APUNTES DE TEORÍA DE JUEGOS

Natalia González
Julieth Solano

TERCERA EDICIÓN

Septiembre 2004

UNIVERSIDAD ICESI 25 años

APUNTES DE ECONOMIA

ISSN 1794-029X
Tercera edición, septiembre de 2004

Editor
Julio César Alonso C.
jcalonso@icesi.edu.co

Asistente de Edición
Stephanie Vergara Rojas

Gestión Editorial
Departamento de Economía - Universidad ICESI

www.icesi.edu.co
Tel: 5552334 ext: 398. Fax: 5551441
Calle 18 #122-135 Cali, Valle del Cauca – Colombia

APUNTES DE TEORÍA DE JUEGOS

Natalia González[1]
Julieth Solano[2]

Septiembre de 2004

Resumen

El objetivo de este documento es introducir a los estudiantes en la teoría de juegos; para ello se desarrollan a lo largo del texto los principales conceptos de la teoría, así como su aplicación práctica. En la primera parte se analizan las condiciones que debe seguir un juego así como su representación en forma extensiva o estratégica. En la segunda parte se estudia uno de los métodos que existe para dar solución a un juego, a saber, la eliminación iterada de estrategias dominadas. Este documento esta dirigido principalmente a estudiantes de pregrado de economía, pero por la sencillez del lenguaje, puede ser de utilidad para cualquier estudiante o profesional interesado en la teoría de juegos.

Palabras Claves: Jugadores, estrategias, juego en forma extensiva, juego en forma estratégica, información perfecta, preferencias asimétricas, preferencias negativamente transitivas, estrategia dominante, eliminación iterada de estrategias dominadas.

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta del autor.

[1] Profesora tiempo completo del Departamento de Economía en la Universidad Icesi.
[2] Estudiante de Economía y Negocios Internacionales.

Introducción

Durante los cursos de Fundamentos de Economía el estudiante tuvo la oportunidad de examinar, de manera introductoria, ¿cómo por medio de la Teoría de Juegos es posible estudiar la toma de decisiones de productores cuando sus decisiones, así como las de los demás productores pueden afectarlo dado el número de empresas en el mercado? A continuación, ampliaremos el campo de acción de la Teoría Juegos con la intención de estudiar la manera cómo agentes económicos perfectamente racionales (acompañada de algunas características especiales de información) interactúan cuando sus intereses entran en conflicto. La intención de estas notas de clase es que el estudiante tenga a la mano una guía de conceptos básicos, no sólo para comprender la manera cómo algunos economistas han utilizado la teoría de juegos para estudiar el comportamiento del agente económico bajo situaciones estratégicas[3], sino para aplicar algunos conceptos o herramientas de la Teoría de Juegos a problemas simples.

[3] Situación estratégica la entendemos como una situación en la que cada agente, antes de tomar la decisión de qué acciones llevar a cabo, considera lo que conoce del otro, lo que cree que hará el otro, es decir, cómo podrán responder otros a mis acciones (esta interrogante es importante, más cuando el mejor camino a seguir depende de las acciones o caminos tomados por los demás). Se trata de una situación en la que cada individuo antes de tomar una decisión de qué hacer debe preguntarse cómo podría afectar su decisión a las decisiones de todos los demás en un escenario específico.

1. ¿Qué es un Juego?

Todo juego, entendido como juegos de mesa, juegos de cartas, juegos deportivos, juegos de carta, etc. se caracterizan por tener una serie de reglas. A continuación presentamos las reglas que un juego demanda, entre ellas,

- ¿Quiénes están jugando (identificar los jugadores)?
- ¿Con qué acciones o estrategias cuenta cada jugador?
- ¿Cuál es el orden en el que se juega, es decir, cuándo le toca jugar a cada individuo?
- ¿Cuáles son los pagos por la toma de decisión?

Vale la pena resaltar un importante elemento adicional y tiene que ver con el conocimiento común acerca de las reglas entre los participantes del juego. Primero, que todos los jugadores conocen las mismas reglas simples. Segundo, que todo participante del juego no sólo conoce las reglas, sino que sabe que los demás jugadores conocen las reglas también. Y tercero, que los demás jugadores saben que él sabe que conoce las reglas del juego. ¿Por qué no basta con simplemente decir que todos conocen las reglas del juego?

Decir simplemente que todos los jugadores tienen conocimiento acerca de las reglas, siembra dudas en cuanto a lo que cada jugador realmente sabe del otro, así como lo que cada jugador realmente sabe que el otro jugador sabe acerca de él. Por lo tanto, si un jugador tiene dudas acerca de lo que los demás participantes saben de él (en cuanto a que conoce, o no las reglas) lo lleva a creer que los demás participantes pueden tener dudas acerca de las estrategias con que cuenta él, así como el orden en el que le toca jugar, e inclusive su identidad.

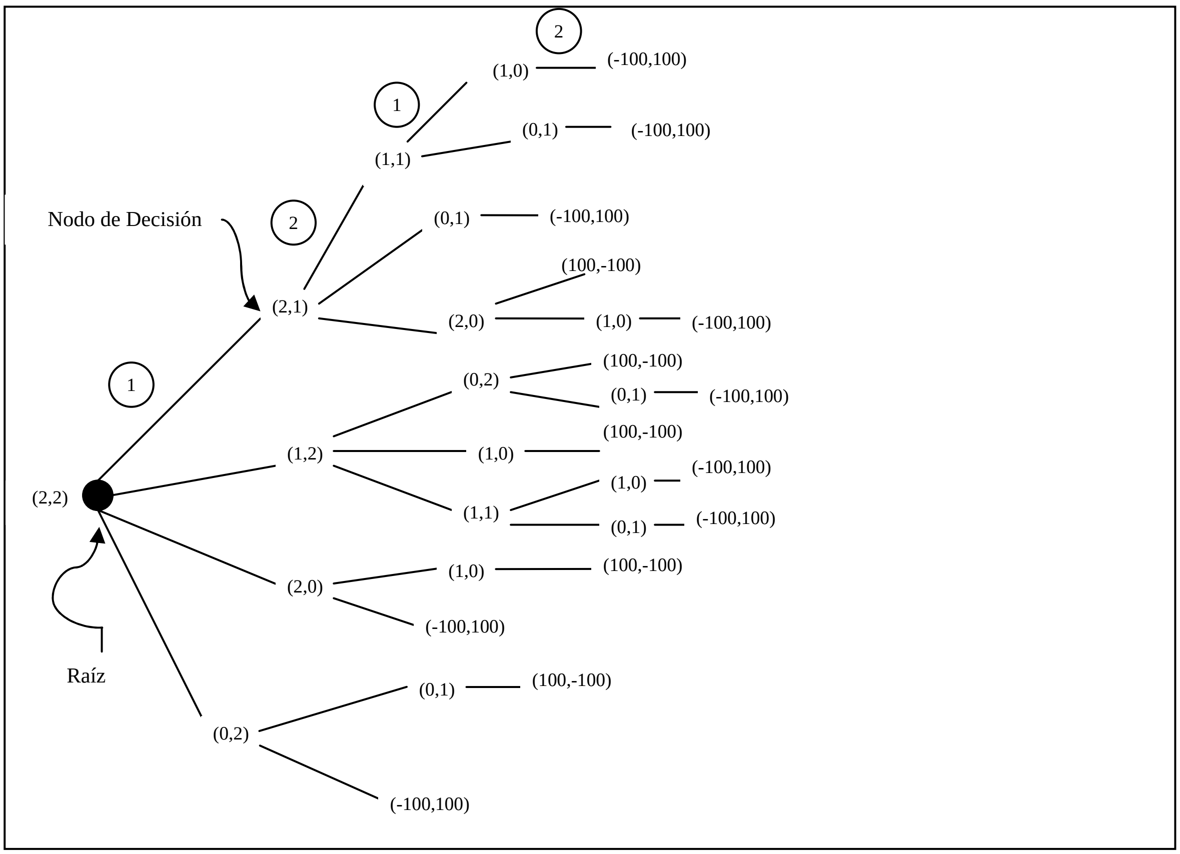
2. Formas de describir los juegos

2.1. Descripción de forma extensiva

Existen dos formas de representar las reglas que demanda un juego, entre ellas, una descripción de forma extensiva y otra de forma normal. La descripción de un juego de forma extensiva consiste en la representación en forma de diagrama de árbol de las decisiones que uno o varios jugadores enfrentan, así como los resultados de las diferentes combinaciones estratégicas entre individuos. Veamos algunos ejemplos que nos ayuden a ilustrar la definición expresada anteriormente:

¿Alguno de ustedes ha oído hablar del Juego Nim? No es común oír una respuesta afirmativa, por lo que exploraremos la descripción extensiva de un juego.

Figura 1. Juego de Nim en forma extensiva



Nim es un juego diseñado para varios participantes, sin embargo en la siguiente aplicación vamos a suponer que solo juegan dos individuos. El juego inicia con ambos participantes disponiendo de varios montones de fósforos. Cada jugador debe alternarse en sus jugadas. Durante cada turno cada jugador tiene la oportunidad de retirar sólo de un montón por lo menos un fósforo. El jugador que retire el último fósforo gana. Vamos a suponer que el juego da inicio con dos montones de fósforos y que cada montón tiene dos fósforos. Cada jugador ha invertido 100.000 pesos por lo tanto el participante que gane obtiene un ingreso neto igual a 100.000 pesos mientras que el que pierda obtiene un ingreso neto igual a -100.000 pesos. En la Figura 1, se muestra la forma extensiva del ejemplo anterior.

La forma extensiva permite identificar las reglas que todo juego demanda. Por ejemplo, en el caso de las acciones o estrategias con que cuenta el jugador, estas se representan en cada una de las ramas del árbol. En el caso del orden con que se juega y cuáles son los pagos asociados a la estrategia que ha tomado (y que a su vez que ha tomado el otro jugador) es necesario incorporar algunos conceptos adicionales.

Todo diagrama tiene un punto de partida o raíz de donde nacen las diferentes estrategias o caminos que el jugador número uno puede tomar.[4] En el caso de Nim, la raíz corresponde al punto de partida del juego (2,2), en el que el jugador número uno debe decidir si:

a. Retirar del segundo montón un fósforo y de esta manera el jugador número dos recibe el turno bajo unas características especiales: (2,1)
b. Retirar del primer montón un fósforo y de esta manera el jugador número dos recibe el turno bajo unas características especiales: (1,2)
c. Retirar del segundo montón dos fósforos y de esta manera el jugador número dos recibe el turno bajo unas características especiales: (2,0)
d. Retirar del primer montón dos fósforos y de esta manera el jugador número dos recibe el turno bajo unas características especiales: (0,2)

Al final de cada una de las cuatro ramas del árbol que nacen de la raíz nace un nodo de decisión correspondiente a las diferentes estrategias o caminos que el jugador número dos puede tomar.[5] Cada uno de los nodos de decisión, correspondiente al jugador número dos, no necesariamente contiene el mismo número de estrategias ya que el número de estrategias o caminos que puede tomar dependen de la situación en la que se encuentre.

Por ejemplo, en el caso de que el jugador uno haya tomado el camino (a) retirando del segundo montón un fósforo permite que el jugador dos reciba su turno teniendo tres estrategias o caminos posibles, entre ellos:

i. Retirar del primer montón un fósforo y de esta manera el jugador número uno recibe su turno bajo unas características especiales: (1,1)
ii. Retirar del primer montón dos fósforos y de esta manera el jugador número uno recibe su turno bajo unas características especiales: (0,1)
iii. Retirar del segundo montón un fósforo y de esta manera el jugador número uno recibe su turno bajo unas características especiales: (2,0)

Mientras que en el caso de que el jugador uno haya tomado el camino (d) retirando del primer montón dos fósforos, permite que el jugador dos reciba su turno teniendo dos estrategias o caminos posibles, entre ellos:

A. Retirar del segundo montón un fósforo y de esta manera el jugador número uno recibe su turno bajo unas características especiales: (0,1)
B. Retirar del segundo montón dos fósforos y de esta manera el jugador uno recibe su turno bajo unas características especiales (0,0)

El diagrama de árbol permite representar varios aspectos importantes, como por ejemplo: (i) que no necesariamente todos los nodos de decisión correspondiente a cada

[4] Véase “raíz” o punto de partida en la Figura 1.
[5] Véase “nodo de decisión” en la Figura 1

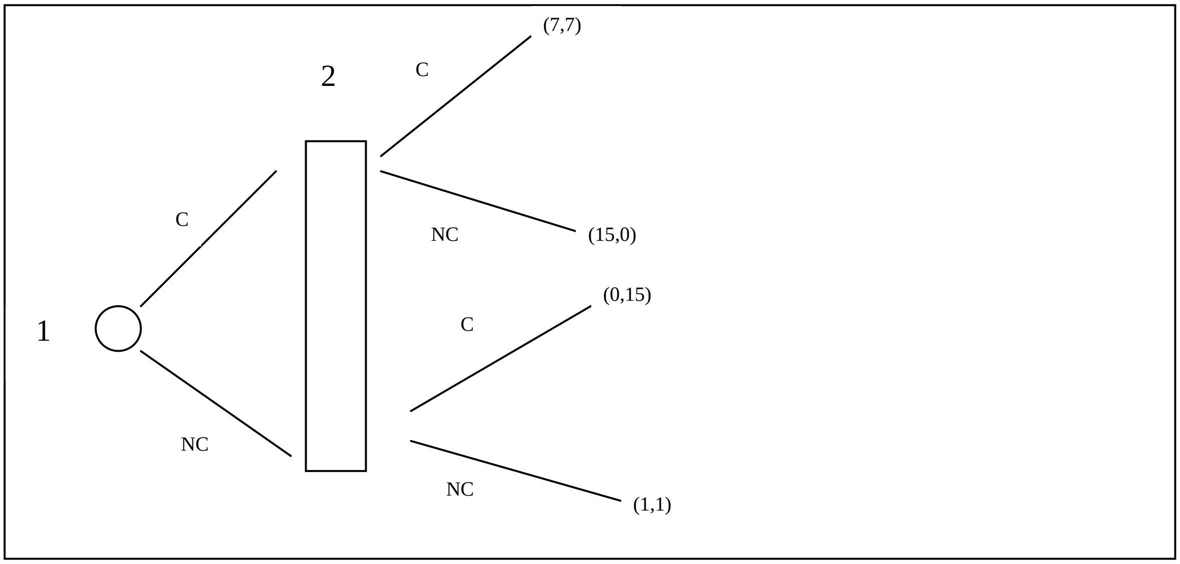
jugador contienen el mismo número de estrategias dada la interdependencia entre participantes, (ii) identificar en qué orden juegan los agentes, (iii) recoger los pagos asociados a cada una de las combinaciones de estrategias posibles.

Cabe anotar que en Nim las decisiones que toman los diferentes participantes son de carácter secuencial, es decir, cada jugador retira fósforos en turnos distintos. Empero, existen juegos en los que los participantes deben tomar decisiones de forma simultánea. ¿Cómo representamos este tipo de juegos de forma extensiva? ¿Qué implicaciones hay en el hecho de que los participantes lleven acabo sus acciones (movidas) de forma simultáneas, a que sus acciones sean por turnos?

El dilema del prisionero es un ejemplo perfecto para comprender el caso de juegos simultáneos. El dilema del prisionero es una historia acerca de dos ladrones de banco que han sido capturados por las autoridades. El fiscal se reúne con cada uno de los delincuentes y le informa a cada uno que tiene pruebas suficientes para hacerlos pagar un año de cárcel a cada uno. Aprovecha el encuentro con cada ladrón para ofrecerle un negocio a cada uno, "si usted confiesa el crimen e implica a su compañero lo haremos parte de nuestro programa de protección y quedará libre, mientras que su compañero recibirá quince años de cárcel. Sin embargo, si su compañero confiesa también su testimonio perderá todo valor y ambos tendrán que pagar una condena de 7 años cada uno". El juego del dilema del prisionero tiene una particularidad y es que después de que las autoridades los han capturado y deciden ponerlos en cuartos separados (sin posibilidad de comunicación entre ellos) cada uno tiene como alternativa confesar o no el crimen sin saber lo que ha hecho (o esta a punto de hacer) el otro, por lo que podemos suponer que las decisiones son tomadas de forma simultánea bajo condiciones de incertidumbre. Aquí cada jugador con una decisión que tomar no está bien informado del estado de las cosas, si lo estuviera tendríamos un juego de información perfecta (Von Neumann y Morgenstern, 1994).

Ahora bien, ¿cómo representamos este tipo de jugos en forma extensiva? En la Figura 2, vemos cómo la primera elección la tiene el participante número uno, y cómo el participante número dos tiene la segunda. Empero, para diferenciar los diagramas de árbol correspondientes a juegos secuenciales de los simultáneos, representamos la situación de elección del participante número dos a partir de un rectángulo con el objeto de representar la incertidumbre que subyace en su elección. El delincuente, a partir de un conjunto de información, es incapaz de identificar la decisión –de confesar, o no el crimen- que ha tomado el primer delincuente, por eso el rectángulo vacío. Veamos la Figura 2.

Figura 2. Juego del dilema del prisionero en forma extensiva



2.2. Descripción de forma normal o estratégica

Después de representar la manera como se describen las reglas que demanda un juego secuencial y simultáneo de forma extensiva, a continuación representamos la manera como se describen las reglas que demanda un juego en forma normal o estratégica.[6]

La descripción de un juego normal o en forma estratégica consiste en la representación matricial de las decisiones que varios jugadores enfrentan, así como los resultados de

[6] Otra pregunta que vale la pena hacerse tiene que ver con las implicaciones que hay detrás de que los participantes lleven acabo sus acciones (movidas) de forma simultáneas, a que sus acciones sean por turnos, pero esta discusión la dejaremos para más adelante.

las diferentes combinaciones estratégicas entre participantes. Retomemos el ejemplo del dilema del prisionero para ilustrar nuestra definición. La Matriz 1 muestra la forma normal o estratégica de este juego.

Matriz 1. Juego del dilema del prisionero en forma normal o estratégica.

J1,J2	C	NC
C	(7,7)	(15,0)
NC	(0,15)	(1,1)

Vemos cómo a diferencia de la representación extensiva -donde cada agente se ubica en uno o varios nodos de decisión, así como en diferentes etapas del juego- aquí los participantes se ubican en filas o columnas de una matriz al igual que sus estrategias. Al interior de cada celda de la matriz aparecen los pagos correspondientes a la combinación de estrategias dada.

3. Ordenación de las preferencias

Una regla de juego importante y al que no se le ha prestado mucha atención tiene que ver con *"cuánto ganan los participantes en un juego por cada combinación estratégica".* Los pagos que cada jugador recibe pueden estar representados en valores nominales, sin embargo no siempre es así. Independientemente de la unidad en la que están representados los pagos, lo que realmente importa es que sean comparables entre si con el objeto de que el agente económico pueda ordenar (según considere) las diferentes combinaciones estratégicas.

En el caso de Nim, se presume que cada participante preferirá retirar de un montón de fósforos por lo menos el último, por lo que $\pi(r) \succ \pi(n.r)$. Donde r corresponde a retirar de un montón por lo menos el último fósforo; n.r representa no retirar de un montón por lo menos el último fósforo y π denota el beneficio obtenido por cada una de estas estrategias. Si al juego le corresponde la raíz o punto de partida (2,0) el participante número uno puede ordenar las dos estrategias posibles de acuerdo a sus preferencias. Aquí la estrategia estrictamente preferida entre las dos es $\pi(0,0) \succ \pi(1,0)$. Donde $\pi(0,0)$ corresponde al pago que obtiene el jugador número uno por retirar del primer montón dos fósforos y $\pi(1,0)$ representa el pago que obtiene si retira del primer montón un fósforo.

Sin embargo, para modelar las decisiones de cada jugador por medio de una relación de preferencia, es necesario que:

Supuesto 1.
No existan un par de alternativas a y b donde $\{a \text{ y } b\} \in A$ tal que $a \succ b$ y $b \prec a$, por lo cual las preferencias son asimétricas.

Supuesto 2.
Las preferencias sean negativamente transitivas, es decir, para cualquier tercer elemento c, si $a \succ b$ y $b \succ c$, entonces, o bien $a \succ c$ o bien $c \succ b$. Como $a \succ b$ entonces para cualquier tercer elemento c, o bien $a \succ c$ o bien $c \succ b$, o ambas cosas al tiempo. Sin embargo, como $b \succ c$, la asimetría prohíbe que $c \succ b$, por lo cual $a \succ c$.

Si la preferencia $\succ$ es asimétrica y negativamente transitiva entonces:

i. *Es irreflexiva*, es decir, que no existe ningún vector $a \in A$ tal que $a \succ a$.

ii. *Es transitiva,* si $a \succ b$ e $b \succ c$, entonces $a \succ c$.

Como consecuencia, si cada participante cumple con los anteriores requisitos de consistencia en las preferencias, la interrogante *"cuánto ganan los participantes en un juego por cada combinación estratégica"* se resuelve asignándole números mayores a aquella combinación estratégica preferida a otra, lo cual reflejaría la preferencia de una sobre otras.

En el caso del dilema del prisionero, cada participante es capaz de ordenar las cuatro combinaciones estratégicas posibles, entre ellas la más preferida para el jugador fila, la cual corresponde a una situación en la que recibe el menor castigo: s_1(c, n.c) –-donde él confiesa y su compañero de crimen calla. El que sigue en orden de preferencia tiene que ver con una situación donde ninguno de los dos delincuentes confiesa: s_2(n.c, n.c). La tercera mejor alternativa en orden de preferencias corresponde a una situación en la que tanto el jugador fila como el jugador columna deciden confesar: s_3(c, c). Finalmente, la combinación estratégica menos deseada de todas las posibles es en la cual él calla y su compañero confiesa: s_4(n.c, c). Como consecuencia, la decisión del jugador fila en cuanto a confesar proviene de una relación de preferencia, es decir, de la manera como él cree que debe ordenar las diferentes combinaciones estratégicas: $s_1(c, n.c) \succ s_2(n.c, n.c) \succ s_3(c, c) \succ s_4(n.c, c)$.

La estrategia del jugador fila de confesar domina estrictamente a la de no confesar si y solo si, confesar le arroja un mejor pago frente a cualquiera de las dos estrategias del jugador columna, de modo que:

$$\pi_1(c, n.c) \succ \pi_1(n.c, n.c)$$

$$\pi_1(c, c) \succ \pi_1(n.c, c)$$

La primera ordenación indica que la estrategia confesar le representa un mejor pago que la estrategia de no confesar en el caso de que el jugador columna decide no confesar. Por otra parte, la segunda ordenación indica que la mejor estrategia del jugador fila en el caso de que el jugador columna decide confesar sigue siendo confesar. Por lo cual podemos concluir que la estrategia (correspondiente al jugador fila) que domina estrictamente es la de confesar.

Una estrategia estrictamente dominante es aquella que: $\pi_1(s_{i-1}, z_x) \succ \pi_1(s_i, z_x)$ para todo s_i y todo z_x. Donde s_i denota todos los elementos o alternativas del jugador 1 a excepción de s_{i-1} construida a partir del espacio de estrategias del jugador 1, $\mathcal{CT}^1$. Por otra parte, z_x representa todo vector de estrategia $z_x = (z_1, ..., z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, ...z_n)$ construida a partir de los espacios de estrategias de los demás jugadores, $(\mathcal{CT}^2, ..., \mathcal{CT}^{i-1}, \mathcal{CT}^i, \mathcal{CT}^{i+1}, ..., \mathcal{CT}^n)$.

Sin embargo, es necesario dotar a nuestro agente de otra relación entre pares de alternativas y tiene que ver con la preferencia débil, la cual se lee: a es débilmente preferida a b, si no se da el caso que b $\succ$ a. La estrategia a dominará débilmente a b si es al menos tan buena con respecto a todas las posibles combinaciones estratégicas, y estrictamente mejor en algunas situaciones estratégicas, pero no en todas.

Supongamos que tanto el jugador fila como el jugador columna se enfrentan a un juego el cual viene representado por la Matriz 2.[7]

Matriz 2.

J1,J2	Arriba	Abajo
Arriba	3	1
Abajo	3	0

En este caso, el jugador fila apela a la estrategia que domina débilmente de forma tal que π_1(Ar, Ar) $\succcurlyeq$ π_1(Ab, Ar) y π_1(Ar, Ab) $\succ$ π_1(Ab, Ab). Como consecuencia, la estrategia Arriba domina débilmente a la estrategia Abajo ya que es al menos tan buena con respecto a todas las posibles combinaciones estratégicas y estrictamente mejor con respecto a algunas situaciones estratégicas. Por lo cual, podemos concluir que la

[7] Por comodidad, dado que los pagos son los mismos tanto para el jugador fila como para el jugador columna, vamos a suministrar la información de los pagos del jugador fila únicamente.

estrategia (correspondiente al jugador fila) que domina débilmente es Arriba, por lo que una estrategia débilmente dominante es aquella que: $\pi_1(s_{y-1}, s_z) \succcurlyeq \pi_1(s_y, s_z)$ para todo s_z y $\pi_1(s_{y-1}, s_z^*) \succ \pi_1(s_y, s_z^*)$ para algunos s_z^*. Donde s_z representa todo vector de estrategia $s_z = \left(s_1, ..., s_{x-1}, s_x, s_{x+1}, ...s_n\right)$ construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $(\mathcal{CT}^2, ..., \mathcal{CT}^{i-1}, \mathcal{CT}^i, \mathcal{CT}^{i+1}, ..., \mathcal{CT}^n)$ y s_z^* corresponde a algunos vectores de estrategias $s_z^* = \left(s_1^*, ..., s_{x-1}^*, s_x^*, s_{x+1}^*, ...s_n^*\right)$ construida a partir de los mismos espacios de estrategias de los demás jugadores $(\mathcal{CT}^2, ..., \mathcal{CT}^{i-1}, \mathcal{CT}^i, \mathcal{CT}^{i+1}, ..., \mathcal{CT}^n)$.

Para terminar y de acuerdo a los dos casos mencionados anteriormente, decimos que s_i es una estrategia dominada estrictamente por s_{i-1}, mientras que s_{y-1} domina débilmente a s_y. Cuando tanto el jugador fila, como el jugador columna, encuentran una combinación estratégica dominante (estricta o débil) se dice que el juego tiene una estrategia de solución dominante. Tal es el caso de (confesar, confesar) como estrategia de solución dominante en el juego del dilema del prisionero. Esta es la combinación estratégica que corresponde a la estrategia dominante que selecciona cada participante.

4. Eliminación iterada de estrategias dominadas

Después de examinar las dos formas de representar las reglas que demanda un juego, entre ellas, una descripción de forma extensiva y otra de forma normal; después de estudiar la manera como los agentes ordenan las diferentes combinaciones estratégicas con el objeto de elegir qué estrategia seguir (sabiendo que el otro hará lo mismo) y de esta manera dar solución al juego, a continuación se introducirá una forma novedosa de dar solución a juegos descritos de forma normal o estratégica. Se trata de la eliminación iterada de estrategias dominadas.

Anteriormente, veíamos cómo (confesar, confesar) era una estrategia de solución dominante en el juego del dilema del prisionero, empero esto no quiere decir que todos los juegos necesariamente tengan estrategias de solución dominantes. Nos hemos enfrentado a una importante interrogante, ¿cómo solucionar juegos donde no existe una estrategia de solución dominante?

La eliminación iterada de estrategias dominadas es una de las soluciones, pero, ¿en qué consiste? Se trata de eliminar la o las estrategias más malas. Está basado en la idea de que los jugadores (tanto fila, como columna) no apelan al uso de las estrategias estrictamente dominadas. Consideremos el siguiente juego:

Es viernes en la noche, Claudia y Andrés quieren ir a cine a verse una película. Hay tres opciones de películas para ver, entre ellas, Veintiún gramos (21º), María llena eres de gracia (m) y Perdidos en Tokio (p). Suponga que la estructura de preferencias de Claudia y Andrés es la siguiente:

Claudia: $p \succ m \succ 21º$

Andrés: $21º \succ m \succ p$

Suponga además que el pago que recibe cada uno por ver la película que más prefiere es 3.2. Por otra parte, cada participante recibe un pago de 1.6 si ve la película que prefiere en segundo lugar. Por último, recibirán un pago de 0.8 si va a cine y se ve la película que menos desea. Aquí los números tres punto dos, uno punto seis y cero punto ocho representa los treinta y dos, dieciséis y ocho dientes que dejan ver al expresar la felicidad cuando salen de la sala de cine. Los pagos asociados a cada situación no tienen importancia, sin embargo, lo que importa es que la alternativa más preferida le represente al jugador el pago más alto y que la alternativa menos preferida represente el pago más bajo.

Otra regla en el juego que vale la pena resaltar tiene que ver con la forma que se han puesto de acuerdo ambos jugadores para elegir la película. Vamos a suponer que Claudia tiene la oportunidad de desechar primero una entre las tres opciones, por otra parte Andrés se encarga de desechar una de las dos opciones restantes. Por lo tanto, ya que Andrés tiene que escoger entre dos alternativas de las tres opciones posibles, tendrá ocho estrategias ($2^3 = 8$) en total de donde escoger.

En la matriz de pagos que se representa a continuación (Ver Matriz 3) vamos a suponer que si el jugador fila (J_1) elige 21º es porque esta desechando la posibilidad de ver esa película. De esta manera, el jugador columna (J_2) tendrá la oportunidad de elegir entre desechar Perdidos en Tokio o María llena eres de gracia, si elige Perdidos en Tokio, esto quiere decir que la película que verán será María llena eres de gracia. Por ejemplo, si el conjunto de estrategias representativas para el jugador columna (J_2) corresponde a {p, 21º, m} esto significa que el jugador columna elige desechar Perdidos en Tokio cuando el jugador fila previamente ha desechado la película Veintiún gramos, por lo cual la película que irán a ver será María llena eres de gracia.[8] Por otro lado, el jugador desecha Veintiún gramos cuando el jugador fila previamente ha desechado María llena eres de gracias y terminarían viendo perdidos en Tokio.[9] Finalmente, desechará María llena eres de gracias cuando el jugador fila previamente ha desechado Perdidos en Tokio y terminar en una sala de cine viendo Veintiún gramos.[10] A continuación representaremos la matriz de pagos correspondiente al juego anterior:

Matriz 3.

$J_1 \backslash J_2$	p,p,m	p, 21º,m	p,p, 21º	p, 21º, 21º	m,p,m	m, 21º,m	m,p, 21º	m, 21º, 21º
21º	1.6 , 1.6	1.6 , 1.6	1.6 , 1.6	1.6 , 1.6	3.2, 0.8	3.2 , 0.8	3.2 , 0.8	3.2 , 0.8
m	0.8 , 3.2	3.2 , 0.8	0.8 , 3.2	3.2 , 0.8	0.8 , 3.2	3.2 , 0.8	0.8 , 3.2	3.2 , 0.8
p	0.8 , 3.2	0.8 , 3.2	1.6 , 1.6	1.6 , 1.6	0.8 , 3.2	0.8 , 3.2	1.6 , 1.6	1.6 , 1.6

Después de representar las reglas que demanda el juego anterior a partir de una descripción de forma normal (estratégica), y después de presentar brevemente el orden en la estructura de preferencias de cada agente con el objeto de resolver la interrogante

[8] Ver pagos que aparecen en la casilla correspondiente a la fila uno columna dos de la Matriz 3.
[9] Ver pagos que aparecen en la casilla correspondiente a la fila dos columna dos de la Matriz 3.
[10] Ver pagos que aparecen en la casilla correspondiente a la fila tres columna dos de la Matriz 3.

"cuánto ganan los participantes en un juego por cada combinación estratégica", a continuación utilizaremos la eliminación iterada de estrategias dominadas para así dar solución al juego.

Solución

Recordando el supuesto de que Claudia es la primera en descartar una de las tres películas para ver y que Andrés tendrá la oportunidad de elegir cuál película ir a ver entre las dos posibilidades restantes, entonces:

Si Andrés prefiere ver Veintiún gramos a ver Perdidos en Tokio, prefiere ver María llena eres de gracia a ir a ver Perdidos en Tokio, y además prefiere ver Veintiún gramos a irse a ver María llena eres de gracia, la estrategia que dominará a todas las demás será (p, p, m). En otras palabras, si Claudia descartara de la lista de tres alternativas la película Veintiún gramos, Andrés descartaría la película Perdidos en Tokio y de esta manera ir a ver María llena eres de gracia –segunda mejor opción-. Si por el contrario Claudia descartara la película María llena eres de gracia, Andrés elegiría sacar a Perdidos en Tokio de la lista restante y podría darse el lujo de ir a ver Veintiún gramos. Y por último, si Claudia decidiera descartar Perdidos en Tokio, Andrés retiraría de la lista a María llena eres de gracia y de esta manera tener la oportunidad de ver Veintiún gramos. Después de eliminar todas las posibles estrategias dominadas el juego se reduce a la Matriz 4., representada a continuación:

Matriz 4.

J1\J2	p,p,m
21º	1.6 , 1.6
m	0.8 , 3.2
p	0.8 , 3.2

Aplicando sus conocimientos acerca de la dominancia estricta, y teniendo en cuenta que el jugador fila es el primero en descartar una de las tres películas para ver, entonces

María llena eres de gracia y Perdidos en Tokio son estrategias dominadas por la estrategia Veintiún gramos. En otras palabras, lo mejor que Claudia puede hacer es descartar Veintiún gramos, ya que es el plan de cine menos atractivo para ella. El resultado por medio de la eliminación iterada de estrategias dominadas es que Claudia descarte primero Veintiún gramos, y que después Andrés descarte Perdidos en Tokio. Al final ambos irán a ver María llena eres de gracia.

A continuación se presentará un tratamiento más formal del concepto de eliminación iterada de estrategias dominadas. Denotamos CT^i como el conjunto total de estrategias del jugador i y CTD^i como el conjunto total de estrategias estrictamente dominadas del jugador i. Adicionalmente, CT^i esta compuesta por todas las posibles estrategias del participante i, sean s_i', s_i'', s_i''' todas las posibles estrategias del jugador i. Por lo tanto, si el juego se lleva acabo por rondas[11] podemos representar el total del conjunto de estrategias estrictamente dominadas del jugador i, CTD^i en la ronda número uno como sigue,

CTD^i (rI) = { $s_i'' \in \mathcal{CTD}^i : s_i''$ corresponde a la única estrategia débilmente dominada para el jugador i}

De acuerdo a la conducta maximizadora y racional del jugador i él no elige jugar estrategias dominadas, es decir, estrategias contenidas en el conjunto total de estrategias estrictamente dominadas, CTD^i –-y lo mismo ocurre con los demás participantes-. El manejo formal del concepto de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas para el jugador i en la ronda uno se representa de modo que s_i' en $\mathcal{CTD}^i - \mathcal{CT}^i$ siempre es al menos tan bueno, y de vez en cuando es estrictamente mejor a s_i'', a condición de que los demás participantes del juego también eliminen las estrategias dominadas en su respectiva ronda.

---

[11] Como sucede en el juego de Claudia y Andrés.

$\pi_i(s_i', s_{-i}) \succcurlyeq \pi_i(s_i'', s_{-i})$ para todo vector de estrategia $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n)$

construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $(\mathcal{CT}^1, \ldots \mathcal{CT}^{i-1}, \mathcal{CT}^{i+1}, \ldots \mathcal{CT}^n)$

$\pi_i(s_i', s_{-i}^*) \succ \pi_i(s_i'', s_{-i}^*)$ para algún vector de estrategia $s_{-i}^* = (s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots s_n^*)$

construida a partir de los espacios de los otros jugadores $(\mathcal{CT}^1, \ldots \mathcal{CT}^{i-1}, \mathcal{CT}^{i+1}, \ldots \mathcal{CT}^n)$.

El proceso se repite con el fin de eliminar cualquier nueva estrategia que se encuentre dominada. Si el juego llegase a una situación en la que finalmente queda una sola combinación estratégica, $(s_1', \ldots, s_{i-1}', s_i', s_{i+1}', \ldots s_n')$ construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $(\mathcal{CT}^1, \ldots \mathcal{CT}^{i-1}, \mathcal{CT}^i, \mathcal{CT}^{i+1}, \ldots \mathcal{CT}^n)$ se dice que el juego tiene solución por medio de la eliminación iterada de estrategias dominadas. Sin embargo, si después de varias rondas algunas estrategias sobreviven a la eliminación iterada de las estrategias, no se puede predecir nada sobre el desarrollo del juego.

Anteriormente vimos cómo, por medio de un tratamiento formal, se puede representar la eliminación iterada de estrategias dominadas. Lo que yace detrás de este sencillo concepto de solución es que todo agente racional siempre elegirá aquella estrategia al menos tan buena, y en algunas ocasiones mejor, que todas las alternativas restantes. En otras palabras, no utilizan estrategias dominadas. Empero, a continuación vamos a examinar dos inconvenientes que pueden presentarse al utilizar este sencillo concepto de solución.

Cada vez que un participante elige eliminar la o las estrategias dominadas para un número arbitrario de rondas, es necesario suponer no sólo que cada jugador es racional, sino levantar un supuesto adicional sobre lo que cada jugador sabe acerca del otro, es decir, acerca de la información de dominio público. Es necesario suponer que todos los jugadores saben que todos son racionales y que todos los jugadores saben que todos saben que todos los jugadores los racionales, y así *ad infinitum*.[12] Cabe preguntarse, ¿por qué no simplemente suponer que todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales? La razón tiene que ver con una idea sencilla pero de importantes implicaciones. Cuando un jugador conoce las reglas no emprende o asume algunos comportamientos. Empero, si ese mismo jugador no esta seguro de que los demás jugadores saben que él conoce las reglas, no estará seguro de que los demás jugadores sepan que él no emprenderá ni asumirá dichas comportamientos. Este tipo de incertidumbre genera dudas en la mente de los jugadores y modifica dramáticamente lo que cada uno termina por hacer. De aquí la importancia de suponer información de dominio público en todos los niveles (*ad infinitum*).

Supongamos un juego de dos participantes en el que cada uno le confía al otro lo que va hacer. En este sentido, los resultados del juego serán información de dominio público. Sin embargo, los resultados no serán una realidad si suponemos solamente que los participantes conocen lo que hará el otro. Es necesario que la racionalidad de los jugadores sea de dominio público en todos sus niveles para asegurar que otro tipo de comportamientos no desvíen los resultados. Si cada jugador no esta seguro de lo que los demás participantes saben de él, en consecuencia, no estará seguro acerca de si los demás participantes saben que él no emprenderá dichos comportamientos -que lo único que hacen es desviar los resultados-. No estar seguro que los demás participantes saben que él no emprenderá un comportamiento distinto del que no desvía los resultados es costoso. Con un ejemplo intentaremos ilustrar este primer inconveniente.

Matriz 5.

$J_1 \backslash J_2$	B	N.B	Q.Q
B	3 , 4	0 , 6	4 , 6
N.B	2 , 4	1 , 4	4 , 3
Q.Q	1 , 4	1 , 1	6 , 1

[12] Véase la definición de información de dominio público en Aumann, R. “Agreeing to Disagree”. The Annals of Statistics 1976, Vol. 4, No. 6, 1236-1239.

Como se muestra en la Matriz 5, el jugador columna tiene garantizado un pago fijo de 4 si juega la estrategia (B). Sabe que puede obtener un pago equivalente a 6 cuando juega la estrategia (N.B), sin embargo, corre el riesgo de recibir un pago equivalente a 1 si el jugador fila juega la estrategia quedarse quieto (Q.Q). Pero para ello es necesario que el jugador fila crea que el jugador columna va a elegir (Q.Q). La estrategia (B) deja de ser un buena estrategia si el jugador columna esta seguro de que el jugador fila nunca va a escoger jugar (Q.Q). Pero para que el jugador columna este seguro de que el jugador fila nunca va a escoger jugar (Q.Q) es necesario que él a su vez este seguro que él nunca elegirá la estrategia (Q.Q). Entonces, ¿por qué es necesario que el jugador columna este seguro que nunca elegirá la estrategia (Q.Q) para que este seguro de que el jugador fila nunca va a elegir (Q.Q)?

El segundo inconveniente que tiene el proceso de eliminación de estrategias dominadas, es que el juego no tiene solución, bien sea por que todas las estrategias en el juego sobreviven al proceso de eliminación, o por qué dependiendo del orden que se utiliza, algunas estrategias sobreviven al proceso de eliminación. En consecuencia, el proceso de eliminación no permite ninguna predicción sobre el desarrollo del juego. Aunque el juego a continuación es previo al movimiento feminista, nos ayudará a ilustrar el segundo inconveniente del proceso de eliminación iterada de estrategias dominadas.

El siguiente juego recibe el nombre de «batalla de los sexos». Se trata de una pareja de esposos que se van de viaje juntos e infortunadamente quedan separados en una ciudad que no conocen. Cada uno debe decidir independientemente del otro a dónde ir por la noche con la esperanza de encontrarse. Sentados, desayunando, la pareja había descartado una serie de alternativas para la velada, excepto un partido de fútbol y una función de ballet. Las preferencias de los esposos sobre estos dos espectáculos se representan a continuación en la siguiente matriz de pagos (Ver Matriz 6).

Matriz 6. Presentación en Forma Normal o Estratégica del Juego "La Batalla de los Sexos"

J1\J2	Futbol	Ballet
Futbol	1 , 2	0 , 0
Ballet	0 , 0	2 , 1

Para no entrar en una discusión de género y estereotipos tradicionales, simplemente vamos a decir que el jugador columna prefiere claramente ir a fútbol frente a la opción de asistir a una función de ballet, y que el jugador fila prefiere asistir a un función de ballet que ir a ver fútbol. En este juego no hay estrategias dominadas para ser eliminadas por lo que el proceso de eliminación iterada no permite ninguna predicción sobre el desarrollo del juego.

Ejercicios propuestos

1. En el mercado de televisión privada colombiano, los dos principales operadores son RCN y Caracol televisión. Las dos empresas se disputan la mayor participación en la audiencia y tienen que decidir entre presentar en el horario estelar de las nueve de la noche novelas o realities. Se sabe que Caracol tiene amplia experiencia en la producción de realities, por lo tanto, si ambos canales decidieran transmitir este tipo de programas, Caracol se quedaría con el 55% de la audiencia. RCN por su parte, es el mejor productor de novelas por lo que si ambos canales decidieran presentar novelas, este se quedaría con el 55% de la audiencia. El porcentaje de la audiencia que obtenga el canal determina la magnitud de sus ganancias. Ambas cadenas tomaran su decisión de manera simultánea e independiente. A continuación (Ver Matriz 7) se muestra el juego en forma normal, usted debe resolverlo y determinar qué deben hacer cada una de estas cadenas para mantener un nivel de audiencia que les rinda las mayores utilidades posibles.

Matriz 7. Juego de la competencia por el mercado de televisión en forma normal.

C1\C2	Realities	Novelas
Realities	(55%,45%)	(52%,48%)
Novelas	(50%,50%)	(45%,55%)

Solución

Para determinar qué debe hacer cada una de las cadenas, debemos comenzar ordenando las estrategias en orden de preferencia. En cuanto al canal Caracol, C1, sabemos que la estrategia que le retribuye el mayor pago es la de producir el reality cuando su competencia RCN, C2, decide producirlo también: s_1(R,R). La estrategia que le sigue en orden de preferencia es producir el reality cuando su competencia decida emitir la novela: s_2(R,N). La tercera mejor opción es la de producir la novela mientras su competencia decide emitir un reality: s_3(N,R). Finalmente, la estrategia menos deseada para el jugador fila, C1, es en la que tanto él como su competencia, el jugador columna, producen la novela: s_4(N,N). La estrategia del canal Caracol de producir el reality domina a la de hacer una novela si y solo si le arroja un mejor pago frente a cualquiera de las dos estrategias que pueda seguir su competencia, RCN.

π_1 (R,R) > π_1 (N,R)

π_1 (R,N) > π_1 (N,N)

De esta manera comprobamos que para el jugador fila su estrategia dominante es producir el reality.

En cuanto al jugador columna, RCN, al ordenar sus acciones de acuerdo a sus preferencias, es claro que la mejor estrategia de este jugador es la de producir la novela cuando su competencia hace lo mismo: s_1(N,N). Su segunda mejor opción es presentar un reality cuando Caracol produce una novela: s_2(N,R). La tercera mejor estrategia del jugador columna es producir la novela cuando su competencia decide presentar un reality: s_3(R,N). Y finalmente, lo último que preferirá hacer es producir un reality cuando su competencia también lo hace: s_4(R,R). Por lo anterior, podemos concluir que producir la novela será una estrategia dominante para el jugador dos, RCN, siempre y cuando se cumpla que:

π_2 (N,N) > π_2(N,R)

π_2 (R,N) > π_{12} (R,R)

De esta forma llegamos a la solución del juego en la que cada jugador opta por seguir su mejor estrategia, es decir, Caracol produce un reality y RCN decide emitir una novela. En este caso encontraremos en el cuadrante superior de la matriz, los pagos que obtiene cada jugador una vez pone en practica su estrategia, son (52%,48%).

2. Suponga que nos encontramos en la situación del juego anterior en la que existen dos canales de televisión que se disputan la mayor participación en el mercado debido a que una mayor audiencia les genera mayores utilidades. La presentación normal o estratégica del juego se muestra en la Matriz 8. En este caso los pagos corresponden a las utilidades que percibe cada compañía cuando pone en acción su estrategia.

Matriz 8. Juego de la competencia por el mercado de televisión en forma normal

C1\C2	Realities	Novelas
Realities	(10%,-10%)	(4%,-4%)
Novelas	(0%,0%)	(-10%,10%)

Solución

Al igual que en el juego anterior, lo primero que debemos hacer es ordenar las estrategias de cada uno de los jugadores de acuerdo al grado de preferencia de las mismas. En el caso del jugador uno, Caracol, es claro que su mejor estrategia es producir el reality cuando su competencia RCN, C2, decide producirlo también: s_1(R,R). La estrategia que le sigue en orden de preferencia es producir el reality cuando su competencia decida emitir la novela: s_2(R,N). La tercera mejor opción es la de producir la novela mientras su competencia decide emitir un reality: s_3(N,R). Finalmente, la estrategia menos deseada para el jugador fila, C1, es en la que tanto él como su competencia, el jugador columna, producen la novela: s_4(N,N). De esta manera producir el reality será la estrategia dominante para el jugador fila siempre y cuando se cumpla que:

π_1(R,R) > π_1 (N,R)

π_1 (R,N) > π_1 (N,N)

Desarrolle usted la ordenación por preferencia de las estrategias del jugador columna. Si hace el ejercicio correctamente llegara a la conclusión de que la mejor estrategia para el canal RCN es producir una novela independientemente de lo que decida hacer el canal Caracol.

Por lo tanto la solución del juego se da en el cuadrante superior de la matriz en el que el jugador fila, Caracol, produce el reality y el jugador columna, RCN, produce la novela. Los pagos que obtiene cada jugador una vez que implementa su estrategia son: (4%,-4%).

3. En algunos mercados, los avances tecnológicos juegan un papel muy importante debido a que las empresas que deciden adquirirlos consiguen tener una ventaja sobre sus competidores, esta ventaja competitiva se da por ejemplo en la industria hospitalaria, en la que avances como la imagen por Resonancia Magnética (RM), les permite a los doctores observar lesiones de una forma en la que antes no era posible. Por lo tanto, los centros hospitalarios que implementaran este tipo de tecnología lograban obtener una ventaja competitiva con respecto a los otros hospitales. La Matriz 9 representa este juego de forma normal, aquí cada empresa se enfrenta a la decisión de adoptar o no una nueva tecnología, la letra *a* representa las ganancias que percibe la empresa cuando es la única en adoptar la tecnología y *-a* son las perdidas en las que incurriría la empresa 2 cuando no adopta la tecnología dado que la empresa 1 lo hizo.

Matriz 9. Juego de la competencia por tecnología en forma normal o estratégica.

H1\H2	Nueva Tecnologìa	Quedarse igual
Nueva Tecnologìa	(O,O)	(a,-a)
Quedarse igual	(-a,a)	(O,O)

<u>Solución</u>

Al igual que en los juegos anteriores se llega a la solución del juego por medio de la ordenación de estrategias según su preferencia. Después de realizar el ejercicio de ordenación usted muy seguramente llegará a la conclusión de que lo mejor para ambos jugadores es adquirir la nueva tecnología por lo tanto nos encontraremos en el cuadrante superior izquierdo en el que los jugadores reciben pagos de (0,0).

5. Bibliografía

- Shubik, Martín. 1984. Economía Política: Un enfoque desde el punto de vista de la teoría del juego. Textos de Economía Fondo de Cultura Económica.
- Dutta K., Prajit. 1999. Strategies and Games Theory and Practice.
- Neumann Von John, Morgenstern Oskar. 1964. Theory of Games and Economic Behavior. Science Editions.
- Gardner Roy. 2003. Games for Business and Economics Segunda Edición. WILEY.
- Gibbons Robert. 1992. Un Primer Curso de Teoría de Juegos.