1 \in S$; es decir, debemos probar que si $|\alpha| = k + 1$, entonces

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{N^{k+1} e^k (k+1)!}{R^{k+1}} \max_{B(x_0, R)} |u|.$$

Veamos esto. Sea $0 < \tau < 1$ un número a fijar más adelante. Como $u \in C^\infty(B(x_0, \tau R))$ (vea el Teorema 4.2.5), entonces $D^\alpha u \in C^2(B(x_0, \tau R)) \cap C(\overline{B(x_0, \tau R)})$. Más aún,

$$\Delta(D^\alpha u) = D^\alpha(\Delta u) = 0 \quad \text{en } B(x_0, \tau R).$$

Luego, por Teorema 4.2.1 y Teorema 1.2.1 de Gauss, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} (D^\alpha u(x_0)) \right| &= \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \left| \int_{B(x_0, \tau R)} \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u \, dy \right| \\ &= \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \left| \int_{\partial B(x_0, \tau R)} D^\alpha u \, \hat{n}_i \, dS \right| \\ &\leq \frac{N}{\tau R} \max_{\partial B(x_0, \tau R)} |D^\alpha u|. \end{aligned}$$

de donde se deduce que si β es un multi-índice, con $|\beta| = k + 1$, entonces

$$\left| D^\beta u(x_0) \right| \leq \frac{N}{\tau R} \max_{\partial B(x_0, \tau R)} |D^\alpha u|.$$

Aplicamos ahora la hipótesis de inducción (4.20) en la desigualdad previa de la siguiente forma: para cada $z \in \partial B(x_0, \tau R)$, se tiene que $B(z, (1-\tau)R) \subset B(x_0, R)$, así que desde (4.20) se sigue que

$$\begin{aligned} \left| D^\beta u(z) \right| &\leq \frac{N^k e^{k-1} k!}{(1-\tau)^k R^k} \max_{B(z, (1-\tau)R)} |u| \\ &\leq \frac{N^k e^{k-1} k!}{(1-\tau)^k R^k} \max_{B(x_0, R)} |u|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| D^\beta u(x_0) \right| &\leq \frac{N}{\tau R} \max_{\partial B(x_0, \tau R)} |D^\alpha u| \\ &\leq \frac{N}{\tau R} \frac{N^k e^{k-1} k!}{(1-\tau)^k R^k} \max_{B(x_0, R)} |u| \\ &= \frac{N^{k+1} e^{k-1} k!}{\tau (1-\tau)^k R^{k+1}} \max_{B(x_0, R)} |u|. \end{aligned}$$

Escogemos ahora

$$\tau = \frac{1}{k+1}.$$

Tomando en cuenta que

$$(1 - \tau)^{-k} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leq e,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \left|D^\beta u(x_0)\right| &\leq \frac{N^{k+1} e^{k-1} k!}{\tau(1-\tau)^k R^{k+1}} \max_{B(x_0, R)} |u| \\ &\leq \frac{N^{k+1} e^k (k+1)!}{R^{k+1}} \max_{B(x_0, R)} |u|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.7 es que una función armónica en Ω no sólo pertenece a $C^\infty(\Omega)$ como se estableció en el Teorema 4.2.5, sino que también es posible describirla mediante una serie de Taylor; es decir, ella es analítica.

TEOREMA 4.2.8 (Analiticidad) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$. Si u es armónica en Ω , entonces u es analítica en Ω .

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ fijo, y sea $R > 0$ tal que $B(x_0, 2R) \subset \Omega$. Entonces, como $u \in C^\infty(B(x_0, 2R))$, por una expansión en Taylor, para cada $y \in \overline{B}(0, \frac{R}{2})$, tenemos

$$u(x_0 + y) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} y^\alpha + R_m(y),$$

donde

$$|R_m(y)| = \left| \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(\bar{x})}{\alpha!} y^\alpha \right|,$$

con $\bar{x} = x_0 + \tau y$ para algún $0 \leq \tau \leq 1$. Notar que $B(\bar{x}, \frac{R}{2}) \subset B(x_0, R) \Subset B(x_0, 2R)$, así que desde el Teorema 4.2.7 aplicado en la bola $B(\bar{x}, \frac{R}{2})$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{D^\alpha u(\bar{x})}{\alpha!} y^\alpha \right| &\leq \frac{|D^\alpha u(\bar{x})|}{\alpha!} |y|^m \\ &\leq \frac{|y|^m 2^m N^m e^{m-1} m!}{\alpha! R^m} \max_{B(\bar{x}, \frac{R}{2})} |u| \\ &\leq \frac{2^m N^{2m} e^m |y|^m}{R^m} \max_{B(x_0, R)} |u|, \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} |y^\alpha| &= \left| \prod_{j=1}^N y_j^{\alpha_j} \right| \\ &\leq \prod_{j=1}^N |y_j|^{\alpha_j} \\ &\leq \prod_{j=1}^N |y|^{\alpha_j} \\ &= |y|^m \end{aligned}$$

y

$$N^m = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{N \text{ veces}}^m = \sum_{|\beta|=m} \frac{|\beta|!}{\beta!},$$

que implica la propiedad $\frac{m!}{\alpha!} \leq \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} = N^m$ para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $|\alpha| = m$.

Por lo tanto, para $|y| \leq \frac{R}{4N^2e}$, se sigue que

$$\begin{aligned} |R_m(y)| &\leq \left(\frac{2N^2e|y|}{R} \right)^m \frac{\max_{B(x_0, R)} |u|}{2^m} \\ &\leq \frac{1}{2^m} \frac{\max_{B(x_0, R)} |u|}{2^m} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.5. La desigualdad de Harnack

Otra consecuencia del Teorema 4.2.1 de la propiedad del valor medio es la siguiente desigualdad, denominada *desigualdad de Harnack* para funciones armónicas.

TEOREMA 4.2.9 (Desigualdad de Harnack) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea u una función armónica no negativa en Ω . Entonces, para cada $\omega_0 \Subset \Omega$ que sea abierto, conexo y no vacío, existe una constante $C = C_{N, \omega_0, \Omega} > 0$ tal que

$$\sup_{\omega_0} u \leq C \inf_{\omega_0} u. \quad (4.21)$$

En particular,

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y) \quad \forall x, y \in \omega_0.$$

Demostración. Sea $x \in \omega_0$ y sea $r = \frac{1}{4} \text{dist}(\omega_0, \partial\Omega)$. Luego,

$$B(x, 4r) \subset \Omega.$$

Además, para cualquier par de puntos $y_1, y_2 \in B(x, \frac{r}{2})$, desde el Teorema 4.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} u(y_1) &= \frac{1}{\omega_N(2r)^N} \int_{B(y_1, 2r)} u(z) dz \\ &\geq \frac{1}{2^N} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(y_2, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^N} u(y_2), \end{aligned}$$

pues $y_1 \in B(y_1, 2r) \cap B(y_2, r)$, y $B(y_2, r) \subset B(y_1, 2r)$. Por lo tanto

$$\sup_{B(x, \frac{r}{2})} u \leq 2^N u(y) \quad \forall y \in B\left(x, \frac{r}{2}\right).$$

Escojamos ahora $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{\omega}_0$ tales que

$$u(\bar{x}_1) = \sup_{\omega_0} u \quad \text{y} \quad u(\bar{x}_2) = \inf_{\omega_0} u.$$

Como ω_0 es compacto, podemos cubrir ω_0 por un número finito de bolas $\{B_i(y_i, \frac{r}{2})\}_{i=1}^n$, y dado que ω_0 es conexo, podemos unir a \bar{x}_1 con \bar{x}_2 mediante una poligonal con extremos contenidos en las bolas del recubrimiento. Más aún, podemos asumir que existen $z_1, z_2, \dots, z_{n+1} \in \Omega$ tales que $\bar{x}_1 = z_1 \in B_1(y_1, \frac{r}{2})$, $\bar{x}_2 = z_{n+1} \in B_n(y_n, \frac{r}{2})$ y

$$z_i \in B_i\left(y_i, \frac{r}{2}\right) \cap B_{i-1}\left(y_{i-1}, \frac{r}{2}\right) \quad \text{si } i \geq 2,$$

con $\bar{x}_2 = z_n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{\omega_0} u &= u(\bar{x}_1) \\ &= \sup_{B_1(y_1, \frac{r}{2})} u \\ &\leq 2^N u(z_2) \\ &\leq 2^N \sup_{B_2(y_2, \frac{r}{2})} u \\ &\leq 2^{2N} u(z_3) \\ &\leq \dots \\ &\leq 2^{(n-1)N} u(z_n) \\ &\leq 2^{nN} u(\bar{x}_2) \\ &= 2^{nN} \inf_{\omega_0} u. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican que los valores de una función armónica no negativa en ω_0 son comparables: u no puede ser muy pequeña (o muy grande) en ningún punto de ω_0 a menos que u sea muy pequeña (o muy grande) en todo ω_0 . La idea intuitiva es que como ω_0 está a una distancia

positiva de $\partial\Omega$, existe un espacio para que promedios de los efectos de la ecuación de Laplace se produzcan. Notar también que la constante en (4.21) es invariante bajo transformaciones ortogonales y de similaridad.

4.3. Representación de Green de la solución del problema de Dirichlet

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Si queremos resolver el problema de involucra a la ecuación de Poisson con condición Dirichlet sobre la frontera,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.22)$$

no podremos usar la fórmula (4.8) de forma directa, pues desconocemos los valores de la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ sobre $\partial\Omega$, y entonces tenemos una dificultad que enfrentar. Por lo tanto, es conveniente realizar algunas correcciones a la fórmula (4.8) con la finalidad de remover el término no deseado que contiene a $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$. La idea para realizar esta corrección consiste en definir una nueva función que corrija los valores de Γ sobre la frontera. Es así como, para cada y fijo en Ω , introducimos una función corrector $\phi^y \in C^2(\bar{\Omega})$ que verifica el siguiente problema de valores sobre la frontera

$$\begin{cases} \Delta \phi^y = 0 & \text{en } \Omega \\ \phi^y = \Gamma(x - y) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.23)$$

Ahora introducimos la siguiente función

DEFINICIÓN 4.3.1 La función de Green para el dominio Ω es

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) - \phi^y(x) \quad \forall x, y \in \Omega, x \neq y. \quad (4.24)$$

Notar que si fijamos $y \in \Omega$, entonces la función $G(\cdot, y)$ definida en Ω verifica

$$\begin{cases} -\Delta_x G(\cdot, y) = \delta_y & \text{en } \Omega \\ G(\cdot, y) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde δ_y denota la delta de Dirac de masa unitaria en el punto y (vea Apéndice A.12).

Notar que, por Teorema 1.6.2 parte ii), uno tiene

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \phi^y(x) \Delta u(x) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \phi^y}{\partial \mathbf{n}}(x) - \phi^y(x) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \right) \, dS(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \phi^y}{\partial \mathbf{n}}(x) - \Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \right) \, dS(x). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Luego, sumando (4.25) con (4.8), encontramos la siguiente formulación para u

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) \, dS(x) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) \, dx \quad \forall y \in \Omega, \quad (4.26)$$

donde

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \nabla_x G(x, y) \cdot \mathbf{n}(x).$$

Observar que en la fórmula de representación (4.26) no aparece el término $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$, a diferencia de la fórmula (4.8) donde este término no se puede descuidar. Más aún, la fórmula de representación (4.26) conduce a,

TEOREMA 4.3.1 (Fórmula de representación de Green) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N con frontera de clase C^1 , y sean $f \in C(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ resuelve el problema (4.22), entonces

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) dS(y) + \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.27)$$

Notar que el Teorema 4.3.1 da una fórmula para la solución del problema (4.22), siempre que se pueda construir explícitamente una función de Green G para el dominio Ω . En general, esto es muy complicado, y sólo es posible de realizar cuando la geometría de Ω es muy simple.

Para propósitos posteriores el siguiente teorema será de utilidad

TEOREMA 4.3.2 (Simetría de la función de Green) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con $\partial\Omega$ de clase C^1 . Entonces para cada $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, tenemos

$$G(x, y) = G(y, x).$$

4.3.1. La integral de Poisson para la bola

Cuando el dominio Ω es una bola, la función de Green puede determinarse explícitamente por el *método de las imágenes* para llegar a obtener la conocida representación integral de Poisson para funciones armónicas en una bola. Este método consiste en realizar una especie de reflexión a través de la $\partial B(0, R)$.

DEFINICIÓN 4.3.2 Si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, el punto

$$\bar{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x \quad (4.28)$$

es llamado el *punto dual* a x con respecto a $\partial B(0, R)$. La aplicación $x \mapsto \bar{x}$ es una inversión con respecto a la esfera $\partial B(0, R)$.

Fijemos $y \in B(0, R)$, entonces la función de Green asociada a la bola $B(0, R)$ será

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) - \phi^y(x) \quad \forall x \in B(0, R), x \neq y,$$

donde ϕ^y es la función corrector que resuelve el problema

$$\begin{cases} \Delta \phi^y(x) = 0 & \text{si } x \in B(0, R) \\ \phi^y(x) = \Gamma(x - y) & \text{si } x \in \partial B(0, R). \end{cases} \quad (4.29)$$

Luego, para encontrar explícitamente la función de Green en la bola $B(0, R)$ debemos encontrar explícitamente la función ϕ^y en la bola $B(0, R)$, usando el hecho que ya conocemos la función Γ , que es la solución fundamental del Laplaciano. Con esta finalidad, usaremos la inversión con respecto a la esfera $\partial B(0, R)$ para *invertir la singularidad* que se produce en el punto $y \in B(0, R)$ y llevarla al punto $\bar{y} \in \mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$.

- Si $N > 2$, la aplicación $x \mapsto \Gamma(x - \bar{y})$ es armónica en $B(0, R)$ pues $x \neq \bar{y}$. Además,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) &= \frac{R^{N-2}}{N(N-2)\omega_N|y|^{N-2}|x - \bar{y}|^{N-2}} \\ &= \frac{R^{N-2}}{|y|^{N-2}} \Gamma(x - \bar{y}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $y \neq 0$, la aplicación $x \mapsto \frac{\Gamma(x - \bar{y})}{|y|^{N-2}}$ también resulta armónica en $B(0, R)$. Además, si $x \in \partial B(0, R)$ y $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{|y|^2}{R^2}|x - \bar{y}|^2 &= \frac{|y|^2}{R^2} \left(|x|^2 - \frac{2R^2x \cdot y}{|y|^2} + \frac{R^4}{|y|^2} \right) \\ &= \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2x \cdot y + R^2 \\ &= |y|^2 - 2x \cdot y + |x|^2 \\ &= |x - y|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{R^{N-2}}{|y|^{N-2}|x - \bar{y}|^{N-2}} = \frac{1}{|x - y|^{N-2}}.$$

Se sigue que si $x \in \partial B(0, R)$ y $y \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) &= \frac{R^{N-2}}{N(N-2)\omega_N|y|^{N-2}|x - \bar{y}|^{N-2}} \\ &= \frac{1}{N(N-2)\omega_N|x - y|^{N-2}} \\ &= \Gamma(x - y). \end{aligned}$$

En consecuencia, la función

$$\phi^y(x) := \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) \quad \forall x, y \in B(0, R), y \neq 0, \quad (4.30)$$

verifica (4.29).

- Si $N = 2$, mediante un razonamiento similar se llega a la misma fórmula (4.30).

Finalmente, usando el hecho que la función de Green es simétrica, obtenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.3.3 La función de Green para la bola $B(0, R)$ está dada por

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) \quad \forall x, y \in B(0, R), x \neq y. \quad (4.31)$$

De acuerdo a la fórmula (4.31), para $x, y \in B(0, R)$, $x \neq y$ uno tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}(x - y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\left(\frac{|y|}{R}(x - \bar{y})\right) \\ &= -\frac{x_i - y_i}{N\omega_N|x - y|^N} + \frac{x_i \frac{|y|^2}{R^2} - y_i}{N\omega_N\left(\frac{|x|}{R}|x - \bar{y}|\right)^N} \\ &= -\frac{x_i - y_i}{N\omega_N|x - y|^N} + \frac{x_i \frac{|y|^2}{R^2} - y_i}{N\omega_N|x - y|^N} \\ &= \frac{\left(\frac{|y|^2}{R^2} - 1\right) x_i}{N\omega_N|x - y|^N}. \end{aligned}$$

Luego, para $y \in \partial B(0, R)$ y $x \in B(0, R)$, se sigue que la derivada normal de G está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{R}\right) \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) \\ &= -\frac{1}{N\omega_N R|x - y|^N} \sum_{i=1}^N y_i \left(y_i \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)\right) \\ &= -\frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R|x - y|^N}. \end{aligned}$$

Luego, si $u \in C^2(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ es tal que $\Delta u = 0$ en $B(0, R)$, entonces (4.26) motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.3.4 Sea $u \in C^2(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$ una función armónica, entonces la fórmula integral de Poisson para la bola $B(0, R)$ está dada por

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{u(y)}{|x - y|^N} dS(y) \quad \forall x \in B(0, R). \quad (4.32)$$

OBSERVACIÓN 4.3.1 Notemos que si u en la Definición 4.3.4 resuelve el problema de valores sobre la frontera

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B(0, R) \\ u = g & \text{sobre } \partial B(0, R), \end{cases} \quad (4.33)$$

entonces de acuerdo a (4.32), ésta debe ser

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{g(y)}{|x - y|^N} dS(y) \quad \forall x \in B(0, R). \quad (4.34)$$

DEFINICIÓN 4.3.5 La función

$$K(x, y) := \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R |x - y|^N} \quad \forall x \in B(0, R), \quad \forall y \in \partial B(0, R), \quad (4.35)$$

se denomina *kernel de Poisson para la bola* $B(0, R)$.

TEOREMA 4.3.3 (Fórmula de Poisson para la bola) Sea $g \in C(\partial B(0, R))$ y definamos u por (4.34). Entonces

i) $\Delta u = 0$ en $B(0, R)$,

ii) $u \in C^\infty(B(0, R))$,

iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in B(0, R)}} u(x) = g(z)$ para cada $z \in \partial B(0, R)$.

Demostración. Pongamos

$$\Psi(x, y) := \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R |x - y|^N} g(y) \quad \forall (x, y) \in B(0, R) \times \partial B(0, R).$$

Es claro que $\Psi(\cdot, y) \in C(B(0, R))$ para toda $y \in \partial B(0, R)$, y que

$$\Psi(x, \cdot) \in L^1(\partial B(0, R)) \quad \forall x \in B(0, R),$$

pues

$$|\Psi(x, y)| \leq \frac{2R\|g\|_\infty}{N\omega_N} \frac{1}{(R - |x|)^N} \quad \forall (x, y) \in B(0, R) \times \partial B(0, R).$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi(x, y) &= -g(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{R} \right) \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) \\ &= -g(y) \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{R} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial y_i}(x, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi(x, y) \right| \leq \frac{(N+2)R\|g\|_\infty}{N\omega_N} \frac{1}{(R - |x|)^{N+1}} \quad \forall (x, y) \in B(0, R) \times \partial B(0, R), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, $\Psi(\cdot, y) \in C^1(B(0, R))$ para toda $y \in \partial B(0, R)$, y

$$\nabla_x \Psi(x, \cdot) \in (L^1(\partial B(0, R)))^N \quad \forall x \in B(0, R).$$

También se puede probar que $\Psi(\cdot, y) \in C^2(B(0, R))$ para toda $y \in \partial B(0, R)$, y

$$D_x^2 \Psi(x, \cdot) \in (L^1(\partial B(0, R)))^{N \times N} \quad \forall x \in B(0, R).$$

Notando ahora que para cada $(x, y) \in B(0, R) \times \partial B(0, R)$,

$$\begin{aligned}\Delta_x \Psi(x, y) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \Psi(x, y) \\ &= -g(y) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_j^2}(x, y) \right) \frac{y_i}{R} \\ &= 0,\end{aligned}$$

tenemos $\Psi(\cdot, y) \in C^2(B(0, R))$ es armónica para toda $y \in \partial B(0, R)$. Más aún, por el Teorema 4.2.1 de la propiedad del valor medio, y el Teorema 4.2.5 de regularidad de las funciones armónicas, obtenemos que $\Psi(\cdot, y) \in C^\infty(B(0, R))$ para toda $y \in \partial B(0, R)$.

i) Como

$$u(x) = \int_{\partial B(0, R)} \Psi(x, y) \, dS(y),$$

de acuerdo a los cálculos previos, concluimos que $u \in C^2(B(0, R))$ es armónica.

ii) Desde la parte i), el Teorema 4.2.1 de la propiedad del valor medio, y el Teorema 4.2.5 de regularidad de las funciones armónicas, deducimos que $u \in C^\infty(B(0, R))$.

iii) Sea $z \in \partial B(0, R)$ fijo, y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $g \in C(\partial B(0, R))$, se tiene que

$$(\forall y \in \partial B(0, R) \setminus \{z\})(|y - z| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(z)| < \varepsilon).$$

Sea ahora $x \in B(0, R)$ tal que $|x - z| < \frac{\delta}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}|u(x) - u(z)| &= \left| \int_{\partial B(0, R)} K(x, y) g(y) \, dS(y) - g(z) \right| \\ &= \left| \int_{\partial B(0, R)} K(x, y) (g(y) - g(z)) \, dS(y) \right| \quad \text{pues } \int_{\partial B(0, R)} K(x, y) \, dS(y) = 1, \\ &\leq \int_{\substack{\partial B(0, R) \\ |y - x| < \delta}} K(x, y) |g(y) - g(z)| \, dS(y) + \int_{\substack{\partial B(0, R) \\ |y - x| \geq \delta}} K(x, y) |g(y) - g(z)| \, dS(y) \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Notar ahora que

$$\begin{aligned}0 \leq I_1 &= \int_{\substack{\partial B(0, R) \\ |y - x| < \delta}} K(x, y) |g(y) - g(z)| \, dS(y) \\ &< \varepsilon \int_{\substack{\partial B(0, R) \\ |y - x| < \delta}} K(x, y) \, dS(y) \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $|y - z| < \frac{\delta}{2}$ y $|x - z| \geq \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |x - z| &\leq |x - y| + |y - z| \\ &\leq |x - y| + \frac{\delta}{2} \\ &\leq |x - y| + \frac{|x - z|}{2}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{|x - z|}{2} \leq |x - y|.$$

Esta desigualdad implica que si $|y - z| < \frac{\delta}{2}$ y $|x - z| \geq \delta$, entonces

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R |y - x|^N} \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R \left(\frac{|x - z|^N}{2^N}\right)} \\ &\leq \frac{2^N (R^2 - |x|^2)}{N\omega_N R \delta^N}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} 0 \leq I_2 &= \int_{\substack{\partial B(0, R) \\ |y - x| \geq \delta}} K(x, y) |g(y) - g(z)| \, dS(y) \\ &\leq \frac{2^{N+1} (R^2 - |x|^2) \|g\|_\infty}{N\omega_N R \delta^N} \int_{\partial B(0, R)} dS(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|u(x) - u(z)| \leq \varepsilon + \frac{2^{N+1} R^{N-2} (R^2 - |x|^2) \|g\|_\infty}{\delta^N}.$$

De aquí, si $x \rightarrow z$, para cada $\varepsilon > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{x \rightarrow z} |u(x) - u(z)| \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow z} |u(x) - u(z)| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual concluye nuestra demostración. ■

4.3.2. La integral de Poisson para el semiespacio

Cuando el dominio Ω es el semiespacio, la función de Green puede determinarse explícitamente por el *método de reflexión* para llegar a obtener la conocida representación integral de Poisson para funciones armónicas en el semiespacio. Este método consiste en realizar una reflexión a través de la frontera del semiespacio.

DEFINICIÓN 4.3.6 Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N$. La *reflexión* de x en el plano $\partial\mathbb{R}_+^N$ es el punto

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, -x_N).$$

Queremos encontrar una función corrector ϕ^y que resuelva:

$$\begin{cases} \Delta\phi^y = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^N \\ \phi^y = \Gamma(x - y) & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N. \end{cases} \quad (4.36)$$

La idea es construir ϕ^y a partir de la solución fundamental Γ *reflejando la singularidad* que se produce en el punto $y \in \mathbb{R}_+^N$ a $\tilde{y} \notin \mathbb{R}_+^N$. Cálculos directos permiten concluir que la función ϕ^y que satisface (4.36) es

$$\phi^y(x) := \Gamma(x - y). \quad (4.37)$$

Ahora, usando el hecho que la función de Green es simétrica, obtenemos la siguiente

DEFINICIÓN 4.3.7 La función de Green para el semiespacio \mathbb{R}_+^N esta dada por

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) - \Gamma(x - \tilde{y}) \quad \forall x, y \in \partial\mathbb{R}_+^N, x \neq y. \quad (4.38)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_N}(x, y) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial y_N}(y - x) - \frac{\partial \Gamma}{\partial y_N}(y - \tilde{x}) \\ &= -\frac{1}{N\omega_N} \left(\frac{y_N - x_N}{|y - x|^N} - \frac{y_N + x_N}{|y - \tilde{x}|^N} \right) \\ &= \frac{2x_N}{N\omega_N |y - x|^N}. \end{aligned}$$

Luego, se sigue para $y \in \partial\mathbb{R}_+^N$, que la derivada normal de G está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x, y) &= \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}(x, y), \frac{\partial G}{\partial y_2}(x, y), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_N}(x, y) \right) \cdot (0, 0, \dots, -1) \\ &= \frac{-2x_N}{N\omega_N |y - x|^N}. \end{aligned}$$

De esta forma, si $u \in C^2(\mathbb{R}_+^N) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ es tal que $\Delta u = 0$ en \mathbb{R}_+^N , entonces (4.26) motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.3.8 Sea $u \in C^2(\mathbb{R}_+^N) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ una función armónica, entonces la *integral de Poisson para el semiespacio* \mathbb{R}_+^N está dada por

$$u(x) = \frac{2y_N}{N\omega_N} \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} \frac{u(y)}{|x - y|^N} dS(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N. \quad (4.39)$$

OBSERVACIÓN 4.3.2 Notemos que si u resuelve el problema de valores sobre la frontera

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^N \\ u = g & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases} \quad (4.40)$$

entonces de acuerdo a (4.39), ésta debe ser

$$u(x) = \frac{2x_N}{N\omega_N} \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} \frac{g(y)}{|x-y|^N} dS(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N. \quad (4.41)$$

DEFINICIÓN 4.3.9 La función

$$K(x, y) := \frac{2x_N}{N\omega_N|x-y|^N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N, \quad \forall y \in \partial\mathbb{R}_+^N, \quad (4.42)$$

es conocida como el *kernel de Poisson* para el semiespacio \mathbb{R}_+^N .

TEOREMA 4.3.4 (Fórmula de Poisson para el semiespacio) Sea $g \in C(\partial\mathbb{R}_+^N)$ y definamos u por (4.41). Entonces

- i) $\Delta u = 0$ en \mathbb{R}_+^N ,
- ii) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^N)$,
- iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in \mathbb{R}_+^N}} u(x) = g(z)$ para cada $z \in \partial\mathbb{R}_+^N$.

4.3.3. Teoremas de convergencia

El siguiente resultado debilita nuestra noción de funciones C^2 -armónicas a funciones C -armónicas, que son funciones continuas verificando la propiedad del valor medio, y constituye la base para obtener ciertos teoremas de convergencia.

TEOREMA 4.3.5 (Funciones C -armónicas) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Una función $u \in C^2(\Omega)$ es armónica si y sólo si $u \in C(\Omega)$ y satisface la propiedad del valor medio

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B(x, R)} u(y) dS(y), \quad (4.43)$$

para cada bola $B(x, R) \Subset \Omega$.

Demostración.

(\Rightarrow) Asumamos que $u \in C^2(\Omega)$ es armónica, entonces por Teorema 4.2.1 la conclusión es inmediata.

(\Leftarrow) Asumamos que $u \in C(\Omega)$ satisface la propiedad del valor medio para cada bola $B(y, R) \Subset \Omega$. Sea $x_0 \in \Omega$ y sea $R > 0$ tal que $B(x_0, R) \Subset \Omega$. Entonces, $u \in C(\partial B(x_0, R))$. De esta forma, de acuerdo al Teorema 4.3.3, el problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } B(x_0, R) \\ v = u & \text{sobre } \partial B(x_0, R), \end{cases}$$

posee una solución $v \in C^2(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B(x_0, R)})$, que por el Corolario 4.15 es única. De esta forma, por Teorema 4.2.1, v satisface la propiedad del valor medio para cada bola $B(z, r) \subset B(x_0, R)$, y así $w = v - u \in C(\overline{B(x_0, R)})$ también satisface la propiedad del valor medio para cada bola $B(z, r) \subset B(x_0, R)$. Aplicando ahora el Teorema 4.2.5, obtenemos que $w \in C^\infty(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B(x_0, R)})$. Por lo tanto, $u \in C^2(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B(x_0, R)})$ satisfaciendo la propiedad del valor medio para cada bola $B(z, r) \subset B(x_0, R)$, así que, después de aplicar el Teorema 4.2.3, concluimos que u es armónica en $B(x_0, R)$. De aquí se deduce que u es armónica en Ω . ■

La propiedad del valor medio de las funciones armónicas en un subconjunto Ω abierto de \mathbb{R}^N junto al resultado previo, validan los siguientes resultados de convergencia de sucesiones de funciones armónicas.

TEOREMA 4.3.6 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Sea (u_n) una sucesión de funciones en $C^2(\Omega)$ armónicas en Ω , que converge uniformemente en Ω . Entonces su límite es una función armónica en Ω .

Demostración. Sea $x \in \Omega$ y sea $B(x, R) \Subset \Omega$. Entonces (u_n) es una sucesión de funciones en $C^2(\overline{B(x, R)})$. Notar que este espacio es Banach con la norma

$$\|v\|_{C^2(\overline{B(x, R)})} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \sup_{B(x, R)} \|D^\alpha v\|_\infty \quad \forall v \in C^2(\overline{B(x, R)}).$$

Luego, si u es el límite uniforme de la sucesión (u_n) en Ω , entonces $u \in C^2(\overline{B(x, R)})$. En particular,

- $u_n(z) \rightarrow u(z)$ para toda $z \in \overline{B(x, R)}$,
- u_n, u son integrables en $\overline{B(x, R)}$.
- $\exists M > 0$ tal que $|u_n(z)| \leq u(z) + M$ para toda $z \in \overline{B(x, R)}$, para toda n suficientemente grande.

Entonces, por Teorema A.7.3 de la convergencia dominada y la unicidad del límite, obtenemos

$$u_n(x) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B(x, R)} u_n(y) \, dy \rightarrow \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B(x, R)} u(y) \, dy = u(x)$$

para toda $B(x, R) \Subset \Omega$. Finalmente, por Teorema 4.3.5 obtenemos que $u \in C^2(\Omega)$ es armónica. ■

COROLARIO 4.3.1 Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío, y sea (u_n) una sucesión de funciones tales que

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & \text{en } \Omega \\ u_n = g_n & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en $C(\partial\Omega)$ que converge uniformemente sobre $\partial\Omega$ a una función g , entonces la sucesión (u_n) converge uniformemente a una función armónica u que resuelve el problema de valores sobre la frontera

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por medio del Teorema 4.2.9 de la desigualdad de Harnack y el Teorema 4.3.6 podemos deducir el siguiente resultado.

TEOREMA 4.3.7 (Convergencia de Harnack) Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N con interior no vacío. Sea (u_n) una sucesión monótona creciente de funciones en $C^2(\Omega)$, armónicas en Ω , tal que para algún punto $x_0 \in \Omega$ la sucesión $(u_n(x_0))$ es acotada. Entonces, sobre cualquier subconjunto abierto, conexo y acotado $\Omega_0 \Subset \Omega$ con interior no vacío, la sucesión converge uniformemente a una función armónica.

Demostración. Por hipótesis, existe $C > 0$ tal que tenemos que

$$-C \leq u_1(x_0) \leq u_2(x_0) \leq \dots \leq u_n(x_0) \leq u_{n+1}(x_0) \leq \dots \leq C.$$

Luego, existe $\bar{u}(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$u_n(x_0) \rightarrow \bar{u}(x_0).$$

Así, dado $\varepsilon > 0$,

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall m, n \in \mathbb{N})(m \geq n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq u_m(x_0) - u_n(x_0) < \varepsilon).$$

Consideremos ahora $\Omega_0 \Subset \Omega$ siendo un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N conteniendo a x_0 , y fijemos $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq n$, para definir

$$v(x) = u_m(x) - u_n(x) \quad \forall x \in \Omega_0.$$

Entonces $v \in C^2(\Omega_0) \cap C(\bar{\Omega}_0)$ es armónica no negativa en Ω , y por el Teorema 4.2.9 aplicado a v , obtenemos

$$0 \leq \sup_{\Omega_0} v = \sup_{\Omega_0} |u_m - u_n| < C \inf_{\Omega_0} |u_m - u_n| \leq C |u_m(x_0) - u_n(x_0)| \leq C\varepsilon,$$

con $C = C_{\Omega_0, \Omega} > 0$. De esta forma, (u_n) converge uniformemente en Ω_0 . ■

4.4. El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace. El método de Perron*

Ahora tenemos los ingredientes para atacar la pregunta acerca de la existencia de soluciones del clásico problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en subconjuntos abiertos y acotados de \mathbb{R}^N . En esta sección respondemos esta interrogante con el *método de Perron de las funciones subarmónicas*, el cual se basa en el principio del máximo y en las soluciones del problema de Dirichlet sobre bolas. Este método separa el problema de existencia en el interior de aquel relacionado con el comportamiento sobre la frontera, y se puede extender fácilmente a clases más generales de ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden.

Antes de continuar, vamos a debilitar las nociones de funciones C^2 -subarmónicas y C^2 -superarmónicas como sigue a continuación.

DEFINICIÓN 4.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Una función $u \in C(\Omega)$ es llamada *C-subarmónica* (*C-superarmónica*) en Ω , si para cada bola abierta $B(x, r) \Subset \Omega$, y para cada función h que es *C-armónica* en $B(x, r)$ uno tiene,

$$u \leq h \text{ sobre } \partial B(x, r) \Rightarrow u \leq h \text{ en } B(x, r) \quad \left(u \geq h \text{ sobre } \partial B(x, r) \Rightarrow u \geq h \text{ en } B(x, r) \right).$$

Se puede probar que las funciones *C-subarmónicas* verifican el Teorema 4.2.4 del principio fuerte del máximo.

TEOREMA 4.4.1 (Principio del máximo para funciones *C-subarmónicas* (*C-superarmónicas*))

Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N con interior no vacío, y sea $u \in C(\bar{\Omega})$ una función *C-subarmónica* (*C-superarmónica*) en Ω .

i) Si existe un punto $x_0 \in \Omega$ para el cual

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u \quad \left(u(x_0) = \inf_{\Omega} u \right)$$

entonces u es constante en Ω .

ii) Si además Ω es acotado y $v \in C(\bar{\Omega})$ es *C-superarmónica* en Ω , con $v \geq u$ sobre $\partial\Omega$, entonces

$$v > u \text{ en } \Omega \quad \text{o} \quad v = u \text{ sobre } \Omega.$$

Nuestro interés es estudiar el rol que cumplen las funciones subarmónicas en la obtención de algún resultado de existencia de soluciones del siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace: sea Ω un subconjunto abierto conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío, y sea $g \in C(\partial\Omega)$, queremos encontrar una función u que resuelva el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.44)$$

Una primera aproximación en dirección a resolver nuestro problema es la siguiente: si asumimos que $u \in C(\overline{\Omega})$ es una solución de (4.44), entonces u es una función superarmónica en Ω . Luego, si $v \in C(\overline{\Omega})$ es una función subarmónica cualquiera en Ω tal que $v \leq g$ sobre $\partial\Omega$, entonces por el Teorema 4.4.1 parte ii) obtenemos de inmediato que $v \leq u$ en Ω . De esta manera, si ponemos

$$\mathcal{M}_g = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ es subarmónica en } \Omega \text{ y } v \leq g \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

parece bastante razonable pensar que

$$u = \sup_{v \in \mathcal{M}_g} v \quad \text{en } \Omega$$

es una solución de (4.44). Sin embargo, esto no es tan directo de probar pues para que efectivamente tal u sea una solución del problema (4.44), se debe cumplir que u debe ser armónica en Ω y que $u = g$ sobre $\partial\Omega$. Antes, necesitamos algunos resultados preliminares.

DEFINICIÓN 4.4.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $x_0 \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \Subset \Omega$. Sea $u \in C(\Omega)$ y sea $v \in C^2(B(x_0, r) \cap C^2(\overline{B(x_0, r)}))$ la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } B(x_0, r) \\ v = u & \text{sobre } \partial B(x_0, r). \end{cases}$$

Llamamos *levantamiento armónico de u sobre $B(x_0, r)$* a la función $U_{x_0, r} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$U_{x_0, r}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus B(x_0, r) \\ v(x) & \text{si } x \in B(x_0, r). \end{cases}$$

LEMA 4.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $x_0 \in \Omega$, sea $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \Subset \Omega$ y sea $g \in C(\partial\Omega)$. Si $u \in \mathcal{M}_g$ y $U_{x_0, r}$ denota su levantamiento armónico sobre $B(x_0, r)$, entonces

i) $u \leq U_{x_0, r}$ en Ω ,

ii) $U_{x_0, r}$ es subarmónica en Ω .

Demostración.

i) Por definición de $U_{x_0, r}$,

$$u = U_{x_0, r} \quad \text{en } \Omega \setminus B(x_0, r). \quad (4.45)$$

Además, como u es C -subarmónica en Ω , $B(x_0, r) \Subset \Omega$ y $U_{x_0, r}$ es C -armónica en $B(x_0, r)$, con $u = U_{x_0, r}$ sobre $\partial B(x_0, r)$, entonces por definición de C -subarmónica se tiene que

$$u \leq U_{x_0, r} \quad \text{en } B(x_0, r). \quad (4.46)$$

Desde (4.45) y (4.46) concluimos que

$$u \leq U_{x_0, r} \quad \text{en } \Omega.$$

ii) Sea $z \in \Omega$, sea $R > 0$ tal que $B(z, R) \Subset \Omega$, y sea $h \in C(B(z, R))$ una función C -armónica en $B(z, R)$ tal que

$$U_{x_0, r} \leq h \quad \text{sobre } \partial B(z, R).$$

Por parte i), tenemos que $u \leq U_{x_0, r}$ en Ω . En particular,

$$u \leq U_{x_0, r} \quad \text{sobre } \partial B(z, R),$$

de donde

$$u \leq h \quad \text{sobre } \partial B(z, R).$$

Luego, desde la definición de función C -subarmónica, esto implica que

$$u \leq h \quad \text{en } B(z, R),$$

y por lo tanto, como $u = U_{x_0, r}$ en $\Omega \setminus B(x_0, r)$, tenemos

$$U_{x_0, r} \leq h \quad \text{en } B(z, R) \setminus B(x_0, r). \quad (4.47)$$

Por otro lado, como $U_{x_0, r}$ es armónica en $B(x_0, r)$, entonces

$$U_{x_0, r} \leq h \quad \text{en } B(z, R) \cap B(x_0, r). \quad (4.48)$$

En efecto, supongamos, por el contrario, que existe $\bar{x} \in B(z, R) \cap B(x_0, r)$ tal que

$$U_{x_0, r}(\bar{x}) > h(\bar{x}).$$

Como $U_{x_0, r} \in C(\Omega)$, entonces existe $\omega \subset B(z, R) \cap B(x_0, r)$ tal que

$$U_{x_0, r} > h \quad \text{en } \omega$$

y

$$U_{x_0, r} = h \quad \text{sobre } \partial\omega,$$

con $U_{x_0, r} - h$ armónica en ω . Así, $U_{x_0, r} - h$ es una función armónica en ω que alcanza su supremo en el interior de ω , de donde, por Teorema 4.4.1 parte i), concluimos que $U_{x_0, r} - h$ es constante en ω , lo que es contradictorio con el hecho que $U_{x_0, r} > h$ en ω . La contradicción viene de suponer que existe $\bar{x} \in B(z, R) \cap B(x_0, r)$ tal que $U_{x_0, r}(\bar{x}) > h(\bar{x})$. ■

LEMA 4.4.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $\{u_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de funciones subarmónicas en Ω . Entonces, la función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) := \text{máx}\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$$

es subarmónica en Ω .

Demostración. Notemos que $u \in C(\Omega)$ pues $u_1, u_2, \dots, u_n \in C(\Omega)$. Consideremos $B(x, r) \Subset \Omega$ y sea h una función armónica en $B(x, r)$ tal que

$$u \leq h \quad \text{sobre } \partial B(x, r).$$

Entonces,

$$u_i \leq h \quad \text{sobre } \partial B(x, r) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Como cada u_i es subarmónica en Ω , entonces

$$u_i \leq h \quad \text{en } B(x, r) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

De aquí, como $u_i \in C(\overline{B(x, r)})$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, para cada $x \in B(x, r)$ podemos tomar el máximo valor entre las $u_i(x)$ y obtener

$$u \leq h \quad \text{en } B(x, r). \quad \blacksquare$$

DEFINICIÓN 4.4.3 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , y sea g una función acotada en $\partial\Omega$.

- Una función $u \in C(\overline{\Omega})$ subarmónica en Ω es llamada *subfunción relativa a g* si ella satisface

$$u \leq g \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

- Una función $u \in C(\overline{\Omega})$ superarmónica en Ω es llamada *superfunción relativa a g* si ella satisface

$$u \geq g \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

LEMA 4.4.3 Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío, y sea g una función acotada en $\partial\Omega$. Cada subfunción relativa a g es menor o igual a cada superfunción relativa a g en Ω .

Demostración. Sea g una función acotada sobre $\partial\Omega$ tal que

$$u \leq g \leq v \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

con $u \in C(\overline{\Omega})$ subarmónica en Ω , y $v \in C(\overline{\Omega})$ superarmónica en Ω . Supongamos que $u \not\leq v$ en Ω , entonces debe existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) > v(x_0)$. Es decir,

$$\exists x_0 \in \Omega \quad \text{tal que} \quad u(x_0) - v(x_0) > 0 \quad \text{y} \quad u - v \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Pero $u - v \in C(\overline{\Omega})$ es una función subarmónica en Ω , que contradice al Teorema 4.4.1 parte ii) que implica que $u \leq v$ en Ω . La contradicción viene de suponer $u \not\leq v$ en Ω . \blacksquare

OBSERVACIÓN 4.4.1 *Notar que en particular, las funciones constantes son subfunciones y también son superfunciones.*

TEOREMA 4.4.2 (Método de Perron) Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío. La función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{M}_g} v(x) \quad \forall x \in \Omega$$

es armónica en Ω .

Demostración. Sea $v \in \mathcal{M}_g$. Notar que

$$\begin{aligned} v \in \mathcal{M}_g &\Rightarrow v \text{ es subfunción relativa a } g \\ &\Rightarrow \max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} g \quad \text{por Teorema 4.4.1} \\ &\Rightarrow v \leq \max_{\partial\Omega} g \quad \text{en } \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Como $v \in \mathcal{M}_g$ es arbitraria, concluimos que

$$u \leq \max_{\partial\Omega} g \quad \text{en } \bar{\Omega}.$$

Consideremos ahora $y \in \Omega$ fijo, pero arbitrario. Por definición de u ,

$$\exists (v_n) \subset \mathcal{M}_g \quad \text{tal que} \quad v_n(y) \rightarrow u(y).$$

Reemplazando v_n por $\max\{v_n, \min_{\partial\Omega} g\}$, podemos asumir que la sucesión (v_n) es acotada. Escojamos ahora $R > 0$ de manera que la bola $B(y, R) \Subset \Omega$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos V_n como el levantamiento armónico de v_n en $B(y, R)$. Es decir,

$$V_n(x) := \begin{cases} \bar{v}_n(x) & \text{si } x \in B(y, R) \\ v_n(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus B(y, R), \end{cases}$$

donde \bar{v}_n es la función armónica en $B(y, R)$ dada por la integral de Poisson (4.32) de v_n sobre $\partial B(y, R)$. Entonces,

- V_n es subarmónica en Ω (vea el Lema 4.4.1 parte ii)).
- $V_n \in \mathcal{M}_g$. En efecto,

$$\begin{aligned} V_n = v_n \text{ sobre } \Omega \setminus \partial B(y, R) &\Rightarrow V_n = v_n \leq g \text{ sobre } \partial\Omega \\ &\Rightarrow V_n \text{ es subfunción relativa a } g \\ &\Rightarrow V_n \in \mathcal{M}_g. \end{aligned}$$

- $V_n(y) \rightarrow u(y)$. En efecto, como v_n es subarmónica en $B(y, R)$ y V_n es armónica en $B(y, R)$, con

$$v_n \leq V_n \quad \text{en } \partial B(y, R),$$

entonces

$$v_n \leq V_n \quad \text{en } B(y, R).$$

Luego, por definición de u ,

$$V_n(y) \rightarrow u(y).$$

Notar que podemos asumir que (V_n) es una sucesión monótona creciente en $B(y, R)$, con $(V_n(y))$ acotada. De esta manera, por Teorema 4.3.7 de la convergencia de Harnack, V_n converge uniformemente a una función armónica V sobre cualquier subconjunto abierto, y conexo $\Omega_0 \Subset B(y, R)$. Por lo tanto u es armónica en $B(y, R)$.

Dada la arbitrariedad de $y \in \Omega$, concluimos que $V = u$ en $B(y, R)$, para cada $B(y, R) \Subset \Omega$, de donde concluimos que u es armónica en Ω . ■

El Teorema 4.4.2 exhibe una función armónica que es una solución anticipada del problema (4.44). Esto es, si (4.44) posee una solución para g acotada en $\partial\Omega$, entonces esta debe ser idéntica a la función determinada por el método de Perron. Por otro lado, el estudio del comportamiento sobre la frontera de la función u definida en el teorema previo, está separado del problema de existencia de soluciones para el problema (4.44). Veremos que la hipótesis de continuidad de los valores sobre la frontera de la solución de (4.44) está estrechamente conectada a las propiedades geométricas de la frontera mediante la siguiente función.

DEFINICIÓN 4.4.4 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $z \in \partial\Omega$. Una función $\varphi = \varphi_z$ es llamada *función barrera* en z relativa a Ω si:

- i) φ es subarmónica en Ω ,
- ii) $\varphi < 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{z\}$ y
- iii) $\varphi(z) = 0$.

Una característica importante del concepto de función barrera es que se asocia a una propiedad local sobre la frontera $\partial\Omega$.

DEFINICIÓN 4.4.5 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $z \in \partial\Omega$. Una función φ es llamada *función barrera local* en z si existe una vecindad V de z tal que φ es una función barrera en z relativa a $V \cap \Omega$.

En consecuencia, una función barrera en z relativa a Ω se puede definir como sigue.

PROPOSICIÓN 4.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea $z \in \partial\Omega$ y sea V una vecindad de z . Asumamos que φ es una función barrera local en z relativa a V . Si existe una bola B que verifica $z \in B \subseteq V$ y consideramos $m = \sup_{V \setminus \bar{B}} \varphi < 0$, entonces la función

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \max(m, \varphi(x)) & x \in \bar{\Omega} \cap \bar{B}, \\ m & x \in \bar{\Omega} \setminus B, \end{cases}$$

es una función barrera en z relativa a Ω .

Demostración. Claramente $\bar{\varphi} \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{\varphi}$ es subarmónica en Ω y $\bar{\varphi} > 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{z\}$ y $\bar{\varphi}(z) = 0$. ■

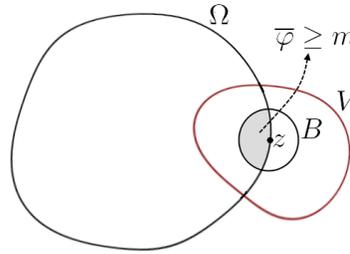


Figura 4.1. Una función barrera local en $z \in \partial\Omega$

Antes de continuar, consideremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.4.6 Un punto $z \in \partial\Omega$ es llamado *punto regular* si existe una función barrera en z relativa a Ω .

En sus trabajos Perron dedujo que la función armónica u definida en el Teorema 4.4.2 cumpliría con la condición sobre $\partial\Omega$ si imponía como condición geométrica sobre $\partial\Omega$ que sus puntos fueran regulares.

TEOREMA 4.4.3 Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío y sea u la función definida en Ω por el Teorema 4.4.2 del método de Perron. Si z es un punto regular de $\partial\Omega$ y g es continua en z , entonces

$$\lim_{x \rightarrow z} u(x) = g(z).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado y sea

$$M = \sup_{\partial\Omega} |g|.$$

Como z es un punto regular en la $\partial\Omega$, entonces existe φ función barrera en z y, por la continuidad de g ,

$$(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (|x - z| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(z)| < \varepsilon)$$

y puesto que $\varphi > 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{z\}$ y $\varphi(z) = 0$,

$$(\exists \kappa > 0) \text{ tal que } (|x - z| \geq \delta \Rightarrow \kappa \varphi \geq 2M).$$

Entonces, las funciones

$$g(z) + \varepsilon + \kappa\varphi \quad \text{y} \quad g(z) - \varepsilon - \kappa\varphi$$

son respectivamente una superfunción y una subfunción relativas a g . En consecuencia, como cada superfunción es mayor o igual que una subfunción, y dado que u , la solución de Perron, es armónica en Ω , tenemos que

$$g(z) + \varepsilon + \kappa\varphi(x) \leq u(x) \leq g(z) - \varepsilon - \kappa\varphi(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

o equivalentemente,

$$|u(x) - g(z)| \leq \varepsilon + \kappa\varphi(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente, como $\varphi(x) \rightarrow 0$ cuando $x \xrightarrow{x \in \Omega} z$, concluimos que $u(x) \rightarrow g(z)$ cuando $x \xrightarrow{x \in \Omega} z$. ■

Una consecuencia inmediata del teorema previo es la siguiente.

COROLARIO 4.4.1 Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío, y sea $g \in C(\partial\Omega)$. El problema (4.44) tiene solución si y sólo si todos los puntos en $\partial\Omega$ son regulares.

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $g \in C(\partial\Omega)$. Asumamos que el problema (4.44) posee una solución u . Sea $z \in \partial\Omega$ y consideremos la función $g(x) = |x - z|$ para todo $x \in \partial\Omega$. Claramente $g \in C(\partial\Omega)$. Entonces, si consideramos la función u , la solución de Perron, tenemos que u es solución de (4.44) y verifica : u es superarmónica en Ω ; $u > 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{z\}$; y $u(z) = 0$ (pues $u = 0$ sobre $\partial\Omega$).

$\therefore z$ es un punto regular.

(\Leftarrow) Sea $z \in \partial\Omega$ y sea $g \in C(\partial\Omega)$. Asumamos que z es regular en $\partial\Omega$. Si u es la solución de Perron, entonces se verifica

$$u(x) \rightarrow g(z).$$

Como $u \in C(\bar{\Omega})$, se verifica que en verdad $u = g$ sobre $\partial\Omega$.

$\therefore u$ es solución de (4.44). ■

OBSERVACIÓN 4.4.2 Bajo las condiciones establecidas previamente sobre la frontera, si por otro método encontramos una solución para el problema (4.44), de acuerdo a la unicidad establecida en el Corolario 4.2.3, esta solución debe ser la misma que la encontrada por el método de Perron.

Una pregunta natural surge ahora:

¿Qué dominios verifican que todos los puntos sobre su frontera son regulares?

Una clase de conjuntos que verifican la condición que todos los puntos sobre su frontera sean regulares es la siguiente:

DEFINICIÓN 4.4.7 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $z \in \partial\Omega$. Diremos que Ω satisface la *condición de esfera exterior* en z si:

$$\exists B(\hat{z}, R) \text{ para alguna } R = R(z) > 0 \text{ y algún } \hat{z} = \hat{z}(z) \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \text{ tal que } \overline{\Omega} \cap \overline{B(\hat{z}, R)} = \{z\}.$$

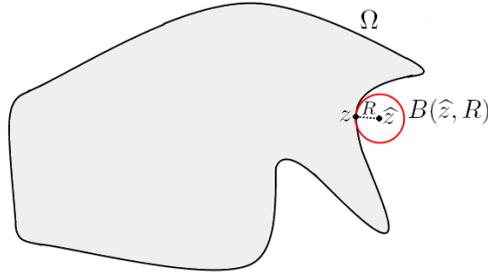


Figura 4.2. Ω verifica la condición de esfera exterior en el punto $z \in \partial\Omega$.

DEFINICIÓN 4.4.8 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Diremos que Ω satisface la *condición de esfera exterior uniforme* si

$$\exists R > 0 \text{ tal que } \forall z \in \partial\Omega \exists \hat{z} \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \text{ tal que } \overline{\Omega} \cap \overline{B(\hat{z}, R)} = \{z\}.$$

TEOREMA 4.4.4 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N que satisface la condición de esfera exterior en un punto z de su frontera $\partial\Omega$, entonces la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} \ln \frac{|x-z|}{R} & \text{si } N = 2 \\ \frac{|x-z|^{N-2} - R^{N-2}}{R^{N-2}|x-z|^{N-2}} & \text{si } N > 2, \end{cases}$$

es una función barrera en z relativa a Ω . En particular, si Ω posee frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 , entonces todos los puntos de su frontera son regulares.

COROLARIO 4.4.2 Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^N con interior no vacío y tal que todos los puntos de $\partial\Omega$ son regulares, entonces existe una única función de Green $G(x, y)$ de Ω . Es decir, existe una única función $G : \Omega \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in \Omega$ fijo verifica

$$\begin{cases} \Delta_x(G(x, y) - \Gamma(x-y)) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ G(x, y) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Γ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace dada por (4.1.1).

4.5. El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. El potencial Newtoniano*

En esta sección llamamos *dominio* de \mathbb{R}^N a cualquier subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N con interior no vacío. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ regular y sea $g \in C(\partial\Omega)$. De acuerdo al estudio realizado para la ecuación de Laplace, para resolver el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.49)$$

bastará con resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.50)$$

pues ya sabemos que existe $v \in C^2(\bar{\Omega})$, dada por el método de Perron, que es solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego, por la linealidad del operador Laplaciano tendríamos $u = v + w$. Notar además que de acuerdo a la fórmula de representación de Green (4.27), y dado que $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, tenemos que la candidata a solución de (4.50) debiese ser

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.51)$$

De esta manera, el problema (4.49) queda resuelto. Lo que resta establecer es bajo qué condiciones sobre f la función w definida en (4.51) es realmente una solución del problema (4.50).

Como

$$G(x, y) = \Gamma(x, y) - \phi^y(x) \quad \forall x, y \in \Omega, x \neq y,$$

con ϕ^y armónica en Ω , notar que si w está dada por (4.51), entonces para cada $x \in \Omega$ uno tiene que

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= \int_{\Omega} \Delta_x G(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \Delta_x (\Gamma(x - y) - \phi^y(x)) f(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \Delta_x \Gamma(x - y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Luego, conviene introducir la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.5.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $f \in L^1(\Omega)$. Llamamos *potencial Newtoniano de f* a la función w_f definida en \mathbb{R}^N mediante la fórmula:

$$w_f(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.52)$$

Antes de continuar es conveniente repasar los espacios de funciones Hölder continuas (ver Anexo A.13), que es un espacio apropiado de funciones para establecer los resultados de existencia.

4.5.1. Existencia de soluciones

Antes de probar la existencia de soluciones para el problema (4.49) es necesario realizar algunas estimaciones relacionadas con las derivadas del potencial Newtoniano.

LEMA 4.5.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, y sea w_f el potencial Newtoniano de f . Entonces

- i) $w_f \in C^1(\mathbb{R}^N)$
- ii) $\frac{\partial w_f}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)f(y) dy \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$

LEMA 4.5.2 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, y sea w_f el potencial Newtoniano de f . Entonces

- i) $w_f \in C^2(\Omega)$
- ii) $-\Delta w_f = f$ en Ω
- iii) Para cada $x \in \Omega$ y para cada $i, j = 1, 2, \dots, N$, se tiene

$$\frac{\partial^2 w_f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \int_{\Omega'} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_j \partial x_i}(x-y)(f(y)-f(x)) dy - f(x) \int_{\partial \Omega'} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \hat{n}_j(y) dS(y) \quad (4.53)$$

donde Ω' es un subconjunto abierto y acotado en \mathbb{R}^N tal que $\Omega \Subset \Omega'$, con frontera de clase C^1 y f ha sido extendida por 0 fuera de Ω .

TEOREMA 4.5.1 (Existencia de soluciones para el problema de Dirichlet) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ regular. Si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$, entonces existe una única solución $u \in C^2(\bar{\Omega})$ del problema de Dirichlet (4.49).

En el caso en que $\Omega = B(0, R)$, ahora es claro que la única solución del problema (4.49) está dada por la fórmula explícita:

$$u(x) = - \int_{\partial B(0,R)} K(x,y) g(y) dS(y) + \int_{B(0,R)} G(x,y) f(y) dy \quad \forall x \in B(0,R),$$

donde K es el kernel de Poisson para la bola $B(0, R)$ y G es la función de Green para el Laplaciano en la bola $B(0, R)$.

4.6. Problemas propuestos

1. Sea \mathbf{M} una matriz ortogonal $N \times N$, sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ una función armónica en \mathbb{R}^N , y sea $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$x \mapsto v(x) := u(\mathbf{M}x).$$

Prueba que $\Delta v = 0$. Esto prueba que la ecuación de Laplace es invariante bajo rotaciones.

2. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica en Ω .

- a) Sea $v \in C^2(\Omega)$. Prueba que si

$$v(x) \leq \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} v \, dS, \quad (4.54)$$

para cada bola $B(x, r) \subset \Omega$, entonces v es C^2 -subarmónica en Ω . Este es el recíproco del Teorema 4.2.2 la propiedad del valor medio para funciones subarmónicas.

- b) Prueba que si $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ es una función convexa, entonces la función $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto v(x) := (\varphi \circ u)(x),$$

es C^2 -subarmónica en Ω .

- c) Prueba que la función $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(x) := |\nabla u(x)|^2 \quad \forall x \in \Omega,$$

es C^2 -subarmónica en Ω .

3. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica en Ω .

- a) Prueba que si u es no negativa en Ω y si $x \in B(x_0, r) \Subset B(x_0, R) \subset \Omega$, entonces

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{N-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{N-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0).$$

Esta desigualdad es conocida como desigualdad de Harnack (compare con el Teorema 4.2.9 de la desigualdad de Harnack). En la demostración, módulo traslación, puede suponer que $x_0 = 0$.

- b) Prueba que si $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $u \geq M$ para alguna constante $M \in \mathbb{R}$, entonces u es constante en \mathbb{R}^N . Este resultado es otra versión del Teorema 4.2.6 de Liouville.

4. Sean $f \in C(\overline{B(0,1)})$ y $g \in C(\partial B(0,1))$, y sea $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ una solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } B(0,1) \\ u = g & \text{sobre } \partial B(0,1). \end{cases}$$

Prueba que existe una constante $C = C_N$ tal que

$$\max_{B(0,1)} |u| \leq C \left(\max_{\partial B(0,1)} |g| + \max_{B(0,1)} |f| \right).$$

5. Pruebe el Teorema 4.3.4 de la fórmula de Poisson para el semiespacio.
6. Sea $g \in C(\mathbb{R}_+^N)$ una función acotada tal que $g(x) = |x|$ para cada $x \in \partial \mathbb{R}_+^N$, con $|x| \leq 1$. Prueba que si u es la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^N \\ u = g & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^N, \end{cases}$$

dada por la fórmula integral de Poisson para el semiespacio (vea la fórmula (4.39) y el Teorema 4.3.4), entonces $|\nabla u|$ no es acotada cerca del origen. Como sugerencia, para cada $h > 0$ suficientemente pequeño, estima $\frac{u(h\mathbf{e}_N) - u(0)}{h}$, con $\mathbf{e}_N = (0, 0, \dots, 1)$ y usa esta estimación en la prueba.

7. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Prueba que la función de Green para el Laplaciano en Ω es simétrica; es decir,

$$G(x, y) = G(y, x) \quad \forall x, y \in \Omega, x \neq y.$$

8. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , y sean $f \in C(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.55)$$

Define ahora el conjunto

$$\mathcal{V}_g = \{v \in C^2(\overline{\Omega}) : v = g \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

y define el *funcional de energía* $\mathcal{I} : \mathcal{V}_g \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$v \mapsto \mathcal{I}[v] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v.$$

Prueba que una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ resuelve el problema (4.55) si y sólo si $u \in \mathcal{V}_g$ es tal que

$$\mathcal{I}[u] = \min_{v \in \mathcal{V}_g} \mathcal{I}[v]. \quad (4.56)$$

En otras palabras, resolver (4.55) es equivalente a resolver (4.56). Este resultado es conocido como principio de Dirichlet para el problema (4.55).

Bibliografía del Capítulo 4

- [1] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, second edition 2010, Printed in the United States of America.
- [2] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19*, American Mathematical Society, Reprint whit corrections 2002, Printed in the United States of America.
- [3] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, second edition 1995, Printed in the United States of America.
- [4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Reprint of the 1998 edition, Printed in Germany.
- [5] Q. Han, F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, Courant Lectures Notes in Mathematics, Courant Institute of Mathematics Sciences, American Mathematical Society, first edition 1997, Printed in the United States of America.
- [6] F. John, *Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 1*, Springer-Verlag New York Inc., fourth edition 1982, Printed in the United States of America.
- [7] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory, Universitext*, Springer-Verlag Italia, first edition 2008, Printed in Italy.

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . En este capítulo consideraremos funciones a valores reales $u = u(x, t)$, con $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, +\infty[$ y estudiaremos la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[, \quad (5.1)$$

también conocida como la *ecuación de difusión*, y la *ecuación del calor no homogénea*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{en } \Omega \times]0, +\infty[, \quad (5.2)$$

bajo apropiadas condiciones iniciales y de frontera. Aquí el Laplaciano de u es considerado sólo con respecto a la variable espacial x y f es una función a valores reales definida en $\Omega \times [0, +\infty[$.

Una gran cantidad de resultados respecto de la ecuación de Laplace tienen un resultado análogo en el contexto de la ecuación del calor. Por ello, organizaremos nuestro estudio de la ecuación del calor siguiendo las ideas lineamientos surgidos en el estudio de la ecuación de Laplace.

5.1. La solución fundamental

Recalamos nuevamente que una buena estrategia para investigar cualquier EDP consiste en identificar primero algunas soluciones explícitas. Recordemos que cuando buscamos tales soluciones explícitas, es usual concentrar nuestra atención en alguna clase específica de soluciones con ciertas propiedades de simetría, como por ejemplo buscar soluciones radiales. Por lo tanto, partimos buscando una solución u de (5.1) en $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Observemos que la ecuación del calor involucra una derivada con respecto a la variable tiempo t , pero dos derivadas con respecto a la variable espacial x_i , $i = 1, 2, \dots, N$. En consecuencia, si $u = u(x, t)$ resuelve la ecuación del calor (5.1) y escalamos la variable espacial x por un valor $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces al escalar la variable tiempo por $\lambda^2 \in [0, +\infty[$, la función $u = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, resuelve la ecuación (5.1) si y sólo si

$$\lambda^2 \frac{\partial u}{\partial t}(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[.$$

En particular, este escalamiento nos sugiere considerar el radio $\frac{r}{\sqrt{t}}$, con $r = |x|$, de manera que la variable tiempo “desaparezca” de nuestra vista pues se mantiene constantemente igual a 1,

aunque en realidad permanece conectada a la variable espacial. Así que, considerando $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$, nuestro cambio de variables debiese ser de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\gamma} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \quad (5.3)$$

donde la constante γ y la función $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ deben ser determinadas. Notar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t^\gamma} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) - \frac{1}{t^{\gamma+1}} \Delta_x v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\gamma \frac{1}{t^{\gamma+1}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{t^\gamma} \frac{x}{2t\sqrt{t}} \cdot \nabla_x v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{t^{\gamma+1}} \Delta_x v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Considerando ahora el cambio de variables $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$, se sigue que

$$-\gamma \frac{1}{t^{\gamma+1}} v(y) - \frac{1}{2} \frac{1}{t^{\gamma+1}} y \cdot \nabla_y v(y) - \frac{1}{t^{\gamma+1}} \Delta v(y) = 0,$$

y dado que $t > 0$, podemos independizarnos de t , como queríamos, y buscar soluciones para la ecuación

$$\gamma v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla_y v(y) + \Delta v(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^N. \quad (5.4)$$

Ahora, como estamos buscando soluciones radiales, ponemos $v(y) = w(|y|) = w(r)$ para alguna $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de manera que (5.4) se convierte en la ecuación

$$\gamma w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{N-1}{r} w'(r) = 0 \quad \forall r > 0, \quad (5.5)$$

o equivalentemente, en la ecuación

$$\gamma r^{N-1} w(r) + \frac{1}{2} r^N w'(r) + r^{N-1} w''(r) + (N-1) r^{N-2} w'(r) = 0 \quad \forall r > 0. \quad (5.6)$$

Notando que

$$(r^{N-1} w'(r))' = r^{N-1} w''(r) + (N-1) r^{N-2} w'(r) \quad \forall r > 0,$$

y que

$$\frac{1}{2} (r^N w(r))' = - \left(\frac{N}{2} r^{N-1} w(r) + \frac{1}{2} r^N w'(r) \right) \quad \forall r > 0,$$

escogiendo $\gamma = \frac{N}{2}$, nuestra ecuación (5.6) se transforma en la ecuación

$$(r^{N-1} w'(r))' = -\frac{1}{2} (r^N w(r))' \quad \forall r > 0.$$

Luego, integrando obtenemos

$$r^{N-1} w'(r) = -\frac{1}{2} r^N w(r) + A \quad \forall r > 0,$$

para alguna constante A . Entonces, asumiendo w y w' acotadas en torno a $r = 0$, y tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$ en la ecuación previa, obtenemos que $A = 0$. Luego, tenemos que

$$w'(r) = -\frac{1}{2}rw(r) \quad \forall r > 0.$$

En otras palabras,

$$w(r) = B e^{-\frac{r^2}{4}} \quad \forall r > 0, \quad (5.7)$$

para una constante B escogida convenientemente. De esta forma, hemos encontrado una solución radial de la ecuación del calor, que nos conduce a $u(x, t) = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} v(y)$ con $v(y) = w(r)$. En particular, notemos que dado $x \in \mathbb{R}^N$, la función $V^x : \mathbb{R}^N \setminus \{x\} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V^x(y, t) = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \quad \forall (y, t) \in \mathbb{R}^N \setminus \{x\} \times]0, +\infty[,$$

satisface la ecuación del calor (5.1) en $\mathbb{R}^N \setminus \{x\}$; es decir $\frac{\partial V^x}{\partial t} - \Delta_y V^x = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \{x\}$.

El siguiente resultado será de utilidad para dar un valor conveniente a la constante B en (5.7).

LEMA 5.1.1 Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ y para cada $t > 0$, uno tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^x(y, t) dy = (4\pi)^{\frac{N}{2}}.$$

Tal como fue mencionado, el Lema previo junto a (5.7) motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.1.1 La función

$$\Gamma(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]-\infty, 0[, \end{cases} \quad (5.8)$$

definida para toda $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y para toda $t > 0$, es la *solución fundamental de la ecuación del calor*.

Notar que Γ es singular en el punto $(0, 0)$.

5.2. La fórmula del valor medio

DEFINICIÓN 5.2.1 Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , y fijemos un tiempo $T > 0$. Llamamos *región cilíndrica* asociada a Ω y T al conjunto:

$$\Omega_T := \Omega \times]0, T],$$

y llamamos *frontera de Ω_T* a

$$\partial_* \Omega_T := \bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T.$$

OBSERVACIÓN 5.2.1 *Notar que de acuerdo a la definición previa, Ω_T incluye la “tapa” superior de la región cilíndrica, pero no la “tapa” inferior ni su superficie lateral y que $\partial_*\Omega_T$ incluye la superficie lateral y la “tapa” inferior de la región cilíndrica, pero no la “tapa” superior.*

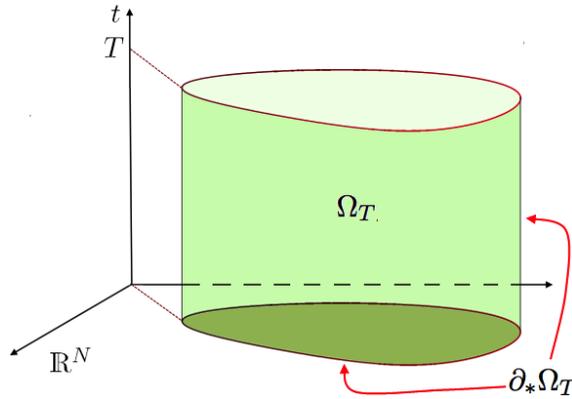


Figura 5.1. La región Ω_T y su frontera $\partial_*\Omega_T$

En el caso de la ecuación de Laplace uno tiene que para cada x , las esferas $\partial B(x, r)$ corresponden a conjuntos de nivel de la solución fundamental $\Gamma(x - y)$. Sería interesante que en el caso de la ecuación del calor ocurriese algo similar. La siguiente definición apunta en esta dirección.

DEFINICIÓN 5.2.2 Para $x \in \mathbb{R}^N$ fijo, $t \in \mathbb{R}$ fijo y $r > 0$ fijo, definimos la región

$$E(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{N+1} : s \leq t \wedge \Gamma(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^N} \right\},$$

usualmente denominada como *bola de calor*.

La región $E(x, t; r)$ es una región en el espacio-tiempo, y su frontera es un conjunto de nivel de la solución fundamental $\Gamma(x - y, t - s)$. Notar que (x, t) está en la parte superior de la región.

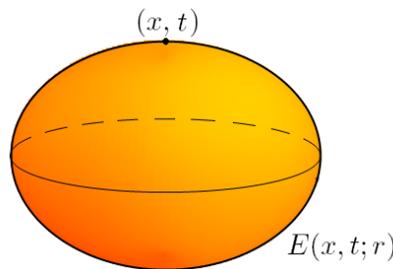


Figura 5.2. Una bola de calor

Para hacernos una idea de cómo se interpreta la región $E(x, t; r)$, notemos que ella se define

por la desigualdad

$$\frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{r^N}. \quad (5.9)$$

De aquí, como $e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq 1$ para todo $(y, s) \in \mathbb{R}^N$, y para todo $s < t$, obtenemos

$$t > s \geq t - \frac{r^2}{4\pi}.$$

Por otro lado, notar que

$$E(x, t; r) \cap \{s = 0\} = \{(x, 0)\} \quad \text{y} \quad E(x, t; r) \cap \{s = t\} = \{(x, t)\}.$$

Ahora, si ponemos

$$\tau = \frac{t}{r^2}, \quad \varsigma = \frac{s}{r^2}, \quad \xi = \frac{x}{r}, \quad z = \frac{y}{r},$$

entonces (5.9) equivale a

$$\frac{1}{(4\pi(\tau - \varsigma))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-\varsigma)}} \geq 1.$$

Notar que

$$E_1 := E(0, 0; 1) = \left\{ (x, t) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4\pi} \quad \wedge \quad |x|^2 \leq (2Nt) \ln \frac{1}{4\pi t} \right\},$$

y se puede comprobar que

$$\frac{1}{4} \iint_{E_1} \frac{|x|^2}{t^2} dx dt = 1.$$

y de aquí, poniendo $E_r := E(0, 0; r)$, obtenemos

$$\frac{1}{4r^N} \iint_{E_r} \frac{|x|^2}{t^2} dx dt = 1.$$

TEOREMA 5.2.1 (Propiedad del valor medio) Sea Ω_T una región cilíndrica y sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ una solución de la ecuación del calor. Entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^N} \iint_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds, \quad (5.10)$$

para cada $E(x, t; r) \subset \Omega_T$.

Demostración. Sea $(x, t) \in \Omega_T$ y sea $R = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Por simplicidad, y por un argumento de traslación, podemos asumir que $(x, t) = (0, 0)$. Ahora, sea $F :]0, R[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$r \mapsto F(r) := \frac{1}{r^N} \iint_{E_r} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Notar que si usamos el cambio de variable $\varsigma = \frac{s}{r^2}$, $z = \frac{y}{r}$, entonces $F(r)$ se puede reescribir como

$$F(r) = \iint_{E_1} u(rz, r^2\varsigma) \frac{|z|^2}{\varsigma^2} dz d\varsigma.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
F'(r) &= \frac{d}{dr} \left(\iint_{E_1} u(rz, r^2\zeta) \frac{|z|^2}{\zeta^2} dz d\zeta \right) \\
&= \iint_{E_1} \left(\nabla_z u(rz, r^2\zeta) \cdot z \frac{|z|^2}{|\zeta|^2} + 2r \frac{\partial u}{\partial \zeta}(rz, r^2\zeta) \frac{|z|^2}{\zeta} \right) dz d\zeta \\
&= \frac{1}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \nabla_y u(y, s) \cdot y \frac{|y|^2}{s^2} dy ds + \frac{2}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \left(\frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \frac{|y|^2}{s} \right) dy ds \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Ahora, por conveniencia, introducimos la siguiente función:

$$\varphi(y, s) = \frac{N}{2} \ln \left(-\frac{1}{4\pi s} \right) + \frac{|y|^2}{4s} + N \ln r.$$

Notar que $\varphi \in C_1^1(\Omega_T)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(y, s) = -\frac{N}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y, s) = \frac{y_i}{2s}.$$

Como $\Gamma(y, -s) = \frac{1}{r^N}$ sobre ∂E_r , uno puede chequear que $\varphi(y, s) = 0$ sobre ∂E_r , pues

$$e^{\varphi(y, s)} = r^N \frac{1}{(4\pi(-s))^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4(-s)}} = r^N \Gamma(y, -s) = r^N \frac{1}{r^N} = 1 \Rightarrow \varphi(y, s) = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{4}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \nabla_y \varphi(y, s) \cdot y dy ds \\
&= \frac{4}{r^{N+1}} \sum_{i=1}^N \iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y, s) y_i dy ds
\end{aligned}$$

Notando ahora que para cada $i = 1, 2, \dots, N$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (\varphi(y, s) y_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y, s) y_i + \varphi(y, s) \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y, s) y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} (\varphi(y, s) y_i) - \varphi(y, s),$$

obtenemos

$$I_2 = -\frac{4}{r^{N+1}} \sum_{i=1}^N \left(\iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \varphi(y, s) dy ds - \iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \frac{\partial}{\partial y_i} (\varphi(y, s) y_i) dy ds \right).$$

Ahora, tomando en cuenta que $\varphi(y, s) = 0$ sobre ∂E_r y que $u \in C_1^2(\Omega_T)$, al integrar por partes (con respecto a la variable y_i) la segunda integral a la derecha de la igualdad, obtenemos

$$I_2 = -\frac{4}{r^{N+1}} \sum_{i=1}^N \left(\iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \varphi(y, s) dy ds + \iint_{E_r} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y_i}(y, s) \varphi(y, s) y_i dy ds \right).$$

Integrando nuevamente por partes (ahora con respecto a la variable s) la segunda integral a la derecha de la igualdad, y tomando en cuenta las mismas consideraciones previas, obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= -4 \frac{1}{r^{N+1}} \iint_{E_r} N \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \varphi(y, s) dy ds + 4 \frac{1}{r^{N+1}} \sum_{i=1}^N \iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y, s) y_i \frac{\partial \varphi}{\partial s}(y, s) dy ds \\ &= -4 \frac{1}{r^{N+1}} \iint_{E_r} N \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \varphi(y, s) dy ds + 4 \frac{1}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \nabla_y u(y, s) \cdot y \left(-\frac{N}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dy ds \\ &= -4 \frac{N}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \varphi(y, s) dy ds - \frac{2N}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \nabla_y u(y, s) \cdot \frac{y}{s} dy ds - I_1. \end{aligned}$$

Usando ahora la ecuación del calor, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(r) &= I_1 + I_2 \\ &= -4 \frac{N}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \Delta u(y, s) \varphi(y, s) dy ds - \frac{2N}{r^{N+1}} \iint_{E_r} \nabla_y u(y, s) \cdot \frac{y}{s} dy ds. \end{aligned}$$

Luego, integrando una vez más por partes (con respecto a la variable y_i), en esta ocasión sobre la primera integral al lado derecho de la igualdad, y tomando en cuenta nuevamente que $\varphi(y, s) = 0$ sobre ∂E_r y que $u \in C_1^2(\Omega_T)$, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(r) &= \frac{1}{r^{N+1}} \sum_{i=1}^N \iint_{E_r} \left(-4N \frac{\partial u}{\partial y_i}(y, s) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y, s) - \frac{2N}{s} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y, s) y_i \right) dy ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, F debe ser igual a una constante. En particular, obtenemos

$$\begin{aligned} F(r) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\iint_{E_1} u(sz, s^2 \zeta) \frac{|z|^2}{\zeta^2} dz d\zeta \right) \\ &= u(0, 0) \left(\iint_{E_1} \frac{|z|^2}{\zeta^2} dz d\zeta \right) \\ &= 4 u(0, 0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La propiedad del valor medio (5.10) para la ecuación del calor es el análogo de la propiedad del valor medio para la ecuación de Laplace. Notar que la integral en (5.10) involucra sólo valores de $u(y, s)$ para tiempos $s \leq t$. Esto debe ser así, pues el valor de $u(x, t)$ no depende del tiempo en el futuro.

5.2.1. El principio fuerte del máximo

A continuación usamos la propiedad del valor medio (5.10) para probar el siguiente principio fuerte del máximo para la ecuación del calor.

TEOREMA 5.2.2 (El principio fuerte del máximo (mínimo)) Sea Ω_T una región cilíndrica y sea $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ una solución de la ecuación del calor en Ω_T . Si Ω es conexo con interior no vacío y existe un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tal que

$$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega}_T} u \quad \left(u(x_0, t_0) = \min_{\bar{\Omega}_T} u \right),$$

entonces u es constante en $\bar{\Omega}_{t_0}$.

5.3. El principio débil del máximo y sus consecuencias

Ahora, buscamos estimaciones globales conocidas como principio débil del máximo (mínimo) para la ecuación del calor. Estas estimaciones tienen su versión equivalente para la ecuación de Laplace, cuya demostración se basa en el correspondiente principio fuerte del máximo. Sin embargo, aquí no podemos usar el principio fuerte del máximo (mínimo) dado en el Teorema 5.2.2, pues tal teorema aplica sólo a soluciones de la ecuación del calor, y no a subsoluciones como en verdad uno requiere. Por lo tanto, estableceremos el principio débil del máximo (mínimo) independientemente del Teorema 5.2.2, usando un razonamiento similar al usado para probar el principio débil del máximo (mínimo) para la ecuación de Laplace, con un argumento conocido pero diferente.

TEOREMA 5.3.1 (El principio débil del máximo (mínimo)) Sea Ω_T una región cilíndrica y sea $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ una subsolución (supersolución) de la ecuación del calor en Ω_T . Entonces

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\partial_* \Omega_T} u \quad \left(\min_{\bar{\Omega}_T} u = \min_{\partial_* \Omega_T} u \right).$$

En particular para una función u que satisface la ecuación del calor se verifica

$$\min_{\partial_* \Omega_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\partial_* \Omega_T} u \quad \forall (x, t) \in \Omega_T.$$

Demostración. Sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ una subsolución de la ecuación del calor en Ω_T , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 \quad \text{en } \Omega_T.$$

Además es claro que $u \in C(\bar{\Omega}_T)$ implica que existen $\max_{\bar{\Omega}_T} u$ y $\max_{\partial_* \Omega_T} u$, y que estos valores verifican

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u \geq \max_{\partial_* \Omega_T} u.$$

Resta probar que

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\partial_* \Omega_T} u.$$

Realizaremos esto en dos etapas.

1º) Asumamos por ahora que $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u < 0$ en Ω_T . Luego, por continuidad de u en $\bar{\Omega}_T$, u debiese tener un máximo en un punto $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega}_T$. Si $(x_0, t_0) \notin \partial_* \Omega_T$, entonces se puede probar que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0 \quad (5.11)$$

contradiciendo el hecho que $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u < 0$ en Ω_T . Veamos la prueba de (5.11).

- Si $0 < t_0 < T$, entonces $(x_0, t_0) \in \text{int}(\Omega_T)$. Considerando a $\text{int}(\Omega_T)$ como a un abierto acotado de \mathbb{R}^{N+1} , y teniendo en cuenta que $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ alcanza su máximo en (x_0, t_0) , se debe cumplir que

$$\nabla_{(x,t)} u(x_0, t_0) = 0 \quad \text{y} \quad D_{(x,t)}^2 u(x_0, t_0) \leq 0,$$

donde $D_{(x,t)}^2 u(x_0, t_0) \leq 0$ significa que la matriz Hessiana de u , que es simétrica, resulta definida no positiva en el punto (x_0, t_0) . En particular, los resultados mencionados nos conducen a que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0.$$

Luego (5.11) se cumple en este caso.

- Si $t_0 = T$, entonces $(x_0, t_0) \in \Omega \times \{t_0\}$. Teniendo en cuenta que $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ alcanza su máximo en (x_0, t_0) , entonces para la derivada en la variable t se debe verificar

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0,$$

mientras que para derivadas de segundo orden en la variable x se puede argumentar como en el caso anterior y obtener

$$\Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0.$$

Luego (5.11) se cumple en este caso también.

La contradicción viene de suponer que el máximo de u está en Ω_T , por lo cual este valor se debe hallar sobre $\partial_* \Omega_T$. Es decir,

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\partial_* \Omega_T} u.$$

2º) Ahora vamos a establecer la desigualdad en el caso general, esto es, cuando $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0$ en Ω_T . Sea $\varepsilon > 0$ dado. Consideremos la función $v : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$(x, t) \mapsto v(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t.$$

Como $t \in]0, T]$, es claro que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x, t) = u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega_T.$$

Por otro lado,

$$\Delta v = \Delta u \quad \text{en } \Omega_T \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \quad \text{en } \Omega_T.$$

De esta forma, $v \in C^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$, con $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v < 0$ en Ω_T . Por lo tanto podemos desde la etapa anterior, obtenemos que

$$\overline{\max} v = \max_{\partial_* \Omega_T} v,$$

que conduce a

$$\begin{aligned} \overline{\max}_{\Omega_T} (u - \varepsilon T) &\leq \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_T} (u(x, t) - \varepsilon t) \\ &= \max_{\Omega_T} v \\ &= \max_{\partial_* \Omega_T} v \\ &= \max_{(x,t) \in \partial_* \Omega_T} (u(x, t) - \varepsilon t) \\ &\leq \max_{\partial_* \Omega_T} u. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$\overline{\max}_{\Omega_T} u \leq \max_{\partial_* \Omega_T} u.$$

Análogamente se prueba que si u es una supersolución de la ecuación del calor, entonces

$$\overline{\min}_{\Omega_T} u = \min_{\partial_* \Omega_T} u.$$

Finalmente, si u es armónica en Ω , es fácil chequear que

$$\min_{\partial_* \Omega_T} u = \min_{\bar{\Omega}_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\partial_* \Omega_T} u \quad \forall (x, t) \in \Omega_T.$$

Por lo tanto,

$$\min_{\partial_* \Omega_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\partial_* \Omega_T} u \quad \forall (x, t) \in \Omega_T. \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN 5.3.1 Si u alcanza su máximo (o mínimo) en un punto de Ω_T , entonces u es constante en todos los tiempos más tempranos. Esto es acorde a nuestra interpretación intuitiva de la variable tiempo t : la solución debe ser constante sobre el intervalo de tiempo $[0, t_0]$ supuesto que las condiciones inicial y de frontera son constantes. Sin embargo, la solución puede cambiar para $t > t_0$ si asumimos que las condiciones sobre la frontera son alteradas después de t_0 . Esto es, la solución no responde a cambios hasta que las condiciones sobre la frontera son alteradas.

COROLARIO 5.3.1 (Principio de comparación) Sea Ω_T una región cilíndrica y sean $u, v \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ verificando

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v & \text{en } \Omega_T \\ u \leq v & \text{sobre } \partial_* \Omega_T. \end{cases}$$

Entonces $u \leq v$ en Ω_T .

OBSERVACIÓN 5.3.2 El principio de comparación implica que si $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_T \\ u = h & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g & \text{sobre } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $h, g \geq 0$ son suficientemente suaves, entonces $u \geq 0$ en todo Ω_T .

COROLARIO 5.3.2 (Unicidad en dominios acotados) Sea Ω_T una región cilíndrica y sean $f \in C(\Omega_T)$ y $g \in C(\partial_* \Omega_T)$. El problema de valores iniciales y de frontera

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{en } \Omega_T \\ u = g & \text{sobre } \partial_* \Omega_T, \end{cases} \quad (5.12)$$

posee a lo más una solución $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$.

A continuación vamos a extender nuestro resultado previo, mostrando un resultado de unicidad para el problema de Cauchy de la ecuación del calor, es decir, para la ecuación del calor bajo condición inicial sobre $\Omega = \mathbb{R}^N$. Como ya no estamos considerando una región acotada, debemos introducir algún control sobre el comportamiento de las soluciones para valores de $|x|$ muy grandes. El siguiente resultado, conocido como *principio del máximo para el problema de Cauchy* relativo a la ecuación del calor, nos será de utilidad para establecer un resultado de unicidad para un problema no homogéneo.

TEOREMA 5.3.2 (Principio del máximo para el problema de Cauchy) Asumamos que

$$u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, T]) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \quad (5.13)$$

que además verifica la siguiente estimación de crecimiento

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad (5.14)$$

para algunas constantes $A, a > 0$. Entonces

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^N} g.$$

COROLARIO 5.3.3 (Unicidad para el problema de Cauchy) Sean $f \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ y $g \in C(\mathbb{R}^N)$.

El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases} \quad (5.15)$$

posee a lo más una solución $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, T]) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ que además verifica la estimación de crecimiento

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad (5.16)$$

para algunas constantes $A, a > 0$.

OBSERVACIÓN 5.3.3 Existen infinitas soluciones no nulas para el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases}$$

Cada una de las soluciones crece muy rápidamente cuando $|x| \rightarrow \infty$. Notar que esto no contradice el teorema previo.

5.3.1. Regularidad de las soluciones de la ecuación del calor

En esta sección probaremos que las soluciones de la ecuación del calor son todas suaves. Antes, introducimos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.3.1 Llamamos *cilindro cerrado* con centro en su tapa superior en el punto (x, t) , radio $r > 0$ y altura r^2 al conjunto

$$\mathcal{C}(x, t; r) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : |x - y| \leq r \wedge 0 \leq t - s \leq r^2\} = \overline{B(x, r)} \times [t - r^2, t].$$

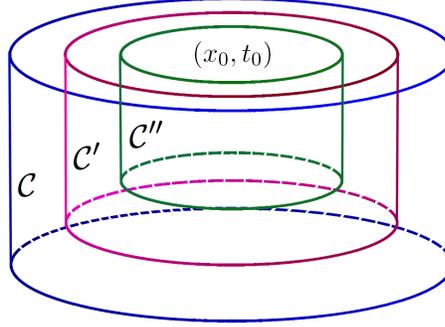


Figura 5.3. Cilindros cerrados

TEOREMA 5.3.3 (Regularidad) Sea Ω_T una región cilíndrica y sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ una solución de la ecuación del calor en Ω_T . Entonces

$$u \in C^\infty(\Omega_T).$$

Demostración. Sea $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ y sea $r > 0$ tal que $\mathcal{C} := \mathcal{C}(x_0, t_0; r) \subset \Omega_T$. Consideremos también los cilindros

$$\mathcal{C}' := \mathcal{C}\left(x_0, t_0; \frac{3r}{4}\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}'' := \mathcal{C}\left(x_0, t_0; \frac{r}{2}\right).$$

Escojamos ahora una función de corte $\eta \in C^\infty(\mathcal{C})$ tal que

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta \equiv 1 \text{ sobre } \mathcal{C}' \quad \text{y} \quad \eta \equiv 0 \text{ cerca de la frontera de } \mathcal{C}.$$

Extendamos esta función η por 0 fuera de \mathcal{C} , y continuémosla llamando de la misma forma.

Realizaremos la demostración por etapas

1º) Asumamos que $u \in C^\infty(\Omega_T)$ y consideremos la función

$$v(x, t) = \eta(x, t) u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, t_0].$$

Es claro que $v = 0$ sobre $\mathbb{R}^N \times \{0\}$. Además, v verifica

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} u \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, t_0[$$

y

$$\Delta v = \eta \Delta u + 2 \nabla_x \eta \cdot \nabla_x u + u \Delta \eta \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, t_0[.$$

Luego, como u satisface la ecuación del calor, se sigue que

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \frac{\partial \eta}{\partial t} u - 2 \nabla \eta \cdot \nabla u - u \Delta \eta \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, t_0[.$$

Ahora, pongamos

$$f := \frac{\partial \eta}{\partial t} u - 2 \nabla \eta \cdot \nabla u - u \Delta \eta \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, t_0],$$

por lo tanto, para cada $t \in [0, t_0]$ se tiene que $f(\cdot, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, con $\text{supp } f(\cdot, t) \subset B(x, r)$; y pongamos

$$w(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds.$$

Notemos que poniendo $z = x - y$ y $\tau = t - s$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds &= - \int_t^0 \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z, \tau) f(x - z, t - \tau) dz d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) f(x - y, t - s) dy ds. \end{aligned}$$

Calculamos ahora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - \Delta_x w(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) f(x - y, t - s) dy ds \right) \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) \Delta_x f(x - y, t - s) dy ds. \end{aligned}$$

En vista del Lema A.6.1, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - \Delta_x w(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) - \Delta_x f(x - y, t - s) \right) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) - \Delta_x f(x - y, t - s) \right) dy ds \\ &\quad + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) - \Delta_x f(x - y, t - s) \right) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= I_{1,\varepsilon} + I_{2,\varepsilon} + I_0. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |I_{1,\varepsilon}| &\leq \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) dy ds \\ &\leq C\varepsilon \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, después de integrar por partes, y teniendo en cuenta que lejos de $(0, 0)$ la función Γ satisface la ecuación del calor, y que f vale 0 fuera de \mathcal{C} , obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{2,\varepsilon} &= - \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, s) \left(\frac{\partial f}{\partial s}(x-y, t-s) + \Delta_y f(x-y, t-s) \right) dy ds \\
&= \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(y, s) - \Delta_y \Gamma(y, s) \right) f(x-y, t-s) dy ds \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, t) f(x-y, 0) dy + \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, \varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, \varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon) dy - I_0 \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x, t) - I_0.
\end{aligned}$$

En efecto, sea $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, t_0]$ fijo y sea $\varepsilon > 0$ dado. Por continuidad de f , podemos escojer $\delta > 0$ tal que

$$y \in B(x, \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(y, t) - f(x, t)| < \varepsilon.$$

Más aún, f es uniformemente continua, así que también se verifica que

$$\left(|f(y, t-\varepsilon) - f(y, t)| < M_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right) (\forall y \in \mathbb{R}^N).$$

Enfatizamos que M_{ε} es una constante independiente de $y \in \mathbb{R}^N$. Luego, si $|z-x| < \frac{\delta}{2}$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, \varepsilon) f(z-y, t-\varepsilon) dy - f(x, t) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z-y, \varepsilon) (f(y, t-\varepsilon) - f(x, t)) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) |f(y, t-\varepsilon) - f(y, t)| dy \\
&\quad + \int_{B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) |f(y, t-\varepsilon) - f(x, t)| dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) |f(y, t) - f(x, t)| dy \\
&\quad + \int_{B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) |f(y, t) - f(x, t)| dy \\
&\leq (M_{\varepsilon} + \varepsilon) \int_{B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) dy \\
&\quad + \|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) dy.
\end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$(M_{\varepsilon} + \varepsilon) \int_{B(x, \delta)} \Gamma(z-y, \varepsilon) dy \leq (M_{\varepsilon} + \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z-y, \varepsilon) dy = M_{\varepsilon} + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Por otra parte, $|z - x| < \frac{\delta}{2}$ y $|y - x| \geq \delta$ implican que

$$|y - x| \leq |y - z| + |z - x| < |y - z| + \frac{\delta}{2} \leq |y - z| + \frac{1}{2}|y - x|,$$

de donde se sigue que $\frac{1}{2}|y - x| < |y - z|$, y así

$$e^{-\frac{|y-z|^2}{4\varepsilon}} < e^{-\frac{|y-x|^2}{16\varepsilon}}.$$

Luego, por el Teorema A.11.2 de integración en coordenadas polares

$$\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \delta)} \Gamma(z - y, \varepsilon) dy \leq \frac{\|f\|_\infty}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{N}{2}}} N\omega_N \int_\delta^{+\infty} r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{16\varepsilon}} dr \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, \varepsilon) f(z - y, t - \varepsilon) dy - f(x, t) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Se sigue que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - \Delta w(x, t) = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[.$$

Ahora, como v y w son funciones acotadas en $\mathbb{R}^N \times]0, t_0[$, desde el Corolario 5.3.3 de unicidad para el problema de Cauchy, obtenemos que $v = w$ en $\mathbb{R}^N \times]0, t_0[$.

Por lo tanto,

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, t_0[.$$

Por otra parte, para cada $(x, t) \in \mathcal{C}''$, como $\eta = 0$ fuera de \mathcal{C} , obtenemos $v(x, t) = u(x, t)$ y

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \iint_{\mathcal{C}} \Gamma(x - y, t - s) \left(\frac{\partial \eta}{\partial s}(y, s) u(y, s) - 2 \nabla \eta(y, s) \cdot \nabla u(y, s) - u(y, s) \Delta \eta(y, s) \right) dy ds \\ &= \iint_{\mathcal{C}} \left(\Gamma(x - y, t - s) \left(\frac{\partial \eta}{\partial s}(y, s) - \Delta \eta(y, s) \right) + 2 \nabla \Gamma(x - y, t - s) \cdot \nabla \eta(y, s) \right) u(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

2º) Asumamos que $u \in C_1^2(\Omega_T)$. Entonces, podemos deducir la igualdad previa para $u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$, siendo ρ_ε el molificador estándar en la variable (x, t) . Pasando ahora al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, vemos que

$$u(x, t) = \iint_{\mathcal{C}} K(x, t; y, s) u(y, s) dy ds \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}'', \quad (5.17)$$

donde

$$K(x, t; y, s) = 0 \quad \forall (y, s) \in \mathcal{C}', \forall (x, t) \in \mathcal{C}'',$$

pues $\eta = 1$ en \mathcal{C}' . Además, para cada $(x, t) \in \mathcal{C}'$, $K(x, t; \cdot, \cdot) \in C^\infty(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}')$, pues η y $\Gamma(x - \cdot, t - \cdot)$ lo son sobre $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$, y se verifica que

$$K(x, t; y, s) = 0 \quad \forall (y, s) \in \partial_* \Omega_T.$$

Luego, para cada $(x, t) \in \mathcal{C}''$ obtenemos $K(x, t; \cdot, \cdot) \in C^\infty(\mathcal{C})$, y así

$$K \in C^\infty(\mathcal{C}'' \times \mathcal{C})$$

De esta forma, gracias a nuestra fórmula para u en (5.17), cada vez que derivamos u en \mathcal{C}'' , derivamos a K en la integral (las variables x y t son variables también para K), de manera que $u \in C^\infty(\mathcal{C}'')$. Es decir, hemos probado que para cada $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, siempre podemos encontrar $r > 0$ tal que $\mathcal{C}, \mathcal{C}'' \subset \Omega_T$, verificándose que $u \in C^\infty(\mathcal{C}'')$. Por lo tanto,

$$u \in C^\infty(\Omega_T). \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN 5.3.4 *El resultado previo es válido incluso si los valores de u sobre la frontera $\partial_*\Omega_T$ no son suaves.*

5.3.2. Estimaciones locales para soluciones de la ecuación del calor

Ahora obtendremos algunas estimaciones sobre las derivadas de la ecuación del calor.

TEOREMA 5.3.4 (Estimaciones sobre derivadas) Sea Ω_T una región cilíndrica y sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ una solución de la ecuación del calor en Ω_T . Existen constantes $B = B_N > 0$ y $C = C_N > 0$ tales que

$$\sup_{\mathcal{C}(x,t;r)} |D^\alpha u| \leq B \frac{C^{|\alpha|} |\alpha|!}{r^{|\alpha|}} \frac{1}{|\mathcal{C}(x,t;2r)|} \int_{\mathcal{C}(x,t;2r)} |u| \, dy \, ds,$$

para cada $\mathcal{C}(x, t; 4r) \subset \Omega_T$ y para todo multi-índice α , y

$$\sup_{\mathcal{C}(x,t;r)} \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right| \leq B \frac{C^{2k} (2k)!}{r^{2k}} \frac{1}{|\mathcal{C}(x,t;2r)|} \int_{\mathcal{C}(x,t;2r)} |u| \, dy \, ds,$$

para cada $\mathcal{C}(x, t; 2r) \subset \Omega_T$ y para todo entero positivo k .

COROLARIO 5.3.4 Sea Ω_T una región cilíndrica, sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ una solución local de la ecuación del calor en Ω_T . Existe una constante $B = B_N > 0$ tal que

$$\sup_{\mathcal{C}(x,t;r)} |u| \leq B \frac{1}{|\mathcal{C}(x,t;2r)|} \int_{\mathcal{C}(x,t;2r)} |u| \, dy \, ds,$$

para cada cilindro $\mathcal{C}(x, t; 2r) \subset \Omega_T$.

OBSERVACIÓN 5.3.5 *Si u resuelve la ecuación del calor en Ω_T , entonces para cada tiempo fijo $0 \leq t \leq T$, la aplicación $x \mapsto u(x, t)$ es analítica. Sin embargo la aplicación $t \rightarrow u(x, t)$ no es en general analítica.*

5.4. La desigualdad de Harnack

Soluciones locales no negativas de la ecuación del calor verifican una desigualdad similar a las estimaciones de Harnack validadas para funciones armónicas no negativas.

DEFINICIÓN 5.4.1 Llamamos *cilindro* centrado en (x, t) de radio $r > 0$ y altura $2r^2$ al conjunto

$$\mathcal{Q}(x, t; r) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : |x - y| < r \wedge -r^2 < t - s \leq r^2\} = B(x, r) \times]t - r^2, t + r^2[.$$

TEOREMA 5.4.1 Sea $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ una solución no negativa de la ecuación del calor en Ω_T . Entonces, para cada cilindro $\mathcal{Q}(x, t; 4r) \subset \Omega_T$, existe una constante $C = C_N$ tal que

$$u(x, t) \leq C \inf_{B(x, r) \times \{t+r^2\}} u.$$

La estimación previa puede conducir a otros resultados similares. A continuación mostramos una desigualdad de Harnack local, introduciendo previamente la siguiente notación.

NOTACIÓN 5.4.1 Ponemos

$$\mathcal{Q}^-(x, t; r) = B(x, r) \times]t - r^2, t[\quad \mathcal{Q}^+(x, t; r) = B(x, r) \times]t, t + r^2[.$$

Además, para $\sigma \in]0, 1[$, se definen los subcilindros

$$\mathcal{Q}_*^-(x, t; \sigma r) = B(x, \sigma r) \times]t - r^2, t - \sigma r^2[\quad \mathcal{Q}_{**}^+(x, t; \sigma r) = B(x, \sigma r) \times]t + (1 - \sigma)r^2, t + r^2[.$$

TEOREMA 5.4.2 (Desigualdad local de Harnack para la ecuación del calor) Sea $u \in C_1^2(\mathcal{Q}(x, t; 4r))$ una solución no negativa de la ecuación del calor en $\mathcal{Q}(x, t; 4r)$. Entonces, existe una constante $C = C_N > 0$ tal que

$$\sup_{\mathcal{Q}_*^-(x, t; \frac{1}{2}r)} u \leq C \inf_{\mathcal{Q}_{**}^+(x, t; \frac{1}{2}r)} u.$$

Otra desigualdad de Harnack para la ecuación del calor establece que si u es una solución no negativa de la ecuación del calor, entonces el máximo de u en una región interior en un tiempo positivo puede estimarse por el mínimo de u en la misma región en tiempos posteriores.

TEOREMA 5.4.3 (Desigualdad de Harnack para la ecuación del calor) Sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ una solución no negativa de la ecuación del calor en Ω_T . Si $\Omega_0 \Subset \Omega$ es un abierto conexo y con interior no vacío, entonces para cada $0 < t_1 < t_2 \leq T$ existe una constante $C = C_{N, \Omega_0, t_1, t_2} > 0$ tal que

$$\sup_V u(\cdot, t_1) \leq C \inf_V u(\cdot, t_2).$$

5.5. Representación de la solución del problema de Cauchy

5.5.1. El problema de Cauchy con ecuación homogénea

Buscamos una solución del problema de Cauchy con ecuación homogénea

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Notemos que la solución fundamental Γ resuelve la ecuación del calor lejos de $(0, 0)$, y por lo tanto, fijado $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$, la función $\Gamma(x - \cdot, t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ también satisface la ecuación del calor lejos de x . Luego, la convolución

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t)g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \quad (5.19)$$

también debería ser una solución.

TEOREMA 5.5.1 (Solución del problema de Cauchy) Asumamos que $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y sea u la función definida en (5.19). Entonces,

- i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$
- ii) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z, t) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

OBSERVACIÓN 5.5.1 Considerando el Teorema 5.5.1 también es usual escribir

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \Delta \Gamma = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ \Gamma = \delta_0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases}$$

donde δ_0 denota la medida de Dirac en \mathbb{R}^N de masa unitaria en el punto 0.

OBSERVACIÓN 5.5.2 Notar que si $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$, entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[,$$

es de hecho positiva para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y todo tiempo $t > 0$. Esta observación asegura que si la temperatura inicial es no negativa y es positiva en alguna parte, la temperatura en cualquier tiempo también es positiva.

5.5.2. El problema de Cauchy con ecuación no homogénea

Ahora estudiaremos el problema de Cauchy con ecuación no homogénea

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Para s fijo, la función

$$u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[,$$

resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, \cdot; s) - \Delta u(\cdot, \cdot; s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]s, +\infty[\\ u(\cdot, \cdot; s) = f(\cdot, s) & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{s\}, \end{cases} \quad (5.21)$$

que es un problema de valores iniciales como aquel en (5.18). Luego, $u(\cdot; s)$ no resuelve (5.20). Sin embargo, el principio de Duhamel asegura que podemos construir una solución de (5.20) a partir de las soluciones de (5.21) integrando con respecto a s . La idea es considerar

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[.$$

Reescribiendo, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (5.22)$$

TEOREMA 5.5.2 (Solución del problema de Cauchy no homogéneo) Asumamos que $f \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ tiene soporte compacto, y definamos u por (5.22). Entonces,

- i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$
- ii) $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ en $\mathbb{R}^N \times t \in]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z, t) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

OBSERVACIÓN 5.5.3 Combinando el Teorema 5.5.2 y el Teorema 5.5.1 obtenemos que si $f \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$ tiene soporte compacto, y $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y, t-s) f(y, s) dy ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\quad (5.23)$$

resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \quad (5.24)$$

5.6. Problemas propuestos

1. Escribe una fórmula explícita para una solución $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + c u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un valor dado.

Sugerencia: Considera la función $v : \mathbb{R}^N \rightarrow]0, +\infty[$ definida por $v(x, t) := u(x, t)e^{\alpha t}$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$. Calcula $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v$, y elige α apropiadamente para que v sea la solución de un problema del cual es posible conocer su representación integral. Usa este hecho para obtener u .

2. Sea Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , sea Ω_T la región cilíndrica asociada a Ω y sean $u, \bar{u} \in C_1^2(\bar{\Omega}_T)$ dos soluciones del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{en } \Omega_T \\ v = g & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Prueba que si se tiene

$$u(x, T) = \bar{u}(x, T) \quad \forall x \in \Omega,$$

entonces

$$u \equiv \bar{u} \quad \text{en } \Omega_T.$$

Sugerencia: Considera $w := u - \bar{u}$ y $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$t \mapsto F(t) := \int_{\Omega} w^2(x, t) dx.$$

- Calcula explícitamente F' y F'' y muestra que $(F')^2 \leq F F''$ en $[0, T]$.

- Nota que si $F \equiv 0$ la conclusión es inmediata, por lo que supón que $F > 0$ en $[t_1, t_2[$, con $F(t_2) = 0$ y define ahora $G(t) = \ln F(t)$ si $t \in [t_1, t_2[$. Muestra que G es convexa en $]t_1, t_2[$ usando la desigualdad obtenida en el paso anterior.
- Sobre esta G , aplica la clásica desigualdad que identifica a una función convexa en el intervalo $]t_1, t_2[$.
- Retorna a la función F y deduce que $F \equiv 0$ en $]t_1, t_2[$.
- Concluye.

3. Sea u una función suficientemente suave que es solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $g \in C(\mathbb{R}^N)$, $c \in \mathbb{R}$ es una constante dada y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ es un vector dado. Encuentra una fórmula explícita para u en términos de c , \mathbf{b} y g .

Sugerencia: Sea $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ fijo. Considera la función $\varphi : [-t, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) := u(x + \mathbf{b}s, t + s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y calcula su derivada. Usando la función φ obtenga explícitamente u .

4. Sea Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 , sea Ω_T la región cilíndrica asociada a Ω y sea $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ una solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_T \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = h & \text{sobre } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $g \in C(\partial\Omega \times]0, T])$ y $h \in C(\overline{\Omega})$. Prueba que para cada $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$ se verifica

$$\int_{\Omega} |u(y, t)|^2 dy \leq \left(\int_{\Omega} |u(y, t_1)|^2 dy \right)^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} \left(\int_{\Omega} |u(y, t_2)|^2 dy \right)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}.$$

Bibliografía del Capítulo 5

- [1] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, second edition 2010, Printed in the United States of America.
- [2] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19*, American Mathematical Society, Reprint whit corrections 2002, Printed in the United States of America.

- [3] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, second edition 1995, Printed in the United States of America.
- [4] F. John, *Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 1*, Springer-Verlag New York Inc., fourth edition 1982, Printed in the United States of America.
- [5] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, first edition 2008, Printed in Italy.

En este capítulo consideraremos funciones a valores reales $u = u(x, t)$, con $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$, $N \geq 1$, y estudiaremos la *ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \quad (6.1)$$

y la *ecuación de ondas no homogénea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \quad (6.2)$$

bajo apropiadas condiciones iniciales y de frontera. Aquí el Laplaciano de u es considerado sólo con respecto a la variable espacial x y f es una función a valores reales definida en $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$.

6.1. Solución para $N = 1$. La fórmula de D'Alembert

Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t = h & \text{sobre } \mathbb{R} \times \{0\}, \end{cases} \quad (6.3)$$

donde h, g son dadas.

Resolvemos el problema como sigue.

1º) Hacemos el cambio de variables

$$u(x, t) = v(\alpha, \beta)$$

con

$$\alpha = x + t \quad \text{y} \quad \beta = x - t.$$

Usando la regla de la cadena obtenemos

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{2\partial^2 v}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = v_{\alpha\alpha} + 2v_{\alpha\beta} + v_{\beta\beta}$$

y

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{2\partial^2 v}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = v_{\alpha\alpha} - 2v_{\alpha\beta} + v_{\beta\beta}.$$

Luego,

$$u_{tt} - u_{xx} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \beta \partial \alpha} = -4v_{\alpha\beta},$$

y así, desde la ecuación diferencial en (6.3) obtenemos

$$v_{\alpha\beta} = 0.$$

2º) Ahora resolvemos la ecuación transformada por doble integración, primero respecto a la variable β y luego con respecto a la variable α :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^\alpha \int_b^\beta v_{\tau\xi}(\tau, \xi) \, d\tau \, d\xi \\ &= \int_a^\alpha (v_\tau(\tau, \beta) - v_\tau(\tau, a)) \, d\tau \\ &= v(\alpha, \beta) - v(a, \beta) - v(\alpha, b) + v(a, b). \end{aligned}$$

Luego, podemos esperar que v tenga la forma

$$v(\alpha, \beta) = p(\beta) + q(\alpha),$$

donde q es una función dependiente de α y p es una función dependiente de β . Además, para que una tal v sea solución de

$$v_{\alpha\beta} = 0$$

bastará con asumir que $p, q \in C^1(\mathbb{R})$.

3º) Regresando ahora a las variables originales (x, t) obtenemos

$$\left(v(\alpha, \beta) = u(x, t) \quad \wedge \quad v(\alpha, \beta) = p(\beta) + q(\alpha) \right) \Rightarrow u(x, t) = p(x - t) + q(x + t).$$

Luego, de acuerdo a las condiciones iniciales, obtenemos

$$u(x, 0) = g(x) \quad \Rightarrow \quad p(x) + q(x) = g(x) \tag{6.4}$$

y

$$u_t(x, 0) = h(x) \quad \Rightarrow \quad -p'(x) + q'(x) = h(x). \tag{6.5}$$

Integrando ahora en (6.5), obtenemos

$$-p(x) + q(x) = \int_{x_0}^x h(s) \, dx + c, \tag{6.6}$$

y resolviendo para p y q el sistema (6.4)-(6.6), obtenemos

$$q(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x h(s) ds + c$$

y

$$p(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x h(s) ds - c.$$

En consecuencia,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(g(x-t) + g(x+t) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) ds \quad (6.7)$$

que es la llamada *fórmula de D'Alembert* de (6.3).

Asumiendo que la función definida por la fórmula de D'Alembert es suficiente suave, probaremos que ella resulta ser una solución de (6.3).

TEOREMA 6.1.1 (Solución de la ecuación de ondas, $N=1$) Sean $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$, y definamos u por la fórmula de D'Alembert (6.7). Entonces,

- i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$
- ii) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z, t) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$
- iv) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u_t(z, t) = h(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

6.1.1. Un método de reflexión

Vamos a aplicar la fórmula de D'Alembert para resolver el siguiente problema de valores iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ u_t = h & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ u = 0 & \text{sobre } \{0\} \times]0, +\infty[, \end{cases} \quad (6.8)$$

donde g, h son funciones dadas, con $g(0) = h(0) = 0$.

1º) Extendamos u, g y h a todo \mathbb{R} de manera impar en la variable espacial, de manera que la suavidad de las funciones también se extienda. Obtenemos

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times [0, +\infty[\\ -u(-x, t) & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}_- \times [0, +\infty[, \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x, t) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ -g(-x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_-, \end{cases}$$

y

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ -h(-x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Luego, el problema (6.8) se convierte en el problema

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Ahora, notemos que si escogemos \tilde{u} definida por la fórmula de D'Alembert,

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(s) ds,$$

inmediatamente obtenemos que esta función resuelve (6.9).

2º) Regresando a las funciones originales, obtenemos:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(g(x+t) + g(x-t) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) ds & \text{si } x-t \geq 0, t \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left(g(x+t) - g(x-t) \right) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(s) ds & \text{si } x-t \leq 0, x \geq 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

De esta forma, si asumimos que $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$, entonces u dada por (6.10) es solución del problema (6.8).

6.2. Soluciones por medias esféricas

Sea $N \geq 2$ y sea u una solución del problema de valores iniciales o de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = h & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \quad (6.11)$$

Queremos encontrar una fórmula explícita para u en términos de g y h .

La idea es promediar u sobre ciertas esferas, estos promedios dependen del tiempo t y el radio r . Para N impar la EDP de (6.11) se convierte en la ecuación de ondas unidimensional. Se aplica la fórmula de D'Alembert para obtener una fórmula para la solución.

6.2.1. Una formulación equivalente para el problema de Cauchy

Partimos introduciendo la siguiente notación.

NOTACIÓN 6.2.1 Sea $x \in \mathbb{R}^N$ dado.

i) La función $U^x : \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(r, t) \mapsto U^x(r, t) := \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y), \quad (6.12)$$

corresponde al promedio de $u(\cdot, t)$ sobre la esfera $\partial B(x, r)$.

ii) La función $G^x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r \mapsto G^x(r) := \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} g(y) \, dS(y), \quad (6.13)$$

corresponde al promedio de g sobre la esfera $\partial B(x, r)$.

iii) La función $H^x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r \mapsto H^x(r) := \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} h(y) \, dS(y), \quad (6.14)$$

corresponde al promedio de h sobre la esfera $\partial B(x, r)$.

LEMA 6.2.1 (Ecuación de Euler-Poisson-Darboux) Sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo, y sea $u \in C^k(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ una solución de (6.11). Entonces la función U^x definida en (6.12) verifica:

i) $U^x \in C^k(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, +\infty[)$

ii) $U_{tt}^x - U_{rr}^x - \frac{N-1}{r} U_r^x = 0$ en $\mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[$

iii) $U^x = G^x$ sobre $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, con G^x dada por (6.13)

iv) $U_t^x = H^x$ sobre $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$, con H^x dada por (6.14).

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo, y sea $(t, r) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[$.

i) Desde la definición de U^x en (6.12), y el hecho que $u \in C^k(\overline{\omega} \times [0, T])$ para cada $\omega \in \mathbb{R}^N$ y para cada $T > 0$, es inmediato que U^x es de clase C^k en la variable t , $t \geq 0$. En efecto, es suficiente notar que

$$U_{tj}^x(r, t) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(y, t) \, dS(y) \quad \forall (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k,$$

y que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U_{tj}^x(r, t) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(y, 0) \, dS(y) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Resta mostrar que U^x es de clase C^k en la variable r de manera uniforme. Con esta finalidad, notemos que

$$\begin{aligned} U^x(r, t) &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz, t) \, dS(z) \quad \forall (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[, \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $y = x + rz$. Luego, $z = \frac{y-x}{r}$ y

$$\begin{aligned} U_r^x(r, t) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + rz, t) \cdot z \, dS(z) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \nabla u(y, t) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(y, t) \, dS(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dy \quad \text{por Teorema 1.6.2 parte iii)} \\ &= \frac{r}{N} \left(\frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dy \right). \end{aligned}$$

De aquí,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r^x(r, t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Derivando U_r^x con respecto a r , obtenemos

$$U_{rr}^x(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dy \right)$$

y por Teorema A.11.2 parte ii), obtenemos para cada $(r, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[$,

$$U_{rr}^x(r, t) = \frac{(1-N)}{N\omega_N r^N} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dy + \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dS(y).$$

De aquí,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{rr}^x(r, t) = \frac{1}{N} \Delta u(x, t).$$

Para derivadas de orden superior se procede de forma análoga, o se puede aprovechar la ecuación que satisface U^x (ver parte ii) a continuación).

ii) Continuando con nuestras estimaciones en la parte i), obtenemos

$$\begin{aligned} U_r^x(r, t) &= \frac{r}{N} \left(\frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dy \right) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) \, dy \quad \text{desde la ecuación en (6.11)}. \end{aligned}$$

Ahora, multiplicando por r^{N-1} , obtenemos

$$r^{N-1}U_r^x(r, t) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{B(x,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dy,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1}U_r^x(r, t) \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{N\omega_N} \int_{B(x,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) \right) \\ &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) && \text{por Teorema A.11.2 parte ii)} \\ &= r^{N-1} \left(\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,t)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dS(y) \right) \\ &= r^{N-1}U_{tt}^x(r, t), \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$(N-1)r^{N-2}U_r^x(r, t) + r^{N-1}U_{rr}^x(r, t) = r^{N-1}U_{tt}^x(r, t) \quad \forall (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[.$$

Dividiendo por r^{N-1} , obtenemos

$$U_{tt}^x - U_{rr}^x - \frac{(N-1)}{r}U_r^x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[.$$

iii) La prueba de esta parte es directa, pues

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} U^x(r, t) &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} u(y, 0) dS(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} g(y) dS(y) \\ &= G^x(r). \end{aligned}$$

iv) La prueba de esta parte es directa, pues

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} U_t^x(r, t) &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) dS(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(x,r)} h(y) dS(y) \\ &= H^x(r). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 6.2.1 Sea $x \in \mathbb{R}^N$ y sea $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Claramente, $u \in C^k(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ verifica (6.11) si y sólo si $U^x \in C^k(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, +\infty[)$ satisface el problema:

$$\begin{cases} U_{tt}^x - U_{rr}^x - \frac{N-1}{r}U_r^x = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\\ U^x = G^x & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ U_t^x = H^x & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\}. \end{cases} \quad (6.15)$$

6.2.2. Solución para $N = 3$. La fórmula de Kirchhoff

Sea $x \in \mathbb{R}^3$ fijo y sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$ una solución de (6.11) con $N = 3$. Para cada

$$(r, t) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times [0, +\infty[$$

definimos

$$\begin{cases} \tilde{U}^x(r, t) = r U^x(r, t) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y) \\ \tilde{G}^x(r) = r G^x(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x, r)} g(y) \, dS(y) \\ \tilde{H}^x(r) = r H^x(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x, r)} h(y) \, dS(y). \end{cases}$$

Se sigue que

$$\tilde{U}_r^x = U^x + r U_r^x \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[$$

y

$$\tilde{U}_{rr}^x = 2U_r^x + r U_{rr}^x = r \left(U_{rr}^x + \frac{2}{r} U_r^x \right) = r U_{tt}^x = \tilde{U}_{tt}^x \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[.$$

Además,

$$U^x(r, 0) = G^x(r) \quad \Rightarrow \quad r U^x(r, 0) = r G^x(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+,$$

de donde

$$\tilde{U}^x(r, 0) = \tilde{G}^x(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+.$$

También tenemos

$$U_t^x(r, 0) = H^x(r) \quad \Rightarrow \quad r U_t^x(r, 0) = r H^x(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+,$$

de donde

$$\tilde{U}_t^x(r, 0) = \tilde{H}^x(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+.$$

Por último, notar que

$$\tilde{U}^x(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Por lo tanto, \tilde{U}^x resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}^x - \tilde{U}_{rr}^x = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\\ \tilde{U}^x = \tilde{G}^x & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ \tilde{U}_t^x = \tilde{H}^x & \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ \tilde{U}^x = 0 & \text{sobre } \{0\} \times]0, +\infty[. \end{cases} \quad (6.16)$$

A continuación aplicamos la fórmula (6.10) al problema (6.16) y para $r - t \leq 0$ y $r \geq 0$ obtenemos

$$\tilde{U}^x(r, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{G}^x(r+t) - \tilde{G}^x(t-r) \right) + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}^x(s) \, ds.$$

Como $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U^x(r, t)$, se sigue que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}^x(r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tilde{G}^x(r+t) - \tilde{G}^x(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}^x(s) ds \right) \\ &= \tilde{G}_r^x(t) + \tilde{H}^x(t). \end{aligned}$$

Luego,

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x, t)} h(y) dS(y), \quad (6.17)$$

pero

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(z),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(z) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(z) + \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla g(x + tz) \cdot z dS(z) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} \nabla g(y) \cdot (y - x) dS(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando en cuenta (6.17), obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x, t)} \left(t h(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) \right) dS(y). \quad (6.18)$$

La fórmula (6.18) es conocida como *fórmula de Kirchhoff* para la solución de (6.11) en dimensión 3.

TEOREMA 6.2.1 (Solución de la ecuación de ondas $N = 3$) Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, y sea u dada por la fórmula de Kirchhoff (6.18). Entonces,

- i) $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$
- ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z, t) \rightarrow (x, 0)} u(z, t) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$
- iv) $\lim_{(z, t) \rightarrow (x, 0)} \frac{\partial u}{\partial t}(z, t) = h(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$.

6.2.3. Solución para $N = 2$. La fórmula de Poisson.

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ fijo y sea $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[)$ una solución de (6.11) con $N = 2$. Pongamos $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$. Entonces \bar{u} resuelve el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[\\ \bar{u} = \bar{g} & \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{h} & \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times \{0\}, \end{cases} \quad (6.19)$$

con $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2)$, $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2)$.

Si escribimos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, entonces (6.19) y la fórmula de Kirchhoff en la forma (6.17) implican que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) \, d\bar{S}(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{h}(y) \, d\bar{S}(y), \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde $d\bar{S}$ denota la medida o elemento de superficie sobre $\partial B(\bar{x}, t)$.

Notemos que

$$\int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) \, d\bar{S}(y) = 2 \int_{B(x, t)} g(y) \frac{t}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \, dy.$$

En efecto,

$$\partial B(\bar{x}, t) = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2 = t^2\},$$

de donde

$$y_3 = \pm \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}.$$

Parametrizamos el hemisferio superior en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} \Phi : B((x_1, x_2), t) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (y_1, y_2) &\rightarrow \Phi(y_1, y_2) = \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} \right) \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{n}(y_1, y_2) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \left(1, 0, \frac{-(y_1 - x_1)}{(t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2)^{1/2}} \right) \times \left(0, 1, \frac{-(y_2 - x_2)}{(t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2)^{1/2}} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-(y_1 - x_1)}{\sqrt{(t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2)}} \\ 0 & 1 & \frac{-(y_2 - x_2)}{\sqrt{(t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2)}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \sqrt{t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2} \right)}{\sqrt{t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} d\bar{S}(y) &= \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right\| dy_1 dy_2 \\ &= \frac{t}{\sqrt{(t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2)}} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{t}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy \quad y = (y_1, y_2) \text{ visto como elemento de } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\int_{\partial \bar{B}((x_1, x_2, 0), t)} \bar{g}(y_1, y_2, y_3) d\bar{S}(y) = \int_{B((x_1, x_2), t)} g(y_1, y_2) \frac{t}{(t^2 - |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|^2)^{1/2}} dy_1 dy_2.$$

Por lo tanto, dado que se trata de dos hemisferios, obtenemos

$$\int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) d\bar{S}(y) = 2 \int_{B(x, t)} g(y) \frac{t}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy. \quad (6.21)$$

Entonces se sigue desde (6.20) y (6.21) que

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy \quad (6.22)$$

pero,

$$\int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy = t \int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz,$$

que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy \right) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz + t \int_{B(0, 1)} \frac{\nabla g(x + tz) \cdot z}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{\nabla g(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + t h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy. \quad (6.23)$$

La fórmula (6.23) es conocida como *fórmula de Poisson* para la solución de (6.11) en dimensión 2.

TEOREMA 6.2.2 (Solución de la ecuación de ondas, $N = 2$) Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$, y sea u dada por la fórmula de Poisson (6.2.2). Entonces,

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[)$

ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[$

iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z,t) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^2$

iv) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} \frac{\partial u}{\partial t}(z,t) = h(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^2$.

OBSERVACIÓN 6.2.2 Resolver primero para $N = 3$ y luego $N = 2$ se enmarca dentro del conocido método descendente de Hadamard, el cual consiste en ver la solución del problema (6.11) en dimensión 2 como una solución independiente en la tercera coordenada de la solución del problema (6.11) en dimensión 3.

6.2.4. Solución para N impar, $N \geq 3$.

En esta subsección resolvemos la ecuación diferencial parcial de Euler-Poisson-Darboux para $N \geq 3$, N impar. Pongamos

$$N = 2k + 1 \quad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

y sea $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = h & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^N$. Extendemos la notación introducida en secciones previas, relacionadas con U^x , la solución del problema (6.15), que por Lema 6.2.1 pertenece a $C^{k+1}(\overline{\mathbb{R}^N} \times [0, +\infty[)$. Ponemos

$$\begin{cases} \tilde{U}^x(r,t) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U^x(r,t)\right) \\ \tilde{G}^x(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} G^x(r)\right) \\ \tilde{H}^x(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} H^x(r)\right). \end{cases} \quad (6.24)$$

Entonces

$$\begin{cases} \tilde{U}^x(r,0) = \tilde{G}^x(r) \\ \tilde{U}_t^x(r,0) = \tilde{H}^x(r). \end{cases} \quad (6.25)$$

LEMA 6.2.2 Sea $x \in \mathbb{R}^N$. La función \tilde{U}^x resuelve la ecuación de ondas unidimensional. Más aún, \tilde{U}^x es solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{tt}^x - \tilde{U}_{rr}^x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times]0, +\infty[\\ \tilde{U}^x = \tilde{G}^x \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ \tilde{U}_t^x = \tilde{H}^x \quad \text{sobre } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ \tilde{U}^x = 0 \quad \text{sobre } \{0\} \times]0, +\infty[. \end{array} \right.$$

Demostración. Notar que por Lema A.14.3 parte i), uno tiene

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rr}^x &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U^x \right) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^k \left(r^{2k} U_r^x \right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r^{2k} U_r^x \right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{r} \left(2kr^{2k-1} U_r^x + r^{2k} U_{rr}^x \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \left(U_{rr}^x + \frac{2k}{r} U_r^x \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \left(U_{rr}^x + \frac{N-1}{r} U_r^x \right) \right) \quad \text{pues } N = 2k + 1 \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U_{tt}^x \right) \\ &= \tilde{U}_{tt}^x. \end{aligned}$$

Notar también que para $r > 0$ uno tiene

$$\begin{aligned} U^x(r, 0) = G^x(r) &\Rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U^x(r, 0) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} G^x(r) \right) \\ &\Rightarrow \tilde{U}^x(r, 0) = \tilde{G}^x(r) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U_t^x(r, 0) = H^x(r) &\Rightarrow \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U_t^x(r, 0) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} H^x(r) \right) \\ &\Rightarrow \tilde{U}_t^x(r, 0) = \tilde{H}^x(r). \end{aligned}$$

Por último, para $t > 0$ tenemos

$$\tilde{U}^x(r, t) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U^x(r, t) \right) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\partial^j}{\partial r^j} U^x(r, t) \quad \text{por Lema A.14.3 parte ii)}$$

para ciertas constantes β_j^k independientes de U^x . Así,

$$\tilde{U}^x(0, t) = 0. \quad \blacksquare$$

El Lema 6.2.2 junto a (6.25) y (6.10) implican que si $r - t \leq 0$, $r \geq 0$, entonces

$$\tilde{U}^x(r, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{G}^x(r+t) - \tilde{G}^x(t-r) \right) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}^x(y) dy \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0. \quad (6.26)$$

Recordemos ahora que

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U^x(r, t).$$

Por otro lado, el Lema A.14.3 parte ii) asegura que

$$\begin{aligned} \tilde{U}^x(r, t) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U^x(r, t)) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{\partial^j U^x}{\partial r^j}(r, t). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}^x(r, t)}{\beta_0^k r} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j^k}{\beta_0^k} r^j \frac{\partial^j U^x}{\partial r^j}(r, t) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} U^x(r, t) \\ &= u(x, t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (6.26) tenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{G}^x(t+r) - \tilde{G}^x(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}^x(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0^k} \left(\tilde{G}_r^x(t) + \tilde{H}^x(t) \right). \end{aligned}$$

Luego, desde (6.26) y Lema A.14.3 parte ii)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_N} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{1}{N\omega_N t} \int_{\partial B(x,t)} g \, dS \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_N} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{1}{N\omega_N t} \int_{\partial B(x,t)} h \, dS \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

donde N es impar y $\gamma_N = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (N-2)$.

OBSERVACIÓN 6.2.3 Para $N = 3$ la ecuación (6.27) corresponde a la fórmula de Kirchhoff.

TEOREMA 6.2.3 (Solución de la ecuación de ondas en dimensión impar) Sea $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ e impar, sean $g \in C^{k+1}(\mathbb{R}^N)$, $h \in C^k(\mathbb{R}^N)$, para $k = \frac{N+1}{2}$ y sea u dada por (6.27). Entonces,

- i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$
- ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z,t) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$
- iv) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} \frac{\partial u}{\partial t}(z,t) = h(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

6.2.5. Solución para N par, $N \geq 4$

Sea $N \geq 4$, N par y sea $u \in C^k(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ una solución de (6.11), donde estamos considerando $k = \frac{N-2}{2}$. Como en el caso $N = 2$, ponemos

$$\begin{cases} \bar{u}(x_1, \dots, x_{N+1}, t) = u(x_1, \dots, x_N, t) \\ \bar{g}(x_1, \dots, x_{N+1}) = g(x_1, \dots, x_N) \\ \bar{h}(x_1, \dots, x_{N+1}) = h(x_1, \dots, x_N). \end{cases} \quad (6.28)$$

Entonces tenemos que \bar{u} satisface:

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^{N+1} \times]0, +\infty[\\ \bar{u} = \bar{g} & \text{sobre } \mathbb{R}^{N+1} \times \{0\} \\ \bar{u}_t = \bar{h} & \text{sobre } \mathbb{R}^{N+1} \times \{0\}, \end{cases} \quad (6.29)$$

donde $y = (x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}) = (x, x_{N+1})$; con $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Como $N + 1$ es impar, podemos emplear la fórmula (6.27) (con $N + 1$ reemplazando a N) para asegurar una fórmula de representación para \bar{u} en términos de \bar{g} y \bar{h} . Entonces, a raíz de (6.28) y (6.29) obtenemos una fórmula de u en términos de g y h . Este es nuevamente el método descendente. Poniendo

$$\gamma_N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (N-2) \cdot N,$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{1}{\gamma_N} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1}{\omega_N} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}} dy \right) \right) \\ & + \frac{1}{\gamma_N} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1}{\omega_N} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}} dy \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

OBSERVACIÓN 6.2.4 Para $N = 2$ la ecuación (6.30) corresponde a la fórmula de Poisson.

TEOREMA 6.2.4 (Solución de la ecuación de ondas en dimensión par) Sea $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ y par, sean $g \in C^{k+1}(\mathbb{R}^N)$, $h \in C^k(\mathbb{R}^N)$ para $k = \frac{N+2}{2}$ y sea u dada por (6.30). Entonces,

- i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$
- ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z,t) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$
- iv) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} \frac{\partial u}{\partial t}(z,t) = h(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

OBSERVACIÓN 6.2.5

- A diferencia del caso N impar, en (6.30) se integra sobre $B(x,t)$ y no sobre $\partial B(x,t)$.
- Si N es par, $N \geq 3$, los valores de las funciones g y h en un punto dado $x \in \mathbb{R}^N$ afectan a la solución u sólo sobre la frontera $\{(y,t) : |x-y| = t \wedge t > 0\}$ del cono $\{(y,t) : |x-y| < t \wedge t > 0\}$.
- Si N es impar, $N \geq 3$, los valores de las funciones g y h en un punto dado $x \in \mathbb{R}^N$ afectan a la solución u en todo el cono $\{(y,t) : |x-y| < t \wedge t > 0\}$.
- Las observaciones arriba indican que una perturbación que se origina en un punto x , se propaga a lo largo de un frente de ondas sostenido en dimensiones impares, pero en dimensiones pares el frente continúa teniendo efectos incluso después de que el borde delantero del frente de ondas pasa. Una ley de la física como esta es conocida como el principio de Huygens.

6.3. El problema no homogéneo

Ahora tratamos el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{cases} \quad (6.31)$$

Motivados por el principio de Duhamel, definimos $u = u(x, t; s)$ como la solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times]s, +\infty[\\ u(\cdot; s) = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{s\} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot; s) = f(\cdot; s) & \text{sobre } \mathbb{R}^N \times \{s\}. \end{cases} \quad (6.32)$$

Ahora ponemos

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[. \quad (6.33)$$

El principio de Duhamel asegura que ésta es una solución de (6.31).

TEOREMA 6.3.1 (Solución de la ecuación de ondas no homogénea) Sea $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, sea $f \in C^{[\frac{N}{2}]+1}(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ y sea u dada por (6.33). Entonces,

- i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$
- ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ en $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$
- iii) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} u(z, t) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$
- iv) $\lim_{(z,t) \rightarrow (x,0)} \frac{\partial u}{\partial t}(z, t) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

6.4. Problemas propuestos

1. Sea $v \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$ una solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[\\ v = g & \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = h & \text{sobre } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Muestra que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|v(x, t)| \leq C \frac{1}{t} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[.$$

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante dada y sea $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$. Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ y sea $x' = (x, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Denota por Δ_N al operador Laplaciano con respecto a las N primeras variables de $x' \in \mathbb{R}^{N+1}$, y sea Δ_{N+1} el operador Laplaciano con respecto a las $N+1$ variables de $x' \in \mathbb{R}^{N+1}$.

- a) Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa^2 \Delta_N u + \alpha^2 u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Muestra que para cualquier par de constantes $A, B \in \mathbb{R}$, la función

$$v(x', t) := \left(A \cos\left(\frac{\alpha}{\kappa} x_{N+1}\right) + B \sin\left(\frac{\alpha}{\kappa} x_{N+1}\right) \right) u(x, t)$$

resuelve la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \kappa^2 \Delta_{N+1} v = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}. \quad (6.34)$$

b) Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa^2 \Delta_N u - \alpha^2 u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Muestra que para cualquier par de constantes $A, B \in \mathbb{R}$, la función

$$v(x', t) := \left(A \cosh\left(\frac{\alpha}{\kappa} x_{N+1}\right) + B \sinh\left(\frac{\alpha}{\kappa} x_{N+1}\right) \right) u(x, t)$$

también resuelve la ecuación (6.34).

c) Usa a) y b) junto al método descendente para resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa^2 \Delta_2 u \pm \lambda^2 u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u = g & \text{sobre } \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = h & \text{sobre } \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante dada, $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

3. Transforma el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[\\ u = \begin{cases} 0 & \text{sobre } [0, 1[\times \{0\} \cup]2, +\infty[\times \{0\} \\ (2-x)(x-1) & \text{sobre } [1, 2] \times \{0\} \end{cases} \\ u_t = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^+ \times \{0\}, \end{cases}$$

en otro problema definido en el espacio total \mathbb{R} . Encuentra los tiempos t tales que $u(3, t) \neq 0$. Encuentra el valor extremo de $u(x, 10)$ para $x \in \mathbb{R}$.

4. Considera la ecuación general del Telégrafo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + (a+b)u_t + ab u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Usando el cambio de variables

$$e^{\frac{1}{2}(a+b)t} u(x, t) = v(y, z)$$

con $y = x + ct$ y $z = x - ct$, transforma la ecuación en una más simple.

Bibliografía del Capítulo 6

- [1] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, second edition 2010, Printed in the United States of America.
- [2] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19*, American Mathematical Society, Reprint with corrections 2002, Printed in the United States of America.
- [3] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, second edition 1995, Printed in the United States of America.
- [4] F. John, *Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 1*, Springer-Verlag New York Inc., fourth edition 1982, Printed in the United States of America.
- [5] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory, Universitext*, Springer-Verlag Italia, first edition 2008, Printed in Italy.

Ecuaciones lineales elípticas de segundo orden

A lo largo de este capítulo consideramos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 7.0.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea u una función dos veces derivable en Ω y consideremos el operador lineal

$$L(u) = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u,$$

donde a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ y a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ son funciones coeficientes dadas, definidas en Ω , con

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Decimos que el operador L es:

- *elíptico en un punto* $x \in \Omega$ si la matriz $(a_{ij}(x))$ es definida positiva; es decir, existen $\lambda(x)$ y $\Lambda(x)$ tales que

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

- *uniformemente elíptico en Ω* si existen constantes $\lambda > 0$ y $\Lambda > 0$ tales que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

para casi toda $x \in \Omega$.

7.1. Los principios del máximo

En esta sección estudiaremos los principios de máximo para ecuaciones lineales elípticas de segundo orden donde el operador a considerar será el que hemos definido en la Definición 7.0.1.

Dado Ω , un subconjunto de \mathbb{R}^N , estudiaremos los principios del máximo para las soluciones u de la ecuación

$$L(u) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

así como también para las subsoluciones de tal ecuación, a saber, funciones u que satisfacen la desigualdad

$$L(u) \leq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

y para las supersoluciones de tal ecuación, a saber, funciones u que satisfacen la desigualdad

$$L(u) \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Es importante mencionar que los métodos que usaremos para probar los principios del máximo se basan en el hecho que si $u \in C^2(\Omega)$, alcanza su máximo sobre $x_0 \in \Omega$, entonces se debe verificar que

$$\nabla u(x_0) = 0$$

y que

$$D^2u(x_0) \text{ es definida no positiva.}$$

7.1.1. Principio débil del máximo

El principio débil del máximo afirma que subsoluciones de una ecuación diferencial uniformemente elíptica en Ω con coeficiente de orden cero no negativo (esto es, $a_0 \geq 0$ en la definición de L), alcanzan su máximo no negativo sobre la frontera $\partial\Omega$.

TEOREMA 7.1.1 (Principio débil del máximo (del mínimo)) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , sea L un operador uniformemente elíptico en Ω , como en la Definición 7.0.1, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una subsolución (supersolución) de la ecuación $L(u) = 0$ en Ω .

i) Si adicionalmente asumimos que $a_0 \equiv 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \left(\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \right).$$

ii) Si adicionalmente asumimos que en la definición de L , $a_0 \geq 0$ en Ω , entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u^- \right).$$

Demostración.

i) Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una subsolución de la ecuación $L(u) = 0$ en Ω , entonces

$$L(u) \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Además, es claro que $u \in C(\bar{\Omega})$ implica que existen $\max_{\bar{\Omega}} u$ y $\max_{\partial\Omega} u$; y que estos valores verifican la desigualdad

$$\max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u.$$

Resta probar que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Realizaremos esto en dos etapas.

1º) Asumamos que $L(u) < 0$ en Ω . Procederemos argumentando por contradicción. Supongamos que u alcanza su máximo en $x_0 \in \Omega$. Entonces

$$\nabla u(x_0) = 0$$

y la matriz $D^2u(x_0)$ resulta definida no positiva.

Por otro lado, como $A = (a_{ij}(x_0))$ es una matriz simétrica y definida positiva, entonces existe una matriz ortogonal $B = (b_{ij})$ de manera que

$$B A B^T = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N) \quad (7.1)$$

con $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$, y

$$B B^T = I.$$

Ahora, si ponemos $y = y(x) = x_0 + B(x - x_0)$, entonces $x - x_0 = B^T(y - x_0)$. De esta forma,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial y_k}(y(x)) b_{ki} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N,$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial y_\ell \partial y_k}(y(x)) b_{ki} b_{\ell j} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Por lo tanto, como $y(x_0) = x_0$, desde (7.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y_\ell \partial y_k}(x_0) b_{ki} b_{\ell j} \\ &= \sum_{i=1}^N d_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(x_0) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pues $d_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$, y como $D^2u(x_0)$ es definida no positiva, entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(x_0) \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$. Finalmente, en x_0 hemos obtenido

$$L(u) = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

pues $\nabla u(x_0) = 0$ implica que $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$, pero esto es una contradicción con el hecho que $L(u) < 0$ en Ω . La contradicción viene de suponer que el punto donde u alcanza el máximo está en el interior de Ω . Por lo tanto el punto donde u alcanza el máximo debe estar sobre la frontera $\partial\Omega$.

2º) Asumamos ahora que $L(u) \leq 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ ponemos

$$v_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\theta x_1} \quad x \in \Omega,$$

con $\theta > 0$ a ser fijado posteriormente, y donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Recordemos que por definición de los a_{ij} y de la linealidad de L obtenemos

$$L(v_\varepsilon) = L(u) + \varepsilon L(e^{\theta x_1}).$$

Ahora, usando la condición de uniformidad elíptica de L , se sigue que

$$a_{ii} \geq \lambda \quad \text{en } \Omega, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, si $\theta > 0$ es escogido suficientemente grande, obtenemos

$$\begin{aligned} L(v_\varepsilon) &= L(u) + \varepsilon L(e^{\theta x_1}) \\ &\leq \varepsilon e^{\theta x_1} (-\theta^2 a_{11} + \theta a_1) \\ &\leq \varepsilon e^{\theta x_1} (-\theta^2 a_{11} + \theta a_1) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a lo probado en 1º), obtenemos

$$\max_{\bar{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon.$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

ii) Sea u una subsolución y sea $\mathcal{U} = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Entonces

$$L(u) - a_0 u \leq -a_0 u \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{U}.$$

De esta forma, si ponemos $T(u) := L(u) - a_0 u$, es fácil ver que

$$T(u) = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{U}.$$

Luego,

- si $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{U} \neq \emptyset$, desde la parte i) de este Teorema, obtenemos

$$\max_{\Omega} u = \max_{\mathcal{U}} u = \max_{\partial\mathcal{U}} u = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

- si $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{U} = \emptyset$, entonces $u > 0$ en \mathcal{U} y $u \leq 0$ en $\Omega \setminus \mathcal{U}$, y así,

$$\max_{\mathcal{U}} u > 0 = \max_{\partial\mathcal{U}} u,$$

que es una contradicción con la parte i), por lo que este caso no se puede dar.

- si $\mathcal{U} = \emptyset$, entonces $u \leq 0$ en todo Ω , y así,

$$\max_{\Omega} u \leq 0 = \max_{\partial\Omega} u^+. \quad \blacksquare$$

7.1.2. El Lema de Hopf

El Lema de Hopf presentado a continuación, es una de las herramientas fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, sobre todo en la demostración de principios fuertes del máximo.

LEMA 7.1.1 (Lema de Hopf) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $\bar{x} \in \partial\Omega$ tal que Ω satisface la condición de esfera interior en \bar{x} . Sea L un operador uniformemente elíptico en Ω , como en la Definición 7.0.1, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ una subsolución de la ecuación $L(u) = 0$ en Ω tal que

$$u(\bar{x}) > u(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (7.2)$$

Asuma además que se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

- i) En la definición de L , $a_0 \equiv 0$ en Ω .
- ii) En la definición de L , $a_0 \geq 0$ en Ω , y $u(\bar{x}) \geq 0$.

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) > 0,$$

donde \mathbf{n} denota el vector normal exterior unitario a Ω en \bar{x} .

Demostración. Asumamos que $a_0 \geq 0$. Como Ω satisface la condición de esfera interior en Ω , podemos asumir que existe $x_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $B(x_0, R) \subset \Omega$ y $\partial B(x_0, R) \cap \partial\Omega = \bar{x}$. Por simplicidad, asumiremos que $x_0 = 0$. Luego, para $\theta > 0$ a ser definido posteriormente, definimos

$$v(x) := e^{-\theta|x|^2} - e^{-\theta R^2} \quad \forall x \in B(x_0, R).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
L(v) &= - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u \\
&= e^{-\theta|x|^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} (-4\theta^2 x_i x_j + 2\theta \delta_{ij}) - e^{-\theta|x|^2} \sum_{i=1}^N 2a_i \theta x_i + a_0 (e^{-\theta|x|^2} - e^{-\theta R^2}) \\
&\leq e^{-\theta|x|^2} \left(-4\theta^2|x|^2 + 2\theta \sum_{i=1}^N a_{ii} + 2\theta|\mathbf{a}||x| + a_0 \right),
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$. Consideremos ahora el anillo

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in B(0, R) : \frac{R}{2} < |x| < R \right\}.$$

Entonces, para $\theta > 0$ escogido suficientemente grande, uno tiene que

$$L(v) \leq e^{-\theta|x|^2} \left(-4\theta^2|x|^2 + 2\theta \sum_{i=1}^N a_{ii} + 2\theta|\mathbf{a}||x| + a_0 \right) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{A}. \quad (7.3)$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$ definimos la función

$$\varphi_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon v(x) - u(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Como $L(u) \leq 0$ en Ω , desde (7.3) y la definición del operador L se sigue, ya sea bajo las condición i) o la condición ii), que

$$L(\varphi_\varepsilon) \leq -a_0 u(\bar{x}) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{A}. \quad (7.4)$$

Por otro lado, como $v \equiv 0$ sobre $\partial B(0, R)$, desde (7.2) se verifica que

$$\varphi_\varepsilon = u(x) + \varepsilon v(x) - u(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in \partial B(0, R).$$

Además, también desde (7.2), si escogemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que

$$\varphi_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in \partial B\left(0, \frac{R}{2}\right).$$

Por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que

$$\varphi_\varepsilon \leq 0 \quad \text{sobre } \partial \mathcal{A}. \quad (7.5)$$

Tomando en cuenta (7.4) y (7.5), desde el Teorema 7.1.1 del principio débil del máximo concluimos que

$$\varphi_\varepsilon \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{A}.$$

Ahora, como $\varphi_\varepsilon(\bar{x}) = 0$, con $\bar{x} \in \partial \Omega \cap \partial B(0, R) \cap \partial \mathcal{A}$, se sigue que

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) \geq 0.$$

De aquí,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) = \varepsilon \nabla v(\bar{x}) \cdot \bar{x} = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0. \quad \blacksquare$$

7.1.3. El principio fuerte del máximo

El principio fuerte del máximo establece que si una subsolución de una ecuación diferencial uniformemente elíptica en Ω con término de orden cero no negativo, alcanza su máximo en el interior de Ω , entonces ella debe ser constante en todo Ω . Por lo tanto, subsoluciones de una tal ecuación diferencial que no sean iguales a una constante, sólo pueden alcanzar su máximo sobre la frontera $\partial\Omega$.

TEOREMA 7.1.2 (El principio fuerte del máximo (del mínimo)) Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^N con interior no vacío, sea L un operador uniformemente elíptico en Ω , como en la Definición 7.0.1, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una subsolución (supersolución) de la ecuación $L(u) = 0$ en Ω . Asuma además que se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

- i) Ω es acotado; en la definición de L , $a_0 \equiv 0$ en Ω ; y u alcanza su máximo (mínimo) en Ω .
- ii) En la definición de L , $a_0 \geq 0$ en Ω ; y u alcanza un máximo no negativo (mínimo no positivo) en Ω .

Entonces

u es constante en Ω .

Demostración. Como Ω es conexo, sabemos que la única partición por abiertos en Ω es la trivial, esto es, los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en la topología relativa a Ω son Ω y \emptyset . De esta forma, si consideramos el conjunto

$$\Omega_K = \{x \in \Omega : u(x) = K\},$$

donde $K = \sup_{\Omega} u$ será suficiente probar que Ω_K es no vacío, abierto y cerrado para la topología inducida por Ω .

Por hipótesis, de inmediato tenemos que $\Omega_K \neq \emptyset$. Por otro lado, por definición de Ω_K y por continuidad de u en Ω , tenemos que Ω_K es cerrado en Ω .

Supongamos que Ω_K no es abierto en Ω , entonces, por continuidad de u en Ω , $u \neq K$ en una región abierta contenida en Ω . Pongamos

$$\mathcal{U} = \{x \in \Omega : u(x) < K\}.$$

Es claro que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Además, \mathcal{U} es abierto en Ω y podemos escoger un punto $z \in \mathcal{U}$ tal que $\text{dist}(z, \Omega_K) < \text{dist}(z, \partial\Omega) =: R$. Sea ahora $B(z, R)$ la bola centrada en z de radio R y consideremos $\bar{x} \in \Omega_K$ tal que $\bar{x} \in \partial B(z, R)$. Se sigue que $B(z, R) \subset \mathcal{U}$, por lo que claramente \mathcal{U} satisface la condición de bola interior en \bar{x} . Luego, por el Lema 7.1.1 de Hopf, bajo el supuesto i), obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\bar{x}) > 0$, que en particular conduce a $\nabla u(\bar{x}) \neq 0$. Pero esto es una contradicción pues el máximo de u se alcanza en Ω , por lo que $\bar{x} \in \Omega$, y se debe verificar que $\nabla u(\bar{x}) = 0$. ■

7.1.4. La desigualdad de Harnack

La desigualdad de Harnack establece que los valores de una solución al interior de una subregión, lejos de la frontera, contenida en el conjunto abierto sobre el cual está definida la ecuación diferencial, son comparables entre sí.

TEOREMA 7.1.3 (La desigualdad de Harnack) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea L un operador uniformemente elíptico en Ω , como en la Definición 7.0.1, y sea $u \in C^2(\Omega)$ una solución de la ecuación $L(u) = 0$ en Ω . Entonces, para cada subconjunto Ω_0 abierto, conexo y acotado con interior no vacío, existe una constante $C = C_{N,\Omega_0,\Omega,L} > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega_0} u \leq C \inf_{\Omega_0} u.$$

En particular,

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y) \quad \forall x, y \in \Omega_0.$$

Bibliografía del Capítulo 7

- [1] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19*, American Mathematical Society, Reprint whit corrections 2002, Printed in the United States of America.
- [2] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Reprint of the 1998 edition, Printed in Germany.

Algunos teoremas de interés

A.1. El Teorema de Hahn-Banach y sus consecuencias

DEFINICIÓN A.1.1 Sea X un espacio vectorial real y sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que p es *sublineal* si p verifica

- i) $p(tx) = tp(x)$ para toda $x \in X$ y para toda $t > 0$
- ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para toda $x, y \in X$. \square

TEOREMA A.1.1 (Teorema de Hahn-Banach) Sea X un espacio vectorial normado, sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal, y sea Y un subespacio vectorial de X . Si $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $g(x) \leq p(x)$ para toda $x \in Y$, entonces existe un funcional lineal $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a g (es decir $f|_Y = g$), y tal que $f(x) \leq p(x)$ para toda $x \in X$. \square

DEFINICIÓN A.1.2 Sea X un espacio vectorial normado. Llamamos *espacio dual topológico* al espacio $L(X, \mathbb{R})$, donde $L(X, \mathbb{R})$ representa el espacio de todos los funcionales lineales continuos de X en \mathbb{R} . Este espacio se denota por X^* y se le asocia la norma

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} |f(x)| \quad \forall f \in X^*. \quad \square$$

NOTACIÓN A.1.1 Sea $f \in X^*$ y sea $x \in X$. Es usual escribir $\langle f, x \rangle$ en vez de $f(x)$. Además, es usual decir que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar para la dualidad X^*, X . \square

COROLARIO A.1.1 Sea X un espacio vectorial normado, sea Y un subespacio vectorial normado de X , y sea $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe $f \in X^*$, el espacio dual del espacio X , que extiende a g (es decir $f|_Y = g$), y tal que

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y \leq 1}} |g(y)| = \|g\|_{Y^*}. \quad \square$$

COROLARIO A.1.2 Sea X un espacio vectorial normado, y sea Y un subespacio vectorial normado de X tal que $\bar{Y} \neq X$. Entonces existe $f \in X^*$, el espacio dual del espacio X , $f \neq 0$, tal que

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in Y. \quad \square$$

A.2. Topologías débiles

DEFINICIÓN A.2.1 Para cada $f \in X^*$, consideremos el funcional lineal $\phi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$x \mapsto \phi_f(x) := \langle f, x \rangle$$

y consideremos la familia $\{\phi_f\}_{f \in X^*}$. Llamamos *topología débil* $\sigma(X, X^*)$ sobre X a la topología menos fina definida sobre X que hace continuas a todas las aplicaciones ϕ_f . \square

OBSERVACIÓN A.2.1 Como la topología débil $\sigma(X, X^*)$ es menos fina que la topología fuerte definida por la norma $\|\cdot\|_X$, entonces tiene menos abiertos y menos cerrados. \square

TEOREMA A.2.1 Sea (x_n) una sucesión de elementos en X . Entonces

i) $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(X, X^*)$ si y sólo si

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*.$$

ii) Si $x_n \rightarrow x$ fuertemente, entonces

$$x_n \rightarrow x \text{ débilmente en } \sigma(X, X^*).$$

iii) Si $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(X, X^*)$, entonces la sucesión $\{\|x_n\|_X\}$ es acotada y verifica que

$$\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X.$$

iv) Si $x_n \rightarrow x$ débilmente en $\sigma(X, X^*)$ y si $f_n \rightarrow f$ fuertemente en X^* (es decir, $\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$), entonces

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle. \quad \square$$

DEFINICIÓN A.2.2 Sea X un espacio vectorial normado y sea X^* su dual topológico. Llamamos *espacio bidual topológico de X* al espacio dual topológico de X^* . Este espacio se denota por X^{**} y se le asocia la norma

$$\|\xi\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle| \quad \forall \xi \in X^{**}. \quad \square$$

DEFINICIÓN A.2.3 Para cada $x \in X$, consideremos el funcional lineal $\phi_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f \mapsto \phi_x(f) := \langle f, x \rangle$$

y consideremos la familia $\{\phi_x\}_{x \in X}$. Llamamos *topología débil-** $\sigma(X^*, X)$ sobre X^* a la topología menos fina definida sobre X^* que hace continuas a todas las aplicaciones ϕ_x . \square

OBSERVACIÓN A.2.2 La topología débil- \star $\sigma(X^*, X)$ es menos fina que la topología fuerte definida por la norma $\|\cdot\|_{X^*}$, entonces tiene menos abiertos y menos cerrados. \square

TEOREMA A.2.2 Sea (f_n) una sucesión de elementos en X^* . Entonces

i) $f_n \xrightarrow{*} f$ débilmente- \star en $\sigma(X^*, X)$ si y sólo si

$$\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in X.$$

ii) Si $f_n \rightarrow f$ fuertemente, entonces

$$f_n \rightarrow f \text{ débilmente en } \sigma(X^*, X^{**}).$$

Si $f_n \rightarrow f$ débilmente en $\sigma(X^*, X^{**})$, entonces

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ débilmente-}\star \text{ en } \sigma(X^*, X).$$

iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ débilmente- \star en $\sigma(X^*, X)$, entonces la sucesión $\{\|f_n\|_{X^*}\}$ es acotada y verifica que

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf \|f_n\|_{X^*}.$$

iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ débilmente- \star en $\sigma(X^*, X)$ y si $x_n \rightarrow x$ fuertemente en X (es decir, $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$), entonces

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle. \quad \square$$

TEOREMA A.2.3 (Banach–Alaoglu–Bourbaki) La bola cerrada unitaria

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil- \star $\sigma(X^*, X)$. \square

OBSERVACIÓN A.2.3 La importancia de las topologías débiles es la siguiente: una topología menos fina tiene más conjuntos compactos. Por ejemplo, la bola cerrada unitaria B_{X^*} nunca es compacta para la topología fuerte salvo que $\dim(X) < \infty$, pero siempre es compacta para la topología débil- \star . Conocer el papel básico que juegan los conjuntos compactos, por ejemplo en los mecanismos de existencia tales como los procesos de minimización, facilita la comprensión de la importancia de la topología débil- \star . \square

A.3. Espacios reflexivos y separables

DEFINICIÓN A.3.1 Se define la *inyección canónica topológica* $J : X \rightarrow X^{**}$ de la siguiente forma: para cada $x \in X$, el funcional $Jx : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f \mapsto (Jx)(f) = \langle f, x \rangle$$

es lineal continuo. Es decir, Jx es un elemento de X^{**} , verificándose que

$$\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X^*. \quad \square$$

OBSERVACIÓN A.3.1 La *inyección canónica* J es una *isometría*, es decir

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

y, por consiguiente, también es una *aplicación inyectiva*. \square

DEFINICIÓN A.3.2 Sea X un espacio normado. Decimos que X es *reflexivo* si $J[X] = X^{**}$; es decir, J es un isomorfismo isométrico entre los espacios normados X y X^{**} . \square

TEOREMA A.3.1 (Kakutani) Sea X un espacio Banach. Entonces, X es reflexivo si y sólo si la bola cerrada unitaria

$$B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil $\sigma(X, X^*)$. \square

TEOREMA A.3.2 Si X es un espacio Banach reflexivo, entonces cada sucesión $\{x_n\}$ acotada en X posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge en la topología débil $\sigma(X, X^*)$. \square

TEOREMA A.3.3 (Eberlein-Šmulian) Si X es un espacio Banach tal que cada sucesión $\{x_n\}$ acotada en X posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge en la topología débil $\sigma(X, X^*)$, entonces X es reflexivo. \square

PROPOSICIÓN A.3.1 Sea X un espacio Banach.

- i) Si X es reflexivo y M es un subespacio vectorial cerrado de X , entonces M es reflexivo.
- ii) X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.
- iii) Si X es reflexivo y K es acotado, cerrado y convexo en X , entonces K es compacto en la topología $\sigma(X, X^*)$. \square

DEFINICIÓN A.3.3 Sea X un espacio métrico. Decimos que X es separable si posee un subconjunto denso y numerable. \square

TEOREMA A.3.4 Sea X un espacio métrico separable y sea M un subconjunto de X . Entonces M también es separable. \square

TEOREMA A.3.5 Sea X un espacio Banach tal que X^* es separable. Entonces X es separable. \square

TEOREMA A.3.6 Sea X un espacio Banach. Entonces, X es reflexivo y separable si y sólo si X^* es reflexivo y separable. \square

TEOREMA A.3.7 Sea X un espacio Banach. Entonces X^* es separable si y sólo si la bola cerrada unitaria B_X es metrizable para la topología débil $\sigma(X, X^*)$. \square

TEOREMA A.3.8 Sea X un espacio Banach. Entonces X es separable si y sólo si la bola cerrada unitaria B_{X^*} es metrizable para la topología débil- \star $\sigma(X^*, X)$. \square

TEOREMA A.3.9 Sea X un espacio Banach separable. Entonces cada sucesión $\{f_n\}$ acotada en X^* posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge en la topología débil- \star $\sigma(X^*, X)$. \square

A.4. Espacios Hilbert

DEFINICIÓN A.4.1 Un espacio Hilbert es un espacio vectorial H equipado con un producto escalar tal que H es completo para la norma inducida por tal producto escalar. \square

OBSERVACIÓN A.4.1 Si H es un espacio Hilbert equipado con el producto escalar (\cdot, \cdot) , entonces H es completo para la norma

$$\|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad v \in H.$$

Conviene recordar también que el producto escalar satisface la desigualdad de Cauchy–Schwarz

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H. \quad \square$$

TEOREMA A.4.1 (Teorema de representación de Riesz–Fréchet) Sea H un espacio Hilbert dotado del producto escalar (\cdot, \cdot) , y sea H^* su espacio dual. Entonces, dada $\varphi \in H^*$, existe una única $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

Además se verifica

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H^*}. \quad \square$$

A.5. Los Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

DEFINICIÓN A.5.1 Sea H un espacio Hilbert. Una forma bilineal $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es

i) *continua* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H;$$

ii) *coerciva* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H. \quad \square$$

TEOREMA A.5.1 (Stampacchia) Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua y coerciva sobre el espacio Hilbert H . Sea $K \subset H$ un convexo, cerrado y no vacío. Dada $\varphi \in H^*$, existe un único $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Además, si a es simétrica, u se puede caracterizar por la propiedad

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in K \\ \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \quad \square \end{array} \right.$$

A continuación enunciamos el Teorema de Lax-Milgram, que es una consecuencia del Teorema de Stampacchia.

COROLARIO A.5.1 (Lax-Milgram) Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua y coerciva sobre el espacio Hilbert H . Dada $\varphi \in H^*$, existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Además, si a es simétrica, u se puede caracterizar por la propiedad

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H \\ \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \quad \square \end{array} \right.$$

A.6. Teoremas generales sobre integrales

TEOREMA A.6.1 (Fubini) Sea Ω_1 un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{N_1} y sea Ω_2 un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{N_2} . Si $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, entonces para casi toda $x \in \Omega_1$ uno tiene que

$$F(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1(\Omega_1).$$

Similarmente, para casi toda $x \in \Omega_1$ uno tiene

$$F(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1) \quad y \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1(\Omega_2).$$

Más aún,

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \right) dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy. \quad \square$$

LEMA A.6.1 Sea $a > 0$ y sea $f \in C^1([-a, a])$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(t-s) ds \right) = \int_0^t \frac{d}{dt} f(t-s) ds + f(0). \quad \square$$

Demostración. Sea t fijo, pero arbitrario. Si ponemos $r = t - s$, entonces, $dr = -ds$ y si s varía entre 0 y t , entonces r varía entre t y 0. Así,

$$\int_0^t f(t-s) ds = - \int_t^0 f(r) dr = \int_0^t f(r) dr.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(t-s) ds \right) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(r) dr \right) \\ &= f(t) \\ &= \int_0^t f'(r) dr + f(0) \\ &= \int_0^t \frac{d}{dt} f(t-s) ds + f(0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A.7. Teoremas de convergencia

TEOREMA A.7.1 (Lema de Fatou) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , y sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ verificando $f_n \geq 0$ c.t.p. en Ω para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n < \infty$. Entonces

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n. \quad \square$$

TEOREMA A.7.2 (Teorema de la convergencia monótona) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , y sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ verificando

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

y $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n < \infty$. Entonces (f_n) converge c.t.p. en Ω a una función f en $L^1(\Omega)$ y se verifica que $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$. En particular,

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n. \quad \square$$

TEOREMA A.7.3 (Teorema de la convergencia dominada) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , y sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ verificando

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

y

$$|f_n| \leq g \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \text{ para alguna función } g \in L^1(\Omega).$$

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$. En particular,

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n. \quad \square$$

A.8. Los espacios $L^p(\Omega)$

NOTACIÓN A.8.1 Sea $1 \leq p \leq \infty$. Llamamos exponente conjugado de p , a q , donde q queda determinado por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

aceptando que si $p = 1$, entonces $q = \infty$ y viceversa. \square

TEOREMA A.8.1 (Desigualdad de Hölder) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea q el exponente conjugado de p . Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y se verifica que

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad \square$$

TEOREMA A.8.2 (Desigualdad de interpolación) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$. Si $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$, entonces para cada $\theta \in [0, 1]$ se verifica que $f \in L^p(\Omega)$, con $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$. Además, se cumple la desigualdad

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{1-\theta}.$$

TEOREMA A.8.3 (Fischer–Riesz) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $L^p(\Omega)$ es Banach para la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. \square

TEOREMA A.8.4 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $1 \leq p \leq \infty$, y sean (f_n) una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que

$$f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

y

$$|f_{n_k}| \leq g \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \text{ para alguna función } g \in L^p(\Omega). \quad \square$$

TEOREMA A.8.5 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 < p < \infty$. El espacio $L^p(\Omega)$ es reflexivo para la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. \square

TEOREMA A.8.6 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$. El espacio $L^p(\Omega)$ es separable para la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. \square

TEOREMA A.8.7 (Teorema de representación de Riesz) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $1 \leq p < \infty$ y sea $\phi \in (L^p(\Omega))^*$. Entonces existe una única función $u \in L^q(\Omega)$, siendo q el exponente conjugado de p , tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u f \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Más aún,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}. \quad \square$$

TEOREMA A.8.8 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N .

- $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$.
- La clausura de la bola unitaria en $L^\infty(\Omega)$ es compacta en la topología débil- \star $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.
- Si Ω es un subconjunto medible de \mathbb{R}^N y si (f_n) es una sucesión acotada en $L^\infty(\Omega)$, entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) y una función $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ en la topología débil- \star $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$. \square

A.9. Molificadores

DEFINICIÓN A.9.1 Llamamos *molificador estándar* a la función $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$\rho(x) := \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde C es una constante positiva tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx = 1$. \square

NOTACIÓN A.9.1

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ pondremos

$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx),$$

¡que verifica:

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \rho_n \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N, \quad \text{supp}(\rho_n) \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = 1.$$

- Para cada $\varepsilon > 0$ pondremos

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

que verifica:

$$\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \rho_\varepsilon \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N, \quad \text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon \, dx = 1. \quad \square$$

NOTACIÓN A.9.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y para $\varepsilon > 0$ consideremos

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, se define su molificación como

$$f^\varepsilon = \rho_\varepsilon * f = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y)f(y) dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)f(x-y) dy \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon. \quad \square$$

Las propiedades de los molificadores quedan resumidas en el siguiente teorema.

TEOREMA A.9.1 (Propiedades de los molificadores) Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces

- i) $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
- ii) $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ c.t.p.
- iii) Si $f \in C(\Omega)$, entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω .
- iv) Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces $f^\varepsilon \rightarrow f$ en $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. \square

TEOREMA A.9.2 Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. \square

COROLARIO A.9.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N . Entonces $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para cualquier $1 \leq p < \infty$. \square

COROLARIO A.9.2 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N y sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ c.t.p. en Ω . \square

A.10. Criterios de compacidad

TEOREMA A.10.1 (Arzelà-Ascoli) Sea K un espacio métrico compacto, sea \mathcal{H} un subconjunto acotado de $C(K)$ y asumamos que \mathcal{H} es uniformemente equicontinuo; es decir,

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad \text{tal que} \quad (\forall x_1, x_2 \in K) \quad (\text{dist}(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon) \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Entonces la clausura de \mathcal{H} es compacta en $C(K)$. \square

TEOREMA A.10.2 (Fréchet-Kolmogorov-Riesz) Sea $1 \leq p < \infty$ y sea \mathcal{F} un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R}^N)$. Asumamos que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad \text{uniformemente} \quad \forall f \in \mathcal{F};$$

es decir

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad \text{tal que} \quad (\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon) \quad (\forall f \in \mathcal{F}) \quad (\forall h \in \mathbb{R}^N, \text{ con } |h| < \delta).$$

Entonces la clausura de $\mathcal{F}|_{\Omega}$ es compacta en $L^p(\Omega)$ para cualquier conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con medida finita. \square

COROLARIO A.10.1 Sea $1 \leq p < \infty$ y sea \mathcal{F} un subconjunto acotado de $L^p(\mathbb{R}^N)$. Asumamos que se verifica que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad \text{uniformemente} \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

y que

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ tal que } \Omega \text{ es acotado, medible y se cumple que} \quad (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F})).$$

Entonces \mathcal{F} tiene clausura compacta en $L^p(\mathbb{R}^N)$. \square

A.11. Integración en coordenadas polares

TEOREMA A.11.1 (Fórmula de co-área) Sea $u \in C(\mathbb{R}^N)$ una función Lipschitz tal que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) = r\}$ es suave, para casi todo $r \in \mathbb{R}$ (tal subconjunto de nivel es una $(N - 1)$ -hipersuperficie en \mathbb{R}^N), y sea $v \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} v |\nabla u| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{u=r\}} v \, dS \right) dr. \quad \square$$

Poniendo $u(x) = |x - x_0|$ obtenemos como consecuencia el siguiente resultado.

TEOREMA A.11.2 (Integración en coordenadas polares) Sea $u \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces:

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}^N} u = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B(x,r)} u \, dS \right) dr \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

$$\text{ii) } \frac{d}{dr} \left(\int_{B(x,r)} u \right) = \int_{\partial B(x,r)} u \, dS \quad \forall r > 0. \quad \square$$

A.12. Delta de Dirac

Sea $a \in \mathbb{R}$. De manera informal, la función *delta de Dirac*, denotada por δ_a , representa el límite de una sucesión (h_ε) de funciones que permite llegar a algunas propiedades fundamentales. Para ilustrar las propiedades fundamentales, consideramos

$$h_\varepsilon(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a - \frac{1}{\varepsilon}, a + \frac{1}{\varepsilon}] \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } t \in [a - \frac{1}{\varepsilon}, a + \frac{1}{\varepsilon}]. \end{cases}$$

Luego, la función δ_a satisface la siguiente propiedad

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq a \\ \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t) dt = 1 & \text{si } t = a. \end{cases}$$

Notar que la delta de Dirac, no es una función integrable en el sentido usual del Cálculo, pues sabemos que si una función vale 0 en todos los puntos de su dominio, excepto en uno particular, entonces el valor de su integral es 0. Por lo tanto, tomando en cuenta que

$$\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(t - a) dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

el valor de la integral de la delta de Dirac debe entenderse como el paso al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la integral anterior. Otra propiedad de la función δ_a es que si f es una función continua en una vecindad de a , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_a(t) f(t) dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta_0(t - a) f(t) dt = f(a) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño,}$$

donde

$$\delta_0(t - a) = \delta_a(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En dimensiones mayores, también podemos definir una función con características como las ya mencionadas para el caso unidimensional. En efecto, si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, se define la función $\delta_{\mathbf{a}}$ verificando

$$\delta_{\mathbf{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \mathbf{a} \\ \int_{\mathbb{R}^N} \delta_{\mathbf{a}}(x) dx = 1 & \text{si } x = \mathbf{a}. \end{cases}$$

La función $\delta_{\mathbf{a}}$ se denomina delta de Dirac en el punto \mathbf{a} . Una propiedad importante de esta función es que si f es una función continua en una vecindad de \mathbf{a} , entonces se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta_{\mathbf{a}}(x) f(x) dx = \int_{B(\mathbf{a}, \varepsilon)} \delta_0(x - \mathbf{a}) f(x) dx = f(\mathbf{a}) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño,}$$

donde

$$\delta_0(x - \mathbf{a}) = \delta_{\mathbf{a}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

A.13. Funciones Hölder continuas

DEFINICIÓN A.13.1 Sea Ω un subconjunto acotado de \mathbb{R}^N y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Para $x_0 \in \Omega$ y $\gamma \in]0, 1[$, diremos que u es *Hölder continua* con exponente γ en x_0 , si

$$[u]_{\gamma, x_0} = \sup_{x \in \Omega} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\gamma} < \infty.$$

La cantidad $[u]_{\gamma, x_0}$ recibe el nombre de *coeficiente γ -Hölder* de u en x_0 , con respecto a Ω . Si u es Hölder continua sobre cada x_0 en Ω , entonces escribimos $u \in C^{0, \gamma}(\Omega)$. \square

OBSERVACIÓN A.13.1 Si u es Hölder continua en x_0 , entonces u es continua en x_0 . \square

DEFINICIÓN A.13.2 Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^N y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Para $\gamma \in]0, 1[$, diremos que u es *uniformemente Hölder continua* con exponente γ en Ω , lo cual escribimos $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, si

$$[u]_{\gamma,\Omega} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty.$$

La cantidad $[u]_{\gamma,\Omega}$ recibe el nombre de *coeficiente γ -Hölder* de u con respecto a Ω . \square

DEFINICIÓN A.13.3 Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\gamma \in]0, 1[$. Diremos que u es *localmente Hölder continua* con exponente γ en Ω si u es uniformemente Hölder continua, con exponente γ , en ω , para cada $\omega \Subset \Omega$. \square

OBSERVACIÓN A.13.2 Los conceptos de las dos definiciones anteriores coinciden cuando Ω es compacto. \square

DEFINICIÓN A.13.4 Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $\gamma \in]0, 1[$. Se define el *espacio Hölder* $C^{k,\gamma}(\Omega)$ ($C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$) como el subespacio de $C^k(\Omega)$ ($C^k(\overline{\Omega})$) formado por todas las funciones cuyas derivadas hasta el orden k son localmente Hölder continuas (uniformemente Hölder continuas) con exponente γ en Ω . \square

NOTACIÓN A.13.1 Por simplicidad escribimos:

- $C^{0,\gamma}(\Omega) = C^\gamma(\Omega)$ y $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) = C^\gamma(\overline{\Omega})$
- $C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega)$ y $C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$.
- Para $\gamma \in]0, 1[$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se definen las normas:

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(u)\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{\gamma,\Omega} \quad \forall u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

En particular,

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{\gamma,\Omega} \quad \forall u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}). \quad \square$$

TEOREMA A.13.1 Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $\gamma \in]0, 1[$. El espacio Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ es un espacio Banach.

A.14. Otros resultados

LEMA A.14.1 (Desigualdad de Young) Sean $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para todo par de números reales no negativos a y b , se tiene que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Más generalmente, para cada $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$ab \leq \frac{1}{p\varepsilon} a^p + \frac{\varepsilon}{q} b^q. \quad \square$$

LEMA A.14.2 (Partición de la unidad) Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R}^N y sea $\{\Theta_i\}_{i=1}^k$ un cubrimiento por abiertos de K ; i.e. $K \subset \cup_{i=1}^k \Theta_i$. Entonces para cada $i = 0, 1, 2, \dots, k$, $\exists \theta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$\text{i) } 0 \leq \theta_i \leq 1 \quad \forall i = 0, 1, \dots, k; \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k \theta_i = 1 \text{ sobre } \mathbb{R}^N.$$

$$\text{ii) } \text{supp } \theta_i \text{ es compacto y } \text{supp } \theta_i \subset \Theta_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k; \quad \text{y} \quad \text{supp } \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus K.$$

En particular, si Ω es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y $K = \partial\Omega$, entonces $\theta_0|_\Omega \in C_c^\infty(\Omega)$. \square

LEMA A.14.3 Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\text{i) } \left(\frac{d^2}{dr^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \phi(r) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \left(r^{2k} \frac{d\phi}{dr}(r) \right),$$

$$\text{ii) } \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \phi(r) \right) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{d^j \phi}{dr^j}(r) \text{ donde } \beta_j^k \text{ para } j = 0, 1, \dots, k-1, \text{ son constantes independientes de } \phi,$$

$$\text{iii) } \beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1). \quad \square$$

Bibliografía

- [1] L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, Surveys in applied Mathematics III, New York, Wiley, 1958.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011, Printed in the United States of America.
- [3] H. Brezis, F. Browder, *Partial Differential Equations in the 20th Century**, Advances in Mathematics **135** (1998) 76–144.
- [4] M. Clapp, *Análisis matemático*, colección Papirhos, Serie Textos 2, Instituto de Matemática, UNAM, primera edición 2015, Impreso en México.
- [5] J.C. Cox, C-F. Huang, *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process*, Journal of Economic Theory **49** (1989) 33–83.
- [6] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, second edition 2010, Printed in the United States of America.
- [7] E. B. Dynkin, *Superdiffusions and positive solutions of non-linear partial differential equations*, Russian Math. Surveys **59** (2004) 147–157.
- [8] J. Engländer, *Branching diffusions, superdiffusions and random media*, Probability Surveys **4** (2007) 303–364.
- [9] L.C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, Volume **19**, American Mathematical Society, Reprint whit corrections 2002, Printed in the United States of America.
- [10] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, second edition 1995, Printed in the United States of America.
- [11] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez, J. C. Sabina de Lis, *Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs*, Arch. Rational Mech. Anal. **145** (1998) 261–289.
- [12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Reprint of the 1998 edition, Printed in Germany.
- [13] Q. Han, F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, Courant Lectures Notes in Mathematics, Courant Institute of Mathematics Sciences, American Mathematical Society, first edition 1997, Printed in the United States of America.
- [14] F. John, *Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 1*, Springer-Verlag New York Inc., fourth edition 1982, Printed in the United States of America.

- [15] J. B. Keller, *Electrohydrodynamics I. The equilibrium of a charged gas in a container*, J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956) 715–724.
- [16] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons Inc., first edition 1989, Printed in India.
- [17] J. López-Gómez, M. Molina-Meyer, *Superlinear indefinite systems: Beyond Lotka–Volterra models*, J. Differential Equations **221** (2006) 343–411.
- [18] S. L. Pohozaev, *The Dirichlet problem for the equation $\Delta u = u^2$* , Soviet Math. Dokl. **1** (1961) 1143–1146.
- [19] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, first edition 2008, Printed in Italy.