

Departamento de Arquitectura y Construcción
Navales
Escuela Técnica Superior de Ingenieros
Navales.

Nuevas herramientas de diseño de formas de
buques basadas en códigos de flujo potencial.

Autor: Antonio Souto Iglesias, Ingeniero Naval.

Director: Juan Miguel Sánchez Sánchez, Doctor Ingeniero Naval.

Año 2001

Índice General

Prólogo	5
Resumen	6
Abstract	7
1 Introducción	9
1.1 El diseño de las formas de un buque.	9
1.2 La resistencia por formación de olas.	10
1.3 Los métodos de paneles.	11
1.4 Objetivo de la tesis.	13
1.5 Organización de esta tesis.	13
2 Métodos de paneles para la estimación de la resistencia por formación de olas	16
2.1 Delimitación del problema.	16
2.2 Distinción de flujo viscoso y flujo con superficie libre.	18
2.3 El problema del flujo potencial.	19
2.3.1 Situación de los ejes	20
2.3.2 Formulación matemática	20
2.3.3 Potencial de perturbación.	22
2.3.4 Resolución numérica	23
2.3.5 Métodos de paneles de orden alto.	29
2.4 El problema del flujo potencial con superficie libre.	37
2.4.1 Linealización de Dawson de la condición de contorno.	38
2.4.2 Discretización de la condición de Dawson.	43
2.4.3 Linealización de Bruzzone de la condición de contorno.	47

2.4.4	Derivación numérica y condición de radiación en la formulación de Bruzzone.	51
2.4.5	Discretización de la condición de Bruzzone.	56
2.4.6	Comparación de resultados entre las condiciones de Dawson y Bruzzone.	58
3	Flujos en popas con espejo.	69
3.1	Introducción	69
3.2	Fenómenos físicos involucrados.	69
3.2.1	Flujo convencional con popa de espejo seca.	70
3.2.2	Flujo con popa de espejo seca.	70
3.2.3	Flujo con popa de espejo mojada.	72
3.3	Modelo matemático y revisión de trabajos realizados.	72
3.4	Implementación para el flujo con espejo seco -dry transom-.	74
3.4.1	Mallado.	74
3.4.2	Expansión de Taylor en el borde de salida.	76
3.4.3	Expansión de Taylor en el borde de salida mejorada.	77
3.4.4	Condición linealizada ETSIN 1.	78
3.4.5	Condición linealizada ETSIN 2.	79
3.4.6	Resultados.	79
4	Estimación de la resistencia por formación de olas.	100
4.1	Integración de presiones.	100
4.2	Estudio de secciones del tren de olas.	100
4.2.1	Introducción.	100
4.2.2	Modelo general del oleaje	101
4.2.3	Resistencia por olas teórica.	103
4.2.4	Espectro de la olas libres.	104
4.2.5	Descripción general de los métodos.	106
4.2.6	Métodos de corte longitudinal.	108
4.3	Comparación de resultados.	111
4.4	Conclusiones.	113
5	Definición de una metodología de trabajo.	115
5.1	Introducción.	115
5.2	Modelado de geometrías.	115
5.3	Generación de mallas.	117
5.3.1	Introducción	117

5.3.2	Mallado del casco.	119
5.3.3	mallado de la superficie libre.	120
5.4	Módulo de cálculo.	122
5.5	Postproceso de datos. Definición de salidas estándar.	123
5.5.1	Perfiles de ola.	124
5.5.2	Distribuciones de presiones y/o velocidades en la carena.	125
5.5.3	Distribuciones de elevaciones y/o velocidades en la superficie libre.	126
5.5.4	Coefficientes de resistencia por formación de olas.	127
5.6	Interpretación de resultados y optimización de diseños.	127
6	Validación de resultados.	133
6.1	Introducción.	133
6.2	Modelo Series 60.	134
6.3	Buque de carga general de de 86 m de eslora.	135
6.4	Patrullera.	161
6.5	Fragata DTMB 5415.	172
7	Líneas de trabajo para el futuro.	197
7.1	Métodos potenciales con condición de superficie libre no lineal.	198
7.1.1	Condición débilmente no lineal de superficie libre.	199
7.1.2	Resultados numéricos.	202
7.2	Métodos de flujo viscoso.	204
7.2.1	Formulación del problema matemático	205
7.2.2	Modelos numéricos del problema planteado	210
7.2.3	Método modificado de las características.	211
7.2.4	Métodos del conjunto de nivel "level set".	213
7.3	El problema de "wash wake" para buques rápidos.	218
7.3.1	Introducción.	218
7.3.2	Causas y efectos perjudiciales.	218
7.3.3	Criterios de aceptación.	220
7.3.4	Metodología de cálculo.	221
7.3.5	Resumen.	221
8	Conclusiones y aportaciones.	223
8.1	Aportaciones.	223
8.2	Conclusiones.	224

Prólogo.

Escribir esta tesis no ha sido un fin en si mismo, sino el resultado de un trabajo, en el que, a pesar de su aridez matemática y computacional, se ha tratado de no perder nunca de vista que de lo que se trata siempre en estas cosas es de construir una herramienta de optimización de diseño.

Por otro lado, esta tesis lleva mi firma pero es un punto y seguido en la labor de un grupo que ha venido funcionando empujado por la ilusión de muchas personas, entre las que además de personal docente figuran un montón de estudiantes que han pasado como becarios por el Canal de Experiencias de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales, y que han trabajado en este área. A ellos se la dedico.

- Jaime Leirado.
- Pablo Roca.
- Benoit Gorin.
- José Ramón Rodríguez.
- Miguel Taléns.
- Francisco Mata.
- Pablo Medina.
- Juan Antonio Clemente.
- Luis Miguel Labarra.
- José Antonio Ortiz.
- Victor González.
- Sebastián Abril.

Resumen

Esta tesis trata sobre técnicas de optimización de formas de buques en lo que se refiere a resistencia al avance utilizando métodos potenciales con condición lineal de superficie libre. El objetivo de la tesis es concebir, implementar y validar un sistema de optimización de formas de buques utilizando este tipo de técnicas. Para conseguir este objetivo empezamos estudiando los métodos potenciales y justificando que la única componente de la resistencia que podremos de algún modo predecir será la que se refiere a la formación de olas. Dentro de los métodos potenciales hacemos un estudio exhaustivo de los métodos de paneles y dentro de éstos, de los que realizan una linealización de las condiciones no lineales de superficie libre. Realizamos una comparación entre dos familias de estos métodos y seleccionamos en base a esta comparación el que usamos el resto de la tesis. Realizamos después un estudio amplio y muy detallado de los problemas con popa de espejo abordados desde la óptica del flujo potencial, que permite obtener informaciones de carácter global sobre el flujo muy valiosas cuando se trata de optimizar formas en lo que se refiere a la resistencia por formación de olas.

Aunque a partir de los métodos potenciales obtenemos el campo de velocidades, y de éste, el de presiones, integrar estas presiones para obtener la resistencia por formación de olas puede ser problemático; abordamos este cálculo mediante el estudio de secciones longitudinales del tren de olas obtenido a partir del campo de velocidades. Los resultados no son lo suficientemente buenos y el sistema de evaluación de formas pasa de objetivos absolutos a relativos en el sentido de que la optimización se realiza a partir de la comparación de las mismas. Explicamos cómo realizar dicha comparación.

Por último, realizamos un completo estudio de validación a partir de datos experimentales constatando la bondad de los resultados, lo que habilita a estos métodos como herramienta ingenieril de optimización.

Abstract

This thesis treats techniques of optimization of ship hull forms regarding forward resistance. It uses potential methods with free surface linear condition. The objective of the thesis is to conceive, to implement and to validate a system of optimization of ship hull forms using these types of techniques. In order to obtain this objective we begin by studying the potential methods and then show that the only component of the resistance which we are able to predict is the one regarding the formation of waves. Within the potential techniques, we make an exhaustive study of panel methods. Within these, we focus on those that consider a linearization of the free surface nonlinear conditions. We make a comparison between two families of these methods and on the basis of this comparison select the one that we use for the rest of the thesis. Later we make an ample and very detailed study of the transom stern flows from the point of view of the potential assumption. This allows us to obtain very valuable global flow information when the goal is to optimize forms regarding wave resistance.

Although from potential methods we obtain the velocity field, and hence the pressure fields, to integrate these pressure fields to obtain the wave resistance can be problematic. Therefore, we approach this problem by means of the study of the longitudinal sections of wave patterns, also obtained from the velocity field. From this point we see that the results are not good enough to predict the wave resistance accurately. Consequently we see that the system of evaluation of forms abandons absolute objectives in the sense that the optimization is made from the comparison of different shapes. We then explain how to make this comparison.

Finally, we make a complete study from the experimental data to validate the evaluation system. From this study we state that the results qualify this system as an engineering tool of optimization.

Capítulo 1

Introducción

1.1 El diseño de las formas de un buque.

El ingeniero naval dispone hoy en día de herramientas de análisis por ordenador que facilitan la definición y selección de múltiples alternativas en el diseño del buque. Dentro del diseño de las formas, las hay que permiten mejorar las características del buque en aspectos relativos a maniobrabilidad, las que se refieren a aspectos de comportamiento en la mar, y sobre todo las que permiten optimizar la resistencia al avance. La resistencia a la velocidad de servicio determina en gran medida la potencia del motor, y por tanto el consumo de combustible, que es uno de los factores económicos más importantes en los costes operativos del buque. Minimizar la resistencia, es, por tanto, un apartado importante en el diseño de un buque.

La resistencia es, en su mayor parte, una resultante de las fuerzas hidrodinámicas, que dependen mucho de las formas del buque y de sus apéndices. Optimizar las formas desde un punto de vista hidrodinámico es un problema complicado, no solamente por las muchas restricciones impuestas por las exigencias prácticas - dimensiones principales, peso muerto, capacidad de carga, costes constructivos,... - y por los requerimientos de estabilidad, comportamiento en olas, maniobrabilidad, etc, sino también por la influencia de las condiciones ambientales, como el viento y la mar, que pueden conducir a un aumento sustancial de la potencia requerida, comparada con la que se necesita en un mar en calma. Se conseguirían costes operativos mínimos diseñando el buque para un comportamiento que fuese bueno bajo un rango amplio de situaciones. Esto se consigue, sin embargo muy pocas veces,

porque es difícil cuantificar el efecto de todos los parámetros que están involucrados; y también porque hay grandes limitaciones en el tiempo disponible en la etapa de proyecto.

La simplificación más habitual consiste en considerar de modo separado la resistencia en aguas tranquilas y el comportamiento del buque en olas. La optimización hidrodinámica del diseño del buque para buques mercantes convencionales empieza por conocer las necesidades de potencia en aguas tranquilas, que pasa a ser un límite inferior a la potencia en condiciones prácticas. El efecto del estado de la mar se toma en cuenta como una "resistencia añadida en olas". En principio, esta forma de abordar el problema conduce a un diseño que se acerca al óptimo en las condiciones prácticas, y además conduce a cumplir las condiciones de proyecto que de modo habitual exigen una velocidad mínima durante las pruebas en aguas tranquilas.

1.2 La resistencia por formación de olas.

La resistencia en aguas tranquilas tiene varias componentes consecuencia de otros tantos fenómenos observables que en muchos casos están además relacionados entre sí: Una resistencia viscosa, asociada con la generación de la capa límite y la estela; una resistencia por formación de olas relacionada con el tren de olas que genera el movimiento; una resistencia debida al efecto del aire y del viento en el casco y la superestructura; una resistencia añadida consecuencia de la aparición del spray, e incluso una resistencia inducida por la aparición de efectos dinámicos.

Para la mayoría de los buques mercantes, la componente viscosa es la más importante. Crece con el cuadrado de la velocidad de avance, y aumenta progresivamente al llenar las formas, debido al aumento de la superficie mojada. Los fenómenos de separación a veces causan un aumento drástico de la resistencia viscosa.

La resistencia por formación de olas supone normalmente entre el diez y el sesenta por ciento de la resistencia total en aguas tranquilas. Mientras que a bajas velocidades, la resistencia por formación de olas es prácticamente nula, crece muy rápidamente con la velocidad, y para los buques de desplazamiento rápidos, puede dominar a la resistencia viscosa. Además esta componente de la resistencia es muy sensible a pequeñas variaciones de las formas, por

lo que la predicción y la manipulación de las formas en la etapa de diseño orientada a optimizar dicha resistencia es un asunto muy importante.

Los primeros pasos en el estudio de las olas generadas por el buque fueron dados por Kelvin[23] hacia 1880. En su teoría, la acción del buque en el agua era reemplazada por la de un punto de presión moviéndose a lo largo de la superficie del agua. Los desarrollos posteriores a partir de esta teoría fueron realizados por Havelock[13], y por otros. Las expresiones obtenidas para las olas del buque, y para la resistencia por formación de olas tienen en cuenta la distribución de presión en la superficie del fluido, pero no están claramente relacionadas con las formas del buque.

La dependencia de resistencia por formación de olas con las formas del buque fue estudiada por primera vez por Michell en 1898. Michell[32] trató de calcular el flujo en torno al buque, a partir de éste la distribución de presiones, e integrando estas presiones en la carena, la resistencia por olas. El método de Michell[32] se podía aplicar a buques finos. Estos trabajos fueron continuados por Havelock, y sobre todo, a mediados de los 70 por Dawson[7] y Gadd[10], como más adelante explicaremos.

Sin embargo, a pesar de estos estudios teóricos, todavía hoy en día, la predicción y optimización de la resistencia por formación de olas necesita del ensayo de modelos. La formación de olas es un fenómeno que admite una reproducción a escala suficientemente exacta para su estimación. Para un ojo experto, el aspecto del tren de olas da información que permite modificar las formas. Sin embargo no hay mucha ciencia en ello, y sí habilidades adquiridas con la experiencia, difícilmente transmitibles.

1.3 Los métodos de paneles.

Aunque como acabamos de comentar existen modelos físico-matemáticos sencillos para los fenómenos de generación y de propagación de olas, la solución de dichos modelos no se puede conseguir analíticamente. Se han dedicado muchos esfuerzos a encontrar simplificaciones que conservasen la esencia del problema y que condujesen a modelos matemáticos que pudiesen ser resueltos analíticamente. La simplificación más importante es la de desprestigiar la viscosidad en los fenómenos en los que la formación de olas es el problema dominante. Ello conduce en este caso a poder afirmar que la velocidad deriva

de un potencial escalar a través de su gradiente, de ahí el nombre de flujo potencial con que se describe este tipo de problemas. Otra simplificación sustituye las condiciones de contorno no lineales que se imponen en la superficie libre por otras lineales. Se han encontrado simplificaciones de este tipo que conducen a soluciones analíticas para buques finos[32], pero ninguna da resultados razonables cuando se aplica a buques convencionales.

Sin embargo, en las últimas décadas, el uso del ordenador en la resolución de problemas numéricos ha permitido abordar la resolución numérica de estos problemas físicos. El primer sector donde se utilizaron estos métodos fue el de la industria aeronáutica, que empezó a desarrollarlos a finales de los años 50 y principios de los 60. Estos métodos eran los de paneles con singularidades de Rankine (fuentes), y permitían calcular soluciones de flujo potencial en torno a cuerpos tridimensionales arbitrarios. El primer trabajo importante se debe a Hess y Smith[15]. Estos métodos utilizaban discretizaciones de la geometría basadas en paneles planos, y de las funciones de singularidades como fuentes de valor constante en esos paneles. Hess también fue el primero en usar paneles parabólicos y fuentes que varían linealmente[16]. Estos métodos se usaron para predecir el flujo en torno a buques, siempre que la superficie libre se tratase como una pared rígida. Sin embargo, es muy importante, como ya hemos comentado, calcular las olas, y en ese sentido se han propuesto modelos que tienen en cuenta la superficie libre que conducen a problemas numéricos resolubles, para buques lentos. Los primeros modelos, de mediados de los 70, se deben a Gadd [10] y sobre todo a Dawson [7] y han demostrado conducir a resultados bastante realistas. Desde 1980 se han hecho mejoras en la simplificación de Dawson, y las implementaciones informáticas de estos algoritmos se usan ingenierilmente en todo el mundo. Los métodos de este tipo se llaman de paneles porque discretizan en paneles cuadrangulares la obra viva y parte de la superficie libre en torno al mismo. Son métodos en los cuales se ha linealizado la condición no lineal de superficie libre, y conducen a la resolución de un sistema lineal cuyas incógnitas son las intensidades de las singularidades.

El primer logro de esta tesis ha sido el desarrollo en el Canal de la Escuela de un método de este tipo[29] [2][3] que se ha venido usando como herramienta para la optimización de formas[30], complementando a los propios ensayos. Las herramientas informáticas de expresión gráfica permiten la visualización de las distribuciones de velocidades y presiones, y perfiles de ola, datos que no se pueden conseguir fácilmente a partir de los ensayos.

1.4 Objetivo de la tesis.

El objetivo de esta tesis es construir y validar un sistema de evaluación de formas de buques en lo que se refiere a resistencia por formación de olas. En ese sentido se empieza describiendo el método elegido, que es un potencial con condición lineal de superficie libre. Luego se describe el caso particular de los buques con popa de espejo que plantean problemas específicos muy interesantes. Con estos métodos calculamos el flujo en torno a la carena y la forma del tren de olas del buque. Como con este sistema pretendemos optimizar formas, seguimos un proceso de validación exhaustivo de todos los resultados. Dada la gran cantidad de cálculos realizados se ha desarrollado una metodología orientada a que la ejecución de los mismos pueda ser abordada de modo sistemático y razonablemente sencillo.

Además de fijarnos en la forma de la superficie libre, evaluando alturas de olas y amplitud de las diferentes fases, parece importante disponer de alguna magnitud global que permita discernir si un diseño es bueno frente a otro. En este sentido estudiamos diferentes técnicas para calcular la resistencia por formación de olas y a partir de ella el coeficiente de resistencia por formación de olas C_W , lo que nos coloca en una posición similar a la de un canal de experiencias. La selección de los parámetros sensibles capaces de transportar la información asimilable y fácilmente interpretable por el ingeniero naval, junto con la atención dada a los detalles computacionales a lo largo de las distintas rutinas del código, convierten los estudios realizados en herramienta de trabajo. Los resultados referidos a conceptos locales son buenos, los referidos a C_W no lo son tanto, y por tanto los canales siguen siendo necesarios.

1.5 Organización de esta tesis.

Aunque en general, en esta tesis se insiste más en los aspectos físico-matemáticos teóricos, también se tienen en cuenta los detalles puramente computacionales. Se desarrolla con profundidad la construcción de los sistemas lineales asociados a los modelos considerados, así como la discretización de las diferentes condiciones de contorno. En todo momento tenemos presente la aplicabilidad de estos métodos en la fase de diseño y por ello validamos del modo más exacto posible los diferentes resultados.

La organización por capítulos de esta tesis doctoral es como sigue:

- Capítulo 2. Exposición del problema de la formación de olas, y de los modelos potenciales (de paneles) que permiten su cálculo. Estudiaremos los métodos potenciales sin superficie libre, la linealización de Dawson de las condiciones no lineales de superficie libre y la discretización de dicha formulación linealizada. También estudiaremos una variante muy interesante de esta linealización que la dota de mejores propiedades numéricas, y procederemos a la comparación de ambas.
- Capítulo 3. Modelado de los flujos con popa de espejo. Un problema difícil por su gran componente viscosa y cuyo estudio sistemático, desde la formulación potencial, es una de las aportaciones de esta tesis.
- Capítulo 4. Estimación de la resistencia por formación de olas a partir de los resultados obtenidos con estos métodos, por integración de presiones, y por métodos de corte longitudinal.
- Capítulo 5. Definición de una metodología de trabajo que permita usar estos programas en cualquier geometría, por muy compleja que sea. Hacemos un estudio de la parte de preproceso, que comprende el modelado y generación de mallas, los programas de cálculo, y el postproceso con visualización y análisis de los resultados. En este mismo capítulo se explica cómo realizar una interpretación de los resultados obtenidos mediante estos cálculos para su uso como herramienta para mejorar las formas. En ese sentido se estudia el aspecto general del tren de olas, las presiones sobre el casco, y se comparan C_W entre configuraciones semejantes. Se aplica este estudio a diferentes casos experimentales reales procedentes del Canal de Ensayos Hidrodinámicos de la ETSIN. Esta metodología se está utilizando en el proceso de optimización de formas en el Canal de Ensayos Hidrodinámicos de la ETSIN, y es otra de las aportaciones de la tesis.
- Capítulo 6. Validación y comparación de los diferentes métodos, con resultados experimentales disponibles, procedentes de otros grupos, y con resultados experimentales propios obtenidos en el Canal de Ensayos Hidrodinámicos de la ETSIN, y que es otra de las aportaciones de la tesis.
- Capítulo 7. Relación de las posibles líneas de trabajo que continúen en el futuro los desarrollos realizados con objeto de esta tesis.
1. Desarrollo de un método con condición de superficie libre no lineal.

2. Desarrollo de un método viscoso, para la resolución del problema de la resistencia al avance.
3. Estudio de la ola originada por barcos rápidos en aguas poco profundas (washing-wave) y de su influencia en la fase de diseño.

Capítulo 8. Resumen de conclusiones y aportaciones.

Capítulo 2

Métodos de paneles para la estimación de la resistencia por formación de olas

En este capítulo se describe el papel del flujo potencial con superficie libre en el cálculo del flujo en torno a buque, presentando el problema matemático y sus limitaciones.

2.1 Delimitación del problema.

Nos limitamos al estudio del flujo en torno a un buque en aguas tranquilas. Se supone que el agua es infinita en extensión pero que puede tener una profundidad finita. Se supone que el buque avanza sin deriva a velocidad constante. En estas circunstancias pueden ser significativos una serie de fenómenos:

1. El tren de olas generado por el buque.
2. Una capa límite de origen viscoso, y un campo de estelas.
3. El flujo inducido por la hélice.
4. Normalmente, existe también wave-breaking.
5. A veces, aparece también spray.

6. En algunos casos, se dan efectos dinámicos en elementos sustentadores como la quilla, el timón, apéndices con forma de perfiles, etc.

Estos fenómenos vienen determinados por leyes físicas diferentes, tienen escalas espaciales y temporales diferentes, y su predicción exige modelos matemáticos y algoritmos numéricos diversos. Por tanto, una aproximación al problema pasa por la resolución de problemas parciales cubriendo cada uno de estos fenómenos. En este estudio de resistencia por formación de olas deberemos prescindir de muchos de estos fenómenos, y se tendrá en cuenta en qué medida esto afecta a los resultados obtenidos.

En primer lugar, tenemos que decir que no se van a tener en cuenta los efectos debidos al sistema propulsivo. Los modelos matemáticos que abordan esos problemas son básicamente independientes del problema central de la resistencia por formación de olas, aunque puedan afectar en alguna medida al sistema de olas de popa, y a los movimientos de trimado y arfada.¹

En segundo lugar, también se va a prescindir de los efectos debidos al wave-breaking. No existen todavía modelos fisico-matemáticos satisfactorios que describan el fenómeno del wave-breaking. Aunque aparece en casi todos los casos, no parece que tenga una influencia determinante en el flujo como un todo.

El spray tampoco se va a tratar de modelizar por razones similares, y otra vez, las consecuencias no parecen importantes, salvo para describir ciertas anomalías en la intersección de la superficie del agua con la carena.

Los efectos dinámicos no suponen un problema importante. Sin embargo, en el tipo de buques cuyo flujo vamos a tratar de describir no son relevantes. De hecho, supondremos que el casco es simétrico y navega sin deriva. Por tanto, en aras de simplicidad no incorporaremos la sustentación a nuestros cálculos.

Por último, no se tendrán en cuenta los efectos debidos a la tensión superficial, que son despreciables a escala del buque.

¹De ahora en adelante, y dado lo extendido del término, a estos movimientos de trimado y arfada, los denominaremos como sink&trim

2.2 Distinción de flujo viscoso y flujo con superficie libre.

Después de estas simplificaciones, el problema consiste ahora en modelar el flujo incluyendo solamente los dos tipos de fenómenos que determinan el flujo en torno a una carena: la generación de olas, y la capa límite viscosa y la estela. Pero estos dos son también fenómenos físicos muy diferentes, que tienen lugar en escalas de tiempo y distancias muy distintas, y que exigen métodos de cálculo especiales para cada uno. Predecir el flujo viscoso requiere la resolución de estructuras extremadamente pequeñas, y grandes gradientes de velocidades cercanos a una pared. Los fenómenos de origen viscoso son importantes en una pequeña capa límite cercana a la carena y en la zona de la estela. Las no linealidades de las ecuaciones obligan a usar métodos que pasan por la discretización de un dominio tridimensional completo en torno a la carena. La formación de olas es sin embargo un fenómeno de grandes escalas, similares en el espacio a las dimensiones principales del buque, y exige el contemplar un dominio grande para calcular el fenómeno. Las ecuaciones que gobiernan la formación de olas se pueden simplificar, conduciendo a la solución mediante métodos integrales.

Por tanto, no parece sensato abordar de momento estos dos problemas de modo conjunto, dado lo lejano de los planteamientos. De hecho hay problemas graves en lo que se refiere a la potencia de cálculo para enfrentarse a la combinación de los dos problemas, y lo factible ahora pasa por enfoques zonales, resolviendo en cada zona el efecto dominante.

Desde este punto de vista, parece inteligente utilizar el concepto de capa límite como elemento que permite separar el problema viscoso y el problema de formación de olas. Suponiendo que el número de Reynolds

$$Rn = \frac{VL}{\nu}$$

es lo suficientemente alto, los efectos viscosos sólo tienen importancia en una capa límite fina de espesor δ . Esa capa límite ajusta el campo de velocidades exterior a la condición de velocidad nula en la carena. Como primera aproximación, la presión en la capa límite es igual a la del flujo externo, y el flujo no viscoso podemos suponerlo como que no es afectado por la viscosidad. O sea, que para calcular el tren de olas generado por un buque no se tendrán en cuenta los efectos viscosos. En realidad estamos obteniendo el flujo

asintóticamente correcto para $Rn \rightarrow \infty$.

Todo este planteamiento conduce a una metodología similar a la del ensayo de modelos en canal. En estos ensayos se distingue claramente entre efectos viscosos y no viscosos. En el modelo se reproduce el número de Froude

$$Fn = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

del buque, lo que de acuerdo con la teoría del flujo no viscoso hace que el tren de olas sea geométricamente igual al real, y el coeficiente de resistencia por formación de olas se mantiene. En realidad, aunque se consiga que los números de Froude sean iguales, la diferencia en el número de Reynolds entre el buque y el modelo - dos órdenes de magnitud - va a provocar diferencias en la forma de las olas, y en su resistencia. Sin embargo, esta diferencia es pequeña, y estos experimentos son de momento la mejor medida de la resistencia al avance de un buque.

El haber separado los efectos viscosos de la formación de olas, aunque necesario, conduce a que no se contemplen una serie de interacciones:

1. La viscosidad afecta a la estela y a las olas de popa reduciendo un poco las alturas de ola.
2. Algunos tipos flujos cuando se tiene popa de espejo son afectados por la viscosidad.
3. La interacción entre al superficie libre y la capa límite.

Por otro lado, los códigos viscosos suelen prescindir de las olas en la superficie libre y de los efectos que éstas tienen en el campo de presiones y velocidades, aunque empieza a haber códigos que tratan de resolver el problema tridimensional con superficie libre.

2.3 El problema del flujo potencial.

Nos quedamos por tanto en el flujo sin viscosidad, que como veremos más adelante también se llama flujo potencial.

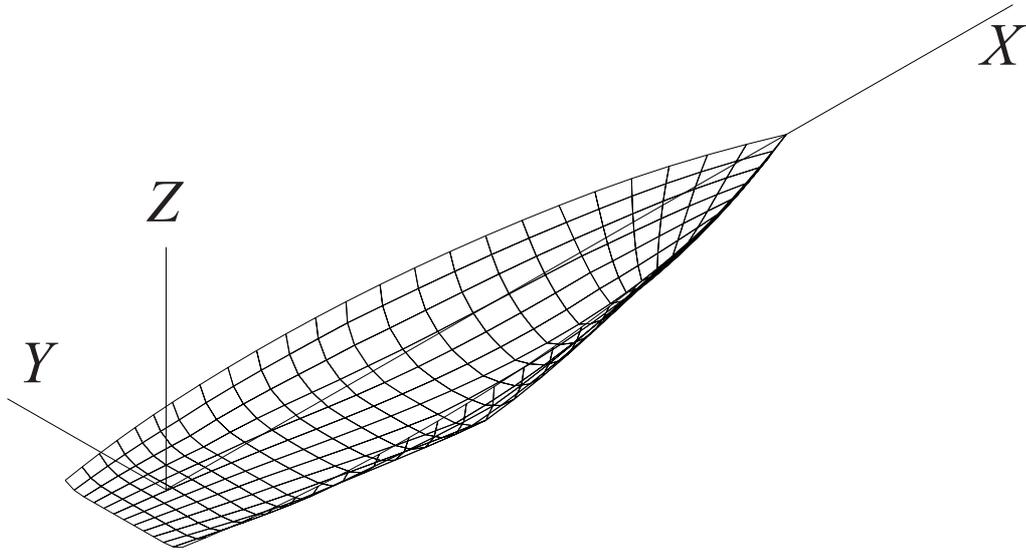


Figura 2.1: Situación de los ejes.

2.3.1 Situación de los ejes

El flujo se describe eulerianamente. El sistema de coordenadas se mueve con el buque, con la misma velocidad longitudinal que éste, pero no sigue su trimado ni su arfada. Los ejes se sitúan como se muestra en la figura 2.1, donde se señalan también los sentidos de los mismos. El origen se sitúa en crujía, en el plano de la flotación. Se sitúa el eje X de popa hacia proa, perpendicular al plano de la maestra. El eje Z se sitúa perpendicular al plano de la flotación y positivo hacia arriba. El eje Y se sitúa perpendicular a crujía, y positivo hacia babor, de tal modo que el sistema formado por los tres sea directo.

Con este sistema de coordenadas se puede suponer que el flujo es estacionario. Hay un flujo entrante en la dirección X procedente de X^+ , V_∞ .

2.3.2 Formulación matemática

Se coloca un cuerpo tridimensional en un fluido con un campo de velocidades, flujo libre, uniforme

$$v_\infty = (v_{\infty x}, v_{\infty y}, v_{\infty z}) \quad (2.1)$$

En ausencia de viscosidad y wave-breaking se preserva la irrotacionalidad del flujo libre entrante. Estos métodos se llaman potenciales, porque en estas condiciones, se puede demostrar que la velocidad deriva de un potencial escalar ϕ

$$v = -\nabla\phi \quad (2.2)$$

La ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (2.3)$$

Se convierte entonces en la ecuación de Laplace, para el potencial

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.4)$$

Este flujo irrotacional no viscoso alrededor de un cuerpo puede ser descrito mediante la superposición de un flujo uniforme externo, cuyo potencial llamaremos ϕ_∞ , que normalmente será en la dirección x , y de un flujo debido a la perturbación que la existencia de ese cuerpo induce en el flujo φ . El potencial total ϕ vendrá entonces dado por la siguiente expresión:

$$\phi = \phi_\infty + \varphi \quad (2.5)$$

Integrando, obtenemos fácilmente que:

$$\phi_\infty = -(v_{\infty x}x, v_{\infty y}y, v_{\infty z}z) \quad (2.6)$$

El potencial está sujeto a dos condiciones de contorno:

1. En la superficie mojada del cuerpo BS imponemos una condición de Neumann de velocidad normal nula.

$$\phi_n|_{BS} = 0 \quad (2.7)$$

2. También debemos imponer la condición de que en el infinito, al menos aguas arriba, la velocidad debe ser la del flujo libre, y por tanto

$$\nabla\phi|_\infty = \nabla\phi_\infty \quad (2.8)$$

En lo que se refiere al potencial de perturbación, como

$$\nabla^2\phi_\infty = 0 \quad (2.9)$$

Tiene que ser que:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.10)$$

De la segunda condición de contorno podemos deducir que:

$$\nabla \varphi|_{\infty} = 0 \quad (2.11)$$

De la primera:

$$\phi_n|_{BS} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{BS} = \nabla \phi \cdot n = \nabla (\phi_{\infty} + \varphi) \cdot n = 0 \quad (2.12)$$

O lo que es lo mismo:

$$\nabla \varphi \cdot n = -\nabla \phi_{\infty} \cdot n \quad (2.13)$$

Por tanto hemos convertido nuestro problema en encontrar un potencial de perturbación que cumpla la ecuación de Laplace en el dominio fluido y las dos condiciones anteriores en el contorno.

2.3.3 Potencial de perturbación.

El potencial de perturbación puede ser modelizado como el generado por una distribución de singularidades (ver [22] cap.21) situada en la superficie BS . Nosotros usaremos fuentes [15], para esas singularidades, y supondremos que el potencial φ es el debido a una distribución continua de manantiales de densidad variable sobre BS : El potencial en un punto p de coordenadas (x, y, z) debido a un manantial unitario localizado en un punto q de la superficie del cuerpo es:

$$d\varphi(p) = \frac{1}{r(p, q)} dS \quad (2.14)$$

$r(p, q)$ es la distancia desde el punto $q(\xi, \eta, \zeta)$ donde está la singularidad, al punto donde está siendo evaluado el potencial $p(x, y, z)$.

Por tanto el potencial total de perturbación se escribiría como:

$$\varphi(p) = \int \int_{BS} \frac{\sigma(q)}{r(p, q)} dS \quad (2.15)$$

La segunda condición de contorno se satisface directamente por la forma de definir el potencial. En cuanto a la primera condición de contorno, el problema matemático a resolver es un problema de Neumann exterior (PNE)

estándar para la ecuación de Laplace. Se hace el tratamiento del PNE en potencial de capa simple, mediante una ecuación integral débilmente singular (Fredholm de 2 especie convergente). La solución φ del PNE en Ω se puede escribir en la forma:

$$\varphi(p) = \int \int_{q \in BS} \sigma(q) \frac{1}{r(p, q)} dS, \quad \forall p \in \Omega \quad (2.16)$$

donde $\frac{1}{r(p, q)} = -4\pi G(p, q)$ representa la función de Green de la ecuación de Laplace.

Para fijar el valor de la distribución de singularidades, función σ , debemos imponer la primera condición de contorno que ϕ debe cumplir en BS . De esta forma se obtiene la ecuación integral débilmente singular (Fredholm de 2 especie) que debe cumplir σ .

$$-2\pi\sigma(p) + \int \int_{q \in BS, q \neq p} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(p, q)} dS = -\nabla\phi_\infty \cdot n, \quad \forall p \in \Omega \quad (2.17)$$

donde n indica la dirección normal exterior a BS en p .

2.3.4 Resolución numérica

El problema es cómo resolver la ecuación integral (2.17) para encontrar la distribución de fuentes σ . Una vez conocida ésta, la velocidad en cualquier punto del espacio se obtiene tomando gradientes en (2.5). La solución pasa por encontrar una aproximación numérica a la integral doble, y una adecuada discretización de la geometría cuyo flujo se está estudiando. Para conseguir ambas cosas, se aproxima la superficie por un número alto de cuadriláteros, y en cada uno de ellos, se supone constante el valor de la densidad de manantiales. Se sustituye la ecuación integral por un conjunto de ecuaciones algebraicas de incógnita el valor de σ en cada cuadrícula.

Modelo doble

La formulación de Hess-Smith [15], que es la que estamos siguiendo hasta ahora está pensada para el cálculo del flujo en torno a cuerpos completamente sumergidos en un fluido. Se ha usado casi siempre para modelizar flujos donde la compresibilidad no tiene mucha importancia, como por ejemplo en alas, o colas de avión... En nuestro caso, no tenemos un cuerpo completamente

sumergido, sino que nos encontramos ante un flujo con una interfase entre agua y aire, que se presenta precisamente en la flotación de nuestro buque.

Para superar este problema, lo que hacemos es colocar un reflejo de nuestro barco con respecto a la flotación por encima de ésta. Hecho esto, y por simetría, tenemos garantizado que el plano de la flotación va a ser un plano de simetría del flujo, y que por tanto, no se va a deformar. A la unión de la obra viva de la carena y su reflejo se le llama modelo doble.

Definición de los cuadriláteros.

La superficie del cuerpo está definida por un conjunto de puntos. Estos puntos se agrupan de cuatro en cuatro para formar los elementos cuadrangulares que aparecen en la figura 2.1. La exactitud del cálculo depende no solamente del número de cuadriláteros que se han seleccionado para aproximar la superficie del cuerpo sino también de la forma en que estos elementos están distribuidos a lo largo y ancho de la superficie. Una distribución adecuada es en gran medida una cuestión de intuición y experiencia. En general, los cuadriláteros deben concentrarse en regiones de fuerte curvatura y/o en regiones donde las propiedades del flujo varían mucho. Se suelen disponer entre 5 y 15 paneles en la zona del bulbo; entre 5 y 10 en la zona de popa, y entre 50 y 100 en la parte central del buque, por cada línea de agua; se deben considerar entre 10 y 20 líneas de agua.

Para formar un cuadrilátero plano a partir de cuatro puntos que en general no están en el mismo plano, el primer paso consiste en obtener dos vectores diagonales. Cada uno de estos vectores se obtiene simplemente restando, dos a dos, los vectores de posición de los cuatro puntos considerados. El producto vectorial normalizado de estos dos vectores diagonales se toma como el vector normal al plano del cuadrilátero. El orden de los puntos originales debe asegurar que la normal así definida esté dirigida hacia el exterior del cuerpo. El plano del cuadrilátero se define haciéndolo pasar por el punto media aritmética de los cuatro puntos originales. Finalmente se proyectan estos cuatro puntos sobre este plano para obtener los vértices del cuadrilátero.

En cada cuadrilátero ² se selecciona un punto donde se obliga a que la velocidad normal al elemento sea nula. En ese punto es donde más tarde se evalúan la presión y la velocidad tangencial. Ese punto debería ser elegido

²cuadrilátero \equiv elemento \equiv panel

como el punto donde el elemento no provoca velocidad tangencial en si mismo, el punto donde el elemento no da lugar a velocidad en su propio plano. A este punto se le suele llamar punto nulo. Si los paneles no son muy esbeltos, este punto está muy cerca del centro de gravedad (centroide) del panel. Por simplicidad de cálculo, en nuestros códigos consideraremos como punto característico al centroide.

Planteamiento del sistema lineal.

Cada línea del sistema resulta de imponer la condición de velocidad normal nula sobre uno de los cuadriláteros en los que hemos descompuesto nuestro modelo. Escribamos, por ejemplo la fila i , que es el resultado de imponer dicha condición en el punto característico del panel i .

$$-2\pi\sigma_i + \int \int_{q \in BS, q \neq p_i} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(p_i, q)} dS = -\nabla\phi_\infty \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq NBS \quad (2.18)$$

O lo que es lo mismo:

$$2\pi\sigma_i - \int \int_{q \in BS, q \neq p_i} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(p_i, q)} dS = -v_\infty \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq NBS \quad (2.19)$$

Al asumir que la superficie BS se descompone en cuadriláteros, podemos convertir la integral extendida a esa superficie en un sumatorio extendido a esos cuadriláteros. Además, al suponer la densidad de fuentes constante en cada uno de esos cuadriláteros, ésta sale fuera de esa integral.

$$2\pi\sigma_i - \sum_{j=1; j \neq i}^{NBS} \sigma_j \int \int_{A_j} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(p_i, q)} dS = -v_\infty \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq NBS \quad (2.20)$$

Cada una de las integrales la podemos ver como el valor de la componente normal al panel i de la velocidad ³ en el punto p_i debida a una densidad de manantiales unitaria situada en el cuadrilátero j .

$$v_{ji}^{normal} = - \int \int_{A_j} \nabla \left(\frac{1}{r(p_i, q)} \right) \cdot n_i \cdot dS \quad (2.21)$$

³En toda la bibliografía de Hess-Smith, la velocidad es el gradiente del potencial, cambiada de signo, siguiendo el criterio de Milne-Thomson.

Pero el vector normal al cuadrilátero permanece constante durante toda la integral, y por tanto ésta puede ser escrita de otra forma más interesante.

$$v_{ji_{normal}} = -n_i \cdot \int \int_{A_j} \nabla \left(\frac{1}{r(p_i, q)} \right) \cdot dS \quad (2.22)$$

La última parte de esta ecuación corresponde a la velocidad que el panel j genera en el punto p_i , y nos conviene escribirla así:

$$v_{ji} = - \int \int_{A_j} \nabla \left(\frac{1}{r(p_i, q)} \right) \cdot dS \quad (2.23)$$

De este modo, la ecuación 2.20, que representa la fila i del sistema lineal quedará:

$$2\pi\sigma_i + \sum_{j=1; j \neq i}^{NBS} \sigma_j \cdot v_{ji} \cdot n_i = -v_\infty \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq NBS \quad (2.24)$$

El sistema lineal resultante quedaría:

$$i \begin{pmatrix} \cdot & \overset{j}{(v_{j1} \cdot n_1)} & \cdot & \overset{i}{\cdot} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & (v_{ji} \cdot n_i) & \cdot & 2\pi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{NBS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_\infty \cdot n_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -v_\infty \cdot n_i \\ \cdot \\ \cdot \\ -v_\infty \cdot n_{NBS} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

En realidad, el número de incógnitas es menor. El simétrico de un panel en el modelo doble tiene la misma intensidad. Además, si el flujo es simétrico respecto a crujía, o sea, si el buque navega sin deriva y/o el buque navega sin escora, entonces la intensidad de un panel y de su simétrico respecto a crujía es la misma. En este caso, la fila i , con $1 \leq i \leq NBS4$, quedaría:

$$(2\pi + (v_{iS1,i} + v_{iS2,i} + v_{iS3,i}) \cdot n_i) \sigma_i + \sum_{j=1; j \neq i}^{NBS4} (v_{ji} + v_{jS1,i} + v_{jS2,i} + v_{jS3,i}) \cdot n_i \cdot \sigma_j = -v_\infty \cdot n_i \quad (2.26)$$

donde:

$NBS4$ cuarta parte de los paneles, $NBS/4$.

$iS1$ simétrico del panel i respecto a cruzía.

$iS2$ simétrico del panel i respecto a la flotación.

$iS3$ simétrico del panel i respecto a cruzía y a la flotación.

Podemos reescribir:

$$v_{jiS4} = v_{ji} + v_{jS1,i} + v_{jS2,i} + v_{jS3,i} \quad (2.27)$$

y la fila i , con $1 \leq i \leq NBS4$, queda entonces:

$$(2\pi + (v_{iS1,i} + v_{iS2,i} + v_{iS3,i}) \cdot n_i) \sigma_i + \sum_{j=1; j \neq i}^{NBS4} v_{jiS4} \cdot n_i \cdot \sigma_j = -v_\infty \cdot n_i \quad (2.28)$$

El sistema lineal reduce sensiblemente su tamaño para convertirse en:

$$i \begin{pmatrix} \cdot & \overset{j}{(v_{j1S4} \cdot n_1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & (v_{jiS4} \cdot n_i) & \cdot & (2\pi + (v_{iS1,i} + v_{iS2,i} + v_{iS3,i}) \cdot n_i) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = A \quad (2.29)$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{NBS4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_\infty \cdot n_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -v_\infty \cdot n_i \\ \cdot \\ \cdot \\ -v_\infty \cdot n_{NBS4} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Cálculo de los coeficientes de influencia.

El cálculo de los coeficientes de influencia recíproca entre los diferentes paneles pasa por la evaluación de las integrales 2.23.

$$v_{ji} = - \int \int_{A_j} \nabla \left(\frac{1}{r(p_i, q)} \right) \cdot dS$$

Estas reflejan, como comentábamos, la velocidad que el panel j , supuesto de densidad de fuentes unitaria, produce en el punto característico del panel i . Se dispone de expresiones para estas integrales. Estas expresiones están dadas tomando un sistema de ejes locales en el cuadrilátero. El origen de este sistema de coordenadas locales es el punto característico del panel. El eje z es el que define la normal pasando por ese punto, con el sentido positivo hacia el exterior del cuerpo. Los ejes x e y se sitúan sobre el plano del cuadrilátero, ortogonales entre si, y se colocan de tal modo que el eje x está en la dirección del vector que une los vértices 1 y 3, colocándose el eje y perpendicularmente a éste. La velocidad v_{ji} tendrá tres componentes, una en cada eje:

$$v_{ji_x} = \int \int_{A_j} \frac{(x - \xi) \cdot d\xi d\eta}{r^3} \quad (2.31)$$

$$v_{ji_y} = \int \int_{A_j} \frac{(y - \eta) \cdot d\xi d\eta}{r^3} \quad (2.32)$$

$$v_{ji_z} = \int \int_{A_j} \frac{z \cdot d\xi d\eta}{r^3} \quad (2.33)$$

con

$$r \equiv r((x, y, z), (\xi, \eta, 0)) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \quad (2.34)$$

El cálculo de estas integrales es complicado y conduce a unas expresiones de la velocidad que aparecen descritas de modo detallado en la referencia [15], y a ella nos remitimos. De todos modos, las expresiones completas de la velocidad, resultado de resolver estas integrales sólo se usan cuando el punto donde calculamos la velocidad está cerca del panel. La magnitud que define el estar cerca o lejos es una de las dimensiones del panel. Nosotros elegimos como dimensión característica su diagonal mayor D . Se consideran tres expresiones distintas de velocidad, en función de esta magnitud: Las exactas, una simplificación sustituyendo la densidad uniforme por un cuadripolo, y una simplificación aún mayor sustituyendo la densidad uniforme por una sola fuente. El criterio para elegir una u otra expresión es el siguiente:

$r \leq 2.45D$	formulaciones exactas
$2.45D < r < 4.0D$	expansión por un cuadripolo
$r \geq 4.0D$	expansión con un solo polo

Resultados

La resolución del sistema lineal admite cualquier esquema iterativo, debido al gran peso de la diagonal. Una vez resuelto éste, disponemos del vector de intensidades, y con él del campo de velocidades en todo el entorno del objeto. La velocidad en un punto p del espacio se obtiene como:

$$v_p = \sum_{j=1}^{NBS4} v_{jpS4} \cdot \sigma_j + v_\infty \quad (2.35)$$

Si ese punto es el característico de uno de los paneles, ésta velocidad se obtendría como:

$$v_i = (2\pi \cdot n_i + v_{iS1,i} + v_{iS2,i} + v_{iS3,i}) \sigma_i + \sum_{j=1; j \neq i}^{NBS4} v_{jiS4} \cdot \sigma_j + v_\infty \quad (2.36)$$

Conocida la velocidad en un punto, podemos calcular, usando la ecuación de Bernoulli, su presión y su coeficiente de presión C_p

$$C_p = 1 - \frac{v_p^2}{v_\infty^2} \quad (2.37)$$

que es una magnitud muy importante a tener en cuenta en la optimización hidrodinámica de una carena.

2.3.5 Métodos de paneles de orden alto.

Algunos autores [36] opinan que es inevitable que la aproximación en la que la superficie del casco es representada por paneles planos de densidad de fuentes constante acarree errores importantes en zonas de fuerte curvatura, como el bulbo. Si usamos más paneles para mitigar la influencia de ese tipo de errores, el tiempo de cálculo se dispara y a menudo se vuelve inaceptable. Incluso a veces, los resultados no son buenos aunque se use un número de paneles muy grande. En estos casos conviene plantearse qué resultados se obtendrían con un método de orden más alto [16]. Aunque ninguno de estos métodos de orden alto ha sido implementado aquí, exponemos sus líneas generales, dado que aparecen al menos en el código más extendido en este campo, el SHIPFLOW. Podemos plantearnos dos formas de subir el orden de la discretización. Por un lado podemos tratar de evitar la proyección sobre un plano de todos los paneles de casco y superficie libre. Por otro lado podemos suponer una distribución de fuentes por panel que no sea constante. Estudiemos ambas posibilidades.

Discretización de orden alto en la geometría.

Se supondrá que el panel es de tipo parabólico.

$$\zeta = Z_0 + A\xi + B\eta + P\xi^2 + 2Q\xi\eta + R\eta^2 \quad (2.38)$$

Donde estamos usando las coordenadas ξ, η del sistema de coordenadas locales definido para el método de primer orden. Como se ve, tenemos seis parámetros libres para la definición parabólica de cada panel. Tendremos que imponer por tanto seis condiciones para calcularlos, y lo haremos de tal modo que esas condiciones sean lineales en las incógnitas para mayor simplicidad. Del hecho de conocer la coordenada ζ de los cuatro vértices del panel, tenemos cuatro condiciones. Las dos condiciones adicionales consistirán en la minimización del cuadrado de la distancia de M_1 puntos vecinos al panel parabólico que definimos de este modo. O sea, se trata de minimizar

$$J1 = \sum_{k=1}^{M_1} \left(\zeta_k - [Z_0 + A\xi_k + B\eta_k + P\xi_k^2 + 2Q\xi_k\eta_k + R\eta_k^2] \right)^2 \quad (2.39)$$

Para ello, haremos cero las derivadas parciales de $J1$ con respecto a P , y a R , por ejemplo.

$$\frac{\partial J1}{\partial P} = \sum_{k=1}^{M_1} \left[\left(\zeta_k - Z_0 - A\xi_k - B\eta_k - P\xi_k^2 - 2Q\xi_k\eta_k - R\eta_k^2 \right) \left(-\xi_k^2 \right) \right] = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial J1}{\partial R} = \sum_{k=1}^{M_1} \left[\left(\zeta_k - Z_0 - A\xi_k - B\eta_k - P\xi_k^2 - 2Q\xi_k\eta_k - R\eta_k^2 \right) \left(-\eta_k^2 \right) \right] = 0 \quad (2.41)$$

Y de este modo, lo que tenemos es un sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas. En este método, el punto de control es el punto, dentro del panel parabólico, más próximo al origen del sistema de coordenadas locales del panel, en el método de primer orden. Lo que se hace es un cambio de referencia poniendo el origen en este nuevo punto. Con ello eliminamos la constante en la expresión del panel, y también los términos lineales. En este sistema de coordenadas, la expresión de la ζ del panel sería:

$$\zeta = P\eta^2 + 2Q\xi\eta + R\eta^2 \quad (2.42)$$

Sin más que derivar esta expresión respecto a ξ y η , hacer el producto vectorial, y normalizar, tendremos la expresión de la normal al panel en cada uno de

sus puntos.

$$n(\xi, \eta) = (n_\xi, n_\eta, n_\zeta) = \left(-\frac{\zeta_\xi}{F}, -\frac{\zeta_\eta}{F}, -\frac{1}{F} \right) \quad (2.43)$$

con

$$\zeta_\xi = 2(P\xi + Q\eta) \quad (2.44)$$

$$\zeta_\eta = 2(Q\xi + R\eta) \quad (2.45)$$

$$F = \sqrt{1 + \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2} \quad (2.46)$$

Como podemos suponer que la componente vertical ζ en el panel, va a ser pequeña respecto a las componentes ξ y η , podemos despreciar su cuadrado en las sumas con aquellas. Por tanto,

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \approx r_f^2 - 2z\zeta \quad (2.47)$$

donde r_f es la que aparece definida en 2.34. Y vamos a estudiar un poco la inversa de r , haciendo un desarrollo en serie de la misma en un entorno del cero de $(z\zeta/r_f^2)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{r_f} \frac{r_f}{r} \\ \frac{r_f}{r} &= \frac{r_f}{\sqrt{r_f^2 - 2z\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2z\zeta}{r_f^2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2z\zeta}{r_f^2}}} &= 1 + \frac{z\zeta}{r_f^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

El elemento diferencial de área dS sobre la superficie curvada es:

$$dS = \sqrt{1 + \zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2} d\xi d\eta = (1 + 2\psi_2) d\xi d\eta \quad (2.49)$$

$$\psi_2 = (P^2 + Q^2) \xi^2 + 2(PQ + QR) \xi\eta + (Q^2 + R^2) \eta^2 \quad (2.50)$$

Discretización de orden alto en la función densidad.

Otra parte muy importante, para construir un método de orden alto, pasa no sólo por respetar la geometría, sino también por reproducir mejor la función densidad de fuentes. Para ello, ya no sirve el considerar que la densidad de

fuentes es constante en cada panel, y parece razonable tener una distribución que cuando menos, varíe linealmente, a lo largo del mismo. Supongamos que estuviésemos en el panel j .

$$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_j + \sigma_x \xi + \sigma_y \eta \quad (2.51)$$

El valor de σ_j es el característico del panel, mientras que los valores de σ_x y σ_y se ajustarán por mínimos cuadrados a los de los M_2 paneles vecinos, con $2M_2 = M_1$. Para ello, minimizaremos el valor de J_2 , que es la suma cuadrática de las diferencias entre los valores de las intensidades correspondientes a los paneles vecinos con las que tendrían caso de prolongarse la distribución lineal del panel j . O sea:

$$J_2 = \sum_{k=0}^{M_2} [\sigma_k - (\sigma_j + \sigma_x \xi_k + \sigma_y \eta_k)]^2 \quad (2.52)$$

donde $\sigma_0 = \sigma_j$. Para minimizar este valor, forzaremos a que las derivadas parciales respecto a las incógnitas sean nulas.

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} = \sum_{k=0}^{M_2} [(\sigma_k - \sigma_j - \sigma_x \xi_k - \sigma_y \eta_k) (-\xi_k)] = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_y} = \sum_{k=0}^{M_2} [(\sigma_k - \sigma_j - \sigma_x \xi_k - \sigma_y \eta_k) (-\eta_k)] = 0 \quad (2.54)$$

Resolviendo este sistema lineal, tendremos los valores de las incógnitas σ_x y σ_y en el panel j como un sumatorio afectado por unos coeficientes de los valores de las intensidades en los paneles adyacentes.

$$\sigma_y = \sum_{k=0}^{M_2} C_k^{(y)} \sigma_k \quad (2.55)$$

$$\sigma_x = \sum_{k=0}^{M_2} C_k^{(x)} \sigma_k \quad (2.56)$$

También tendremos que calcular los diferentes momentos de inercia del panel, para usarlos en el cálculo de los potenciales.

$$I_{nm} = \int \int_{A_j} \xi^n \eta^m d\xi d\eta \quad (2.57)$$

Teniendo en cuenta todo esto, la expresión de los potenciales recíprocos queda como:

$$\begin{aligned}
\phi_{ij} &= \int \int_{A_j} \frac{\sigma}{r} dS \\
&= \int \int_{A_j} \frac{\sigma_j + \sigma_x \xi + \sigma_y \eta}{r_f} \left[\frac{1 + z(P\xi^2 + 2Q\xi\eta + R\eta^2)}{r_f^2} \right] (1 + 2\psi_2) d\xi d\eta \\
&= \sigma_j \phi^{(0)} + \sigma_j (P\phi^{(P)} + 2Q\phi^{(Q)} + R\phi^{(R)}) + \sigma_x \phi^{(1x)} + \sigma_y \phi^{(1y)} \quad (2.58)
\end{aligned}$$

con

$$\phi^{(0)} = \int \int_{A_j} \frac{1}{r_f} d\xi d\eta \quad (2.59)$$

$$\phi^{(P)} = \int \int_{A_j} \frac{z\xi^2}{r_f^3} d\xi d\eta \quad (2.60)$$

$$\phi^{(Q)} = \int \int_{A_j} \frac{z\xi\eta}{r_f^3} d\xi d\eta \quad (2.61)$$

$$\phi^{(R)} = \int \int_{A_j} \frac{z\eta^2}{r_f^3} d\xi d\eta \quad (2.62)$$

$$\phi^{(1x)} = \int \int_{A_j} \frac{\xi}{r_f} d\xi d\eta \quad (2.63)$$

$$\phi^{(1y)} = \int \int_{A_j} \frac{\eta}{r_f} d\xi d\eta \quad (2.64)$$

Por tanto, las velocidades inducidas, en el sistema de coordenadas propio de el panel de orden alto, serán los gradientes de los potenciales que acabamos de describir:

$$\begin{aligned}
V^{(0)} &= \nabla \phi^{(0)} \\
V^{(P)} &= \nabla \phi^{(P)} \\
V^{(Q)} &= \nabla \phi^{(Q)} \\
V^{(R)} &= \nabla \phi^{(R)} \\
V^{(1x)} &= \nabla \phi^{(1x)} \\
V^{(1y)} &= \nabla \phi^{(1y)}
\end{aligned}$$

Todas estas velocidades inducidas pueden ser calculadas numéricamente, y su significado es el siguiente: $V^{(0)}$ corresponde a un panel plano con densidad

constante; $V^{(P)}$, $V^{(Q)}$, y $V^{(R)}$ se deben a la parte parabólica de la forma del panel. $V^{(1x)}$ y $V^{(1y)}$ se deben a la variación lineal de la densidad de fuentes. De hecho:

$$\begin{aligned}
V_{\zeta}^{(1x)} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int \int_{A_j} \frac{\xi}{r_f} d\xi d\eta \right) \\
&= - \int \int_{A_j} \frac{\xi z}{r_f^3} d\xi d\eta \\
&= - \int \int_{A_j} \left(\frac{zx}{r_f^3} + \frac{z(\xi - x)}{r_f^3} \right) d\xi d\eta \\
&= xV_{\zeta}^{(0)} - zV_{\xi}^{(0)}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

De modo similar:

$$V_{\zeta}^{(1y)} = yV_{\zeta}^{(0)} - zV_{\eta}^{(0)} \tag{2.66}$$

Habíamos visto ya previamente que cuando $z \rightarrow 0$, $V_{\zeta}^{(0)} \rightarrow 0$ para los puntos fuera de las fronteras del panel, y $V_{\zeta}^{(0)} \rightarrow 2\pi$ para los puntos interiores al panel. Por tanto $V_{\zeta}^{(1x)} \rightarrow 0$, $V_{\zeta}^{(1y)} \rightarrow 0$, si $z \rightarrow 0$ si el punto P donde estamos evaluando las velocidades se acerca a un punto en el plano $\xi\eta$ fuera del panel. Además $V_{\zeta}^{(1x)} \rightarrow 0$, $V_{\zeta}^{(1y)} \rightarrow 0$ con $z \rightarrow 0$ aunque el punto P se acerque al origen del panel en cuestión. Como el punto de control se toma como el origen y las condiciones de contorno se satisfacen solamente en ese punto de control, que es donde las componentes ξ y η de las velocidades son nulas, entonces se concluye que $V_{\zeta}^{(1x)} \rightarrow 0$, $V_{\zeta}^{(1y)} \rightarrow 0$ si $z \rightarrow 0$.

Finalmente la velocidad inducida se escribirá como:

$$V_{ij} = V^* \sigma_j + \sum_{k=1}^{M_2} \left(C_k^{(x)} V^{(1x)} + C_k^{(y)} V^{(1y)} \right) \sigma_k \tag{2.67}$$

con

$$V^* = V^{(0)} + PV^{(P)} + 2QV^{(Q)} + RV^{(R)} + C_0^{(x)} V^{(1x)} + C_0^{(y)} V^{(1y)} \tag{2.68}$$

Estas velocidades recíprocas, en coordenadas locales tienen que ser transformadas en valores globales, para lo cual usaremos la matriz de transformación ya estudiada:

$$\begin{pmatrix} V_x^* \\ V_y^* \\ V_z^* \end{pmatrix} = {}^t T \begin{pmatrix} V_{\xi}^* \\ V_{\eta}^* \\ V_{\zeta}^* \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

$$\begin{pmatrix} V_x^{(1x)} \\ V_y^{(1x)} \\ V_z^{(1x)} \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} V_\xi^{(1x)} \\ V_\eta^{(1x)} \\ V_\zeta^{(1x)} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$$\begin{pmatrix} V_x^{(1y)} \\ V_y^{(1y)} \\ V_z^{(1y)} \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} V_\xi^{(1y)} \\ V_\eta^{(1y)} \\ V_\zeta^{(1y)} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Es importante destacar que en el modelo de primer orden, solo se necesitan tres integraciones para cada coeficiente de influencia, las velocidades en las tres direcciones. Sin embargo, en los métodos de orden alto, se precisan de hasta 18 integraciones para cada coeficiente de influencia.

Doble modelo.

En el problema del modelo doble sin superficie libre, sólo se impone la condición de contorno en la superficie mojada del casco.

Desde un punto de vista computacional, las expresiones 2.67 y 2.68, que nos dan las velocidades recíprocas, deben ser tratadas con un poco más de detalle. Se necesita de una tabla de índices $vec(j, k)$ que guarde el índice, dentro del gran vector de σ , del vecino k del panel j . Además, el número de vecinos depende del panel considerado, pues en los bordes, el número de vecinos siempre es más pequeño. Así, 2.67 y 2.68 se escribirían:

$$V_{ij} = V_{ij}^* \sigma_j + \sum_{k=1}^{M2_j} \left(C_{j,k}^{(x)} V_{ij}^{(1x)} + C_{j,k}^{(y)} V_{ij}^{(1y)} \right) \sigma_{vec(j,k)} \quad (2.72)$$

con

$$V_{ij}^* = V_{ij}^{(0)} + P_j V_{ij}^{(P)} + 2Q_j V_{ij}^{(Q)} + R_j V_{ij}^{(R)} + C_{j,0}^{(x)} V_{ij}^{(1x)} + C_{j,0}^{(y)} V_{ij}^{(1y)} \quad (2.73)$$

Por tanto, la velocidad total en el punto de control del panel i será, en el problema sin superficie libre:

$$V_i = \sum_{j=1}^{NBS} V_{ji} + V_\infty \quad (2.74)$$

y la condición de impenetrabilidad:

$$\left(\sum_{j=1}^{NBS} V_{ij} + V_\infty \right) n_i = 0 \quad (2.75)$$

Para construir la matriz del sistema, el índice de filas resulta de imponer esa condición en cada panel. El índice de columna, como siempre, es el de la incógnita. Vamos a ver con un poquito de detalle la fila 1 para entender mejor ese proceso de construcción.

$$V_{1,1}n_1 + V_{1,2}n_1 + \dots + V_{1,NBS}n_1 = -V_\infty n_1 \quad (2.76)$$

pero

$$V_{1,1} = V_{1,1}^* \sigma_1 + \sum_{k=1}^{M_{21}} \left(C_{1,k}^{(x)} V_{1,1}^{(1x)} + C_{1,k}^{(y)} V_{1,1}^{(1y)} \right) \sigma_{vec(1,k)} \quad (2.77)$$

Por tanto, de momento, si llamamos A a la matriz del sistema:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= V_{1,1}^* n_1 \\ A_{1,vec(1,1)} &= \left(C_{1,1}^{(x)} V_{1,1}^{(1x)} + C_{1,1}^{(y)} V_{1,1}^{(1y)} \right) n_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$A_{1,vec(1,M_{21})} = \left(C_{1,M_{21}}^{(x)} V_{1,M_{21}}^{(1x)} + C_{1,M_{21}}^{(y)} V_{1,M_{21}}^{(1y)} \right) n_1$$

Para seguir construyendo esta fila, se trabaja ahora sobre el sumando $V_{1,2}n_1$, de modo similar. Por último, con las demás filas, se trabaja de igual manera.

El sistema lineal resultante puede ser resuelto por métodos iterativos, dado que es diagonalmente dominante. La distribución de velocidades en los paneles del casco se calcula fácilmente, una vez conocido el vector de intensidades. En cuanto a la fuerza hidrodinámica que actúa sobre el casco, la calcularemos calculando previamente los coeficientes adimensionales típicos de dicha fuerza. En un panel i cualquiera, se define el coeficiente de presión C_{p_i} como:

$$C_{p_i} = 1 - \left(\frac{v_i}{v_\infty} \right)^2 \quad (2.78)$$

La fuerza hidrodinámica en la dirección x , adimensionalizada será:

$$C_x = - \frac{\left(\sum_{i=1}^{NBS} C_{p_i} n_{x_i} A_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{NBS} A_i \right)} \quad (2.79)$$

Esta última igualdad se deduce de que:

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho A v_\infty^2} \quad (2.80)$$

siendo R_x la resistencia en la dirección x y A la superficie mojada total, suma de la de todos los paneles. Como

$$R_x = \sum_{i=1}^{NBS} P_i n_{x_i} A_i \quad (2.81)$$

siendo P_i la presión en el panel i . Pero aplicando la ecuación de Bernouilli, es fácil ver que:

$$P_i = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 C_{p_i} \quad (2.82)$$

de donde la ecuación 2.79.

Métodos de orden alto con superficie libre.

Aunque hablaremos más adelante con detalle de la condición de superficie libre, comentamos ahora que entendido el procedimiento de construcción de la matriz del sistema en el modelo doble, y estando familiarizado con un metodo de primer orden con superficie libre, la construcción de la matriz del problema es un problema algorítmicamente complejo pero claro. Sin embargo, no abordaremos el problema de la superficie libre con paneles de orden alto, en este primer estudio.

2.4 El problema del flujo potencial con superficie libre.

En la superficie libre - $z = \eta(x, y)$ - deben verificarse simultáneamente la condición cinemática, y la condición dinámica.

La condición cinemática refleja el hecho de que la velocidad debe ser tangente a la superficie libre, o lo que es lo mismo, que la superficie libre es línea de corriente.

$$\nabla\phi \cdot \nabla\eta = 0 \quad (2.83)$$

$$\phi_x \cdot \eta_x + \phi_y \cdot \eta_y - \phi_z = 0 \quad (2.84)$$

La condición dinámica consiste en imponer que la presión es constante, e igual a la atmosférica, en toda la superficie libre, independientemente de la velocidad del punto considerado. Usando la ley de Bernoulli, esto se traduce en:

$$g \cdot \eta + \frac{1}{2} \cdot (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = \frac{1}{2} \cdot (\nabla \phi_\infty)^2 \quad (2.85)$$

Con el método del modelo doble, en la superficie libre sin deformar se verifica la condición cinemática, pero no la condición dinámica. Aproxima el flujo real en los casos en que las olas son pequeñas, o sea a bajos números de Froude, o cuerpos sumergidos.

Para valores no despreciables del número de Froude, se tiene que tener en cuenta la resistencia por formación de olas, y por tanto, se debe obligar también al cumplimiento de la condición de contorno dinámica en la superficie libre. Dawson propuso cubrir también una parte de la superficie del agua con paneles con singularidades superficiales. El campo de velocidades es entonces la suma del flujo libre y las velocidades inducidas por todos los paneles, los del casco, los de su imagen y los de la parte panelizada de la superficie libre.

En cada panel de la superficie libre debe ser impuesta de alguna forma la condición dinámica, y la cinemática, dependiendo de todas las incógnitas del casco y de la superficie libre. Si conseguimos que esa dependencia sea lineal, llegaremos a un sistema lineal de tantas ecuaciones como incógnitas, que una vez resuelto proporcionará la intensidad en cada panel. Conocidas éstas tendremos la distribución de velocidades en todo el dominio, y la ola en cada panel de la superficie libre. Veamos qué tratamiento reciben esas condiciones de contorno:

2.4.1 Linealización de Dawson de la condición de contorno.

La incógnita es el potencial ϕ , que aparece de forma claramente no lineal en la condición dinámica 2.85. Usaremos la linealización de Dawson [7] para evitar la no linealidad en las incógnitas. La idea es descomponer el potencial total en suma de dos potenciales:

$$\phi = \phi_D + \varphi \quad (2.86)$$

donde

ϕ_D potencial obtenido en el cálculo del flujo en torno al modelo doble con superficie libre sin deformar.

φ potencial debido a las singularidades que se han añadido en la superficie libre.

Sustituyendo η de la ecuación 2.85 en la ecuación 2.84, y usando subíndices para las derivaciones parciales, tendremos:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\phi_x \cdot (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)_x + \phi_y \cdot (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)_y \right] + g \cdot \phi_z = 0 \quad (2.87)$$

Entrando en esta ecuación con la descomposición del potencial enunciada más arriba tendremos que:

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\phi_{Dx} + \varphi_x) \cdot [(\phi_{Dx} + \varphi_x)^2 + (\phi_{Dy} + \varphi_y)^2 + (\phi_{Dz} + \varphi_z)^2]_x + \\ (\phi_{Dy} + \varphi_x) \cdot [(\phi_{Dx} + \varphi_x)^2 + (\phi_{Dy} + \varphi_y)^2 + (\phi_{Dz} + \varphi_z)^2]_y \end{array} \right\} + g \cdot (\phi_{Dz} + \varphi_z) = 0 \quad (2.88)$$

Esta condición ha de imponerse en una superficie libre que todavía desconocemos y que de hecho es lo que se trata de calcular. Por eso pasamos a hacer la primera simplificación que consiste en suponer que esa condición de contorno se verifica en la superficie libre sin deformar, o sea, hacemos $z = 0$. Siendo así, es fácil ver que la componente z de la velocidad del modelo doble es nula, dado que es un plano de simetría. Por tanto, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\phi_{Dx} + \varphi_x) \cdot [(\phi_{Dx} + \varphi_x)^2 + (\phi_{Dy} + \varphi_y)^2 + \varphi_z^2]_x + \\ (\phi_{Dy} + \varphi_x) \cdot [(\phi_{Dx} + \varphi_x)^2 + (\phi_{Dy} + \varphi_y)^2 + \varphi_z^2]_y \end{array} \right\} + g \cdot \varphi_z = 0 \quad (2.89)$$

Lo siguiente que podemos suponer es que las derivadas sucesivas del potencial de perturbación son un orden de magnitud más pequeño que el potencial del doble modelo. Por tanto, los sumandos en los que entren dos de estos términos serán despreciados frente a los otros. De este modo, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\phi_{Dx} + \varphi_x) \cdot [\phi_{Dx}^2 + 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy}^2 + 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot \varphi_y]_x + \\ (\phi_{Dy} + \varphi_x) \cdot [\phi_{Dx}^2 + 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy}^2 + 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot \varphi_y]_y \end{array} \right\} + g \cdot \varphi_z = 0 \quad (2.90)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \phi_{Dx} \cdot \left[\phi_{Dx}^2 + 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy}^2 + 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot \varphi_y \right]_x + \\ \varphi_x \cdot \left[\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right]_x + \\ \phi_{Dy} \cdot \left[\phi_{Dx}^2 + 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy}^2 + 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot \varphi_y \right]_y + \\ \varphi_y \cdot \left[\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right]_y \end{array} \right\} + g \cdot \varphi_z = 0 \quad (2.91)$$

Reagrupemos alguno de los términos:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{l} \phi_{Dx} \cdot \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right)_x + \phi_{Dy} \cdot \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right)_y + \\ 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot \left(\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y \right)_x + \\ 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot \left(\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y \right)_y + \\ \varphi_x \cdot \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right)_x + \varphi_y \cdot \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right)_y \end{array} \right] + g \cdot \varphi_z = 0 \quad (2.92)$$

En un punto de la superficie libre, el vector unitario en la dirección de la corriente del doble modelo en ese punto, vendrá dado por la normalización de la velocidad del doble modelo en ese punto:

$$u_l = \left(\frac{\phi_{Dx}, \phi_{Dy}}{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}} \right) \quad (2.93)$$

La derivada direccional de una función escalar cualquiera F , en la dirección de este vector será:

$$F_l = \nabla F \cdot u_l = (F_x, F_y) \cdot u_l = (F_x, F_y) \cdot \left(\frac{\phi_{Dx}, \phi_{Dy}}{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}} \right) \quad (2.94)$$

En particular:

$$\phi_{Dl} = \nabla \phi_D \cdot u_l = (\phi_{Dx}, \phi_{Dy}) \cdot u_l = (\phi_{Dx}, \phi_{Dy}) \cdot \left(\frac{\phi_{Dx}, \phi_{Dy}}{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}} \right) = \sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2} \quad (2.95)$$

Visto esto, analicemos lo que tenemos en la ecuación 2.92, considerándolo sumando a sumando:

$$\begin{aligned} & \phi_{Dx} \cdot \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right)_x + \phi_{Dy} \cdot \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 \right)_y = \\ & \phi_{Dx} \cdot \left(\phi_{Dl}^2 \right)_x + \phi_{Dy} \cdot \left(\phi_{Dl}^2 \right)_y = (\phi_{Dx}, \phi_{Dy}) \cdot \nabla \phi_{Dl}^2 = \\ & \nabla \phi_{Dl}^2 \cdot (\phi_{Dx}, \phi_{Dy}) \cdot \frac{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}}{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}} = \nabla \phi_{Dl}^2 \cdot \frac{(\phi_{Dx}, \phi_{Dy})}{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}} \cdot \sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2} = \\ & \nabla \phi_{Dl}^2 \cdot u_l \cdot \phi_{Dl} = (\phi_{Dl}^2)_l \cdot \phi_{Dl} = 2 \cdot \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Estos dos primeros sumandos se referían sólo al potencial del doble modelo. Veamos los dos siguientes:

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot (\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_x + 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot (\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_y = \\
& 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \frac{(\phi_{Dx}, \phi_{Dy})}{\phi_{Dl}} \cdot [(\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_x, (\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_y] = \\
& 2 \cdot \phi_{Dl} (\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_l
\end{aligned} \tag{2.97}$$

A su vez, lo que hay en este último factor lo podemos ver como:

$$\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y = \phi_{Dl} \cdot \frac{(\phi_{Dx}, \phi_{Dy})}{\phi_{Dl}} \cdot (\varphi_x, \varphi_y) = \phi_{Dl} \cdot \varphi_l \tag{2.98}$$

y por tanto, la ecuación 2.97 se convierte en:

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \phi_{Dx} \cdot (\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_x + 2 \cdot \phi_{Dy} \cdot (\phi_{Dx} \cdot \varphi_x + \phi_{Dy} \cdot \varphi_y)_y = \\
& 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot (\phi_{Dl} \cdot \varphi_l)_l
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Llegados a este punto, la ecuación 2.92 se convierte en:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot (\phi_{Dl} \cdot \varphi_l)_l + \varphi_x \cdot (\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2)_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2)_y \right] + g \cdot \varphi_z = 0 \tag{2.100}$$

Vamos con los dos últimos sumandos de esta expresión:

$$\begin{aligned}
& \varphi_x \cdot (\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2)_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2)_y = \varphi_x \cdot (\phi_{Dl}^2)_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dl}^2)_y \\
& 2 \cdot \varphi_x \cdot \phi_{Dl} (\phi_{Dl})_x + 2 \varphi_y \cdot \phi_{Dl} (\phi_{Dl})_y = 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot [\varphi_x \cdot (\phi_{Dl})_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dl})_y]
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Otra vez, la ecuación 2.92 se convierte en:

$$\phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + \phi_{Dl} \cdot (\phi_{Dl} \cdot \varphi_l)_l + \phi_{Dl} \cdot [\varphi_x \cdot (\phi_{Dl})_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dl})_y] + g \cdot \varphi_z = 0 \tag{2.102}$$

Si desarrollamos la derivada a lo largo de la línea de corriente del doble modelo, en el segundo sumando de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
& \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot \varphi_l + \phi_{Dl}^2 \cdot \varphi_l + \\
& \phi_{Dl} \cdot [\varphi_x \cdot (\phi_{Dl})_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dl})_y] + g \cdot \varphi_z = 0
\end{aligned} \tag{2.103}$$

La condición que aparece en el artículo de referencia de Dawson [7] es:

$$\phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + (\phi_{Dl}^2 \cdot \varphi_l)_l + g \cdot \varphi_z = 0 \tag{2.104}$$

y si desarrollamos aquí la derivada del producto en el segundo sumando:

$$\phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_l + \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{ll} + g \cdot \phi_z = 0 \quad (2.105)$$

Lo que tiene que suceder para que las ecuaciones 2.103 y 2.105 sean la misma en el potencial es que:

$$\phi_{Dl} \cdot \left[\varphi_x \cdot (\phi_{Dl})_x + \varphi_y \cdot (\phi_{Dl})_y \right] = \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_l \quad (2.106)$$

Y aquí es donde está el conocido "error" de Dawson. Esto sería cierto si las líneas de corriente del potencial de perturbación coincidiesen con las del doble modelo, lo cual en general, no es así.

$$\begin{aligned} & \phi_{Dl} \cdot \left[(\phi_{Dl})_x, (\phi_{Dl})_y \right] \cdot (\varphi_x, \varphi_y) = \\ & \phi_{Dl} \cdot \left\{ \left[(\phi_{Dl})_x, (\phi_{Dl})_y \right] \cdot \frac{(\varphi_x, \varphi_y)}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \right\} \cdot \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \neq \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_l \end{aligned} \quad (2.107)$$

pues

$$\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \neq \phi_l \quad (2.108)$$

y

$$\left\{ \left[(\phi_{Dl})_x, (\phi_{Dl})_y \right] \cdot \frac{(\varphi_x, \varphi_y)}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}} \right\} \neq \phi_{Dl} \quad (2.109)$$

Si ahora entramos en 2.105 y reemplazamos φ por $\phi - \phi_D$

$$\phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot (\phi_l - \phi_{Dl}) + \phi_{Dl}^2 \cdot (\phi_{ll} - \phi_{Dl}) + g \cdot (\phi_z - \phi_{Dz}) = 0 \quad (2.110)$$

Pero como ya sabemos, esta condición se aplica en el plano de $z = 0$, donde el potencial del doble modelo tiene derivada cero en la dirección vertical, por tanto:

$$\phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} + 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot (\phi_l - \phi_{Dl}) + \phi_{Dl}^2 \cdot (\phi_{ll} - \phi_{Dl}) + g \cdot \phi_z = 0 \quad (2.111)$$

Desarrollando estas sumas y productos, y reagrupando, llegamos a la conocida condición de superficie libre de Dawson.

$$\left(\phi_{Dl}^2 \cdot \phi_l \right)_l + g \cdot \phi_z = 2 \cdot \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} \quad (2.112)$$

o lo que es lo mismo:

$$2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_l + \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{ll} + g \cdot \phi_z = 2 \cdot \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dl} \quad (2.113)$$

que es con la que realmente trabajaremos.

2.4.2 Discretización de la condición de Dawson.

Para poder discretizar estas derivadas, que se refieren a variaciones a lo largo de las líneas de corriente del flujo del doble modelo, conviene que la panelización de la superficie libre se disponga a lo largo de dichas líneas.

El potencial total se puede descomponer en un potencial de perturbación y en un potencial debido al flujo libre. Es una descomposición diferente a la realizada en la sección anterior, con vistas ya al cálculo del potencial total.

$$\phi = \psi + \phi_{\infty} \quad (2.114)$$

$$2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dul} \cdot (\psi_l + \phi_{\infty l}) + \phi_{Dl}^2 \cdot (\psi_{ll} + \phi_{\infty ll}) + g \cdot (\psi_z + \phi_{\infty z}) = 2 \cdot \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dul} \quad (2.115)$$

Como la velocidad del flujo libre no tiene componente vertical en la superficie libre

$$\phi_{\infty z} = 0 \quad (2.116)$$

Pasamos a la parte derecha de la ecuación los términos conocidos:

$$2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dul} \cdot \psi_l + \phi_{Dl}^2 \cdot \psi_{ll} + g \cdot \psi_z = 2 \cdot \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{Dul} - 2 \cdot \phi_{Dl} \cdot \phi_{Dul} \cdot \phi_{\infty l} - \phi_{Dl}^2 \cdot \phi_{\infty ll} \quad (2.117)$$

Vamos a suponer que estamos expresando esta condición en el punto característico de un panel de índice i de la superficie libre, y llamaremos s_i a su coordenada curvilínea dentro de la línea de corriente correspondiente. Para medirla, podemos empezar a proa de la zona mallada de la superficie libre. Vamos a fijarnos en todo lo que hay en la parte derecha de la ecuación, pues eso es lo que aparecerá al final en el término independiente del sistema lineal.

Término independiente.

ϕ_{Dl_i} es directamente la velocidad del flujo debido al modelo doble en el punto característico del panel i , obviando el cambio de signo en el potencial ya definido en la ecuación 2.95

$$\begin{aligned} \phi_{Dl} &= \nabla \phi_D \cdot u_l = (\phi_{Dx}, \phi_{Dy}) \cdot u_l = (\phi_{Dx}, \phi_{Dy}) \cdot \left(\frac{\phi_{Dx}, \phi_{Dy}}{\sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2}} \right) = \\ &= \sqrt{\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2} = \|\nabla \phi_D\| \end{aligned}$$

ϕ_{Dul_i} es la derivada de la magnitud anterior, a lo largo de una línea de corriente. Para estimarla, usamos diferentes operadores dependiendo de la posición en la que nos encontremos en la línea:

1. Si estamos en el primero o último punto de una línea de corriente, directamente, y para evitar reflexiones:

$$\phi_{Dl_i} \approx 0 \quad (2.118)$$

2. Si estamos en el segundo o tercer punto de una línea de corriente, utilizaremos un operador de dos puntos up-wind.

$$\phi_{Dl_i} \approx \frac{\phi_{Dl_{i+1}} - \phi_{Dl_i}}{s_{i+1} - s_i} \quad (2.119)$$

En esta ecuación, y dada la orientación tomada en los ejes, el punto $i + 1$ está más a proa, aguas arriba del punto i .

3. Para los demás puntos usaremos un operador up-wind de 4 puntos diseñado por Dawson. Este operador es fuertemente dispersivo, y evita que se propaguen ondas a proa del buque. El operador es un promedio de los operadores up-wind de 3 y 4 puntos construidos por interpolación polinómica de los puntos, con la notación habitual en funciones de una variable, (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , (x_{i+2}, y_{i+2}) , y (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , (x_{i+2}, y_{i+2}) , (x_{i+3}, y_{i+3}) respectivamente.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_i \approx \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\begin{array}{l} P2[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})] + \\ P3[(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2}), (x_{i+3}, y_{i+3})] \end{array} \right) \quad (2.120)$$

Construyendo estos polinomios, y evaluándolos en el punto i , llegamos a la aproximación buscada a la derivada de y en el punto x_i .

$$\begin{aligned} y_x &\approx CA_i \cdot y_i + CB_i \cdot y_{i+1} + CD_i \cdot y_{i+2} + CB_i \cdot y_{i+3} \\ CD_i &= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 \cdot (x_{i+2} - x_i)^2 (x_{i+2} - x_{i+1}) \cdot (x_{i+2} + x_{i+1} - 2 \cdot x_i)}{D_i} \\ CC_i &= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 \cdot (x_{i+3} - x_i)^2 (x_{i+3} - x_{i+1}) \cdot (x_{i+3} + x_{i+1} - 2 \cdot x_i)}{D_i} \\ CB_i &= \frac{(x_{i+2} - x_i)^2 \cdot (x_{i+3} - x_i)^2 (x_{i+3} - x_{i+2}) \cdot (x_{i+3} + x_{i+2} - 2 \cdot x_i)}{D_i} \\ CA_i &= -(CB_i + CC_i + CD_i) \\ D_i &= (x_{i+1} - x_i) \cdot (x_{i+2} - x_i) (x_{i+3} - x_i) \cdot (x_{i+3} - x_{i+1}) \cdot \\ &\quad (x_{i+2} - x_{i+1}) \cdot (x_{i+3} - x_{i+2}) (x_{i+3} + x_{i+2} + x_{i+1} - 3 \cdot x_i) \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando esto al potencial del doble modelo, tendremos la segunda derivada del mismo a lo largo de una línea

de corriente. Las derivadas se realizan aquí respecto a la abscisa curvilínea medida a lo largo de esa línea.

$$\phi_{Dl_i} \approx CA_i \cdot \phi_{Dl_i} + CB_i \cdot \phi_{Dl_{i+1}} + CC_i \cdot \phi_{Dl_{i+2}} + CD_i \cdot \phi_{Dl_{i+3}} \quad (2.121)$$

$\phi_{\infty l_i}$ es la proyección en el punto característico del panel i , de la velocidad del flujo libre sobre la línea de corriente del modelo doble que pasa por ese punto.

$$\phi_{\infty l_i} = \nabla \phi_{\infty} \cdot u_l = -V_{\infty} \cdot u_l \quad (2.122)$$

$\phi_{\infty ll_i}$ es la derivada de la magnitud anterior, a lo largo de una línea de corriente. Para estimarla, usamos diferentes operadores dependiendo la posición en la que nos encontremos en la línea, de modo análogo a como hicimos con ϕ_{Dl_i} .

Matriz del sistema.

Una vez que hemos estudiado cómo se construye la parte derecha de nuestro sistema lineal (RHS), la definición, coeficiente a coeficiente de la matriz del sistema, es más fácil de entender. Vayamos término a término. Los que se refieren al potencial del doble modelo ya los hemos estudiado en el apartado anterior. Veamos sólo los que se refieren a la parte de perturbación del potencial total.

ψ_{z_i} es la componente vertical en el punto característico del panel i , de la velocidad debida a todas las demás fuentes.

$$\psi_{z_i} = - \sum_{j=1}^{NBS+NFS} \sigma_j \cdot v_{jz} \quad (2.123)$$

Sin embargo, dentro de esta suma casi todos los términos se anulan. La contribución debida a los otros paneles de la superficie libre es nula, pues las fuentes no producen velocidad vertical en puntos que estén en su mismo plano, salvo los propios del panel. La contribución debida a los paneles del doble modelo existe, pero se cancelan unos con otros, en lo que a la componente vertical respecta, por simetría respecto al plano de la flotación. Por tanto, al final, sólo queda la influencia del panel sobre si mismo:

$$\psi_{z_i} = -2\pi\sigma_i \quad (2.124)$$

ψ_{l_i} es la proyección sobre el unitario en la dirección de la línea de corriente del potencial del doble modelo que pasa por el punto característico del panel i , de la velocidad debida a todas las demás fuentes. Como se puede observar más abajo, esta expresión es lineal en las incógnitas, que son las intensidades en los diferentes paneles. Los coeficientes del sistema lineal son los coeficientes de esas incógnitas. Cada fila del sistema lineal se forma otra vez a partir de la aplicación de esa condición en cada uno de los paneles de la superficie libre.

$$\psi_{l_i} = - \sum_{j=1}^{NBS+NFS} \sigma_j \cdot v_{ji} \cdot u_l \quad (2.125)$$

ψ_{u_i} es la derivada de la magnitud anterior a lo largo de una línea de corriente. Para calcularla usamos los mismos operadores que en el apartado anterior. Estos operadores funcionan de modo diferente dependiendo de la posición del punto en la línea de corriente, pero en cualquiera de los casos, son lineales respecto a las incógnitas.

En la construcción de este sistema lineal podemos tener en cuenta el hecho de que en flujos sin deriva, las intensidades son simétricas respecto a crujía también en los paneles de la superficie libre, y por tanto, el tamaño del sistema lineal se reduce sensiblemente, y sus coeficientes cambian de modo similar a como lo hacían en el caso del flujo sin superficie libre. Así, podemos definir:

$$v_{jiS2} = v_{ji} + v_{jS1,i} \quad (2.126)$$

donde:

$iS1$ simétrico del panel i respecto a crujía en la discretización de la superficie libre.

$NFS2$ mitad de los paneles de la discretización de la superficie libre, $NFS/2$.

Resultados

La resolución del sistema lineal exige un análisis más detallado que en el problema del modelo doble. La matriz sigue siendo llena, y la parte de esta matriz que se refiere a la condición de superficie libre no es diagonalmente dominante. Eso dificulta en muchos casos la convergencia de los métodos iterativos. Por tanto, y dado que estos son mucho más rápidos, la idea

es intentarlo con un esquema de este tipo (se han probado varios) y si no conseguimos que haya convergencia, se pasa a un método directo. La descomposición LU es la más eficiente dentro de esta familia de métodos directos, pues no exige el almacenamiento en memoria de ninguna matriz auxiliar. A veces conviene recordar que hay dos problemas computacionales grandes con estos métodos, uno es el tiempo de cálculo, y otro la necesidad de almacenar en memoria grandes matrices llenas.

Una vez resuelto este problema lineal, disponemos del vector de intensidades, y con él del campo de velocidades en todo el entorno del objeto. La velocidad en un punto p del espacio se obtiene como:

$$v_p = \sum_{j=1}^{NBS4} v_{jpS4} \cdot \sigma_j + \sum_{j=NBS+1}^{NBS+NFS2} v_{jpS2} \cdot \sigma_j + v_\infty \quad (2.127)$$

Si ese punto es el característico de uno de los paneles, ésta velocidad se obtendría, para un panel del casco, como:

$$v_i = (2\pi \cdot n_i + v_{iS1,i} + v_{iS2,i} + v_{iS3,i}) \sigma_i + \sum_{j=1; j \neq i}^{NBS4} v_{jiS4} \cdot \sigma_j + \sum_{j=NBS+1}^{NBS+NFS2} v_{jiS2} \cdot \sigma_j + v_\infty \quad (2.128)$$

y para un panel de la superficie libre:

$$v_i = \sum_{j=1}^{NBS4} v_{jiS4} \cdot \sigma_j + (2\pi \cdot n_i + v_{iS1,i}) \sigma_i + \sum_{j=NBS+1, j \neq i}^{NBS+NFS2} v_{jiS2} \cdot \sigma_j + v_\infty \quad (2.129)$$

Conocida la velocidad en un punto, podemos calcular, igual que en el caso anterior, 2.37, usando la ecuación de Bernouilli, su presión y su coeficiente de presión C_p

$$C_p = 1 - \frac{v_p^2}{v_\infty^2}$$

que es una magnitud muy importante a tener en cuenta en la optimización hidrodinámica de una carena.

2.4.3 Linealización de Bruzzone de la condición de contorno.

Con esta nueva formulación, se trata de evitar el tener que construir la discretización de la superficie libre a partir de líneas de corriente del modelo

doble, ver [5]. Ese procedimiento es muy lento, y además las líneas de corriente son difíciles de construir. Veamos cómo lo hacemos:

Por un lado descomponemos el potencial total en una parte correspondiente al modelo doble, y un potencial de perturbación debido a la existencia de singularidades en la superficie libre.

$$\phi = \phi_D + \varphi \quad (2.130)$$

Hacemos lo mismo con la elevación. La descomponemos en la elevación de Bernoulli del doble modelo, y la elevación que se introduce al considerar también singularidades en la superficie libre.

$$\eta = \eta_D + \eta_0 \quad (2.131)$$

Por último, descomponemos el potencial total en la parte correspondiente al potencial del flujo libre, y al potencial debido a la existencia del modelo doble y de la superficie libre.

$$\phi = \phi_\infty + \psi \quad (2.132)$$

Si entramos en (2.85) tendremos que:

$$\eta = \frac{1}{2g} \left((\nabla\phi_\infty)^2 - (\nabla\phi_D + \nabla\varphi)^2 \right) \quad (2.133)$$

Si desarrollamos esta expresión:

$$\eta = \frac{1}{2g} \left((\nabla\phi_\infty)^2 - (\nabla\phi_D)^2 - 2\nabla\phi_D\nabla\varphi - (\nabla\varphi)^2 \right) \quad (2.134)$$

Como suponemos que las velocidades debidas al potencial de perturbación son mucho menores que las del doble modelo, la expresión anterior queda como:

$$\eta = \frac{1}{2g} \left((\nabla\phi_\infty)^2 - (\nabla\phi_D)^2 - 2\nabla\phi_D\nabla\varphi \right) \quad (2.135)$$

pero

$$\eta_D = \frac{1}{2g} \left((\nabla\phi_\infty)^2 - (\nabla\phi_D)^2 \right) \quad (2.136)$$

por tanto:

$$\eta = \eta_D - \frac{\nabla\phi_D\nabla\varphi}{g} \quad (2.137)$$

$$\eta_0 = -\frac{\nabla\phi_D\nabla\varphi}{g} \quad (2.138)$$

De este modo hemos conseguido linealizar la condición dinámica. Podemos trabajar de modo similar con la condición cinemática (2.84)

$$(\phi_{Dx} + \phi_{0x})(\eta_{Dx} + \eta_{0x}) + (\phi_{Dy} + \phi_{0y})(\eta_{Dy} + \eta_{0y}) - (\phi_{Dz} + \phi_{0z}) = 0 \quad (2.139)$$

Podemos eliminar los términos en los que los dos factores son de un orden de magnitud menor:

$$\phi_{0x}\eta_{0x} + \phi_{0y}\eta_{0y}$$

$$(\phi_{Dx} + \phi_{0x})\eta_{Dx} + (\phi_{Dy} + \phi_{0y})\eta_{Dy} + \phi_{Dx}\eta_{0x} + \phi_{Dy}\eta_{0y} - (\phi_{Dz} + \phi_{0z}) = 0 \quad (2.140)$$

Como las derivadas respecto a z para $z = 0$, tanto del potencial del doble modelo, como de las elevaciones son 0, podemos escribir la expresión anterior como:

$$(\nabla\phi_D + \nabla\phi_0)(\nabla\eta_D) + \nabla\phi_D\nabla\eta_0 - (\phi_{Dz} + \phi_{0z}) = 0 \quad (2.141)$$

O, lo que es lo mismo:

$$\nabla\phi\nabla\eta_D + \nabla\phi_D\nabla\eta_0 - \phi_z = 0 \quad (2.142)$$

Usemos ahora la otra descomposición que habíamos hecho del potencial total

$$(\nabla\phi_\infty + \nabla\psi)(\nabla\eta_D) + \nabla\phi_D\nabla\eta_0 - (\psi_z + \phi_{\infty z}) = 0 \quad (2.143)$$

Pero la componente en z de la velocidad del flujo libre es nula. Por tanto, la ecuación anterior queda como:

$$(\nabla\phi_\infty + \nabla\psi)(\nabla\eta_D) + \nabla\phi_D\nabla\eta_0 - \psi_z = 0 \quad (2.144)$$

Pasando a la derecha los términos conocidos:

$$\nabla\psi\nabla\eta_D + \nabla\phi_D\nabla\eta_0 - \psi_z = -\nabla\phi_\infty\nabla\eta_D \quad (2.145)$$

Conviene detenerse en el término $\nabla\eta_0$ de la ecuación anterior. De (2.138), calculando el gradiente, tendremos que:

$$\nabla\eta_0 = \nabla\left(-\frac{\nabla\phi_D\nabla\varphi}{g}\right) \quad (2.146)$$

si desarrollamos:

$$\varphi = \phi - \phi_D = \phi_\infty + \psi - \phi_D \quad (2.147)$$

Por tanto:

$$\nabla\eta_0 = \frac{1}{g} \nabla (\nabla\phi_D \nabla\phi_D - \nabla\phi_\infty \nabla\phi_D - \nabla\phi_D \nabla\psi) \quad (2.148)$$

Si ahora entramos en (2.145) y pasamos a la derecha los términos conocidos, tendremos:

$$-\frac{\nabla\phi_D}{g} \nabla (\nabla\phi_D \nabla\psi) + \nabla\psi \nabla\eta_D - \psi_z = -\frac{\nabla\phi_D}{g} \nabla (\nabla\phi_D \nabla\phi_D - \nabla\phi_\infty \nabla\phi_D) - \nabla\phi_\infty \nabla\eta_D \quad (2.149)$$

Para que todo quede en función del potencial, tenemos que quitar de la expresión anterior la ola de Bernoulli. Para ello, tenemos que entrar en (2.136), y calcular su gradiente.

$$\nabla\eta_D = \frac{1}{2g} \nabla \left((\nabla\phi_\infty)^2 - (\nabla\phi_D)^2 \right) \quad (2.150)$$

$$\nabla\eta_D = -\frac{\nabla \left((\nabla\phi_D)^2 \right)}{2g} = -\frac{\nabla \left(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 + \phi_{Dz}^2 \right)}{2g} \quad (2.151)$$

Para derivar, tendremos en cuenta, que todas las derivadas respecto a z del potencial del doble modelo en $z = 0$ son nulas, así como las cruzadas. Por tanto, ahorrándonos algunos pasos intermedios llegamos a:

$$\nabla\eta_D = -\frac{(\phi_{Dx}\phi_{Dxx} + \phi_{Dy}\phi_{Dxy}, \phi_{Dx}\phi_{Dxy} + \phi_{Dy}\phi_{Dyy}, 0)}{g} \quad (2.152)$$

Si llamamos:

$$a = \phi_{Dx}\phi_{Dxx} + \phi_{Dy}\phi_{Dxy} \quad (2.153)$$

$$b = \phi_{Dx}\phi_{Dxy} + \phi_{Dy}\phi_{Dyy} \quad (2.154)$$

Tendremos:

$$\nabla\eta_D = -\frac{(a, b, 0)}{g} \quad (2.155)$$

Si entramos en (2.149)

$$\nabla\phi_D \nabla (\nabla\phi_D \nabla\psi) + \nabla\psi (a, b, 0) + g\psi_z = \nabla\phi_D \nabla (\nabla\phi_D \nabla\phi_D - \nabla\phi_\infty \nabla\phi_D) - \nabla\phi_\infty (a, b, 0) \quad (2.156)$$

Vamos a fijarnos en un par de sumandos de esta expresión.

$$\nabla\phi_D \nabla (\nabla\phi_D \nabla\psi) = \nabla\phi_D \nabla (\phi_{Dx}\psi_x + \phi_{Dy}\psi_y + \phi_{Dz}\psi_z) \quad (2.157)$$

Si volvemos a asumir que las derivadas respecto a z del potencial del doble modelo, y sus cruzadas son nulas, tendremos:

$$\nabla\phi_D\nabla(\nabla\phi_D\nabla\psi) = a\psi_x + b\psi_y + (\phi_{Dx})^2\psi_{xx} + (\phi_{Dy})^2\psi_{yy} + 2\phi_{Dx}\phi_{Dy}\psi_{xy} \quad (2.158)$$

Esto mismo lo podemos repetir con otro sumando importante de (2.156)

$$\nabla\phi_D\nabla(\nabla\phi_D\nabla\phi_D - \nabla\phi_\infty\nabla\phi_D) = \nabla\phi_D\nabla(\phi_{Dx}^2 + \phi_{Dy}^2 + \phi_{Dz}^2 - \phi_{\infty x}\phi_{Dx} - \phi_{\infty y}\phi_{Dy}) \quad (2.159)$$

Trabajando sobre esta expresión con las mismas consideraciones en lo que respecta a las derivadas en z

$$\nabla\phi_D\nabla(\nabla\phi_D\nabla\phi_D - \nabla\phi_\infty\nabla\phi_D) = 2a\phi_{Dx} + 2b\phi_{Dy} - a\phi_{\infty x} - b\phi_{\infty y} \quad (2.160)$$

Entramos con todo esto en (2.156).

$$2a\psi_x + 2b\psi_y + (\phi_{Dx})^2\psi_{xx} + (\phi_{Dy})^2\psi_{yy} + 2\phi_{Dx}\phi_{Dy}\psi_{xy} + g\psi_z = 2a(\phi_{Dx} - \phi_{\infty x}) + 2b(\phi_{Dy} - \phi_{\infty y}) \quad (2.161)$$

que es básicamente igual a la condición (9) de la referencia [5], sólo que aquí consideramos que pueda haber deriva, teniendo en cuenta que la componente y de la velocidad del flujo libre pueda ser distinta de cero.

Como se ve, la expresión anterior es lineal en las incógnitas, que son aquellos términos en los que aparece ψ . Sin embargo, hay términos en los que aparecen derivadas segundas de alguno de los potenciales respecto a la dirección x y a la dirección y . Estas derivadas segundas, hay que calcularlas mediante operadores en diferencias, para lo cual, hay que tener en esa dirección siguientes y anteriores. Sin embargo, esto no es posible, porque la discretización que hemos hecho de la superficie libre no es cartesiana, sino que probablemente procederá de una generación elíptica, o cualquier otro tipo de sistema. Veamos cómo convertimos esa información en derivadas en las direcciones x , y y cómo discretizamos la ecuación 2.161.

2.4.4 Derivación numérica y condición de radiación en la formulación de Bruzzone.

Derivar numéricamente consiste en usar la discretización espacial para evaluar los incrementos. La discretización que realizamos en la superficie libre no sigue ni la dirección x , ni la dirección y . Por tanto, para obtener estas

derivadas tenemos que transformar las derivadas en las direcciones de la malla en derivadas en x y en y . Si llamamos a las direcciones en la malla de la superficie libre longitudinal l , y transversal t , tendremos que, siendo F un campo escalar en \mathbb{R}^3 , se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \quad (2.163)$$

Podemos decir por tanto que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2.164)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \quad (2.165)$$

Si llamamos:

$$\begin{pmatrix} c_{xl} & c_{xt} \\ c_{yl} & c_{yt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.166)$$

Imaginemos que tenemos una malla de la superficie libre. En esta malla estructurada tenemos en cada punto característico dos direcciones, una longitudinal, y otra transversal (fig 2.2).

Las derivadas longitudinal y transversal lo son a lo largo de la línea que une los puntos característicos de los paneles tanto en una como en otra dirección. Hemos conseguido transformar las derivadas en x e y en derivadas en estas direcciones. Para poder realizar estos cambios tenemos que calcular los coeficientes 2.166

$$\begin{pmatrix} c_{xl} & c_{xt} \\ c_{yl} & c_{yt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Supongamos otra vez que F es un campo escalar en \mathbb{R}^3 . Veamos las derivadas al revés:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dl} \quad (2.167)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.168)$$

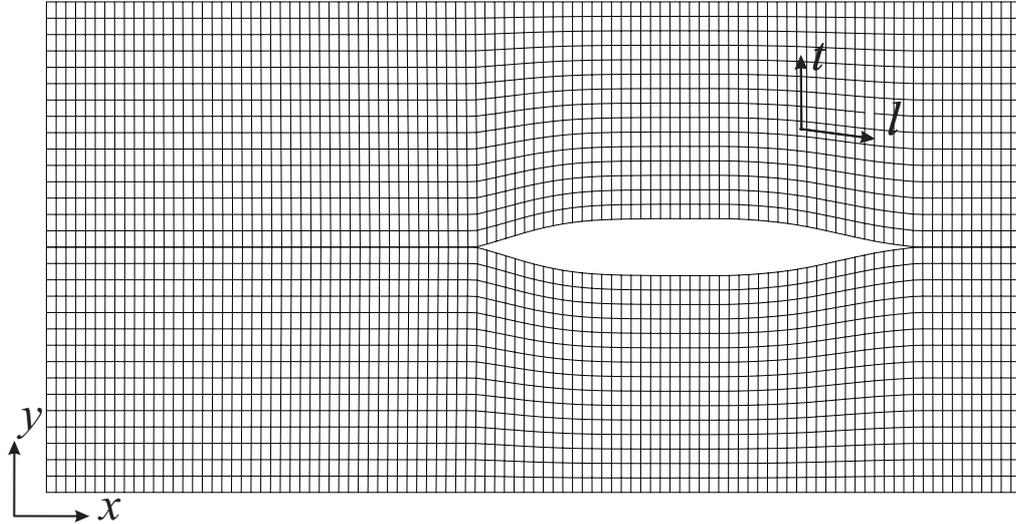


Figura 2.2: Direcciones principales en la superficie libre.

Escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial l} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dl} & \frac{dy}{dl} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.169)$$

Pero nosotros buscamos exactamente la expresión inversa. O sea, que si llamamos

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dl} & \frac{dy}{dl} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.170)$$

tendremos A^{-1} tal que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial l} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2.171)$$

Si conocemos la matriz A en cada punto, su inversa se evalúa directamente. Pero derivar numéricamente a lo largo de las direcciones longitudinal y transversal equivale a hacer cocientes incrementales en los que en el numerador

aparece algo del tipo ΔF y en el denominador Δl y Δt , donde l y t se refieren a los arcos medidos sobre estas curvas. Si escribimos cada una de estas curvas parametrizadas por sus arcos -la longitudinal $(x(l), y(l))$ y la transversal $(x(t), y(t))$ ⁴ - en realidad es fácil ver que en un punto determinado

$$\left(\frac{dx}{dl} \quad \frac{dy}{dl} \right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \right)$$

representan los vectores tangentes unitarios a lo largo de ambas direcciones. Lo que haremos para evaluar estos vectores tangentes es definir splines cúbicos parámetros a lo largo de las direcciones longitudinal y transversal. El parámetro no será el arco, sino directamente el índice de cada punto dentro de la línea en la que se encuentre. Esta es una técnica habitual en diseño gráfico, muy estable, robusta y precisa. De este modo, el vector tangente se calcula obteniendo en cada punto las derivadas de cada uno de los splines asociados a cada una de las componentes. Se normaliza y tenemos ya los vectores anteriores e invirtiendo:

$$\begin{pmatrix} c_{xl} & c_{xt} \\ c_{yl} & c_{yt} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Veamos ahora cómo estimamos las derivadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial l} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Si estamos en un punto característico de un panel de la superficie libre (ver fig. 2.2), y queremos estimar una de las dos derivadas anteriores de una función cualquiera F , tendremos que elegir los operadores discretos para dichas derivaciones.

Previamente necesitamos medir la abscisa curvilínea en ambas direcciones. Para esto último, como contábamos previamente nos apoyamos en la definición mediante splines cúbicos de estas líneas. Medir arcos equivale a integrar el módulo de la tangente de la curva parametrizada, y eso es relativamente sencillo cuando se usan splines. En lo que se refiere a las derivadas en la dirección longitudinal usaremos el operador up-wind de Dawson para imponer

⁴Aquí estamos abusando de la notación, pues las curvas $(x(l), y(l))$, $(x(t), y(t))$ siendo distintas no deberíamos notarlas igual.

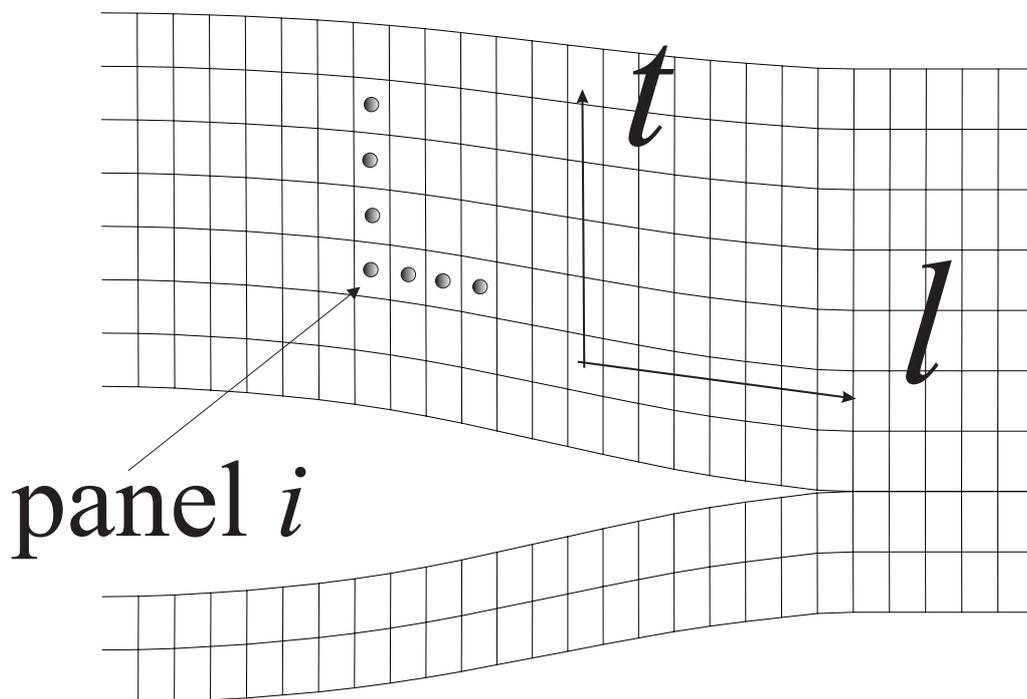


Figura 2.3: Operadores en la superficie libre.

de modo numérico la condición de radiación. Este operador se ha descrito ya en la ecuación 2.121 y anteriores, y no insistiremos más en él.

Las derivadas transversales tienen más interés. Se han hecho pruebas con diferentes operadores. Aquí ya no tiene sentido hablar de up-wind, así que distinguiremos entre operadores que miran hacia el casco, o que miran hacia el mar. Se han hecho pruebas con operadores de dos puntos en ambas direcciones, de tres puntos centrado, y se ha usado el mismo operador de Dawson probando en ambas direcciones. En las geometrías más sencillas la diferencias eran inapreciables, pero en un velero con quilla con bulbo y navegando derivado y escorado, fue el de Dawson mirando hacia el mar el que mejores resultados dio. De hecho la explicación es la misma que en el de las derivadas longitudinales. Cuando miramos hacia el mar en la parte de proa, estamos construyendo en realidad un operador up-wind, pues la información procede de donde viene la corriente (ver fig. 2.3).

2.4.5 Discretización de la condición de Bruzzone.

Para discretizar (2.161) seguiremos un proceso muy similar al empleado para discretizar la condición original de Dawson, (2.112). Empezamos por discretizar la geometría. Así, realizamos un mallado superficial de toda la carena -no sólo la obra muerta-, y de una parte de la superficie libre en torno a la carena. Supondremos planos cada uno de esos paneles siguiendo un método de proyección análogo al estudiado en 2.3.4. Volvemos a elegir como singularidades un conjunto de fuentes superficiales distribuidas por todos estos paneles planos. Supondremos otra vez que en cada uno de estos paneles la densidad es constante, y por tanto, reducimos el problema a encontrar el valor de estas constantes. Sabemos que el potencial correspondiente al flujo libre estará incorporado al flujo base (2.132). Así, el potencial de perturbación ψ , en un punto genérico p , se escribirá, antes de la discretización como:

$$\psi(p) = \int \int_{BS \cup FS} \frac{\sigma(q)}{r(p, q)} dS \quad (2.172)$$

y después, como siempre, la integral deviene sumatorio de integrales más sencillas:

$$\psi(p) = \sum_{i=1}^{NBS+NFS} \sigma_j \int \int_{A_i} \frac{1}{r(p, q)} dS \quad (2.173)$$

donde A_i representa el cuadrilátero correspondiente al panel i . Lo que nos interesa no es tanto el potencial como su gradiente. Además, resulta interesante, a efectos de discretizar, conocer el gradiente de este potencial de perturbación en el punto característico de un panel genérico j . Si llamamos p_j a este punto característico, tendremos que:

$$\nabla \psi(p_j) = \sum_{i=1}^{NBS+NFS} \sigma_j \int \int_{A_i} \nabla \left(\frac{1}{r(p_j, q)} \right) dS \quad (2.174)$$

Como sabemos, una de estas integrales tiene una singularidad, al hacerse nulo el denominador cuando estamos evaluando dicha integral en el propio panel j . Sin embargo, pasando al límite hemos visto ya que esa singularidad es evitable, y que la integral es calculable. Así, la expresión de ese sumatorio queda:

$$\nabla \psi(p_j) = -2\pi \sigma_j \cdot n_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{NBS+NFS} \sigma_j \int \int_{A_i} \nabla \left(\frac{1}{r(p_j, q)} \right) dS \quad (2.175)$$

Como la velocidad es el gradiente negativo del potencial, podemos retomar la ecuación 2.23, para escribir

$$\nabla\psi(p_j) = -2\pi\sigma_j \cdot n_j - \sum_{i=1, i \neq j}^{NBS+NFS} \sigma_i \cdot v_{ij} \quad (2.176)$$

o, definiendo también:

$$v_{jj} = 2\pi \cdot n_j \quad (2.177)$$

Si además hablamos directamente del potencial en j , y definimos $N = NBS + NFS$ tendremos la expresión del potencial más compacta todavía:

$$\nabla\psi_j = - \sum_{i=1}^N \sigma_i \cdot v_{ij} \quad (2.178)$$

Si seguimos esta misma notación con todos los potenciales, tendremos que 2.161 se convierte en el panel j en:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i \cdot \left[\begin{array}{l} 2a \cdot v_{ij_x} + 2b \cdot v_{ij_y} + (\phi_{Dx})^2 (c_{xl} \cdot v_{ij_{xl}} + c_{xt} \cdot v_{ij_{xt}}) + \\ (\phi_{Dy})^2 (c_{yl} \cdot v_{ij_{yl}} + c_{yt} \cdot v_{ij_{yt}}) + \\ 2\phi_{Dx}\phi_{Dy} (c_{yl} \cdot v_{ij_{xl}} + c_{yt} \cdot v_{ij_{xt}}) + g\psi_z \end{array} \right] = \\ -2a (\phi_{Dx} - \phi_{\infty x}) - 2b (\phi_{Dy} - \phi_{\infty y}) \quad (2.179)$$

Donde para calcular los coeficientes a y b se ha derivado usando los mismos coeficientes de transformación de derivadas:

$$\phi_{Dxx} = c_{xl} \cdot \phi_{Dxl} + c_{xt} \cdot \phi_{Dxt} \quad (2.180)$$

$$\phi_{Dxy} = c_{yl} \cdot \phi_{Dxl} + c_{yt} \cdot \phi_{Dxt} \quad (2.181)$$

$$\phi_{Dyy} = c_{yl} \cdot \phi_{Dyl} + c_{yt} \cdot \phi_{Dyt} \quad (2.182)$$

Si consideramos que el sistema lineal es el siguiente:

$$A \cdot \sigma = B \quad (2.183)$$

Con A matriz de coeficientes, σ vector de incógnitas, y B , vector de términos independientes, tendremos que:

$$A_{ji} = 2a \cdot v_{ij_x} + 2b \cdot v_{ij_y} + (\phi_{Dx})^2 (c_{xl} \cdot v_{ij_{xl}} + c_{xt} \cdot v_{ij_{xt}}) + \\ (\phi_{Dy})^2 (c_{yl} \cdot v_{ij_{yl}} + c_{yt} \cdot v_{ij_{yt}}) + \\ 2\phi_{Dx}\phi_{Dy} (c_{yl} \cdot v_{ij_{xl}} + c_{yt} \cdot v_{ij_{xt}}) + g\psi_z \quad (2.184)$$

y

$$B_j = -2a(\phi_{Dx} - \phi_{\infty x}) - 2b(\phi_{Dy} - \phi_{\infty y}) \quad (2.185)$$

con a , b , ϕ_{Dx} , etc. evaluadas en el punto característico del panel j .

Caso de que el flujo sea simétrico, haremos consideraciones semejantes a las que hicimos en 2.4.2 . Como antes explicamos, todas estas consideraciones se basan en una idea muy sencilla. Si tenemos un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

y sabemos que por simetría $\beta = \alpha$, entonces el sistema lineal se transforma en uno más sencillo de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la simetría sólo es interesante a efectos computacionales, pero no introduce ninguna novedad a efectos teóricos. De todos modos se implementa de modo separado el caso habitual simétrico dado que reduce por cuatro el tamaño de la matriz del sistema, y más o menos en el mismo orden el tiempo de cálculo.

2.4.6 Comparación de resultados entre las condiciones de Dawson y Bruzzone.

Se trata en esta sección de comparar los resultados de los dos métodos lineales explicados. Para ello usaremos una forma estandar, la S60. Compararemos los dos métodos entre si, con datos reales [46], y con cálculos lineales procedentes del proyecto Bajel de validación de CFD. Lo haremos a dos números de Froude a los que se suele estudiar este modelo, 0.160 y 0.316.

Froude=0.160

Los cálculos a número de Froude bajo son mucho más delicados que a número de Froude moderado. La longitud de la ola asociada a una determinada velocidad es:

$$\lambda = \frac{2\pi v^2}{g} \quad (2.186)$$

Podemos poner esta ecuación en función del número de Froude y de la eslora:

$$\lambda = 2\pi F_n^2 L \quad (2.187)$$

Para el S60, la eslora vale:

$$L = 121.92$$

Por tanto, para este número de Froude, la longitud de onda propia vale:

$$\lambda = 19.61m$$

Esto significa que en la eslora del barco tendremos 6.2 olas. Si por cada ola necesitamos 15 paneles, tendremos del orden de 90 paneles por eslora. Si en total la malla mide 2.5 esloras, tendremos 225 paneles por cada línea. Si ahora nos vamos a 10 líneas de paneles, que es lo mínimo, tendremos 2250 paneles en la flotación. En realidad son el doble, pero se quedan en 2250 si usamos la simetría del problema. O sea, que la malla es muy fina. De hecho, los resultados son dependientes de la malla. En la figura 2.4 aparece la malla en cuestión.

Esta panelización se realiza mediante líneas de corriente del modelo doble. Los resultados referidos a la distribución de velocidades en la superficie libre se representan en la la figura 2.5, donde se aprecia la gran cantidad de oscilaciones. Como sabemos elevación y velocidad están directamente relacionadas a través de la ecuación de Bernouilli. Presentamos ahora el mallado del casco, de la superficie libre, y los resultados obtenidos con la formulación lineal alternativa, (ver sección 2.4.3) y figuras 2.6, 2.7, 2.12. Estas mallas han sido realizadas con el programa GID. Además, presentamos una comparación de los perfiles de ola más próximos al casco, la sección 0.0755L, figura 2.9. Los resultados del corte de ola para esta sección son bastante malos, sobre todo el segundo pico. No hemos conseguido encontrar explicación, pero hemos verificado que los códigos del canal de Wageningen y el Shipflow tienen el mismo problema.

Froude=0.316

A este número de Froude los resultados son bastante mejores. Presentamos el mismo corte de ola en la figura 2.10. Se aprecia la buena coincidencia con los datos experimentales para las dos posibilidades. Si el buque tuviese una flotación más complicada, con una entrada y salida más angulosa, el

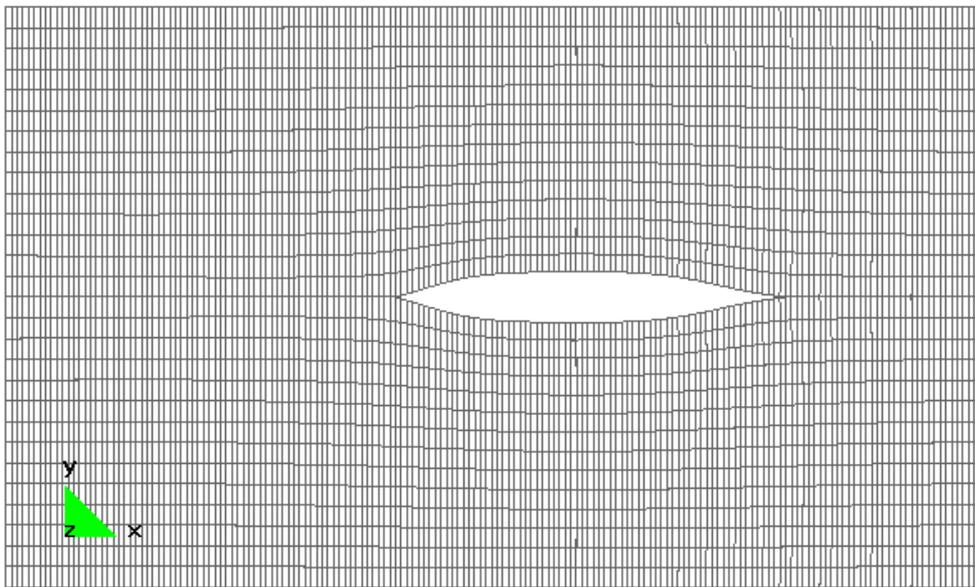


Figura 2.4: Malla superficie libre S60 a $Fn = 0.160$.

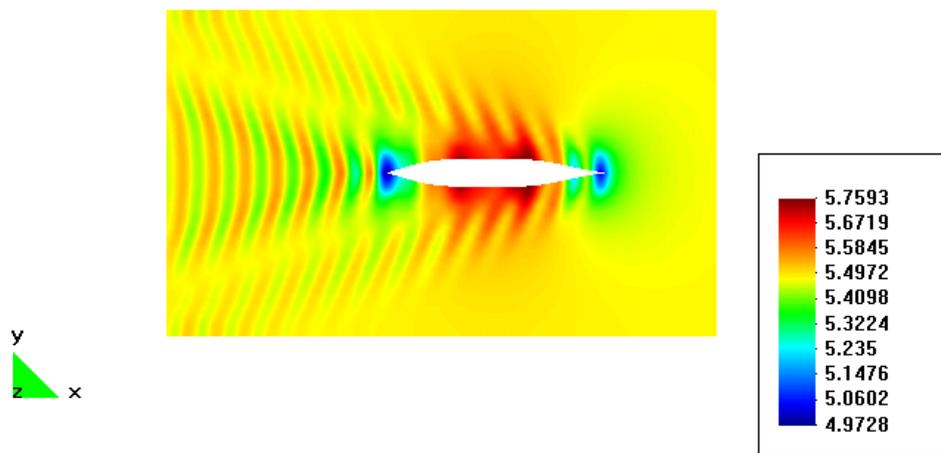


Figura 2.5: Velocidades en la superficie libre S60 a $Fn = 0.160$. Método de Dawson.

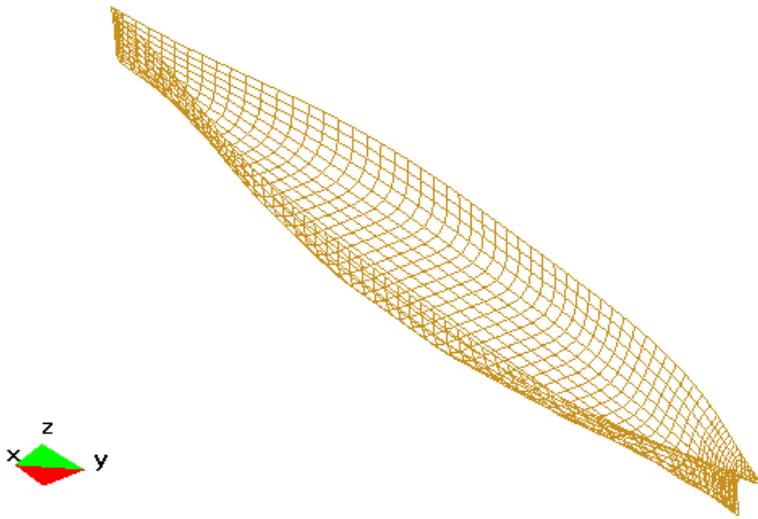


Figura 2.6: Mallado del casco, S60.

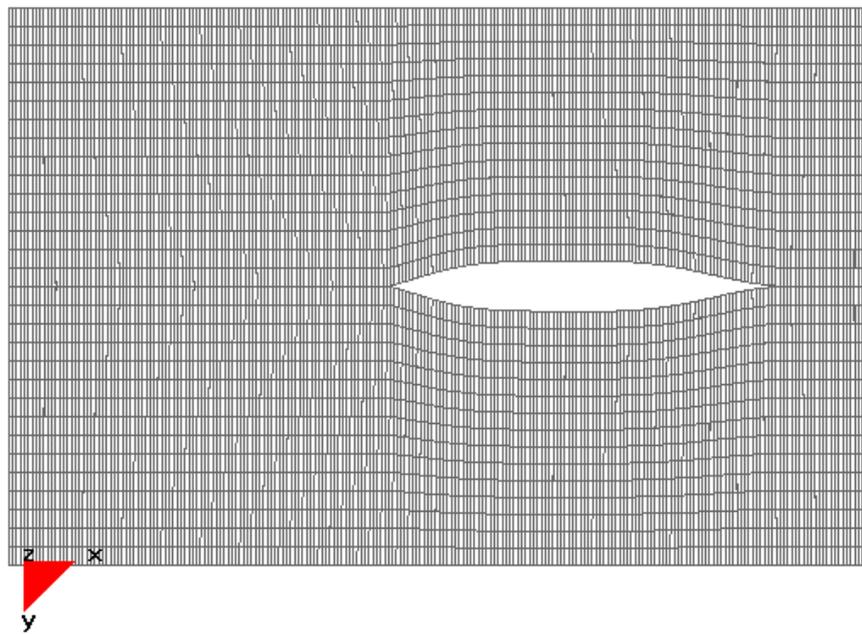


Figura 2.7: Malla de la superficie libre S60 a $Fn = 0.160$. Método de Bruzzone.

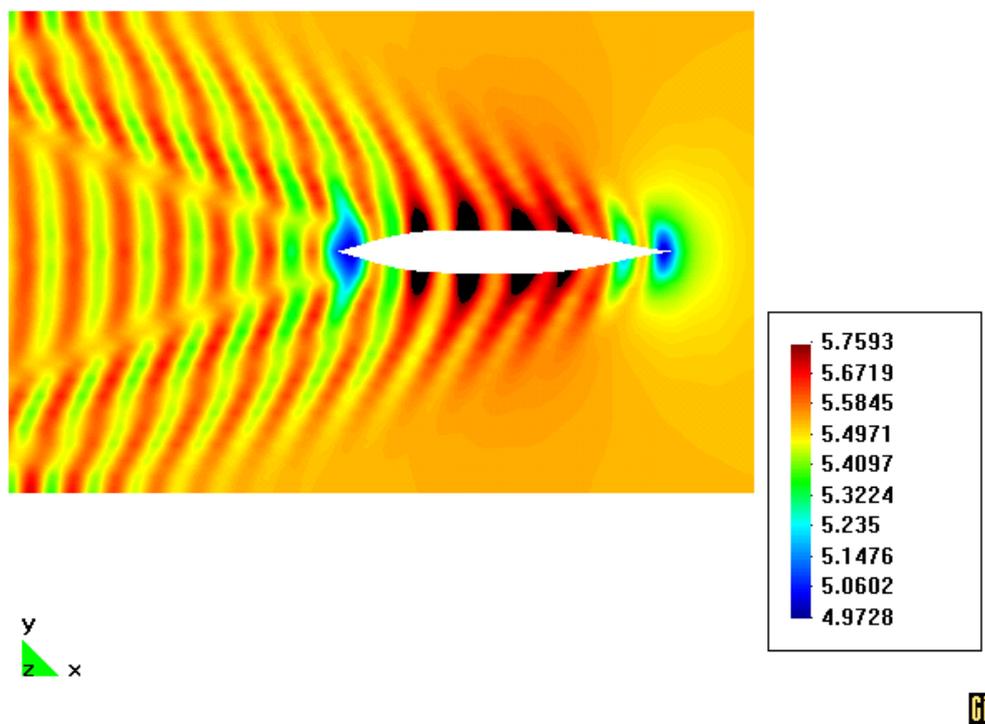


Figura 2.8: Velocidades en la superficie libre S60 a $Fn = 0.160$. Método de Bruzzone.

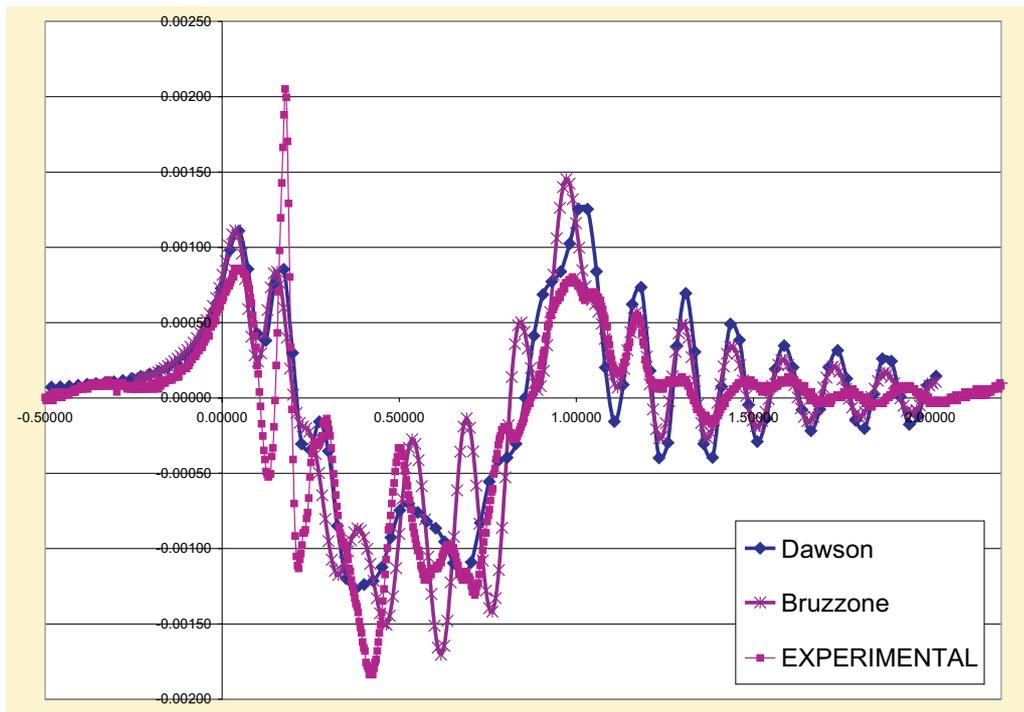


Figura 2.9: Comparación secciones longitudinales , $y = 0.0755L$, $Fn = 0.160$.

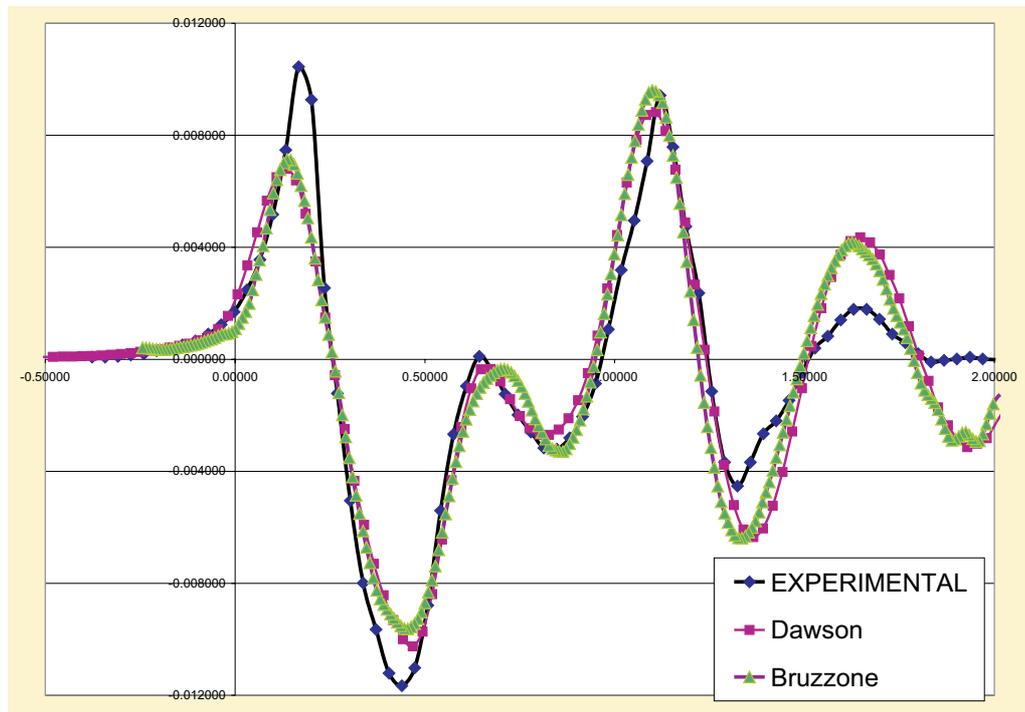


Figura 2.10: Comparación secciones longitudinales $y = 0.0755L$, $Fn = 0.316$

cálculo de las líneas de corriente del modelo doble no es tan sencillo como para el serie 60. Por esto, dado que los resultado son muy similares, y dado que la panelización sin utilizar líneas de corriente es mucho más sencilla, nos decantamos por la linealización de Bruzzone y es la que usaremos a partir de ahora para todos los estudios. Las panelizaciones son las mismas que para el número de Froude bajo, pues es éste el que marca la situación más crítica. Presentamos los resultados correspondientes a las velocidades en la superficie libre para los dos casos en las figuras 2.11 y 2.12.

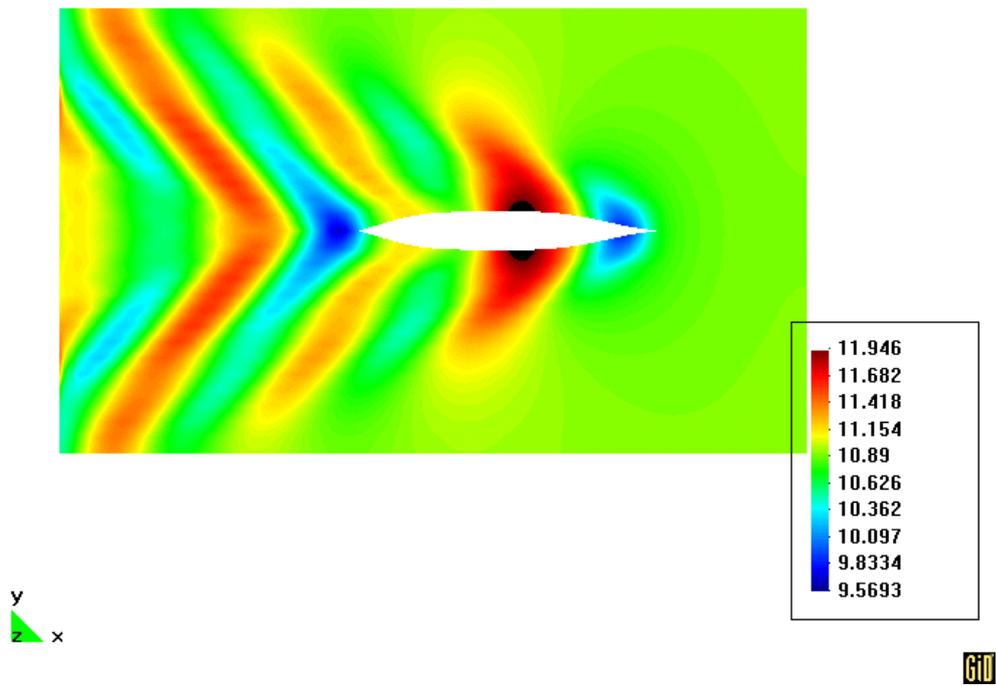


Figura 2.11: Velocidades en la superficie libre S60 a $Fn = 0.316$. Método de Dawson.

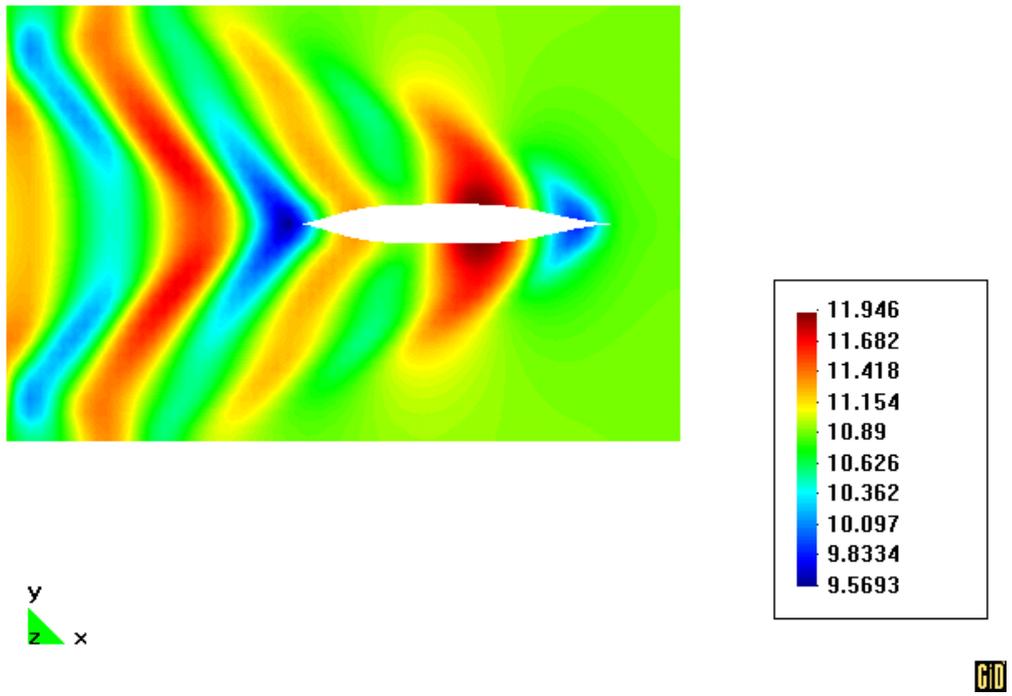


Figura 2.12: Velocidades en la superficie libre S60 a $Fn = 0.316$. Método de Bruzzone.

Capítulo 3

Flujos en popas con espejo.

3.1 Introducción

Los métodos descritos hasta ahora son adecuados para barcos con popas redondeadas, pero no son los más convenientes cuando se trata de describir el flujo en torno a la mayoría de los buques modernos, que tienen popa de espejo (transom stern). El flujo en la parte de popa en este tipo de buques tiene una serie de particularidades que conviene estudiar con detalle, y que exigen una modificación de las condiciones de contorno en esa zona, y en la mayor parte de los casos, también de la forma en que panelizamos la parte de popa. Hay que decir que localmente, el flujo en popa está dominado por efectos viscosos, pero globalmente, es importante modelar correctamente la forma de las olas en esa parte de la superficie libre, y eso sí que admite un tratamiento razonablemente bueno desde la teoría potencial, como veremos en las siguientes secciones. Pasamos a estudiar los fenómenos físicos que aparecen en este tipo de flujos.

3.2 Fenómenos físicos involucrados.

En los barcos con popa de espejo, se pueden distinguir tres tipos de flujos.

1. El flujo convencional con popa de espejo seca que es similar al flujo en buques con popa de crucero. La popa de espejo está completamente por encima de la superficie libre y no interviene de modo relevante en el flujo.

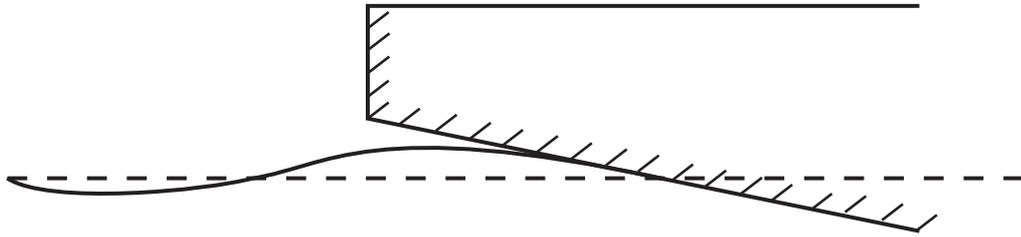


Figura 3.1: Flujo convencional.

2. El flujo con espejo seco ("dry transom stern flow"), que ocurre en espejos sumergidos a una velocidad lo suficientemente alta como para que el flujo y la superficie libre se separen del casco en la arista entre el espejo y el fondo. De hecho, el espejo no se moja.
3. El flujo convencional con popa de espejo mojada ("dead water flow"), que se produce en espejos sumergidos a baja velocidad. Detrás del espejo tenemos flujo turbulento. El fluido sigue al casco, y no al resto del flujo.

El que se tenga un flujo u otro depende de las formas del buque, del calado en el espejo y de la velocidad. A veces pueden combinarse, con posibilidades diferentes si nos movemos en la manga en el espejo.

3.2.1 Flujo convencional con popa de espejo seca.

Consideremos en primer lugar lo que sucede si el espejo está muy por encima de la flotación. El flujo se adapta para dejar tangencialmente y a presión ambiente el casco, ver figura 3.1.

3.2.2 Flujo con popa de espejo seca.

Si el punto de desprendimiento se mueve hacia atrás acabará llegando al borde del espejo, y el régimen del flujo cambia. Esto sucederá, bien porque el espejo no esté tan alto, bien porque al aumentar la velocidad, el buque trime de popa. En este borde se siguen verificando las condiciones dinámica y cinemática de superficie libre lo que quiere decir que la pendiente de las líneas de corriente en el borde del espejo deberá ser la de la prolongación del

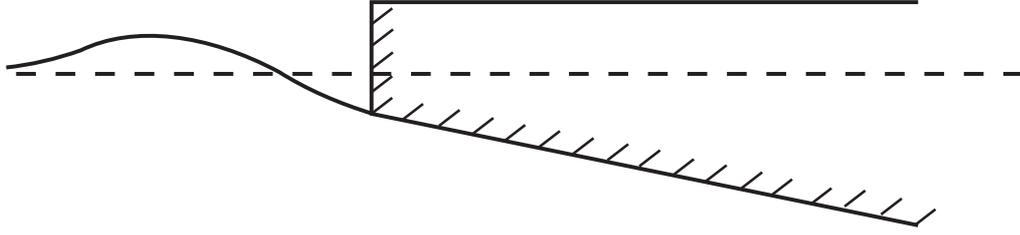


Figura 3.2: Flujo con espejo seco.

fondo que muere en el espejo, y la velocidad tendrá como módulo aquel que garantice que la profundidad en esa zona va a ser la del espejo. Para que la presión hidrodinámica contrarreste la presión hidrostática, se debe verificar que:

$$1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = \frac{g\eta_{tr}}{\frac{1}{2}V_\infty^2} = \frac{2}{Fn_{tr}^2} \quad (3.1)$$

con

$$Fn_{tr} = \frac{V_\infty}{\sqrt{g\eta_{tr}}} \quad (3.2)$$

donde η_{tr} es el calado significativo del espejo y Fn_{tr} es el número de Froude basado en ese calado.

Para un espejo con un calado grande, la presión hidrostática es positiva, por lo que deberá ser compensada con una presión hidrodinámica negativa, lo que se consigue con una zona de alta curvatura justo a popa del espejo seco, ver figura 3.2.

Para un espejo que está por encima de la flotación, la presión hidrostática es negativa y por tanto las líneas de corriente abandonan el espejo con pendientes positivas en el plano xz , aunque si la altura es grande, dichas líneas se desprenden antes, dando lugar a un flujo como el descrito en el apartado anterior.

No está claro en qué momento suceden esas transiciones, e incluso se producen fenómenos de histéresis al cambiar de un régimen a otro. No se cambia a la misma velocidad al acelerar que al decelerar. Estos fenómenos no están suficientemente estudiados, aunque la zona de desprendimiento sucede para un número de Froude en el espejo Fn_{tr} , entre tres y cuatro.

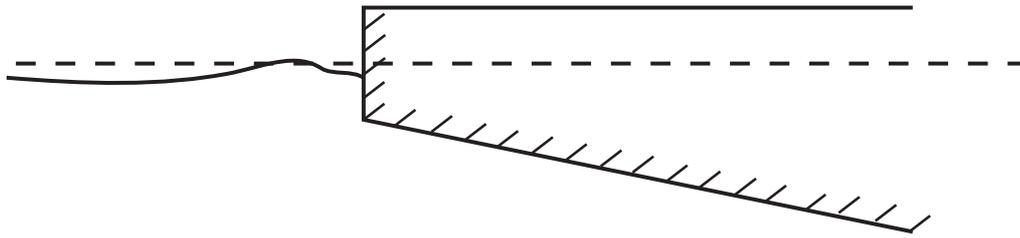


Figura 3.3: Flujo con popa de espejo mojada.

3.2.3 Flujo con popa de espejo mojada.

Cuando el calado del espejo es muy grande, o la velocidad ha bajado lo suficiente, la curvatura de las líneas de corriente debe crecer. La ola rompe a poca distancia de la popa, produciendo un burbujeo. Si la velocidad baja más, o el calado sube, las líneas se pegan a la popa, produciendo una zona de velocidades relativas nulas, dado que se produce una separación del flujo en el espejo, ver figura 3.3. Este tipo de flujo no puede ser abordado con métodos puramente potenciales, dada la relevancia de los efectos viscosos.

3.3 Modelo matemático y revisión de trabajos realizados.

Nos centramos en el caso de flujo con popa de espejo seca. Como sabemos, en este tipo de flujos se produce una separación suave de las líneas de corriente en la popa. La forma en que se produce esta separación recuerda a la del borde de salida de un perfil aerodinámico. De hecho, en el límite se produce sustentación y el buque empieza a planear. Este límite parece sugerir que es necesario modelar esa sustentación para tener una solución adecuada del problema, como afirman Telste y Reed [45],[41]. Existe un trabajo previo importante en este sentido, el de Tulin y Hsu[47].

Tulin y Hsu desarrollaron un modelo para buques esbeltos de alta velocidad con popas de espejo. Suponiendo que tanto la manga como el calado eran pequeños comparados con la eslora, y estudiando el problema asintótico del número de Froude tendiendo a infinito, fueron capaces de reducir el problema tridimensional a una serie de problemas bidimensionales en cada una de

las secciones transversales. Cada uno de estos problemas bidimensionales es similar al correspondiente a un problema de perfiles finos bidimensional. En la superficie libre colocaban una estela de vórtices en la parte de popa del buque, para satisfacer la condición de contorno de la superficie libre en esa zona, que es equivalente a la condición de Kutta aplicada al borde de salida de un ala. El resultado más relevante de este modelo es la aparición de una resistencia añadida debida a esta capa de torbellinos, similar a la que aparece por el desprendimiento de estos torbellinos en el análisis de perfiles aerodinámicos.

Sin embargo, la condición de contorno que debe ser aplicada en este caso es un poco más exigente que la condición de Kutta, que exige que la velocidad debe ser tangente a la superficie en el borde de salida, y finita. En nuestro caso hay una condición de tangencia a la superficie del casco en la parte inferior del espejo, pero hay también una condición de presión, como ya comentamos en 3.2.2. Según Tulin-Hsu y Telste-Reed esta doble condición exigía disponer de una singularidad adicional en esos paneles, un dipolo.

Otro tratamiento posible es el sugerido por Raven[40]. Raven razona que la inclusión de los torbellinos se debe a la exigencia doble en el borde de salida de condición de tangencia al casco, y condición de presión, y a la analogía discutible con la condición de Kutta en el borde de salida. Sin embargo, hay una diferencia importante entre un perfil sustentador y una popa de espejo. Esta diferencia es la existencia de una circulación en el perfil que no existe en la popa de espejo.

Para entender esto, pensemos en flujos bidimensionales. Para un perfil, el dominio fluido es doblemente conexo, y la solución no es única a menos que se defina una circulación a través de la condición de Kutta. Esto define la forma en que el flujo deja el borde de salida y fija una de las soluciones entre el conjunto infinito de soluciones posibles. Sin embargo, en un cuerpo bidimensional flotando en un fluido, el dominio fluido está limitado por la superficie libre y por este cuerpo. Por tanto el dominio es simplemente conexo y no tiene sentido hablar de una circulación desconocida en torno al cuerpo.

Y también la condición de Kutta tiene un significado completamente diferente en este caso. Sin esa condición no hay un conjunto infinito de soluciones cumpliendo las condiciones de contorno, sino solamente dos: la correspondiente al flujo con popa de espejo mojada 3.2.3, y la correspondiente al flujo que deja el codaste tangencialmente manteniendo el espejo seco, que es el

que nos ocupa.

En el caso tridimensional, la situación es similar. Para un ala, la vorticidad existe en toda su envergadura, continuando en la estela de vórtices que se desprenden en su extremo. Pero en el caso del buque, no hay nada nuevo en el caso 3D frente al 2D y por tanto, no aparece vorticidad tampoco. Por tanto, desde este punto de vista, no tiene sentido el incluir la vorticidad en los modelos numéricos, aunque puedan tener buenas propiedades numéricas. Por tanto usaremos solamente fuentes como veníamos haciendo hasta ahora, pues éste es el modelo que seguiremos.

3.4 Implementación para el flujo con espejo seco -dry transom-

Las condiciones de tangencia del flujo y de presión en la superficie libre se deben imponer de algún modo en la superficie libre adyacente al casco. Como el casco permanece seco, en él no se debe imponer ninguna condición. Realmente, una vez hecho el mallado sólo podemos imponer en cada panel una condición. Veamos cómo nos las ingeniamos para hacerlo.

3.4.1 Mallado.

La forma de realizar el mallado del dominio físico es diferente cuando se tiene en cuenta el flujo con espejo. Si se puede considerar el espejo seco, no tiene sentido mallarlo. En cuanto a la parte de la superficie libre a popa del espejo, tiene un mallado independiente del resto de dicha superficie, como se puede observar en la figura 3.4, consecuencia de la diferente naturaleza entre la condición que se impone en los paneles de la superficie libre a popa del espejo y la condición habitual de radiación.

El uso de operadores de tipo up-wind para estimar las derivadas de ciertas magnitudes en la condición de radiación requiere que haya continuidad en las líneas de paneles en la superficie libre, continuidad que se mantiene en el nuevo mallado en las líneas de paneles que no tienen nada que ver con el espejo. Dicha continuidad se rompe en el espejo desde el que arrancan varias filas de paneles.

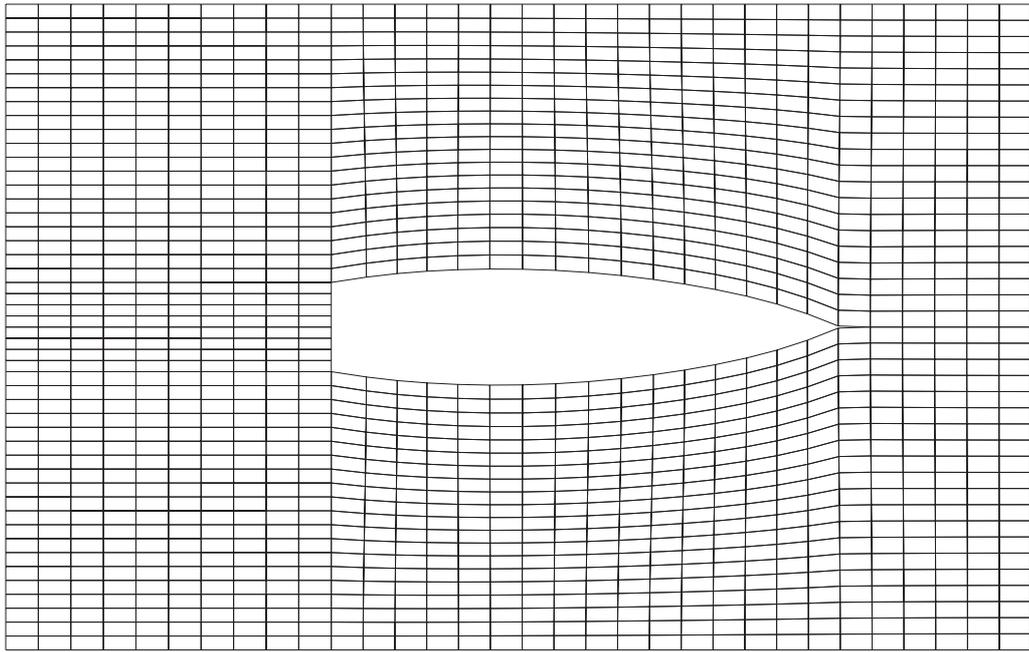


Figura 3.4: Mallado de ls FS, para popas con espejo seco.

3.4.2 Expansión de Taylor en el borde de salida.

Las condiciones son diferentes en las filas de paneles de la superficie adyacentes al espejo. En el punto de control de uno de esos paneles, al aplicar la condición cinemática, hay que estimar el valor de η_x , variación de la elevación en la superficie libre con respecto a x . Si hacemos un desarrollo en serie de Taylor de la elevación viendo desde ese punto de la superficie libre al borde del espejo, y viceversa, tendremos:

$$\eta_{tr} = \eta + \Delta x \eta_x \quad (3.3)$$

$$\eta = \eta_{tr} - \Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{casco} \quad (3.4)$$

Sumando estas dos ecuaciones tendremos una ponderación de ese valor en función de la pendiente en el espejo.

$$\eta_x = 2 \left(\frac{\eta_{tr} - \eta}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{casco} \quad (3.5)$$

Para imponer esta condición en los paneles adyacentes al espejo hacemos las siguientes consideraciones:

En la condición cinemática 2.84

$$\phi_x \cdot \eta_x + \phi_y \cdot \eta_y - \phi_z = 0$$

como $\phi_y \ll \phi_x$ y $\eta_y \ll \eta_x$, suponemos $\phi_y \eta_y \ll \phi_x \eta_x$, y no lo tenemos en cuenta en esa ecuación que se convierte en:

$$\phi_x \cdot \eta_x - \phi_z = 0 \quad (3.6)$$

Considerando el potencial total descompuesto como suma de un flujo base y uno de perturbación 2.130:

$$\phi = \phi_D + \varphi$$

la ecuación anterior se convierte en:

$$(\phi_{Dx} + \varphi_x) \cdot \eta_x - \phi_z = 0 \quad (3.7)$$

Suponiendo que

$$\varphi_x \ll \phi_{Dx} \quad (3.8)$$

hipótesis similar a la anterior, aunque de más difícil justificación, tenemos que 3.7 se convierte en:

$$\phi_{Dx} \cdot \eta_x - \phi_z = 0 \quad (3.9)$$

Entrando aquí con la expansión de Taylor de η_x :

$$\phi_{Dx} \cdot \left(2 \left(\frac{\eta_{tr} - \eta}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{casco} \right) - \phi_z = 0 \quad (3.10)$$

Tenemos dos incógnitas, ϕ y η que podemos relacionar mediante la ecuación de Bernouilli, 2.85:

$$\eta = \frac{V_\infty^2 - \nabla\phi^2}{2g}$$

expresión que podemos linealizar descomponiendo el potencial igual que antes:

$$\eta = \frac{V_\infty^2 + \nabla\phi_D^2 - 2\nabla\phi_D\nabla\phi}{2g} \quad (3.11)$$

Entrando con esta expresión de η en 3.10 obtenemos la condición buscada, linealizada en el potencial .

3.4.3 Expansión de Taylor en el borde de salida mejorada.

En la linealización de $\nabla\phi^2$ para obtener la condición de Bernouilli linealizada 3.11 no tenemos en cuenta una diferencia muy importante entre el flujo del doble modelo en la superficie libre y el flujo obtenido imponiendo en la superficie libre las condiciones de contorno adecuadas. Esta diferencia se refiere a que en la superficie libre, la velocidad del doble modelo no tiene componente z , mientras que obviamente sí hay una componente z en el flujo real, y muy importante en la zona del espejo. Por tanto, si linealizamos en

$$\nabla\phi^2 = (\nabla\phi_D + \nabla\varphi)^2 = \nabla\phi_D^2 + 2\nabla\phi_D\nabla\varphi + \nabla\varphi^2 \quad (3.12)$$

Tendremos que:

$$\nabla\phi_z^2 = \nabla\varphi_z^2 \quad (3.13)$$

Pero la velocidad de salida en el espejo, la conocemos en dirección (condición de tangencia) y en módulo (condición de profundidad). Llamemos V a

esta velocidad. Por tanto, podemos linealizar 3.13 en esta velocidad que se pretende conseguir:

$$\nabla\varphi_z^2 \approx V_z \nabla\phi_z \quad (3.14)$$

Por tanto, 3.12, teniendo como incógnita el potencial total se convierte en:

$$\nabla\phi^2 \approx -\nabla\phi_D^2 + 2\nabla\phi_D \nabla\phi + V_z \nabla\phi_z \quad (3.15)$$

que ya es lineal en la incógnita y con la que entramos en 2.85 y 3.10, para tener la condición linealizada de superficie libre a aplicar en la popa de espejo.

3.4.4 Condición linealizada ETSIN 1.

Esta condición se construye del siguiente modo: De la condición dinámica en es espejo, sabemos cuál tiene que ser el módulo de la velocidad a la salida. Llamemos V a esa velocidad. La primera suposición que hacemos, que parece razonable, es que la relación entre la velocidad en la dirección de la manga, V_y y la velocidad total es constante para el caso con superficie libre y para el cálculo del doble modelo, o sea:

$$\frac{V_y}{|V|} = \frac{V_{Dy}}{|V_D|} \quad (3.16)$$

Con lo cual, podemos deducir el valor de V_y . Además, como sabemos V , podemos decir que:

$$V_x^2 + V_z^2 = V^2 - V_y^2 \quad (3.17)$$

con lo que conocemos el módulo de la proyección sobre el plano XZ de la velocidad. Pero conocemos el ángulo de salida en ese plano, que es el que forma el fondo del casco en la zona del espejo. Podemos por tanto, conocer fácilmente las componentes x,z de la velocidad sin más que pensar que la relación entre esas dos componentes viene dada por ese ángulo. Por tanto, sabemos la velocidad que queremos conseguir V , y hemos estimado cada una de sus componentes usando esas hipótesis que parecen bastante razonables. De ese modo, obtenemos la condición lineal

$$V_x\phi_x + V_y\phi_y + V_z\phi_z = V^2 \quad (3.18)$$

3.4.5 Condición linealizada ETSIN 2.

En realidad sólo podemos poner una condición linealizada, o bien la dinámica linealizada, o bien la cinemática linealizada, o bien una linealización de la combinación de ambas. Esta condición sera una combinación lineal explícita de ambas.

La condición dinámica la tratamos igual que en el caso anterior pero suponiendo que el cuadrado de la componente y de la velocidad es despreciable frente a la x y la z . Queda por tanto:

$$V_x \nabla \phi_x + V_z \nabla \phi_z = V^2 \quad (3.19)$$

En cuanto a la condición cinemática, retomamos la condición en la que se han despreciado los términos en y , 3.6, en la que sabemos η_x , pues es la tangente que forma el fondo del barco al encontrarse con el espejo, y que vuelve a ser lineal en la incógnita, que es el potencial.

$$\phi_x \cdot \eta_x - \phi_z = 0$$

La condición que vamos a aplicar será suma de estas dos, afectada una de ellas por un coeficiente k , o sea:

$$k (V_x \nabla \phi_x + V_z \nabla \phi_z - V^2) + \phi_x \cdot \eta_x - \phi_z = 0 \quad (3.20)$$

Dependiendo del valor de k , tendremos una condición u otra. Trataremos de ver para qué valores de k obtenemos unos perfiles más realistas.

3.4.6 Resultados.

Casco para ejemplos.

Para probar estos modelos, empleamos un casco con espejo bastante simplificado. Evaluamos en la zona del espejo los valores de la tangente de la superficie libre deformada, y de la elevación de la superficie libre, y comparamos ambos valores con la tangente en la salida del casco, y con el calado del espejo. Presentamos varias vistas de dicho casco, ver figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8. Respecto a la velocidad a la que se harán las pruebas, parece sensato elegir un número de Froude lo suficientemente bajo como para que las hipótesis de linealidad sean razonables, y lo suficientemente alto como para que haya desprendimiento del flujo en la zona del espejo. Como decíamos en 3.2.2 hay

una variable que define adimensionalmente el fenómeno de desprendimiento, que es el número de Froude relativo al espejo, y que se definió en 3.2 como:

$$Fn_{tr} = \frac{V_{\infty}}{\sqrt{g\eta_{tr}}}$$

donde

V_{∞} Velocidad del buque.

η_{tr} altura del espejo.

g gravedad.

Se ha observado que el desprendimiento se produce para números de Froude

$$3 \leq Fn_{tr} \leq 4$$

aunque es razonable esperar que estemos en la zona de preplaneo que se produce para $Fn > 0.35$. Tomamos por tanto como velocidad la correspondiente a $Fn = 0.40$, o sea, $V = 10.28\text{m/sg}$. Se han hecho pruebas a otras velocidades pero los resultados no introducen nada nuevo a lo obtenido para el caso de referencia $Fn = 0.40$.

Resultados referidos a la condición 3.4.2

La apariencia visual del flujo es buena, como se puede advertir en la figura 3.9, donde presentamos las velocidades en el casco y en la superficie libre. Podemos analizar con más detalle la zona del espejo, figura 3.10. Ahí se puede observar ya que el acoplamiento no es perfecto en algunas zonas del espejo. Esto esperamos mejorarlo con el método no lineal. En la sección de perfil de esa zona podemos observar en qué medida se verifican la condición de tangencia y de profundidad, figura 3.11, que en la zona central del espejo es muy buena. No olvidemos que en realidad estamos imponiendo una condición combinada, que ni obliga a la condición cinemática (tangencia) ni a la dinámica (profundidad).

Resultados referidos a la condición 3.4.3

La apariencia visual del flujo es igual de buena que en el caso anterior, como se puede advertir en la figura 3.12, donde presentamos las velocidades en

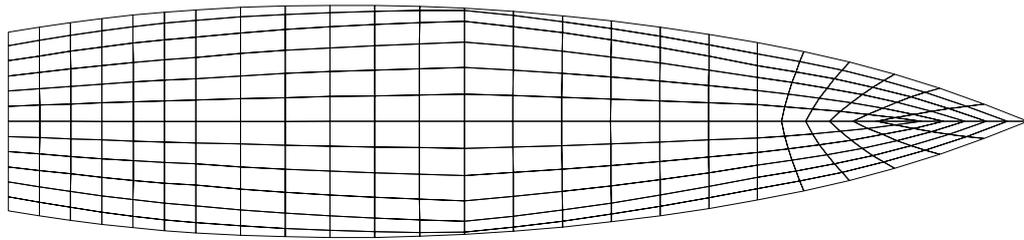


Figura 3.5: Casco para ejemplo. Planta.

el casco y en la superficie libre. Podemos analizar con más detalle la zona del espejo, figura 3.13. Ahí se puede observar que el acoplamiento es mucho mejor que en el caso anterior en las zonas laterales del espejo. En la sección de perfil de esa zona podemos observar en qué medida se verifican la condición de tangencia y de profundidad, figura 3.14, y en la parte central del espejo, vuelve a ser muy buena la coincidencia.

Resultados referidos a la condición 3.4.4

La apariencia visual del flujo es igual de buena que en los casos anteriores, como se puede advertir en la figura 3.15, donde presentamos las velocidades en el casco y en la superficie libre. Podemos analizar con más detalle la zona del espejo, figura 3.16. Ahí se puede observar que el acoplamiento no es tan bueno como en el caso anterior. En la sección de perfil de esa zona podemos observar en qué medida se verifican la condición de tangencia y de profundidad, figura 3.17, y en la parte central del espejo, vuelve a ser muy buena la coincidencia.

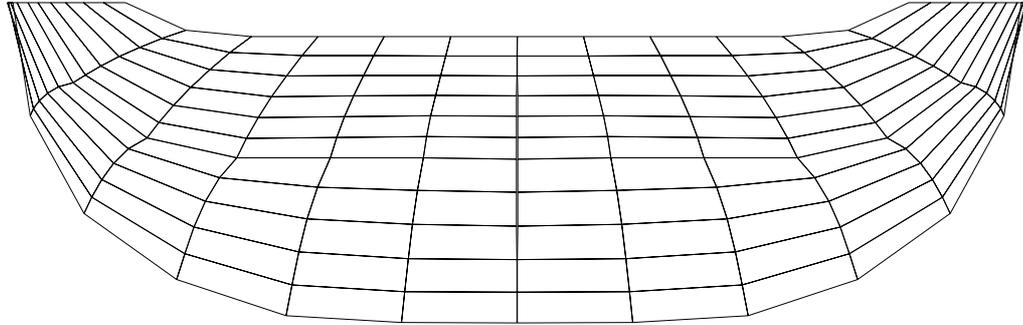


Figura 3.6: Casco para ejemplo. Perfil cuerpo popa.

Resultados referidos a la condición 3.4.5

Lo que tiene sentido es examinar diferentes posibilidades en lo que se refiere al valor de k , presentando resultados significativos de cada una de ellas. Elegiremos como resultados las vistas en perspectiva y en alzado de la malla en la zona en que los dos mallados debieran conectarse con continuidad, y también con tangencia.

Presentamos en las figuras 3.18 y 3.19, los resultados correspondientes al valor $k = 0.5$. Como se puede ver, la combinación de ambas condiciones produce resultados muy malos en este caso, tanto en la tangencia, como sobre todo en la altura a la salida.

Damos un salto en k de cierta importancia para presentar los resultados correspondiente a $k = 10$. Con estudios más exhaustivos que no presentamos aquí se llegó a la conclusión de que valores de k del orden de la unidad conducían a resultados similares a los correspondientes a $k = 0.5$, y por tanto inaceptables. A medida que subimos k , esta condición se parece cada vez más a una simplificación de la condición 3.4.5, y por tanto los resultados también.

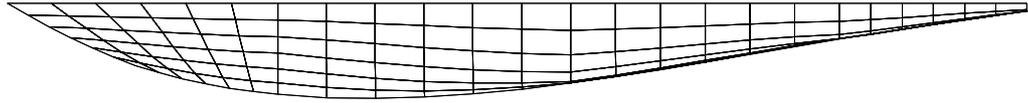


Figura 3.7: Casco para ejemplo. Alzado.

Presentamos resultados correspondientes a $k = 10$, $k = 30$ y $k = 10000$, pero de estas últimas sólo los perfiles; ver figuras 3.20 , 3.21, 3.22 y 3.23.

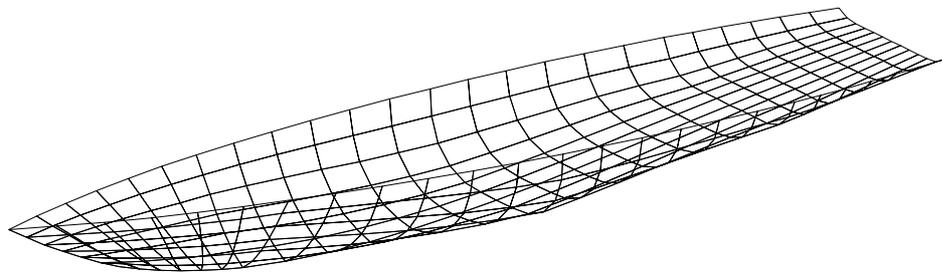


Figura 3.8: Casco para ejemplo. Perspectiva.

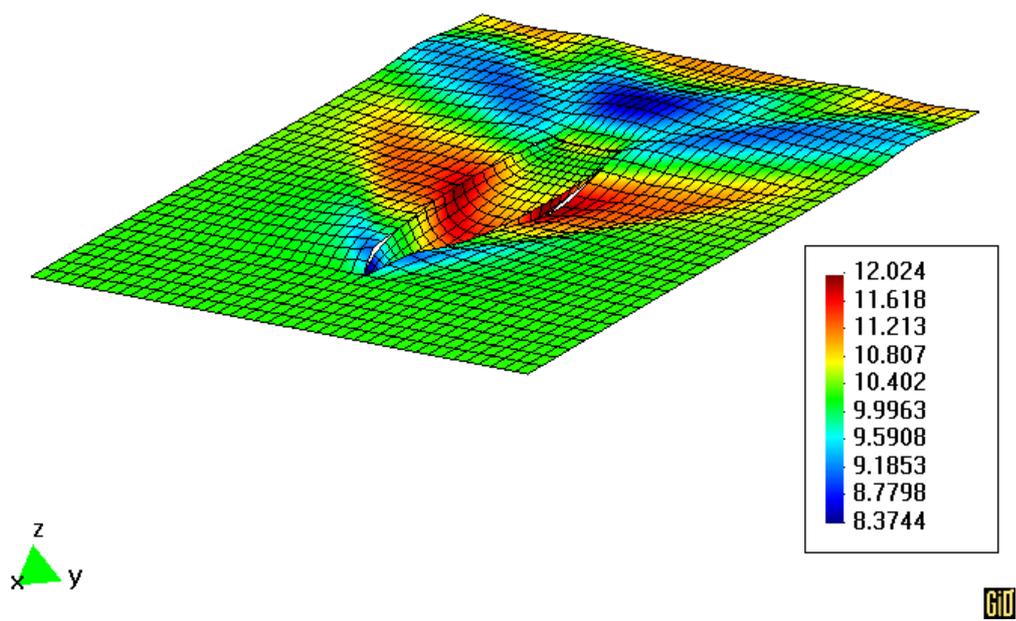


Figura 3.9: Velocidades en la superficie libre. Expansión de Taylor.

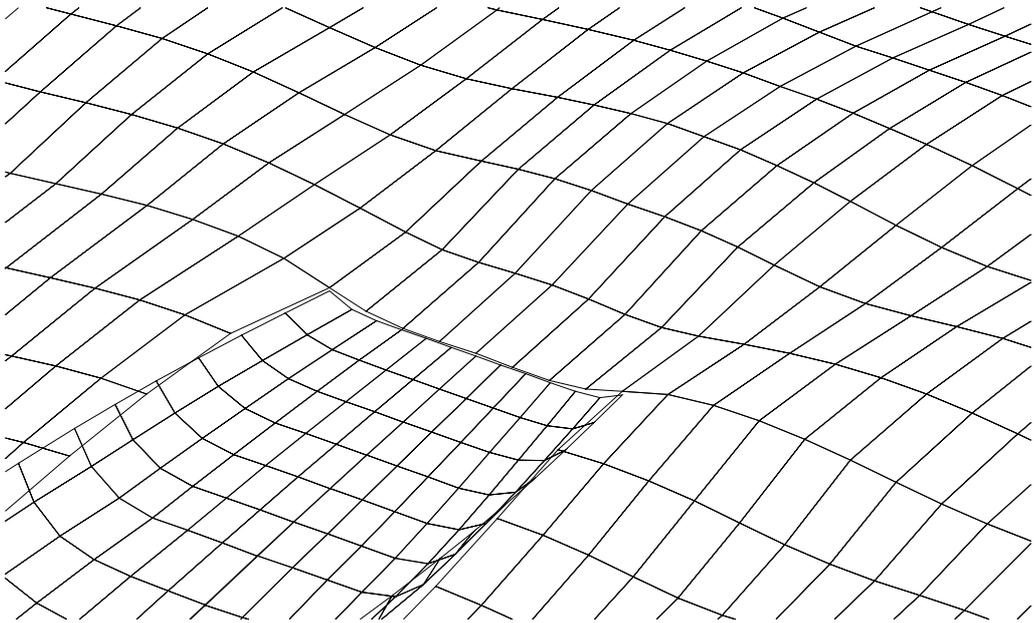


Figura 3.10: Zona de enganche. Expansión de Taylor.

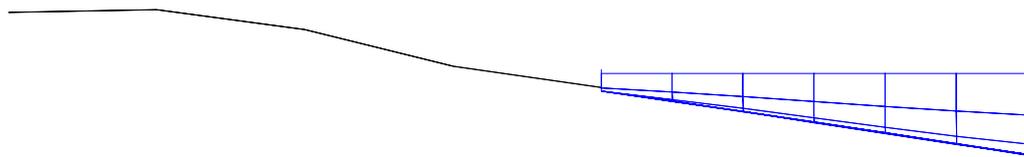


Figura 3.11: Perfil del espejo. Expansión de Taylor.

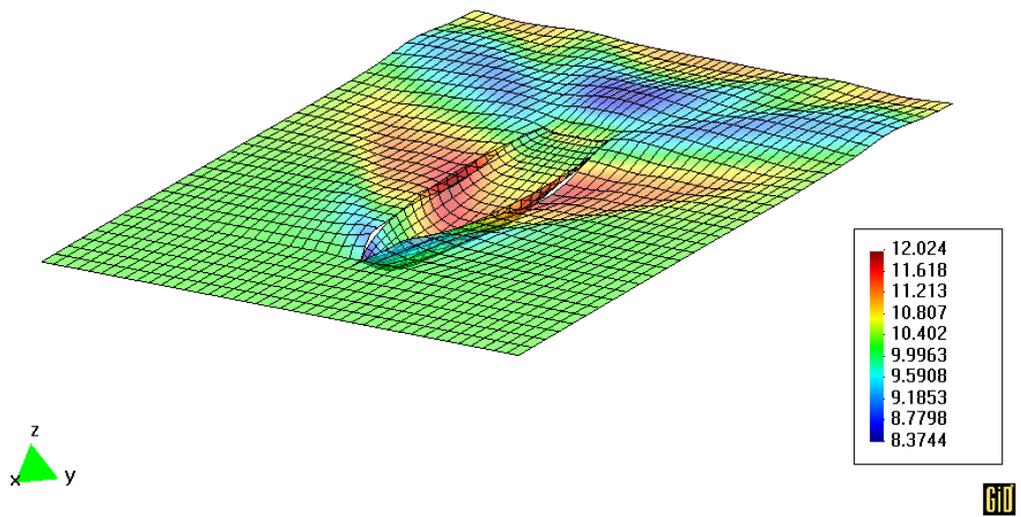


Figura 3.12: Velocidades en la superficie libre. Expansión de Taylor mejorada.

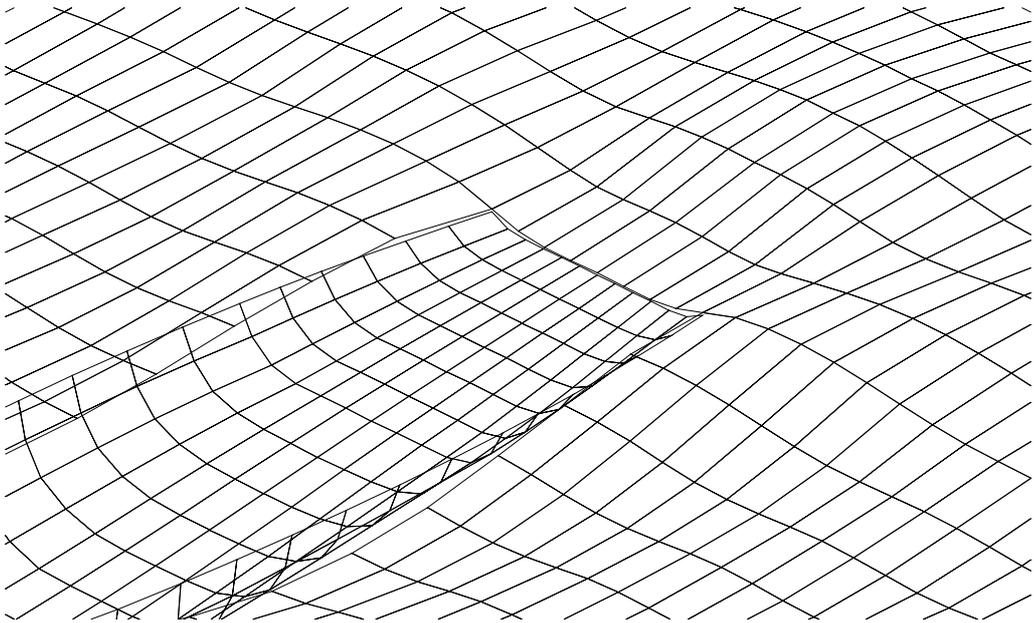


Figura 3.13: Zona de enganche. Expansión de Taylor mejorada.

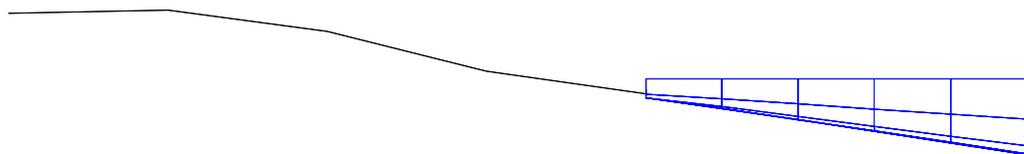


Figura 3.14: Perfil del espejo. Expansión de Taylor mejorada.

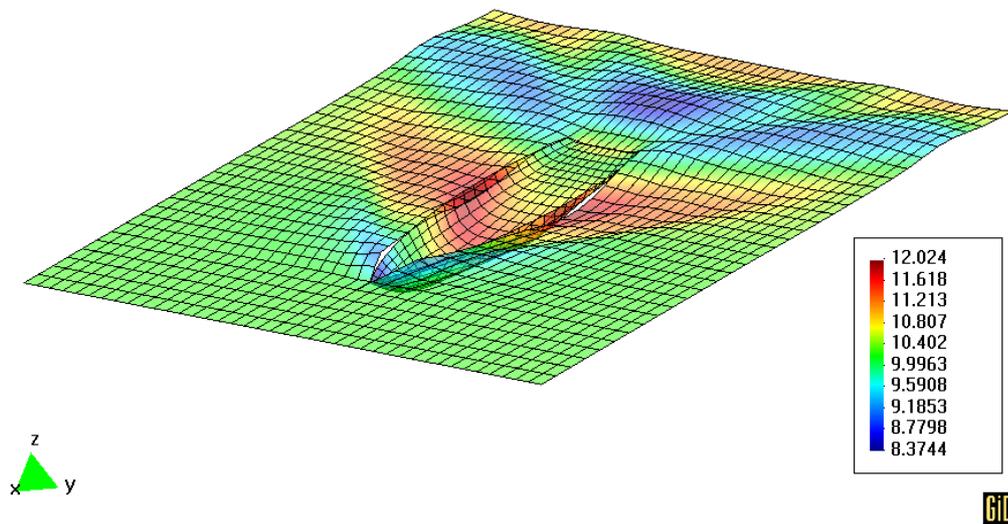


Figura 3.15: Velocidades en la superficie libre. Condición ETSIN 1.

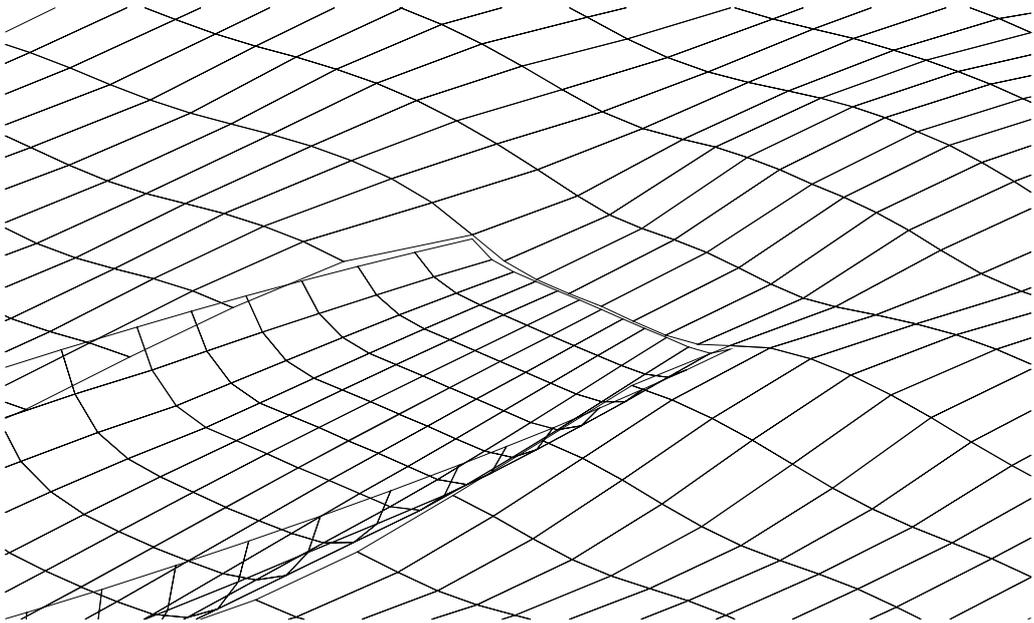


Figura 3.16: Zona de enganche. Condición ETSIN 1.

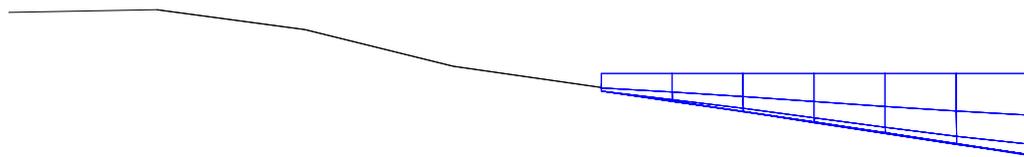


Figura 3.17: Perfil del espejo. Condición ETSIN 1.

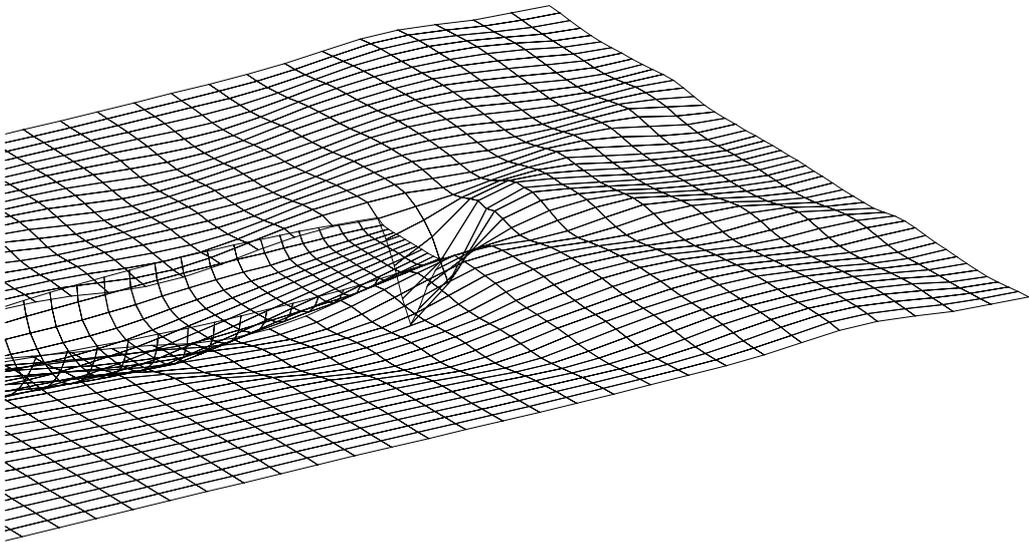


Figura 3.18: Zona de enganche. Condición ETSIN 2, $k = 0.5$.

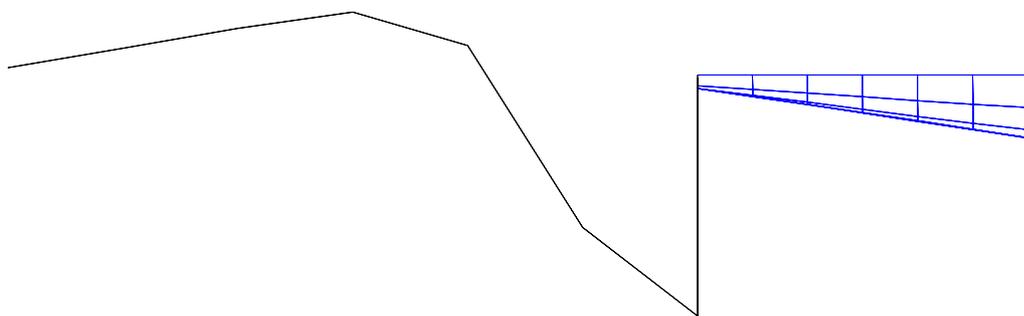


Figura 3.19: Perfil del espejo. Condición ETSIN 2, $k = 0.5$.

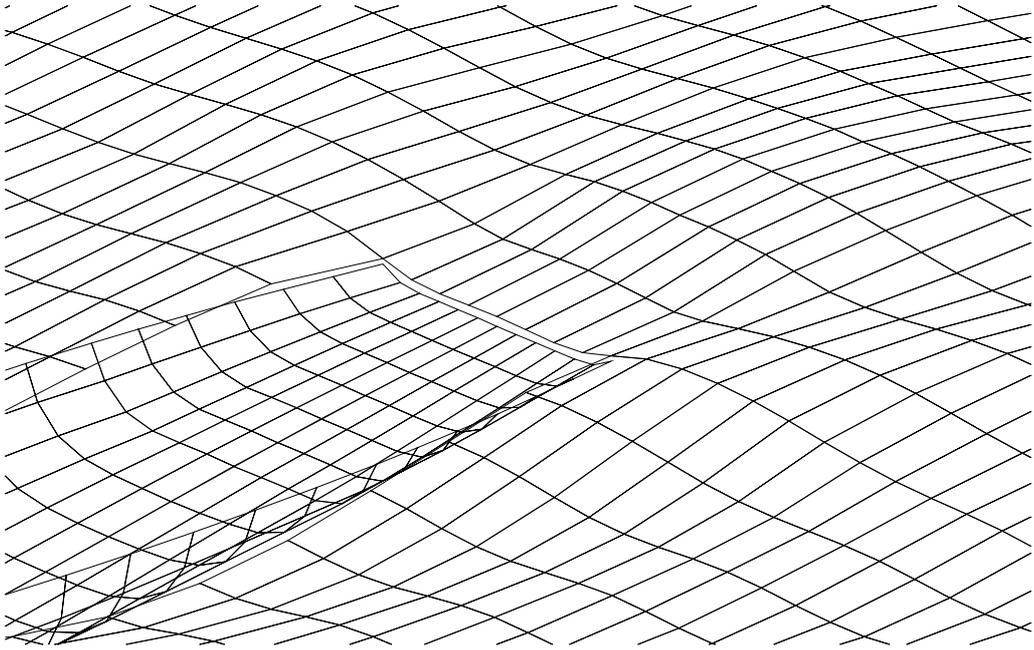


Figura 3.20: Zona de enganche. Condición ETSIN 2, $k = 10$.

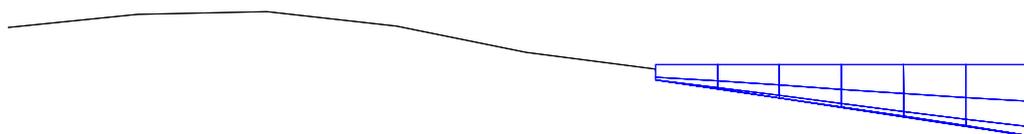


Figura 3.21: Perfil del espejo. Condición ETSIN 2, $k = 10$.

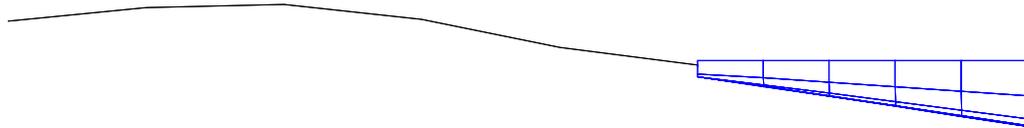


Figura 3.22: Perfil del espejo. Condición ETSIN 2, $k = 30$.

Comparación de resultados.

Para comparar los resultados, evaluamos en cada uno de los casos la elevación de la superficie libre en la salida del espejo - condición dinámica -, y también comparamos el ángulo que forma esta superficie libre con el del fondo del casco - condición cinemática. Los valores reales para este caso debieran ser:

$$\eta_{tr} = -0.48 \qquad \alpha_{tr} = -10.08^\circ$$

Parece claro, como mostrábamos en el dibujo que los peores valores se dan para la condición 3.4.5 con valores del parámetro k bajos. Esto parece indicar que darle peso a la condición de tangencia linealizada conduce a resultados que hacen difícil la verificación simultánea de las dos condiciones. A medida que el valor de k aumenta, los resultados son más satisfactorios.

En conjunto, la condición 3.4.3 es la que mejores resultados globales da, y por tanto es la que consideraremos a partir de ahora. La condición ETSIN 1, 3.4.5, da unos resultados razonablemente buenos también, y la tendremos en reserva.

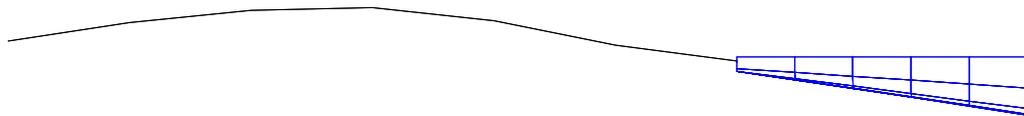


Figura 3.23: Perfil del espejo. Condición ETSIN 2, $k = 10000$.

Condición	η_{tr}	$\alpha_{tr} (^{\circ})$	error η_{tr} (%)	error α_{tr} (%)
3.4.2	-0.66	-9.01	37%	-11%
3.4.3	-0.50	-8.57	4%	-15%
3.4.4	-0.39	-8.25	-20%	-18%
3.4.5, $k = 0.5$	-8.46	-37.91	1663%	276%
3.4.5, $k = 10$	-0.14	-7.43	-71%	-26%
3.4.5, $k = 30$	-0.13	-7.41	-73%	-26%
3.4.5, $k = 10000$	-0.39	-8.25	-20%	-18%

Tabla 3.1: Condiciones adicionales en el espejo.

Capítulo 4

Estimación de la resistencia por formación de olas.

4.1 Integración de presiones.

Integrar presiones en métodos de paneles equivale a evaluar la presión en cada uno de los paneles del casco, transformar esa presión en fuerza normal, y calcular la resultante de todas esas fuerzas extendiendo el sumatorio a todo el casco. El problema es que la resultante total es del mismo orden que muchos de los términos, con lo que pequeños errores en éstos, inducen grandes errores en el resultado total.

4.2 Estudio de secciones del tren de olas.

4.2.1 Introducción.

Presentaremos las teorías hidrodinámicas que sustentan el modelo matemático en el cual se basan diferentes métodos. Estos métodos se han aplicado tradicionalmente en canales de ensayo, sin embargo, nosotros lo aplicaremos a nuestro "segundo canal", los CFD.

Consideramos en este estudio parcial que todas las magnitudes se encuentran adimensionalizadas por tres unidades de referencia: la velocidad del barco U , la densidad del agua y el número de ondas fundamental $k_0 = g/U^2$. Las limitaciones teóricas son las propias de un método no viscoso y estacionario en el sistema que se mueve con el buque. Además, supondremos que el barco

se mueve en aguas profundas.

Las siguientes dos suposiciones son más bien de naturaleza matemática. Primero, consideraremos la hipótesis de flujo potencial, o sea, que el fluido es incompresible, homogéneo, ideal, de modo que el movimiento del fluido puede describirse mediante una función potencial de modo que su gradiente en cualquier punto es igual al vector velocidad. Segundo, supondremos que el potencial de perturbación φ es tan pequeño que la superficie libre deformada viene dada por

$$z = \zeta(x, y) = \varphi(x, y, 0) \quad (4.1)$$

Y la condición de contorno exacta en la superficie libre se simplifica a

$$\varphi_{xx} + \varphi_z = 0 \text{ para } z = 0 \quad (4.2)$$

Este es el enfoque estándar lineal al problema de las olas del barco y puede justificarse como una primera aproximación en un esquema sistemático de linealización, muchísimo menos elaborado que el ya estudiado en el capítulo 2, pero necesaria para abordar los métodos de análisis del oleaje. Por otro lado, hemos de subrayar que estas suposiciones no son tan drásticas como a primera vista pudiera parecer. Así, la suposición de movimiento potencial es realmente válida fuera de la capa límite y de la estela. La "pequeñez" de la perturbación está garantizada a una distancia suficientemente larga del barco como resultado de la dispersión de las olas. Ahora, es característico de nuestros métodos de análisis del oleaje, el que nos centremos en aquellas regiones del fluido donde tales suposiciones parezcan ser válidas. En particular no nos es necesario investigar la zona inmediata al casco, es decir, su entorno cercano.

4.2.2 Modelo general del oleaje

Siguiendo el tratamiento clásico de Havelock [13], imaginaremos nuestro oleaje generado por algún sistema desconocido de singularidades. Como un modelo genérico, consideramos una distribución arbitraria de singularidades (discretas o continuas) en alguna región finita D del semiplano $z < 0$. El flujo completo puede describirse mediante un potencial del tipo

$$\varphi(x, y, z) = \int_D \sigma(x', y', z') \cdot G(x, y, z, x', y', z') dD \quad (4.3)$$

donde

$\sigma(x', y', z')$ es la densidad de la singularidad en el punto (x', y', z') .

$G(x, y, z, x', y', z')$ es la función de Green, potencial de un manantial de intensidad unitaria (o sea, de salida 4π). Una expresión familiar para G es la dada por Havelock:

$$G = \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} + \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sec^2 \theta \cdot \exp\{k(z + z' + i\bar{w})\}}{k - \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dk d\theta \quad (4.4)$$

Donde

$$r_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 .$$

$$r_2^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2 .$$

$$\bar{w} = (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta .$$

Mediante la aplicación de 4.1 podríamos describir el sistema de olas en términos de la distribución de singularidades. Sin embargo, vamos a introducir primero una función intermedia definida alternativamente como

$$H(k, \theta) = 4\pi \int_D \sigma(x', y', z') \cdot \exp\{kz' + ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)\} dD \quad (4.5)$$

o

$$J(u, w) = 4\pi \int_D \sigma(x', y', z') \cdot \exp\{z' \sqrt{u^2 + w^2} + i(wx' + uy)\} dD \quad (4.6)$$

Donde

$$u = k \sin \theta \quad (4.7)$$

$$w = k \cos \theta \quad (4.8)$$

Y, evidentemente

$$H(k, \theta) = J(k \sin \theta, k \cos \theta) \quad (4.9)$$

O

$$J(u, w) = H\left(\sqrt{u^2 + w^2}, \arctan \frac{u}{w}\right) \quad (4.10)$$

u y w pueden considerarse como los números de onda inducidos en las direcciones y y x , respectivamente, por una onda plana (bidimensional) de número de onda k orientada con un ángulo θ respecto al eje x . La función realmente complicada $H(k, \theta)$ - la cual, normalmente tiene una parte real e

imaginaria no nulas - es conocida como la función de Kochin. Representa el efecto integrado de la distribución de singularidades y juega un papel crucial en nuestro problema. Así, el sistema de olas correspondiente a la ecuación 4.3 puede describirse enteramente en términos de esta función:

$$\zeta(x, y) = \mathcal{R}e \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\overline{H}(k, \theta) \cdot k \sec \theta \cdot \exp\{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)\}}{k - \sec^2 \theta + i\mu \sec \theta} dk d\theta \quad (4.11)$$

Donde $\mathcal{R}e$ se refiere a la parte real y \overline{H} significa la conjugada compleja de H .

Hemos de señalar que las ecuaciones 4.3, 4.5 y 4.6 pueden aplicarse formalmente a distribuciones de singularidades muy generales, incluyendo a los dipolos como un caso marginal. También el dominio D puede ser una línea, una superficie o un volumen. De este modo, la ecuación 4.11 representa un tren de olas considerablemente general si $H(k, \theta)$ es considerada como una función arbitraria de dos variables. Aunque, incorpora las propiedades requeridas para nuestro análisis.

4.2.3 Resistencia por olas teórica.

Uno de los aspectos cruciales en la aplicación de los métodos de análisis de oleaje methods es la definición satisfactoria de la resistencia por formación de olas.

Dentro del marco del flujo potencial, esta resistencia puede definirse inequívocamente mediante diversos enfoques alternativos. Uno muy general, consiste en aplicar el teorema Lagally a la distribución de singularidades que genera el flujo. Esto conduce a

$$R_w = \int_D \sigma(x', y', z') \cdot \varphi_x(x, y, z) dD \quad (4.12)$$

Después de la sustitución de φ_x , y mediante unas simplificaciones se obtiene una expresión sorprendentemente compacta:

$$R_w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(\sec^2 \theta, \theta) \cdot \overline{H}(\sec^2 \theta, \theta) \cdot \sec^3 \theta d\theta \quad (4.13)$$

El resultado es originariamente debido a Havelock. Ahora podemos olvidarnos de la distribución de singularidades y considerar la anterior expresión

como la resistencia por olas asociada con el tren de olas definido por 4.11, donde $H(k, \theta)$ es una función arbitraria. Esta idea de atribuir una resistencia por olas a cualquier tren de olas dado sin referencia explícita a la causa que produce ese oleaje (el barco) es realmente atractiva y determinante para determinar la resistencia por olas a partir de un análisis del tren de olas medido.

4.2.4 Espectro de la olas libres.

Es destacable el hecho de que mientras una función arbitraria de dos variables es necesaria en la ecuación 4.11 para construir un tren de olas genérico, la correspondiente expresión para la resistencia por formación de olas 4.13 involucra únicamente una forma degenerada $H(\sec^2\theta, \theta)$ de la función de Kochin, la cual es esencialmente una función de una sola variable. La explicación física familiar es que de todas las posibilidades del campo "doblemente" infinito de ondas planas (k, θ) únicamente una sola familia infinita de las llamadas olas libres son las que contribuyen a la resistencia por formación de olas. Estas olas libres satisfacen la condición

$$k = \sec^2\theta \quad (4.14)$$

o equivalentemente

$$w^2 = \sqrt{w^2 + u^2} \quad (4.15)$$

Aún más importante quizás, es el hecho de que fuera de un entorno próximo al dominio D que encierra nuestra distribución imaginaria de singularidades, solamente las olas libres son las que constituyen la parte dominante de la deformación total de la superficie libre. Nos adelantamos, pues al ser este nuestro problema crucial lo desarrollaremos en un apéndice posterior, diciendo que la siguiente representación asintótica -y esto es lo que deseamos, propagar el oleaje lejos- vale para $-x \rightarrow \infty$.

$$\zeta(x, y) = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{J}(u, s(u)) \cdot \exp\{i(uy + sx)\} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 4u^2}}{\sqrt{1 + 4u^2}} du \quad (4.16)$$

Con

$$s(u) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4u^2}}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} > 0 \quad (4.17)$$

Una expresión equivalente de la anterior es

$$\zeta(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overline{H}(\sec^2 \theta, \theta) \cdot \exp\{i(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta\} \cdot \sec^3 \theta d\theta \quad (4.18)$$

En las ecuaciones 4.16 y 4.18 hemos despreciado un término residual de orden $O(x^{-2})$ que representa la perturbación "local" que surge de la presencia de olas no libres. Además, la perturbación para grandes valores positivos de x puede despreciarse para el mismo orden de aproximación.

Similarmente, para $y \rightarrow \infty$ obtenemos tras despreciar un término local de orden $O(y^{-2})$ la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \overline{J}(-iw\sqrt{w^2-1}, w) \cdot \exp\{iwx - iw\sqrt{w^2-1} \cdot y\} \cdot \frac{w^2 dw}{\sqrt{w^2-1}} \\ & + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \overline{J}(w\sqrt{w^2-1}, w) \cdot \exp\{iwx + iw\sqrt{w^2-1} \cdot y\} \cdot \frac{w^2 dw}{\sqrt{w^2-1}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Observamos que las formas degeneradas de la función de Kochin H o J presentes en las anteriores integrales, todas representan a la misma función en virtud de la ecuaciones 4.9 y 4.10

$$H(\sec^2 \theta, \theta) = J(u, s(u)) = J(w\sqrt{w^2-1}, w) \quad (4.20)$$

si las tres variables independientes las consideramos como interrelacionadas por cualquier par de las tres relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} u &= \sec \theta \tan \theta \\ w &= \sec \theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$u = w\sqrt{w^2-1} \quad (4.22)$$

Nos aprovechamos de este hecho para definir un espectro de olas libres, que consiste en dos funciones reales F y G de una variable única u . Estas dos funciones van a ser clave, tanto para propagar el oleaje como para calcular la resistencia por formación de olas:

$$G(u) + iF(u) = 2 \frac{1 + \sqrt{1 + 4u^2}}{\sqrt{1 + 4u^2}} J(u, s(u)) \quad (4.23)$$

Luego la elevación del oleaje para $-x \rightarrow \infty$, por ejemplo, puede expresarse como una integral de Fourier en:

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(u) \sin(sx + uy) + G(u) \cos(sx + uy)\} du \quad (4.24)$$

Obviamente, son posibles otras opciones, y ha sido costumbre en trabajos anteriores, siguiendo a Havelock, definir el espectro de olas libres mediante las funciones

$$g(\theta) + if(\theta) = \frac{1}{k} \cdot \sec^3 \theta H(\sec^2 \theta, \theta) \quad (4.25)$$

con la consiguiente expresión general del tren de olas:

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f(\theta) \cdot \sin [\sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)] \right. \\ & \left. + g(\theta) \cdot \cos [\sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (4.26)$$

La equivalencia entre las ecuaciones 4.24 y 4.26 es inmediatamente verificada al sustituir, $u = \sec \theta \tan \theta$ y recordando que

$$G(u) + iF(u) = \frac{4\pi \cos^3 \theta}{1 + \sin^2 \theta} \{g(\theta) + if(\theta)\} \quad (4.27)$$

en virtud de 4.22. Aunque las dos elecciones son analíticamente equivalentes, las formas $F(u)$ y $G(u)$ representan un camino más conveniente, a efectos de tratamiento numérico y experimental, de representar el espectro de olas libres.

Se verá que el concepto de un espectro de olas libres dependiente de una variable para la representación aproximada de un sistema de olas general es fundamental para nuestros métodos de evaluar trenes de ola medidos, bien los producidos por un modelo en un canal, bien los producidos por un barco ya construido en la mar, bien los registradas en las salidas de los CFD que disponemos tras un mallado previo del barco. La consiguiente representación unidimensional integral de la función de dos variables $\zeta(x, y)$ conduce a una simplificación drástica del estudio. Sin embargo, es evidente de 4.19 y 4.26 que, de alguna manera, se requieren diferentes aproximaciones en diferentes regiones del fluido, y que tendríamos que comenzar por la más complicada pero exacta representación doblemente-integral de la ecuación 4.11 para demostrar la subyacente unidad de los diferentes enfoques.

4.2.5 Descripción general de los métodos.

Procederemos a continuación a describir nuestros métodos para la determinación de las características del proceso de formación del oleaje por unas

formas de barco, cuando su tren de olas o, al menos, ciertos elementos de él son conocidos (mediante mediciones en el canal con el modelo, en la mar con el barco real, o mediante los CFD). En este punto, deberíamos reseñar que la teoría clásica de resistencia por formación de olas trata de predecir por medios puramente analíticos el movimiento del oleaje generado por un barco como función de sus formas geométricas. En términos de nuestro modelo general del flujo del oleaje, esto precisa de la determinación de la distribución equivalente de singularidades o de la función de Kochin correspondiente a las formas del barco como paso intermedio para el cálculo del potencial. Ni que decir tiene, que donde más se concentra la investigación actual de los CFD es, precisamente en mejorar esa determinación numérica de la distribución de singularidades como función de las formas del barco, ya que solamente es factible bajo ciertas aproximaciones sobre los efectos viscosos en la capa límite y simplificaciones de las condiciones de contorno, como hemos visto en los capítulos 2 y 3.

Nuestro esfuerzo presente, al contrario, se dirige hacia un objetivo distinto. Aparte de que nuestra aplicación más inmediata va a referirse a su empleo con los CFD, en la que dependemos de su bondad de cálculo, también podemos considerar el tren de olas real generado por el barco o su modelo como punto de partida y buscar la obtención de la información más característica sobre él (oleaje) mediante la medición de ciertos elementos cruciales del sistema de olas. Veremos que nuestros métodos son bastante independientes de las formas del barco y de los efectos viscosos presentes en la capa límite. De hecho, las formas o las dimensiones principales no necesitan ser conocidas para aplicar nuestros métodos de evaluar el tren de olas medido. Indicamos a continuación sólo algunas de sus aplicaciones.

Primero, sabemos que la resistencia por olas sólo es una parte de la resistencia total que experimenta un cuerpo que se mueve en una superficie de un fluido, y que por consiguiente no puede medirse mediante medidas de las fuerzas sobre el cuerpo. Pero un conocimiento de la misma es deseable para una precisa extrapolación de la resistencia total del modelo al barco real mediante el método de Froude. Nuestros métodos pretenden precisamente una estimación de esta componente de la resistencia mediante un análisis del tren de olas.

Más importante, sin embargo, son nuestros propósitos más allá de estimar solamente la resistencia por formación de olas. De hecho, estaremos en dis-

posición de determinar el espectro de olas libres a partir de unos pocos perfiles de olas medidos (mediante el método longitudinal, sólo necesitaremos un corte). Como el espectro de olas libres es suficiente para describir la parte dominante del oleaje -luego si queremos conocer el oleaje a gran distancia en cualquier dirección podremos hacerlo -, podremos aproximadamente estimar el flujo de las olas en la mayoría de regiones del fluido, una vez que lo hayamos medido o registrado (salida del CFD) en unos pocos puntos.

4.2.6 Métodos de corte longitudinal.

Como su nombre indica, este método consiste en la medida de uno o más perfiles de oleaje a lo largo de una trayectoria recta paralela a la dirección del movimiento del barco[8]. Esto puede realizarse de una forma bastante sencilla posicionando una probeta fija en un determinado punto en un canal, o en una boya en la mar, o mediante un corte longitudinal a la salida de los datos de nuestro CFD a una cierta distancia de crujía. Consideremos tal registro (obtenido en el canal, en la mar o con el CFD) a una distancia y fija como una función de la coordenada x en un sistema móvil con el barco; a continuación introducimos las transformadas de Fourier:

$$C(w, y) + iS(w, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y) \cdot \exp(iwx) dx \quad \text{con } 0 \leq w < \infty \quad (4.28)$$

Ahora, si y es suficientemente elevado como para que la ecuación 4.19 sea una representación precisa del tren de olas en esta región, entonces el teorema de inversión implica evidentemente que para $1 \leq w < \infty$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ \bar{J} \left(w\sqrt{w^2 - 1}, w \right) \cdot \exp \left(iw\sqrt{w^2 - 1} \cdot y \right) \right\} &= \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w^2} C(w, y) \\ \text{Im} \left\{ J \left(w\sqrt{w^2 - 1}, w \right) \cdot \exp \left(-iw\sqrt{w^2 - 1} \cdot y \right) \right\} &= \frac{\sqrt{w^2 - 1}}{w^2} S(w, y) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Podemos resolver fácilmente estas ecuaciones para las partes real e imaginaria de la función degenerada de Kochin $J \left(w\sqrt{w^2 - 1}, w \right)$ o mediante las ecuaciones 4.22 y 4.23 para el espectro de olas libres $F(u)$, $G(u)$. El resultado es

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{4\sqrt{w^2 - 1}}{2w^2 - 1} \{ C(w, y) \sin(uy) + S(w, y) \cos(uy) \} \\ G(u) &= \frac{4\sqrt{w^2 - 1}}{2w^2 - 1} \{ C(w, y) \cos(uy) - S(w, y) \sin(uy) \} \\ \text{con } u &= w\sqrt{w^2 - 1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

En principio, un solo corte longitudinal en cada lado del barco debería realizarse para obtener el espectro de olas libres para valores positivos y negativos de u , respectivamente. Pero en el caso usual de un barco simétrico respecto a crujía, $F(u)$ y $G(u)$ son funciones pares y así obtenemos el resultado importante de que el espectro de olas libres completo puede obtenerse a partir de las transformadas de Fourier de un único corte longitudinal.

Sin embargo, este método requiere en teoría que el corte debería ser infinitamente largo y, de este modo las transformadas C , S se harían infinito para $w \rightarrow 1$ ya que la altura de ola ζ no es integrable para $-x \rightarrow \infty$. En la práctica, sin embargo, sólo disponemos de un corte de longitud finita y las fórmulas 4.30 proporcionarían erróneamente

$$F(0) = G(0) \text{ para } w = 1 \quad (4.31)$$

Afortunadamente, existen dos caminos para corregir este defecto. Uno es medir las pendientes de las olas transversales ζ_y (lo que es fácilmente realizable con nuestros CFD) en lugar de las alturas de ola ζ a lo largo de un corte longitudinal como antes. Si llamamos a las transformadas de Fourier del registro de las pendientes mediante C_y y S_y las fórmulas correspondientes a las 4.30 serían:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{4}{w(2w^2 - 1)} \{C_y(w, y) \cos(uy) - S_y(w, y) \sin(uy)\} \\ G(u) &= \frac{4}{w(2w^2 - 1)} \{C_y(w, y) \sin(uy) + S_y(w, y) \cos(uy)\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Estas ecuaciones proporcionan valores razonables de F y G en el entorno del número de onda crucial $u = 0$ aún cuando las transformadas C_y y S_y sean calculadas a partir de un corte de longitud finita, ya que el problema del factor $\sqrt{w^2 - 1}$ no se da en el lado derecho de estas dos ecuaciones. Sin embargo, la pendiente ζ_y no parece tener un comportamiento asintótico muy manejable -que es justo lo que nos interesa para propagar el oleaje lejos-.

Probablemente una solución más satisfactoria - y en ella es en la que estamos trabajando y sobre las que estamos desarrollando una aplicación informática - consiste en emplear un registro de alturas finito y estimar el error debido al truncamiento a partir de un desarrollo asintótico que podemos establecer como:

$$\zeta(x, y) \approx \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{c_3 - x}} \text{ para } -x \rightarrow \infty \quad (4.33)$$

Aquí c_1 , c_2 y c_3 son constantes desconocidas que han de determinarse mediante un ajuste por mínimos cuadrados, por ejemplo, a la cola del perfil de alturas medido. Para poder expresar el error de truncamiento en términos de estas constantes, definimos en primer lugar esta transformada de Fourier ponderada:

$$C^*(w, y) + iS^*(w, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{w^2 - 1} \cdot \zeta(x, y) \cdot \exp(iwx) dx \quad (4.34)$$

La corrección para el error debido al truncamiento del registro en algún valor negativo elevado $x = x_e$, es, en consecuencia :

$$\Delta C^*(w) + i\Delta S^*(w) = \int_{-\infty}^{x_e} \sqrt{w^2 - 1} \cdot \frac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{\sqrt{c_3 - x}} \cdot \exp(iwx) dx \quad (4.35)$$

Esta expresión se evalúa numéricamente tras una simple transformación de las integrales, y el resultado es:

$$\begin{aligned} \Delta C^* &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{d_1 C_F(z^+) + d_2 S_F(z^+) + d_3 C_F(z^-) + d_4 S_F(z^-)\} \\ \Delta S^* &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{d_2 C_F(z^+) - d_1 S_F(z^+) + d_4 C_F(z^-) - d_3 S_F(z^-)\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Con:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{w-1} \{c_1 \cos(c_3(w+1)) + c_2 \sin(c_3(w+1))\} \\ d_2 &= \sqrt{w-1} \{c_1 \sin(c_3(w+1)) - c_2 \cos(c_3(w+1))\} \\ d_3 &= \sqrt{w+1} \{c_1 \cos(c_3(w-1)) - c_2 \sin(c_3(w-1))\} \\ d_4 &= \sqrt{w+1} \{c_1 \sin(c_3(w-1)) + c_2 \cos(c_3(w-1))\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Donde C_F y S_F son las integrales de Fresnel complementarias

$$C_F(z) + iS_F(z) = \int_z^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad (4.38)$$

Y el argumento z toma los valores

$$z_{\pm} = \{2(c_3 - x_e)(w \pm 1)/\pi\}^{0.5} \quad (4.39)$$

Mediante experimentos realizados, se puede asumir $c_3 = 0$ sin cometer grandes errores. En cualquier caso, el posterior cálculo de las transformadas C^* y S^*

corregidas por el error de truncamiento se lleva a cabo como antes, estando el espectro de olas libres dado ahora por:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{4}{2w^2 - 1} \{C^*(w, y) \sin(uy) + S^*(w, y) \cos(uy)\} \\ G(u) &= \frac{4}{2w^2 - 1} \{C^*(w, y) \cos(uy) - S^*(w, y) \sin(uy)\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Y la resistencia por formación de olas resulta aplicando 4.13. Hemos de señalar que, si sólo estamos interesados en conocer la resistencia por olas, no hace falta conocer el valor de y en el que se miden los datos de alturas de olas. Así, por ejemplo:

$$R_w = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{(C^*)^2 + (S^*)^2\} \frac{du}{w^2 (2w^2 - 1)} \quad (4.41)$$

4.3 Comparación de resultados.

Se ha estudiado el caso correspondiente a la optimización de formas de un atunero. Este atunero corresponde a un ensayo de optimización real de canal. Se le cambió la proa modificando también dimensiones y formas del bulbo, y se obtuvo una mejora sustancial en la resistencia por formación de olas. Presentamos en la tabla 4.1 los resultados de las dos formas a la velocidad de proyecto, obtenidos mediante métodos experimentales y mediante los dos métodos teóricos de los que disponíamos. Estos resultados corresponden al coeficiente de resistencia por formación de olas CW cuya definición es:

$$CW = \frac{R_w}{\frac{1}{2}\rho \cdot AWS \cdot V^2} \quad (4.42)$$

donde

- R_w resistencia por formación de olas.
- ρ densidad del agua.
- AWS superficie mojada de la carena.
- V velocidad de avance.

Como podemos observar, los resultados obtenidos por integración de presiones son buenos, sorprendentemente buenos. La realidad es que en el punto de proyecto, y para este caso, el resultado es estupendo. No hay ninguna explicación para esta coincidencia, aunque sí hay que decir que estamos trabajando a números de Froude altos, con pocas olas, y que por tanto, aquí las estimaciones son mejores. En cuanto a las estimaciones mediante el método del corte longitudinal, respetan la tendencia, pero hay errores por defecto importantes, que son comunes en este tipo de métodos, y que requieren estudios más profundos.

	Experimental	Presiones	Cortes longitudinales
Formas originales	0.003982	0.003946	0.002426
Formas modificadas	0.002088	0.002103	0.001318

Tabla 4.1: CW de atunero original y modificado.

Disponemos también de cálculos realizados para el coeficiente de resistencia por formación de olas del Serie 60, tabla 4.2 a diferentes números de Froude.

Fn	Experimental	Presiones	Cortes longitudinales
0.160	$9 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
0.238	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
0.316	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.2: CW de Series 60.

Se aprecia otra vez que la integración de presiones estima mejor el coeficiente que el método de los cortes longitudinales, que vuelve a ser muy optimista en sus estimaciones del coeficiente de resistencia por formación de olas.

También tenemos datos del pequeño buque de carga general (tablas 4.3, 4.4 y figura 4.1) cuyos cortes de ola presentamos en la sección de validación correspondiente, 6.3. En la condición de lastre los resultados son buenos en lo que se refiere a tendencias, tanto para la integración de presiones como

para el método de cortes longitudinales. En la condición de plena carga, con mucho mayor calado, sólo la integración de presiones respeta la tendencia, pero los valores son malos.

F_n	Experimental	Presiones	Cortes longitudinales
0.140	$4.46 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
0.183	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$9.2 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$
0.192	$1.78 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
0.209	$2.76 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.3: *CW* de buque de carga general en lastre.

F_n	Experimental	Presiones	Cortes longitudinales
0.140	$4.23 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
0.183	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$
0.192	$1.99 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
0.209	$2.80 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.4: *CW* de buque de carga general a plena carga.

4.4 Conclusiones.

Como conclusión a estos métodos, diremos que la parte que se refiere a la integración de presiones no ofrece resultados numéricos muy buenos, pero captura razonablemente bien las tendencias. Sin embargo, el método de los cortes longitudinales no ofrece la fiabilidad necesaria. La aproximación que se hace con este método despreciando completamente los efectos locales no parece suficientemente precisa, aunque necesitamos investigar más en este tema.

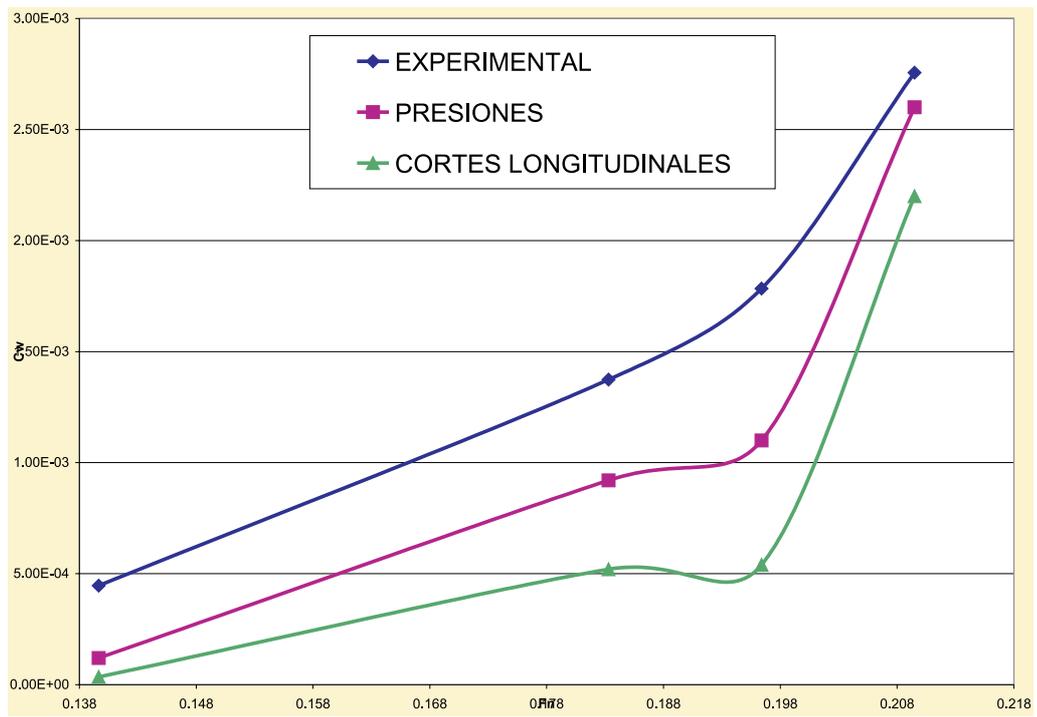


Figura 4.1: C_W de buque de carga general en lastre.

Capítulo 5

Definición de una metodología de trabajo.

5.1 Introducción.

El proceso de generación y análisis de la información obtenida mediante cálculos de CFD es bastante complejo. Resulta interesante estudiar de modo separado cada una de las fases de este cálculo:

1. Modelado de geometrías (preproceso).
2. Generación de mallas (preproceso).
3. Ejecución del módulo de cálculo.
4. Post proceso de datos (postproceso).
5. Interpretación de resultados (postproceso).

Para que la secuencia de operaciones de este proceso quede clara presentamos un ejemplo de aplicación correspondiente a un buque pesquero cuya optimización del bulbo fue realizada con estos métodos.

5.2 Modelado de geometrías.

La información de partida para tener cálculos fluidodinámicos en torno a un buque consiste en su geometría y las situaciones de carga a estudiar. Por tanto, lo primero es llegar a disponer de una definición CAD tridimensional por

superficies (o por líneas en el peor de los casos) de la carena que se pretende estudiar. Con ello, se busca obtener un conjunto de líneas en tres dimensiones que permitan generar por superficies una aproximación a la obra viva del casco. Para trabajar con estas geometrías, usamos un modelador comercial, el Rhinoceros, en su versión 1.1. El tratamiento de la geometría suele ser muy complejo dada la baja calidad de la información recibida.

Probablemente, cuando alguien lea estas líneas dentro de unos años tenga la sensación de que todos estos problemas están superados. Sin embargo, gran parte de la complejidad actual de estos asuntos, reside en el tratamiento de la geometría recibida. Se pierde mucho tiempo en fijar exactamente las variables de una determinada condición de carga, y se tarda mucho tiempo en reconstruir la carena de un modo preciso. En los pequeños astilleros, la definición inicial de la formas es un problema que no se aborda con la exactitud necesaria para los cálculos hidrodinámicos. Para los cálculos hidrostáticos y de estabilidad, que son los principales en el dimensionamiento, no es tan necesario, y por tanto la información de formas que llega al canal no está todo lo clara que debiera. Además no existe un estándar universalmente reconocido para tratar esas formas. Últimamente se está estableciendo como norma la definición por superficies NURBS, pero su uso no está todo lo extendido que sería deseable.

Además, una vez que se tienen los primeros resultados de canal de unas formas y se plantean diferentes alternativas para modificarlas, lo que a día de hoy se tocan no son las superficies de definición, sino una serie de curvas que no tienen fácil traslación a superficies. Por ejemplo, es muy común modificar el perfil de crujía del bulbo de proa, alargándolo. Es también común tratar de cambiar la coordenada z de su centro de gravedad, para lo cual se modifican algunas secciones del bulbo. Sin embargo, nosotros teníamos nuestro buque definido por superficies, y ahora hay que "reinventar" esas superficies para que se ajusten al nuevo perfil o a las nuevas secciones. Este proceso es lento y difícil. Nosotros lo realizamos con el modelador antes citado.

Inciendo en el tratamiento con el modelador, conviene realizar las cosas siguiendo una secuencia en la que tengan cabida los siguientes procesos:

1. Para trabajar con comodidad es aconsejable separar las distintas entidades en capas, concentrando en una de ellas los resultados que se quieren obtener.

2. En primer lugar se ajusta el tamaño (eliminando escalas, ajustando unidades a metros,...) para tener una representación del casco a tamaño real. El origen de coordenadas se coloca a popa en la intersección de crujía y flotación. Como eje X se toma la dirección popa-proa en sentido proa y como eje Z la perpendicular a la flotación por encima de ésta. De este modo el eje Y es perpendicular a crujía, correspondiendo el semieje positivo a la parte de babor y el negativo a estribor. Si partimos de una definición bidimensional habrá que girar las cuadernas y las líneas de agua y colocarlas en su posición correspondiente respecto al longitudinal de crujía.
3. El mallador necesita información geométrica correspondiente solamente una mitad del buque por crujía, la parte de estribor. Además se necesita sólo la obra viva, por lo que se corta la forma por la flotación para tener sólo esta.
4. Se extraen un conjunto de líneas que permitan cubrir la obra viva con parches de cuatro lados, que son los que usaremos para mallar, ver figura 5.2. Esto es bastante difícil, y de hecho no siempre se podrá conseguir. En la figura 5.1 presentamos una pantalla típica correspondiente a un proceso de tratamiento de geometrías con Rhinoceros.
5. Se exportan a un formato estandar de intercambio gráfico estas líneas, para poderlas usar con el mallador. El formato que nosotros elegimos es IGES.

5.3 Generación de mallas.

5.3.1 Introducción

Durante las primeras etapas de desarrollo se usaba un mallador propio. Sin embargo, a medida que las formas que se estudiaban eran más complejas, esa complejidad provocaba infinidad de problemas con nuestros malladores. En un determinado momento, se decidió que para seguir progresando era conveniente disponer de un mallador comercial. Como en esos momentos se estaba en contacto con el C.I.M.N.E. (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería de Barcelona), nos decidimos a usar su mallador

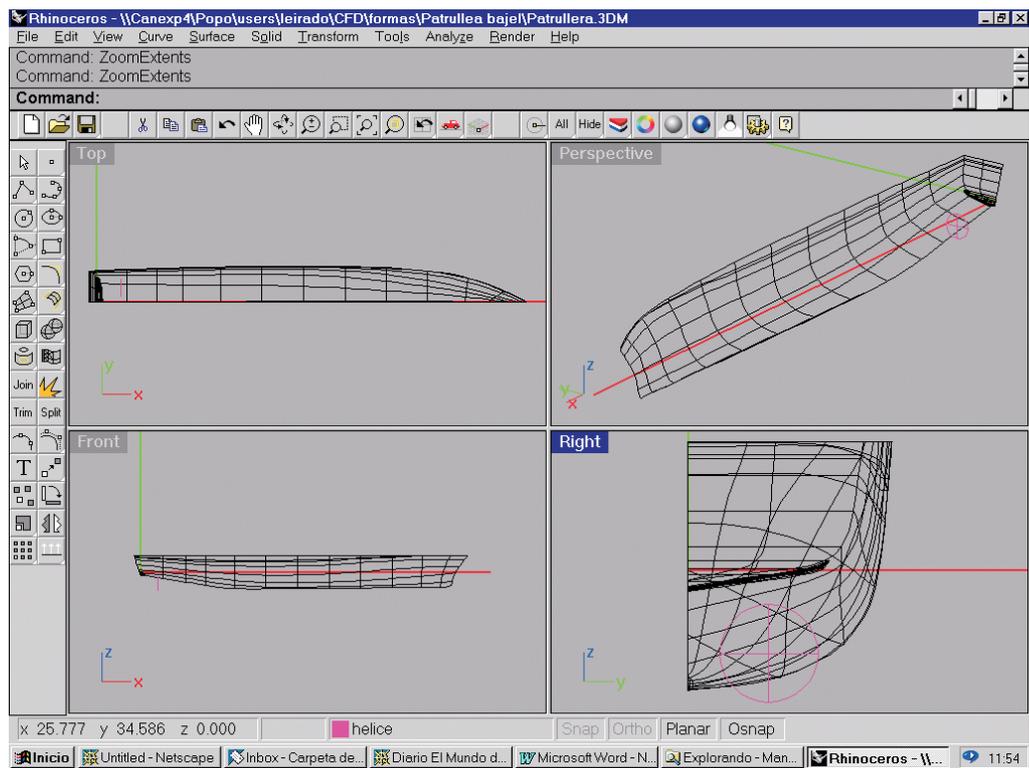


Figura 5.1: Pantalla del programa Rhinoceros.

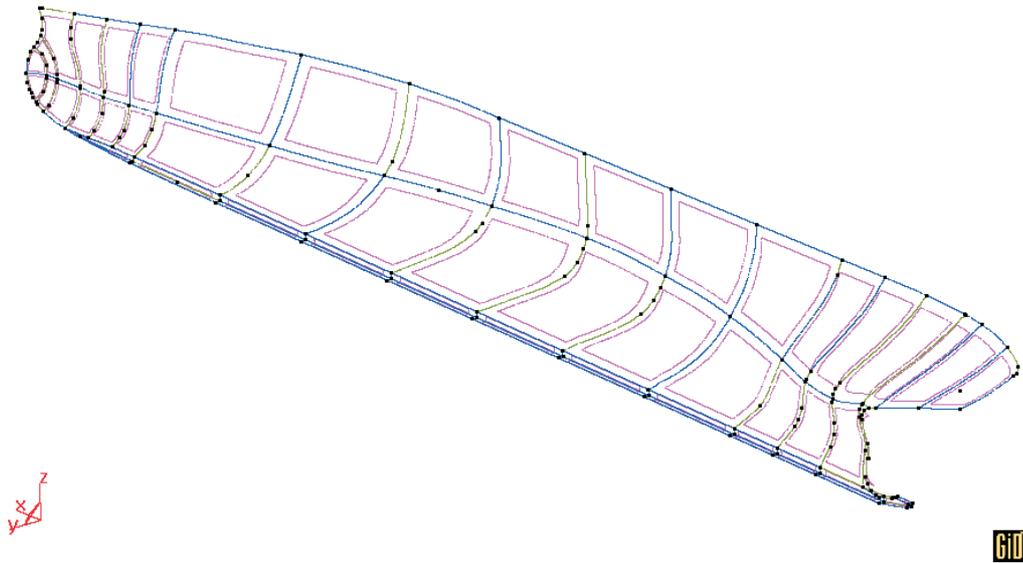


Figura 5.2: Superficies de la carena del mallador.

GiD, y la experiencia ha sido razonablemente positiva, si analizamos los costes de dicho mallador, y el rendimiento obtenido.

5.3.2 Mallado del casco.

Lo primero es importar el archivo IGES que se genera con Rhino. Ahora es conveniente trabajar otra vez con varias capas, para mayor comodidad. En una de ellas se guardarán las líneas originales. Con los grupos de líneas definidos con el modelador Rhino generamos superficies. En la figura 5.2 presentamos la descomposición por superficies de una carena. Hay que tener cuidado de que las normales a las superficies sean todas del mismo sentido, o exteriores, o interiores.

Ahora hay que dividir las superficies que hemos generado en paneles. Se debe procurar que los paneles sean lo más cuadrados posibles, que su tamaño sea similar, o que varíe muy lentamente y que el mallado tenga continuidad,

esto es, que en una línea de separación entre dos superficies, se apoyen el mismo número de paneles por los dos lados. Es bastante difícil conseguir todo lo anterior en ciertas partes y hay que adoptar la clásica solución de compromiso. Además es necesario tener en cuenta que no se puede hacer un mallado demasiado fino pues el número de paneles manejable a la hora de calcular está limitado por la memoria de la máquina ¹, aunque en ocasiones hay que emplear más o reducir el tamaño de la superficie libre para poder usar paneles más pequeños.

5.3.3 mallado de la superficie libre.

Al mallar la superficie libre hay que tener en cuenta la longitud de la ola propia del buque 2.187, obtenida como la correspondiente a un punto de presión [13] viajando a la misma velocidad que el barco. Dicha longitud de ola propia vale:

$$\lambda = 2\pi F_n^2 L = 2\pi \frac{v_\infty^2}{g}$$

Por cada longitud de onda, para cazar bien cada ola, deberíamos disponer de entre 10 y 20 paneles, en el sentido longitudinal. También hay que tener en cuenta qué tipo de problema vamos a resolver. Podemos tener un barco con popa de crucero, con popa de espejo mojada, o con espejo seco. Caso de que tengamos un buque con popa de crucero, el mallado de la parte de popa no tiene ninguna particularidad, ver figuras 5.3 y 5.4. Si el espejo está mojado, hay que dejar $\lambda/4$ a popa del buque sin mallar, "recortando" esa parte de la superficie libre, ver figuras 5.5 y 5.6. Se une la salida por costado del casco con ese punto en crujía, con la mayor suavidad posible, ver figura. Si el espejo está seco, no se recorta, pero se inician líneas de paneles partiendo del espejo, ver figura 3.4 correspondiente a las formas patrón cuyas vistas aparecen en las figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8.

El mallado debe extenderse una eslora a popa, un cuarto de eslora a proa, y algo menos de una eslora a cada banda.

¹unos 2900 en total para 128 MB RAM, y creciendo con el cuadrado del número de incógnitas para mayor cantidad de memoria

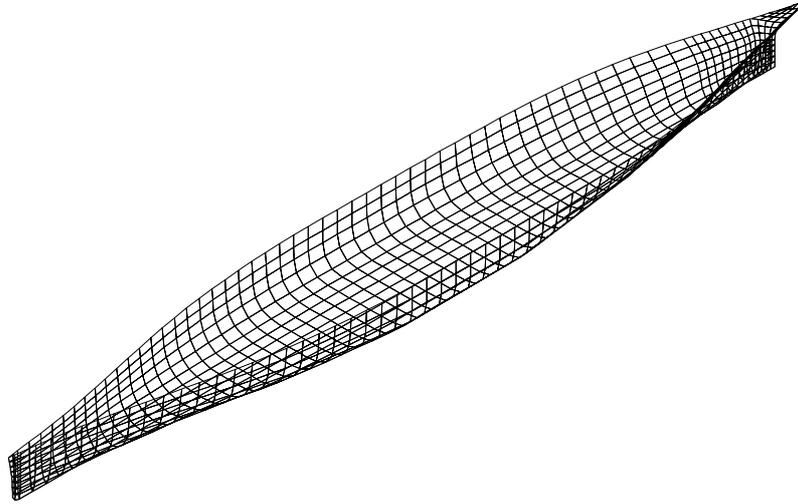


Figura 5.3: Mallado de la carena del Serie 60.

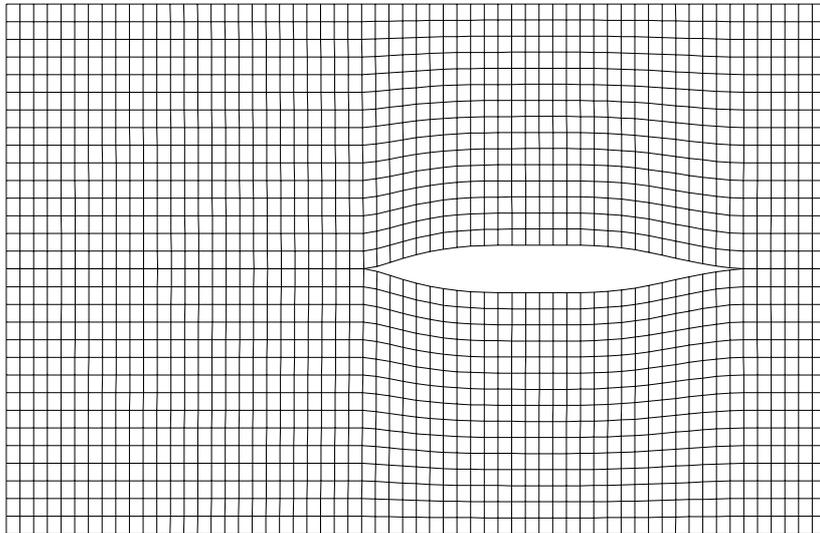


Figura 5.4: Mallado de la superficie libre del Serie 60.

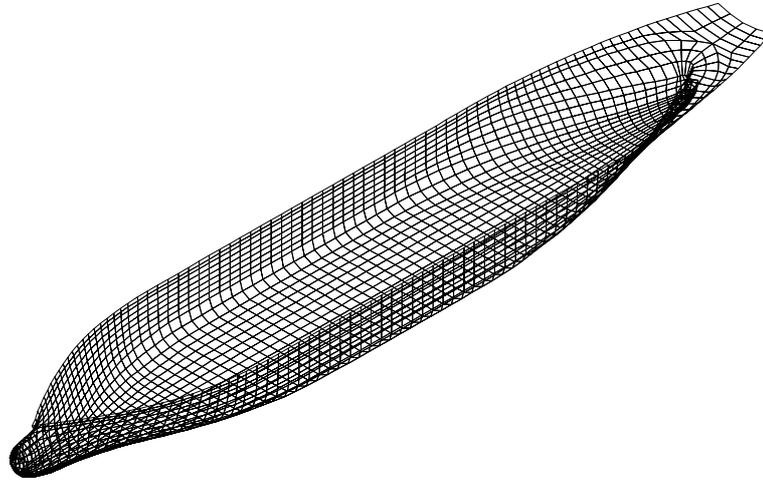


Figura 5.5: Carena con espejo mojado.

5.4 Módulo de cálculo.

Una vez que tenemos todas las mallas generadas, tenemos que definir la velocidad a la que vamos a correr nuestro buque. El cálculo consta siempre de un cálculo del problema sin superficie libre, que constituye el flujo base para el problema con superficie libre. Con este flujo base y aplicando la linealización de la condición de superficie libre estudiada en la sección 2.4.3, calculamos el potencial del problema con superficie libre. Una vez que tenemos el campo de velocidades, aplicando Bernoulli, tendremos las elevaciones en la superficie libre. Podemos realizar cortes longitudinales a lo largo de esta superficie y comparar con los experimentales. Se necesitan 30 minutos de CPU para cada velocidad ². Se puede ejecutar una batería completa de velocidades de dos modelos durante una noche.

²en un Intel Pentium 350 Mhz

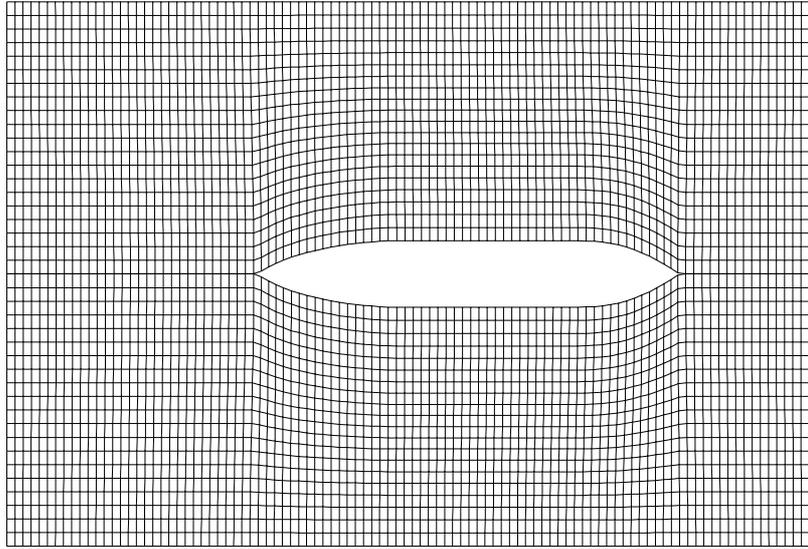


Figura 5.6: Mallado de la superficie libre de la carena de espejo mojado.

5.5 Postproceso de datos. Definición de salidas estándar.

Disponemos de interfaces que permiten visualizar los resultados con el postproceso de que dispone GiD. Hay múltiples ejemplos a lo largo de todo el documento de resultados correspondientes a deformaciones de la superficie libre, figuras 3.9, 3.12, 3.15, 5.12, 5.13, presiones y velocidades en el casco, y en la zona del bulbo, 5.15, 5.16, secciones longitudinales del tren de olas 5.14, etc. Sin embargo, se antoja necesaria una visión más global de la selección de las salidas de los cálculos, acorde con el objetivo de los mismos, que es, sin ninguna duda, contribuir al mejor conocimiento del comportamiento hidrodinámico de unas formas determinadas. Para que ello sea posible es necesario tener criterios que permitan comparar diferentes formas entre sí y con los resultados experimentales de los que en cada caso se pudiere disponer. Para que este proceso sea sencillo hemos pensado en una batería de resultados que podamos obtener de un modo sistemático para cada forma, y que permitan establecer comparaciones entre ellas. Estos resultados tendrán como base:

1. Secciones longitudinales del tren de olas.
2. Distribuciones de presiones y/o velocidades en la carena.
3. Distribuciones de elevaciones y/o velocidades en la superficie libre.
4. Coeficientes de resistencia por formación de olas.

5.5.1 Perfiles de ola.

Podemos elegir la manga B como dimensión característica para hacer los cortes longitudinales. Hay un artículo clásico [46], en el que se documentan mediciones de secciones de ola para el Series60. En ese caso las mediciones tomaron como referencia la eslora, y se realizaron a las siguientes distancias de crujía.

1. $y = 0.0755L$
2. $y = 0.2067L$

Sin embargo, si mantuviésemos esas relaciones constantes para todos los buques, el corte próximo a crujía cortarían al propio buque, dada la alta relación L/B correspondiente al Serie60. Por tanto, se convirtieron esas relaciones referidas a la eslora, en relaciones referidas a la manga, y los datos correspondientes son los siguientes:

1. $y = 0.5665B$
2. $y = 1.5086B$

Cada uno de estos cortes es una curva $x - z$. Podemos adimensionalizar la x y la z respecto a la eslora, tomando como 0 para las x la perpendicular de popa, y usando la orientación europea, o sea, el eje x coincide con la intersección de crujía con flotación, positivo hacia proa.

También es importante presentar el perfil de la ola en crujía a popa y proa del buque y a lo largo del costado del mismo. Presentamos como ejemplo en la figura 5.7 estos 3 cortes longitudinales para el Serie 60 a un número de Froude intermedio de 0.238. Estos cortes longitudinales pueden ser superpuestos con los correspondientes a otras formas (figura 5.14), o con los correspondientes a resultados experimentales. Experimentalmente, las técnicas utilizadas permiten realizar de un modo sencillo cortes longitudinales. No es nada fácil

realizar cortes transversales en canal, pues la trayectoria del buque cortaría los sistemas de medida.

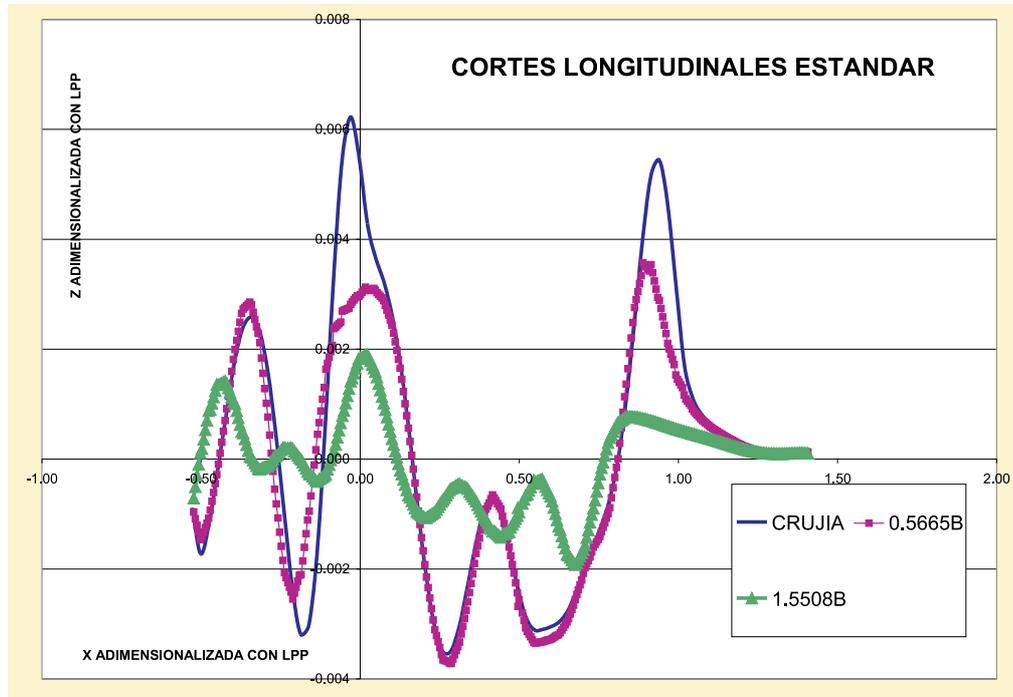


Figura 5.7: Cortes longitudinales a diferentes distancias.

5.5.2 Distribuciones de presiones y/o velocidades en la carena.

La ecuación de Bernoulli relaciona presiones y velocidades. Hablar de presiones o velocidades es hablar de dos caras de la misma moneda. Sería interesante establecer, a efectos de comparar, una serie de vistas determinadas, y una escala independiente de la velocidad y del modelo. Sin embargo, eso no es fácil. Dependiendo de las formas de cada buque tendremos mayores o menores gradientes en los campos de velocidades y presiones. Lo que sí parece claro es que entre dos variantes de un mismo modelo las escalas de visualización tienen que ser las mismas, como en las figuras 5.15, y 5.16.

5.5.3 Distribuciones de elevaciones y/o velocidades en la superficie libre.

Otra vez la ecuación de Bernoulli gobierna la relación que hay entre las elevaciones de la superficie libre y las velocidades. Otra vez vuelve a ser difícil establecer un criterio que unifique las salidas. Sin embargo aquí hemos podido establecer un criterio único de construcción de salidas. La idea es representar el módulo de la velocidad en la superficie libre por líneas isovelocidad, y hacerlo desde $0.75V_\infty$ hasta $1.15V_\infty$ cada $0.025V_\infty$ con lo que tendremos 18 líneas isovelocidad que nos permitirán visualizar los gradientes de velocidades y lo que es lo mismo de alturas de ola. En las figuras 5.8 y 5.9 se aprecian cómo la segunda forma presenta unos gradientes mucho más suaves, indicativos de su mejora en lo que se refiere a resistencia por formación de olas.

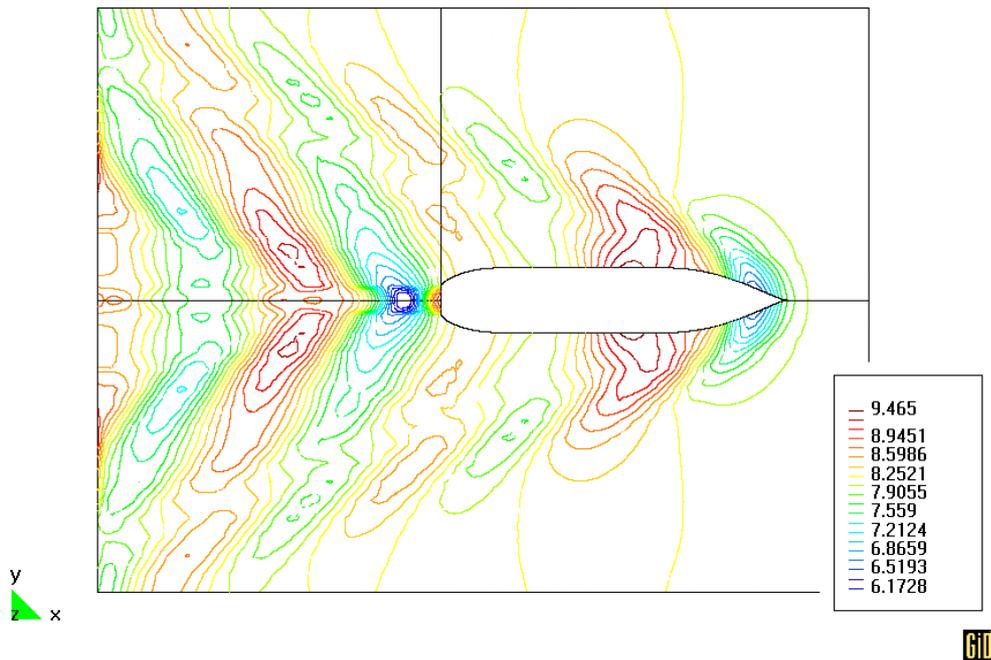


Figura 5.8: Mapa de olas de la carena 1.

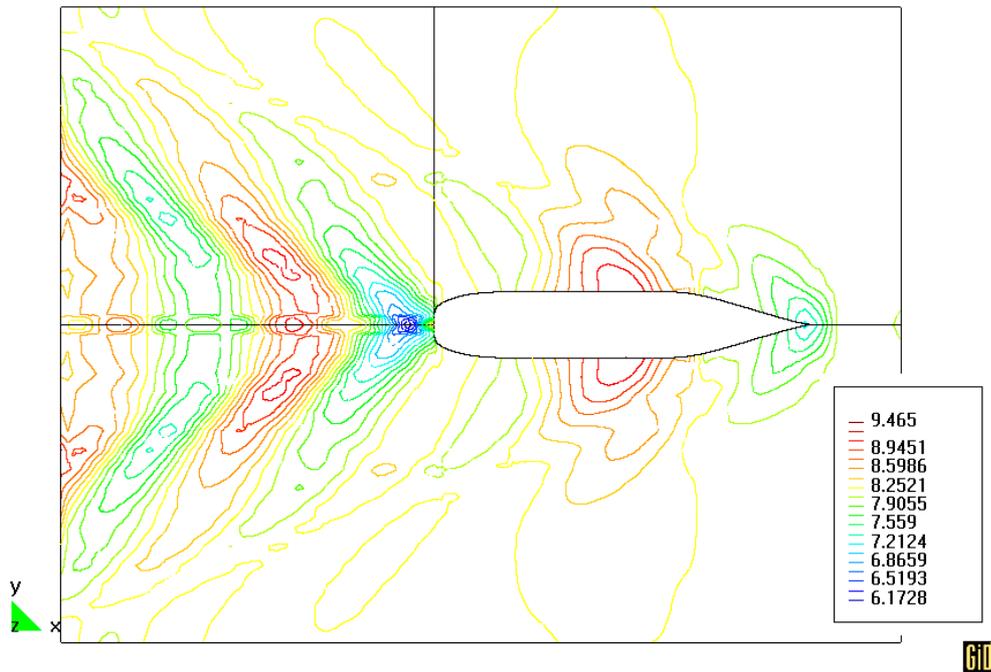


Figura 5.9: Mapa de olas de la carena 2.

5.5.4 Coeficientes de resistencia por formación de olas.

Sería fantástico poder comparar los coeficientes de resistencia por formación de olas obtenidos integrando presiones con los experimentales, pero las posibilidades de éxito son mínimas. Los datos presentados en la tabla 4.1 son mucho mejores que los habituales.

5.6 Interpretación de resultados y optimización de diseños.

A pesar de que la precisión en el cálculo de la resistencia es insuficiente, los métodos potenciales son los más utilizados para mejorar las formas. La forma de trabajo es comparativa. Se seleccionan algunas variantes de la misma carena, cambiando el bulbo, las formas de proa, el ángulo de la roda, el ángulo de entrada en la flotación, etc..., y se observa la forma del tren de

olas y la interacción de los diferentes trenes de olas entre si. Presentamos un proceso completo de comparación de dos formas de las cuales disponemos de resultados de canal. Se trataba de mejorar la proa del buque atunero cuyas formas presentamos en la figura 5.10, y se optó por alargar el bulbo, tal como aparece en el perfil de la figura 5.11.

Ahora, en función de los resultados obtenidos, se trata de averiguar cuál



Figura 5.10: Perfil de la carena original.



Figura 5.11: Perfil de la carena modificada.

de las dos formas es mejor en lo que se refiere a resistencia por formación de olas. Lo primero que hacemos en este sentido es observar los mapas de olas correspondientes a las dos formas, figuras 5.12 y 5.13. Se observa que la forma modificada presenta menores deformaciones en la superficie libre. Para un estudio más detallado recurrimos a un corte longitudinal, por ejemplo a 0.5665B, que es uno de los estándar recomendados, 5.14. En el corte longitudinal se aprecia el mayor tamaño de los primeros picos correspondientes al buque 1. Esta es la zona más interesante, pues es donde los resultados de un CFD potencial como el aquí descrito son más fiables (con el convenio de

ejes elegido, son los situados hacia la derecha en el eje de las x). Además, aunque no los presentemos aquí, realizamos más secciones longitudinales de la superficie libre, y en todos los casos, los resultados son similares a los del corte presentado, lo que corrobora que las segundas formas son mejores.

Es importante estudiar también la distribución de velocidades y/o pre-

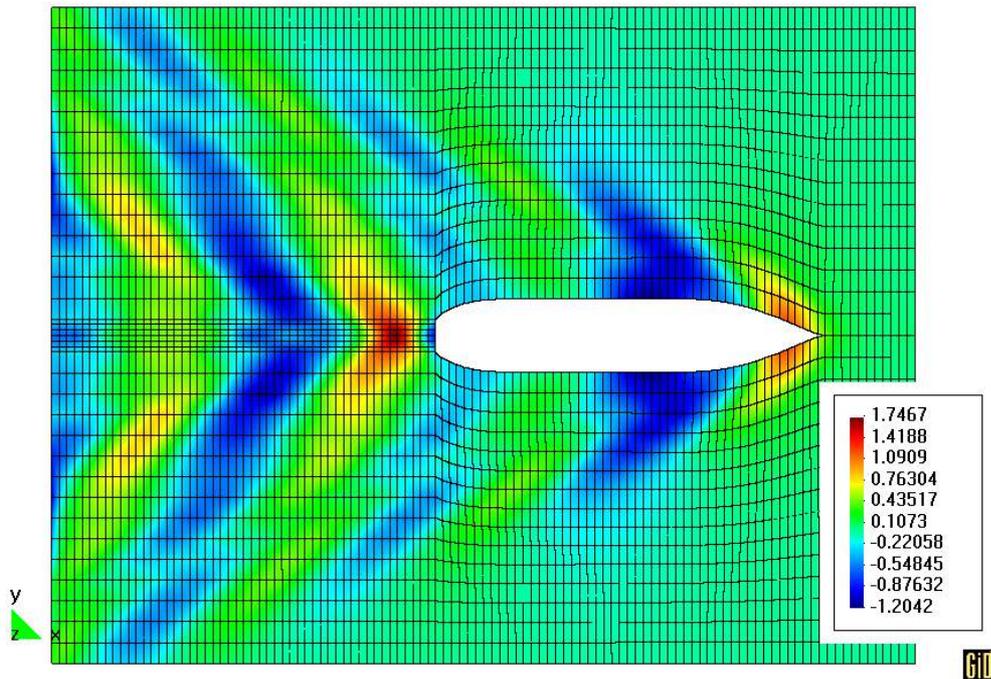


Figura 5.12: Mapa de olas de la carena original.

siones en la carena (son dos caras de la misma moneda, debido a la ecuación de Bernoulli que las relaciona). En este caso se aprecia cómo la segunda proa disminuye los gradientes a la salida del bulbo, entre la proa, y el shoulder, ver figuras 5.15 y 5.16. Esto significa que la segunda forma se comporta mejor en términos hidrodinámicos que la primera. Los resultados experimentales corroboraron estas hipótesis. Se obtuvo una mejora en el CW del 53.2% para la segunda forma a la velocidad de proyecto(16 nudos), que es a la que corresponden todos estos resultados.

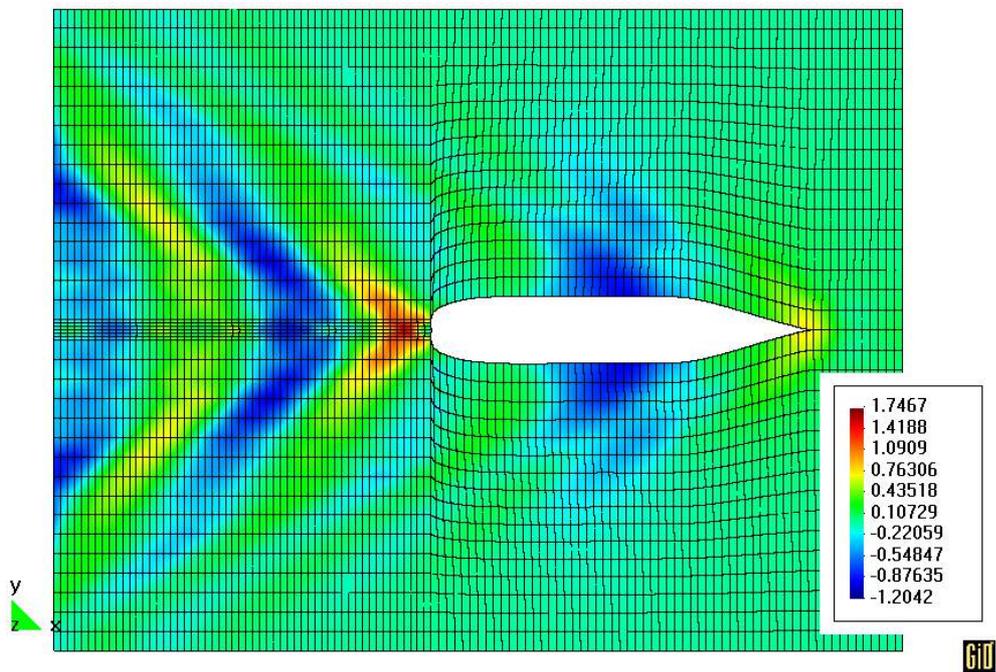


Figura 5.13: Mapa de olas de la carena modificada.

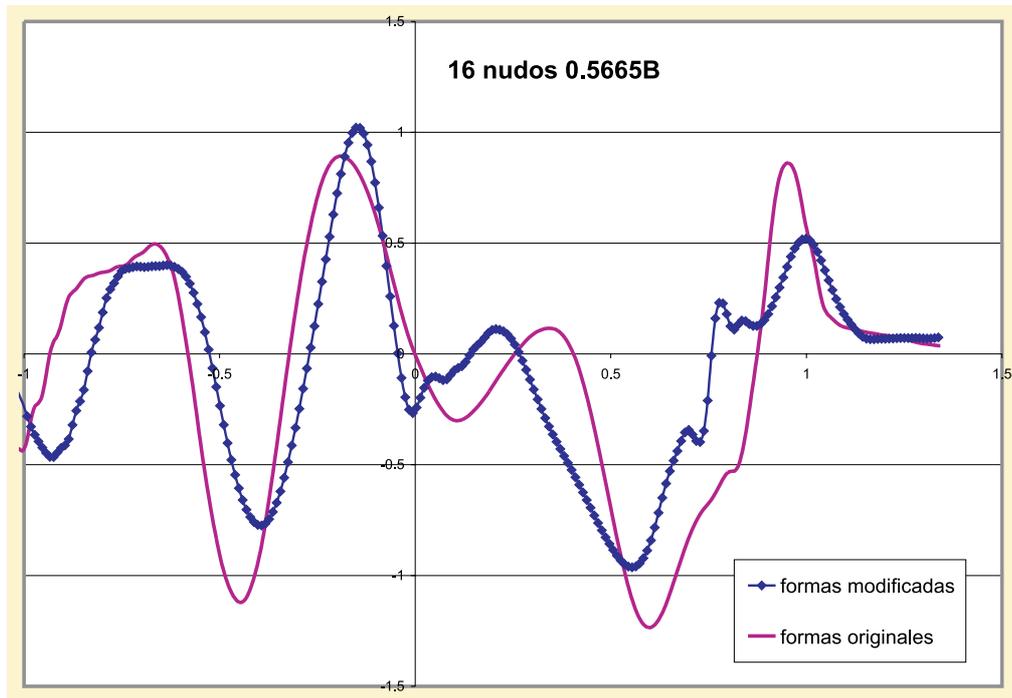


Figura 5.14: Comparación de cortes longitudinales.

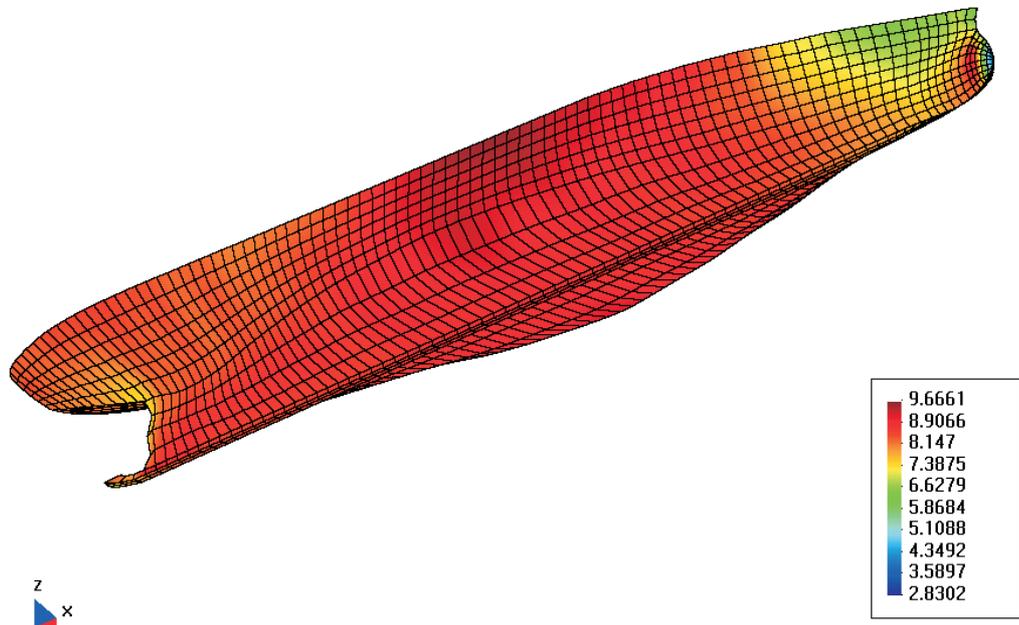


Figura 5.15: Velocidades en la carena original.

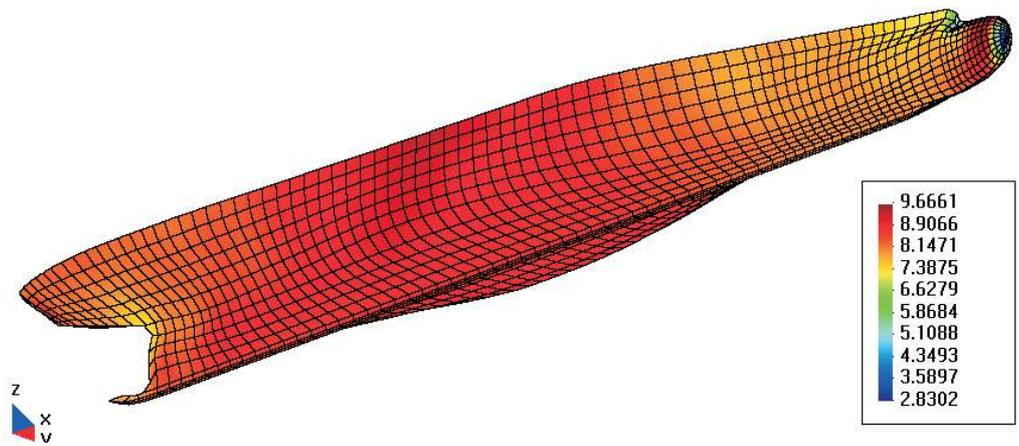


Figura 5.16: Velocidades en la carena modificada.

Capítulo 6

Validación de resultados.

6.1 Introducción.

Es importantísimo tener la posibilidad de contrastar los resultados numéricos con la realidad procedente de los experimentos. La parte experimental en hidrodinámica es complejísima. Más allá de la medición de la resistencia por formación de olas, todas las demás medidas plantean problemas experimentales graves.

Es relativamente sencillo, y con poca incertidumbre, la realización de secciones en el tren de olas. Para ello se disponen probetas fijas y éstas miden las olas provocadas al paso del modelo, como se observa en la figura 6.1 donde tenemos una fotografía realizada desde el carro del modelo pasando al lado de dichas probetas.

También es posible disponer de un modo sencillo de trimados dinámicos, aunque nosotros no los necesitamos pues nuestros programas no calculan trimados. En la figura 6.1 se observa que el modelo está perfectamente trincado, y navega solidario con el carro, con lo cual, no se presentará ningún trimado dinámico.

Los mapas de olas tridimensionales o por líneas de nivel son inviables. Las distribuciones de velocidades y presiones sobre el casco, o de velocidades en la superficie libre son también inviables y por tanto no podremos compararlas con las obtenidas en los programas. Sí es posible medir valores locales de la velocidad en algunos puntos del fluido, como por ejemplo en el disco de la estela. Los resultados son discutibles y su extrapolación a escala real difícil.

Sin embargo, estos resultados son inútiles en un método potencial, pues en la zona de la estela dominan los efectos viscosos y por tanto nuestros resultados no servirán de nada.

Nos limitaremos por tanto a realizar nuestra validación comparando los perfiles de ola estándar descritos en la sección 5.5.1 y también los valores de la resistencia por formación de olas a través del coeficiente adimensional CW . Este último dato se da con mucha reserva, pues en ningún caso pretendemos más que un mero dato aproximativo al valor real, y que respete la tendencia de su variación con la variación de la velocidad.

Respecto a las formas que hemos utilizado en esta validación, son aquellas para las que disponemos de datos experimentales en lo que se refiere a cortes longitudinales del tren de olas y valores del coeficiente CW . Los valores del coeficiente CW ya los hemos contrastado en el capítulo 4, en el que se estudia el cálculo del mismo por diferentes métodos. Los modelos se han elegido con la intención de obtener resultados para un rango amplio de formas y velocidades, sin caer en la redundancia. Se ha tratado de hacer más énfasis en aquellos casos que implicaban cálculos de popa en espejo. Son los siguientes:

1. Series 60, $C_B = 0.6$.
2. Buque de carga general de 86 m de eslora.
3. Patrullera.
4. Fragata US Navy Combatant, DTMB 5415.

Además de cortes y coeficientes, presentamos, para cada uno de los casos un aspecto de las formas, y de las más interesantes, también un aspecto del mallado de la carena y/o de la superficie libre.

6.2 Modelo Series 60.

El Series 60 es un modelo patrón para la realización de ensayos en canal. Digamos que se utiliza para calibrar un canal de ensayos, comparando los resultados con los de otros canales para una misma forma. También se ha utilizado mucho para validar resultados de CFD dada la gran cantidad de información disponible.

Su origen se remonta a 1948 cuando la Society of Naval Architects decidió

crear una serie de patrones para buques mercantes de una sola hélice. Las líneas de agua fueron diseñadas por el canal David Taylor y los experimentos se llevaron a cabo durante los años siguientes. Los 5 modelos cubren coeficientes de bloque desde 0.60 a 0.80 y diferentes relaciones LB, BT, posición longitudinal del centro de carena, etc.

Disponemos de cortes longitudinales a tres números de Froude, 0.160, 0.238 y 0.316. El número de Froude más bajo es el más difícil, dado que la longitud propia de la ola hace que haya problemas de resolución numérica dada la grandísima cantidad de paneles necesarios. Los mejores resultados se obtienen para la velocidad más alta, como era de esperar. No se ha dado el perfil de ola sobre el casco para el número de Froude más bajo pues no se dispone de resultados experimentales. En la figura 6.2 presentamos una vista lateral de la carena en cuestión y previamente, y como ejemplos de panelización habíamos presentado en las figuras 6.3 y 6.4 un mallado de la carena y de la superficie libre correspondiente al Serie 60. En las figuras 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10 y 6.11 presentamos los cortes longitudinales correspondientes a este buque.

6.3 Buque de carga general de de 86 m de eslora.

En esta sección presentamos resultados correspondientes a un buque de carga general de 86 metros de eslora. Se tienen resultados para dos condiciones de carga, y para velocidades que van desde los 8 nudos hasta los 12, lo que equivale a números de Froude que van desde 0.142 hasta 0.213.

Como se puede observar en la figura 6.13, el buque es de formas muy llenas, lo que hace que su comportamiento hidrodinámico no sea muy bueno. Las características del buque son, a plena carga:

- $LOA = 89.70m$
- $LPP = 86.42m$
- $B = 11.32m$
- $T = 4.20m$
- $DISF = 3846t$

- $CB = 0.915$

En la condición de lastre:

- $T = 3.10m$
- $DISF = 2773t$
- $CB = 0.892$

Presentamos también un mallado de la carena y de la superficie libre, y otro de la zona del bulbo, por ser muy interesante en este caso; figuras 6.14, 6.15 y 6.16. También es interesante destacar el mallado de la superficie libre; el barco tiene popa de espejo, pero el flujo no se desprende de la bovedilla del codaste. La velocidad es tan baja que el espejo queda completamente mojado. Dado que en esa zona, son los efectos viscosos los predominantes, directamente se deja de lado su mallado, dejando un espacio a popa del barco sin malla en la superficie libre, como se puede observar en la figura 6.16, y como ya explicamos en 5.3.3.

Disponemos de cortes longitudinales a dos velocidades 10.5 y 12 nudos, que corresponden a números de Froude de 0.186 y 0.213. Para ambas velocidades se obtienen resultados muy buenos, sobre todo en la fase y amplitud de los primeros picos. No se ha dado el perfil de ola sobre el casco pues no se dispone de resultados experimentales para el mismo. Se presentan estos cortes longitudinales en las figuras 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26, 6.27 y 6.28 .



Figura 6.1: Probetas de medición de secciones longitudinales del tren de olas.



Figura 6.2: Visualización de la carena del Serie 60.

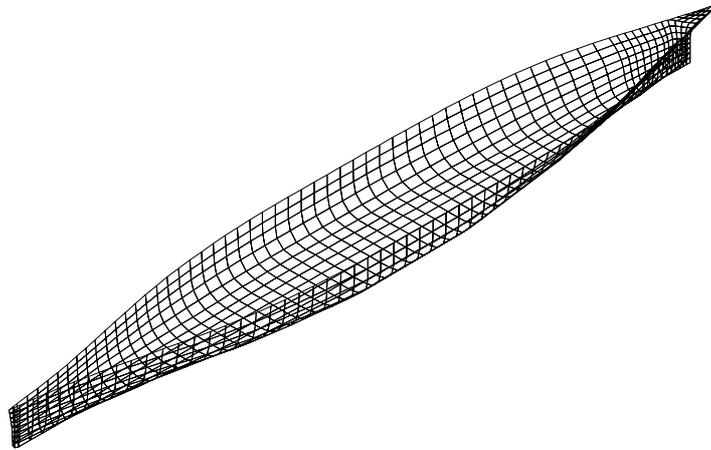


Figura 6.3: Mallado de la carena del Series 60.

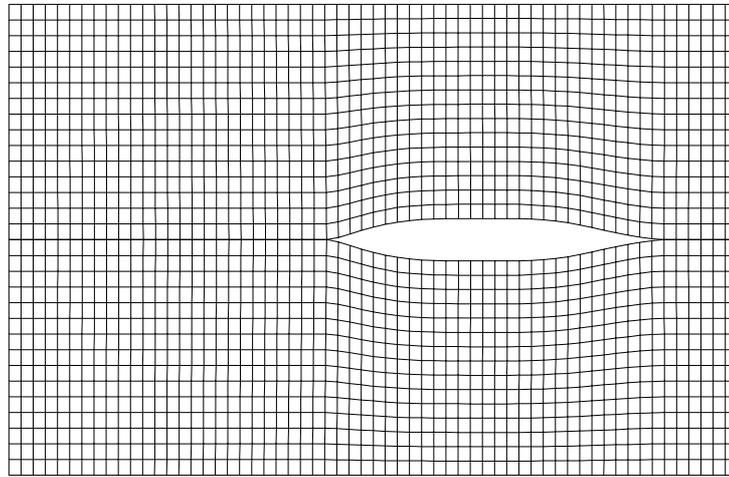


Figura 6.4: Mallado de la superficie libre del Series 60.

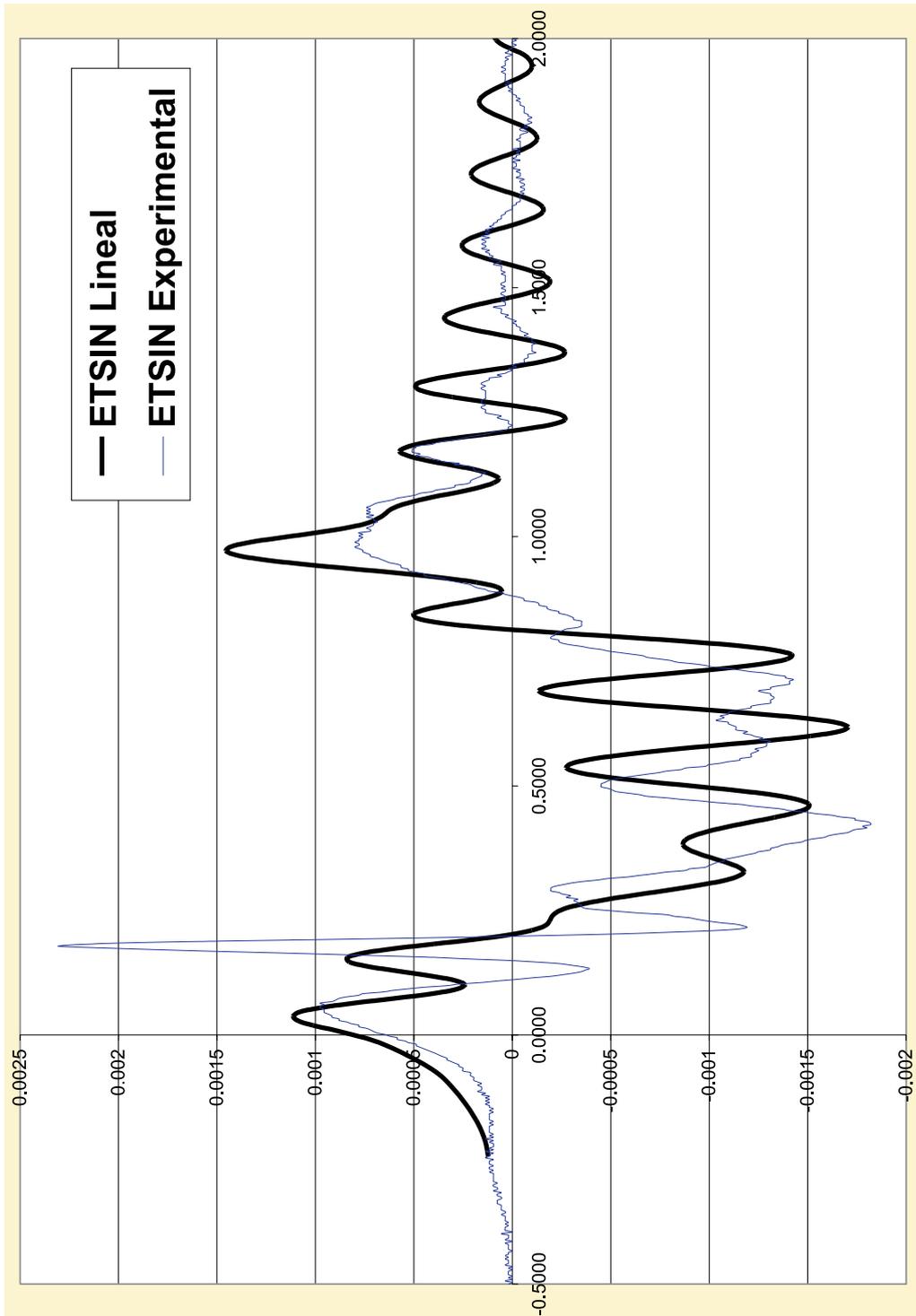


Figura 6.5: Perfil $y = 0.5665B$ del Serie 60 a $Fn = 0.160$.

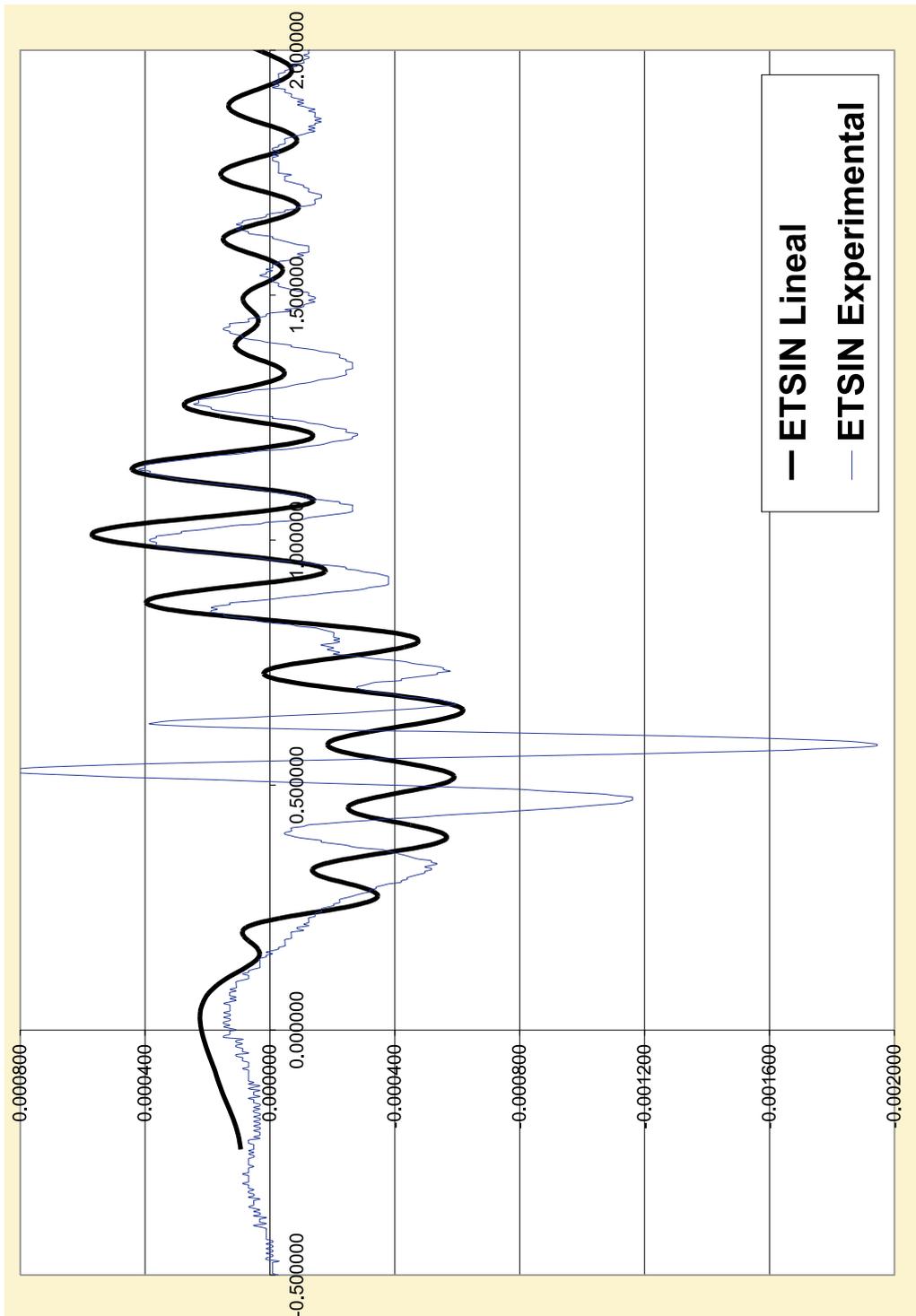


Figura 6.6: Perfil $y = 1.5508B$ del Serie 60 a $Fn = 0.160$.

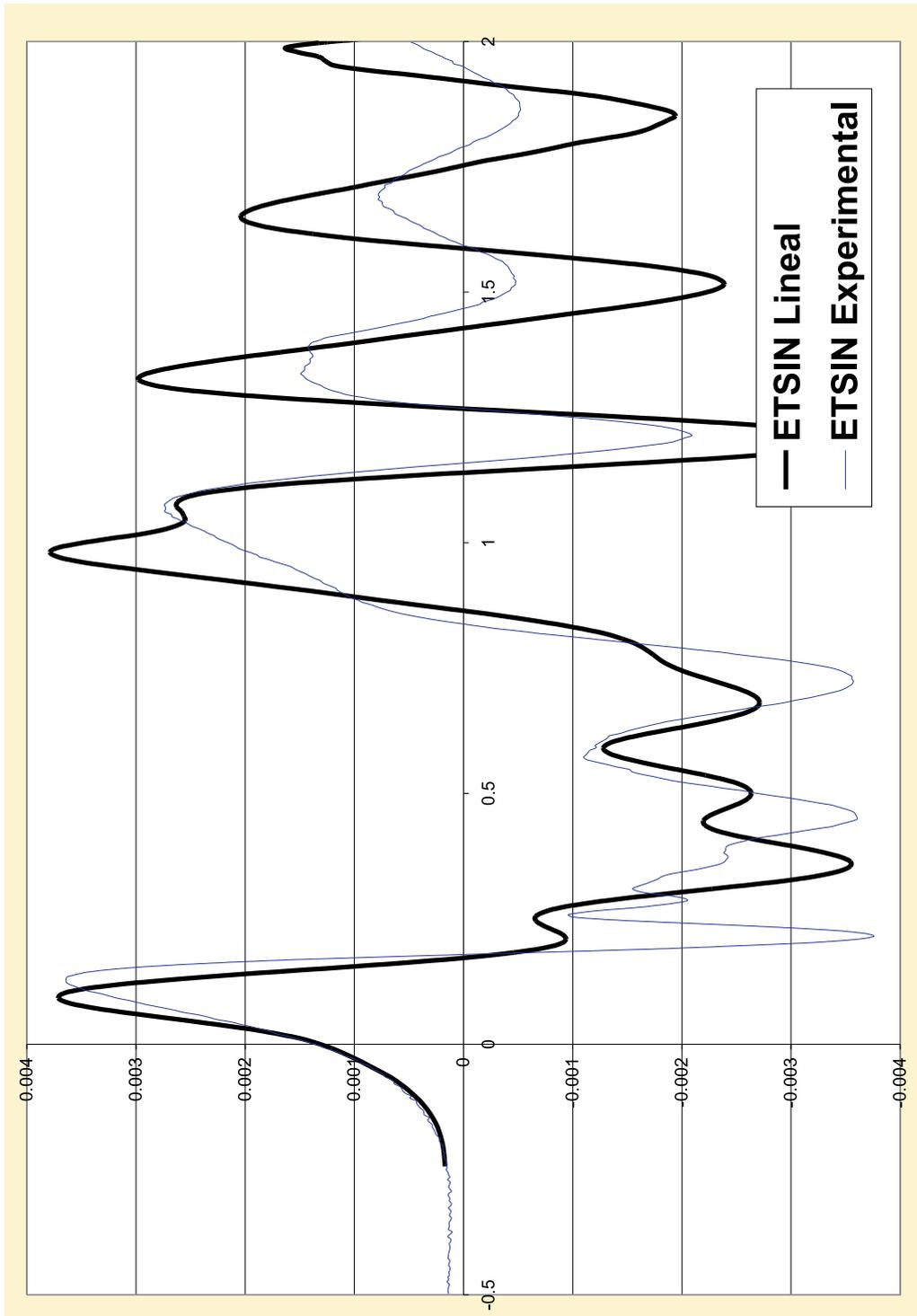


Figura 6.7: Perfil $y = 0.5665B$ del Serie 60 a $Fn = 0.238$.

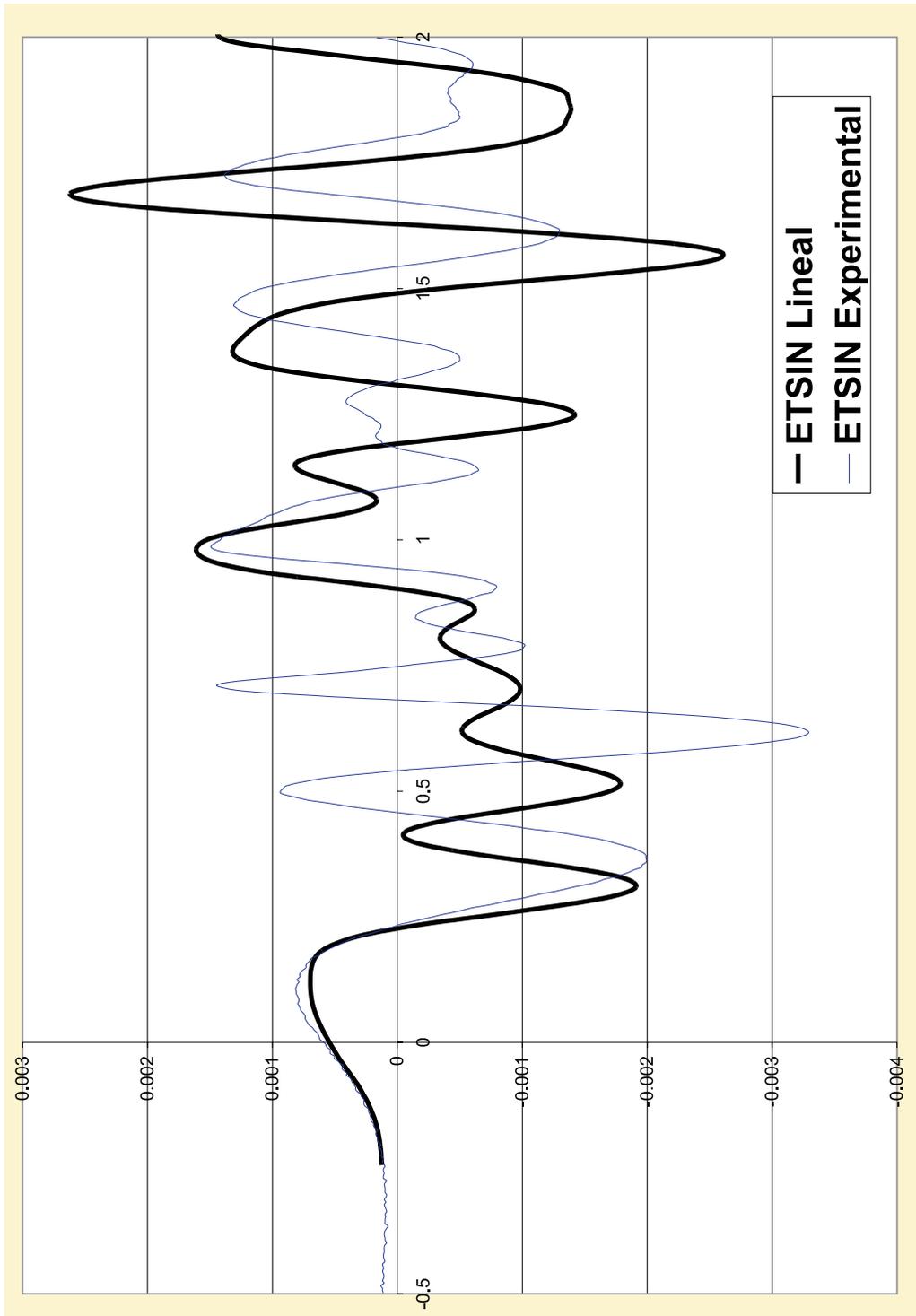


Figura 6.8: Perfil $y = 1.5508B$ del Serie 60 a $Fn = 0.238$.

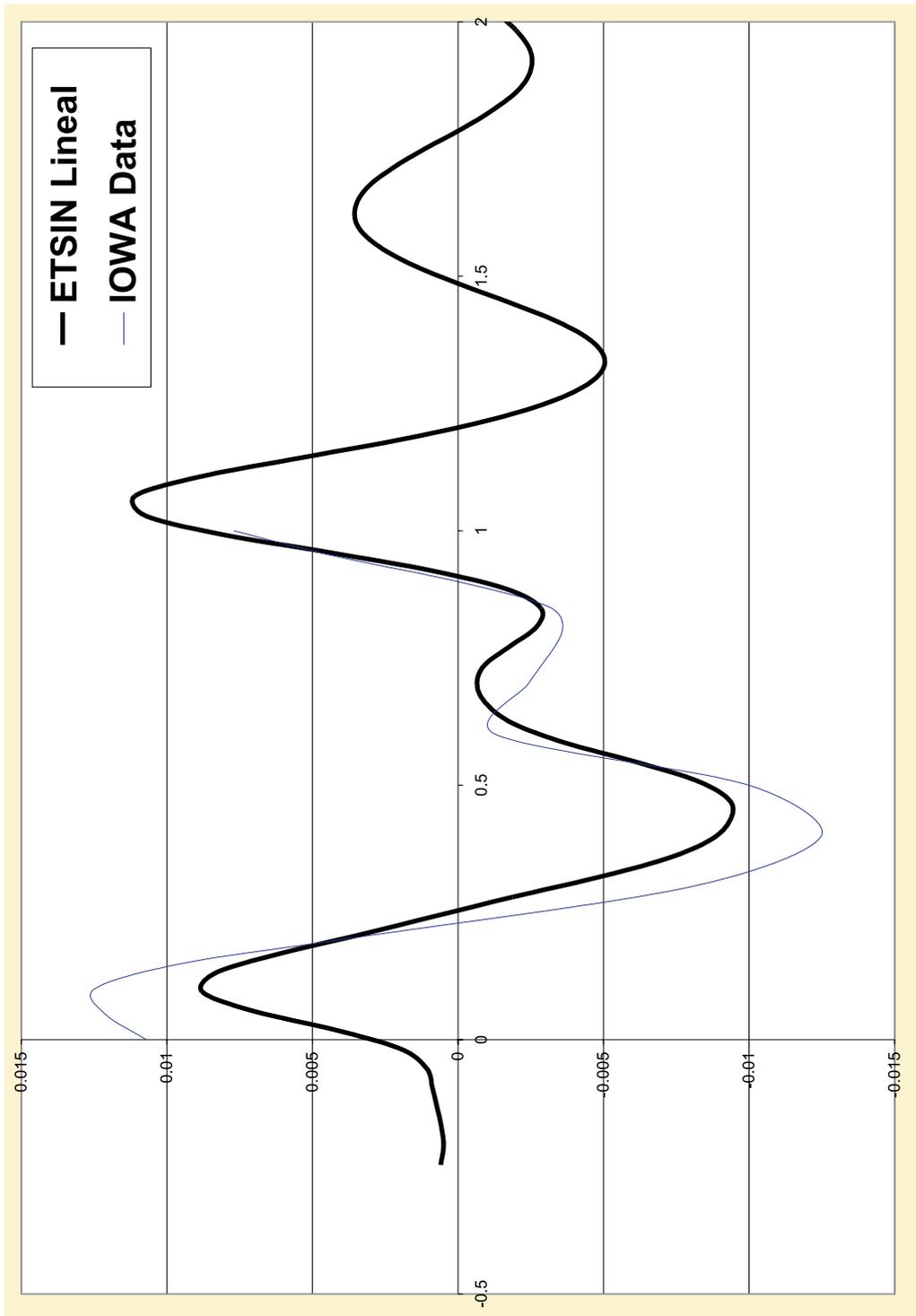


Figura 6.9: Perfil de cruja del Serie 60 a $F_n = 0.316$.

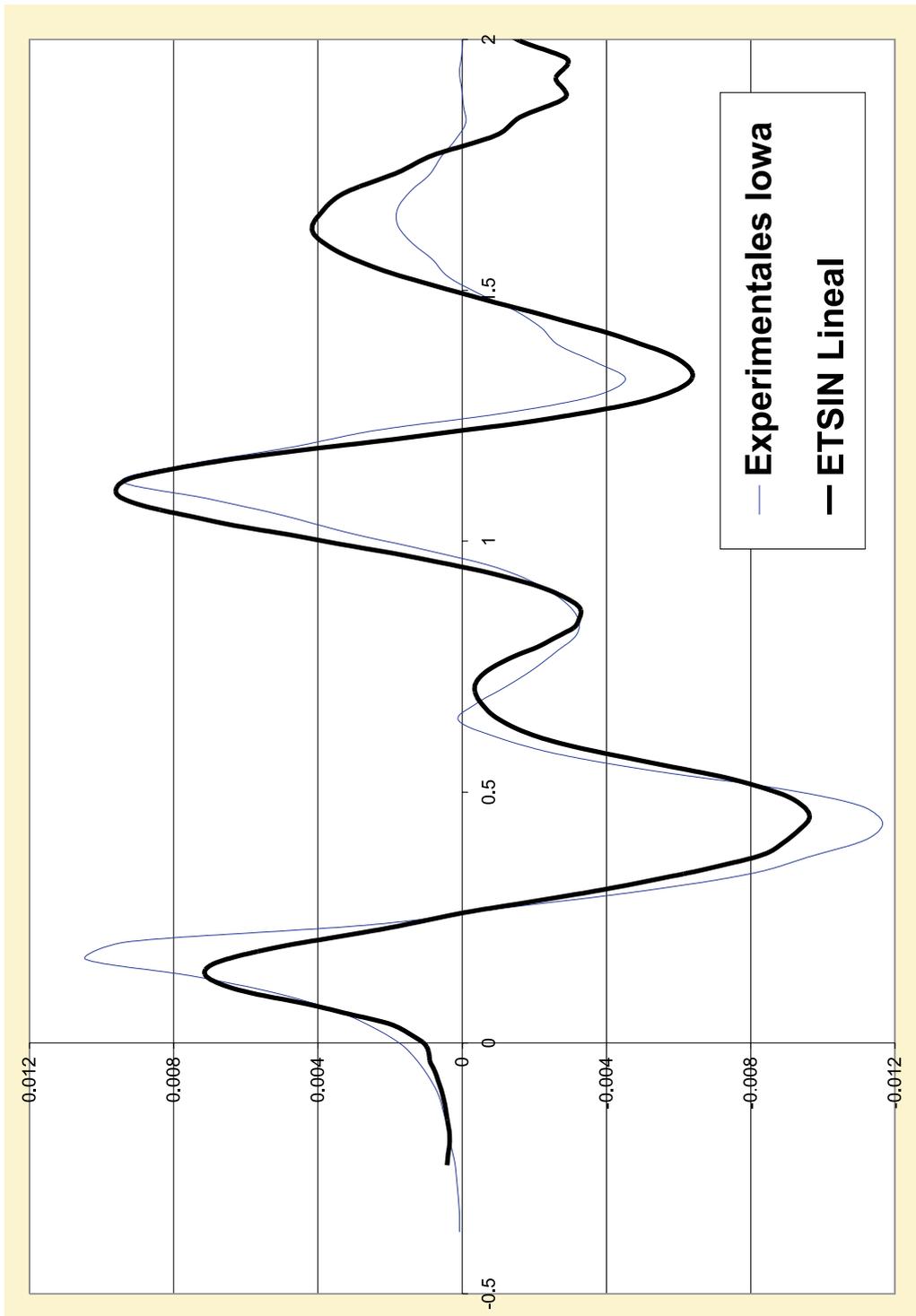


Figura 6.10: Perfil $y = 0.5665B$ del Serie 60 a $Fn = 0.316$.

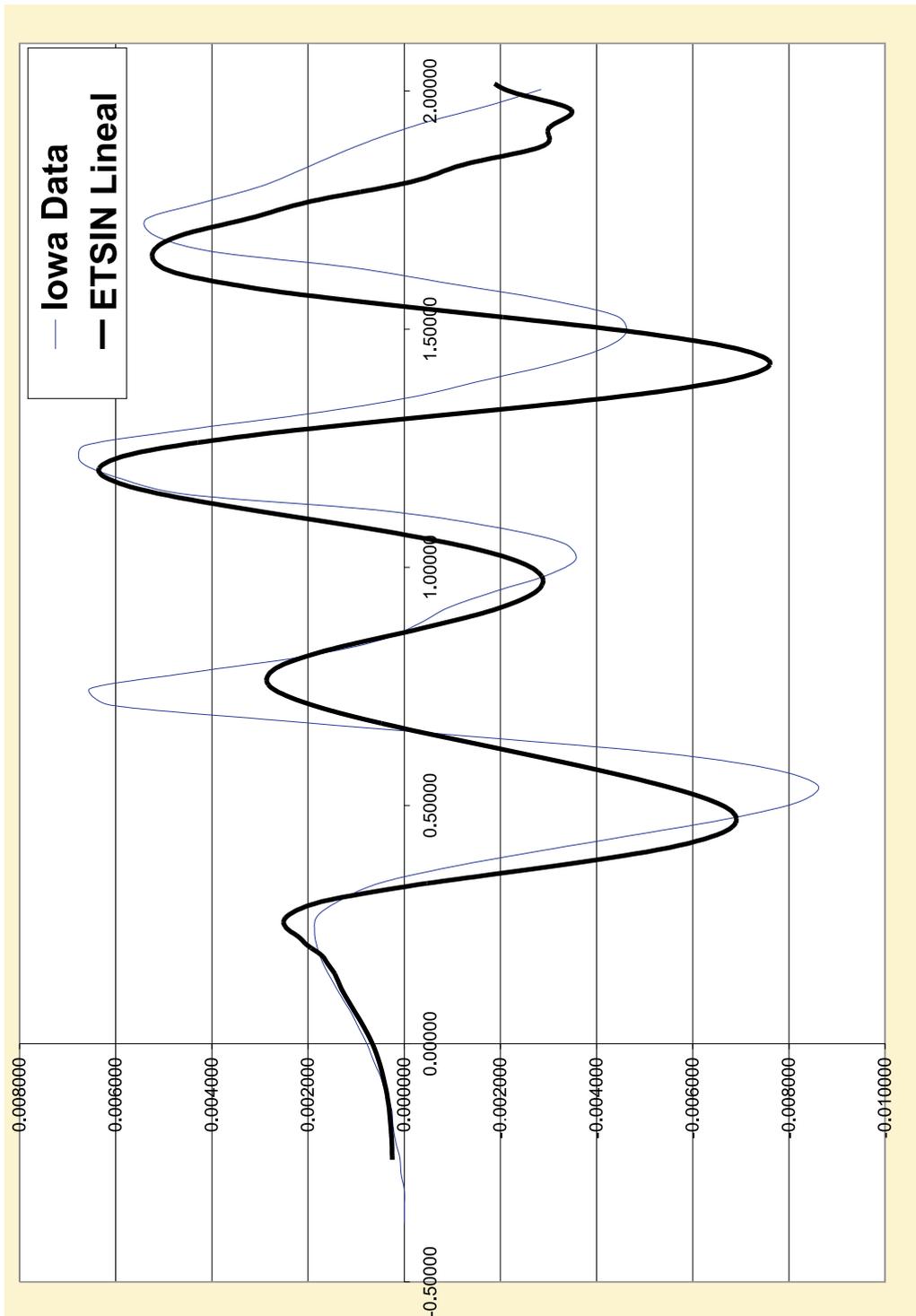


Figura 6.11: Perfil $y = 1.5508B$ del Serie 60 a $Fn = 0.316$.



Figura 6.12: Buque de carga general . Alzado.

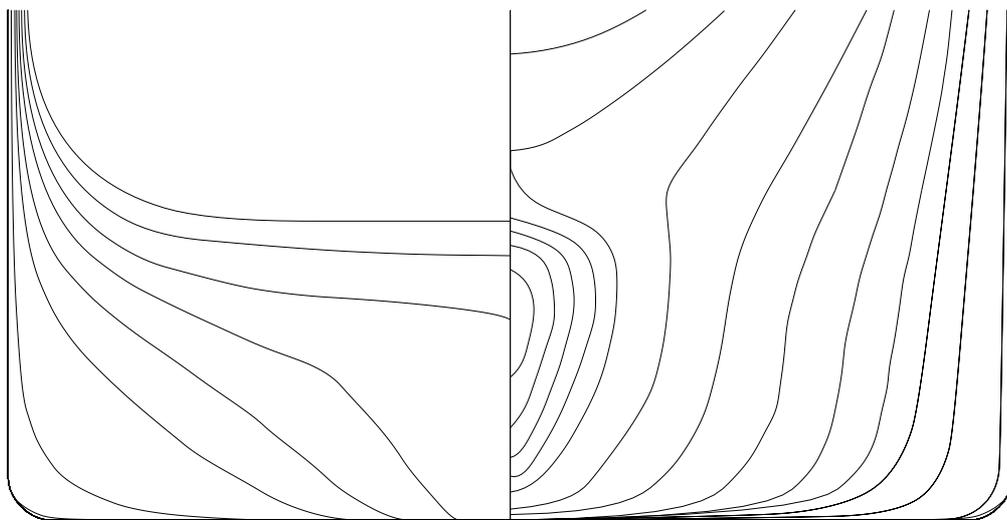


Figura 6.13: Buque de carga general. Caja de cuadernas.

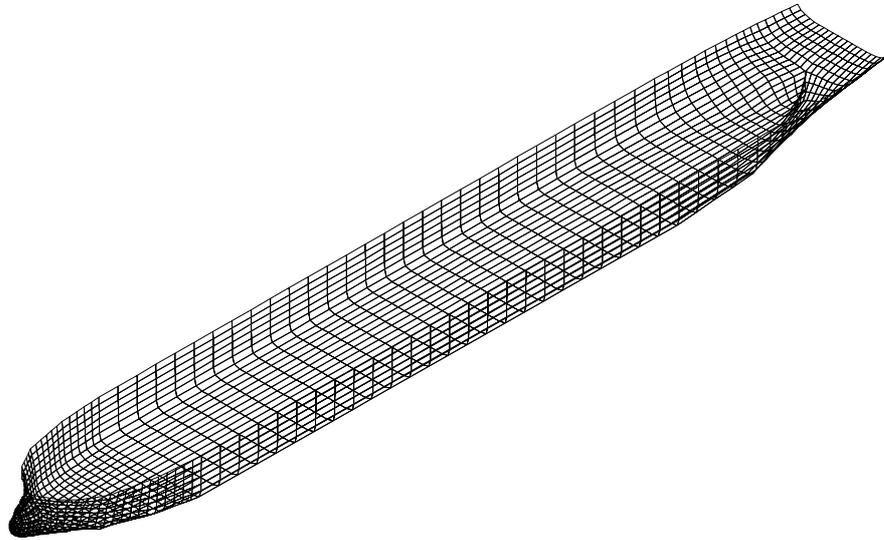


Figura 6.14: Buque de carga general. Panelización de la carena.

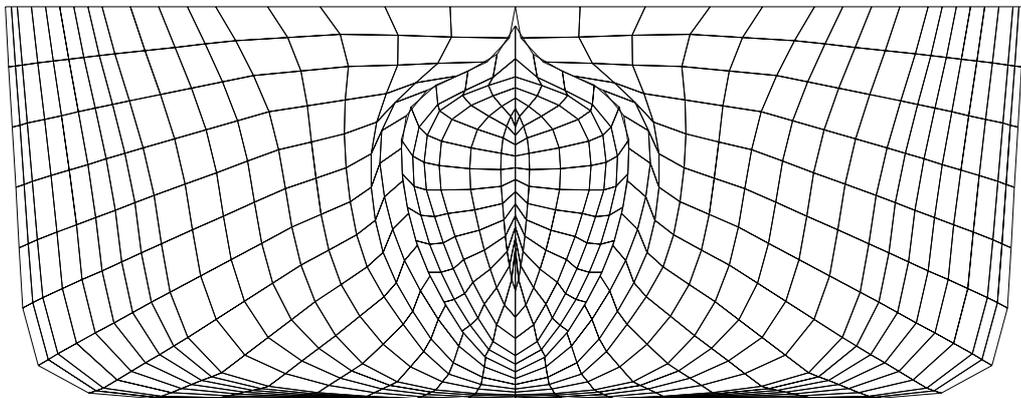


Figura 6.15: Buque de carga general. Panelización de la zona del bulbo.

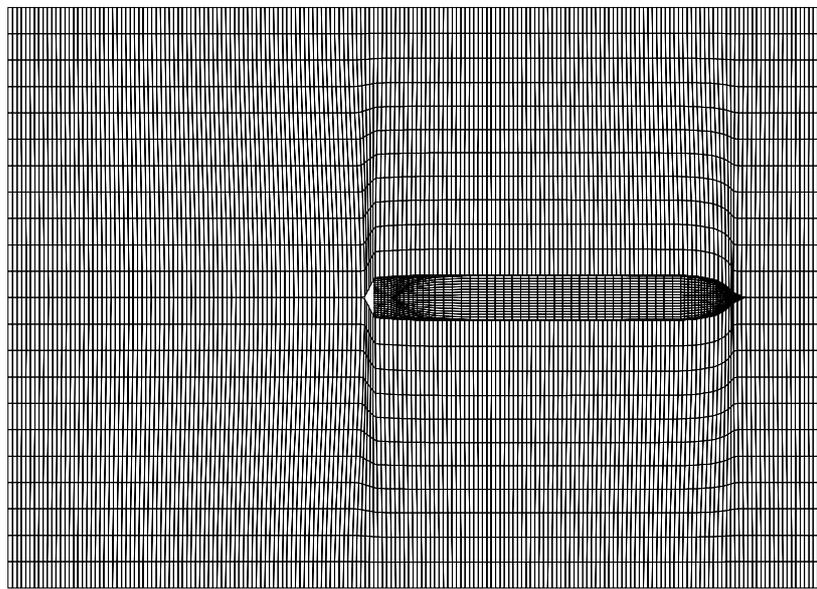


Figura 6.16: Buque de carga general. Panelización de la superficie libre.

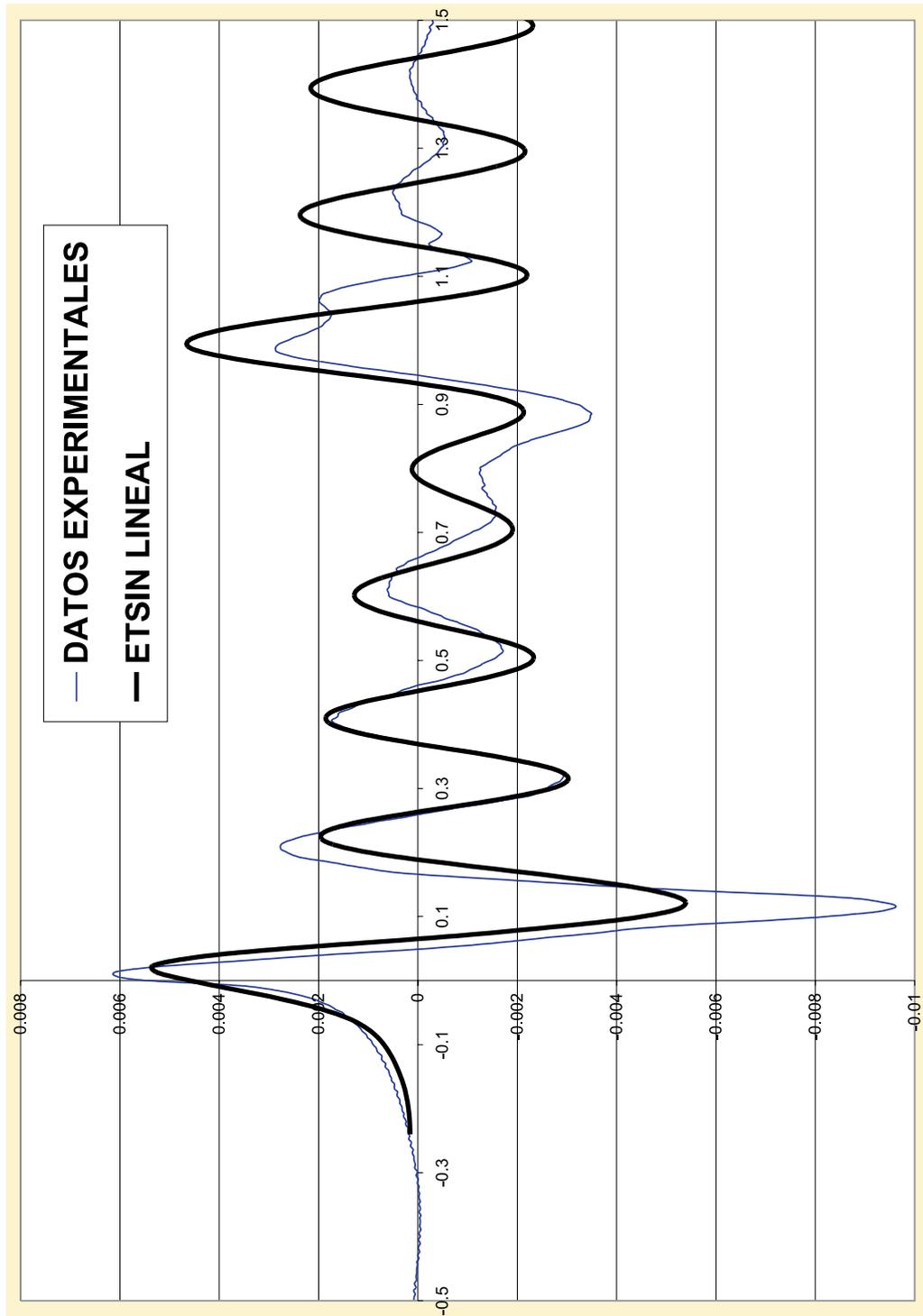


Figura 6.17: Perfil $y = 0.5665B$ del buque de carga general $V = 10.5Kn$ en lastre.

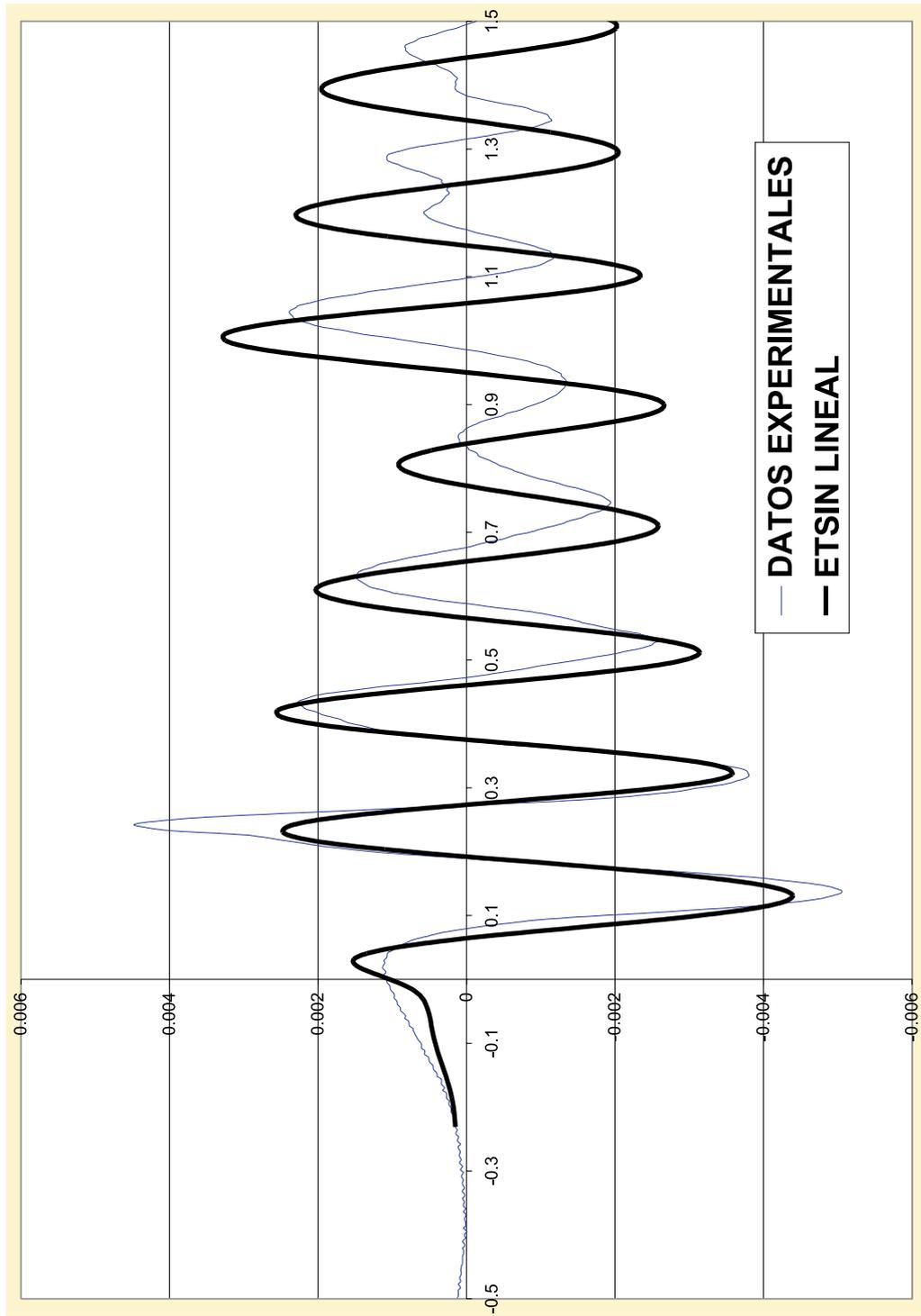


Figura 6.18: Perfil $y = 1.0587B$ del buque de carga general $V = 10.5Kn$ en lastre.

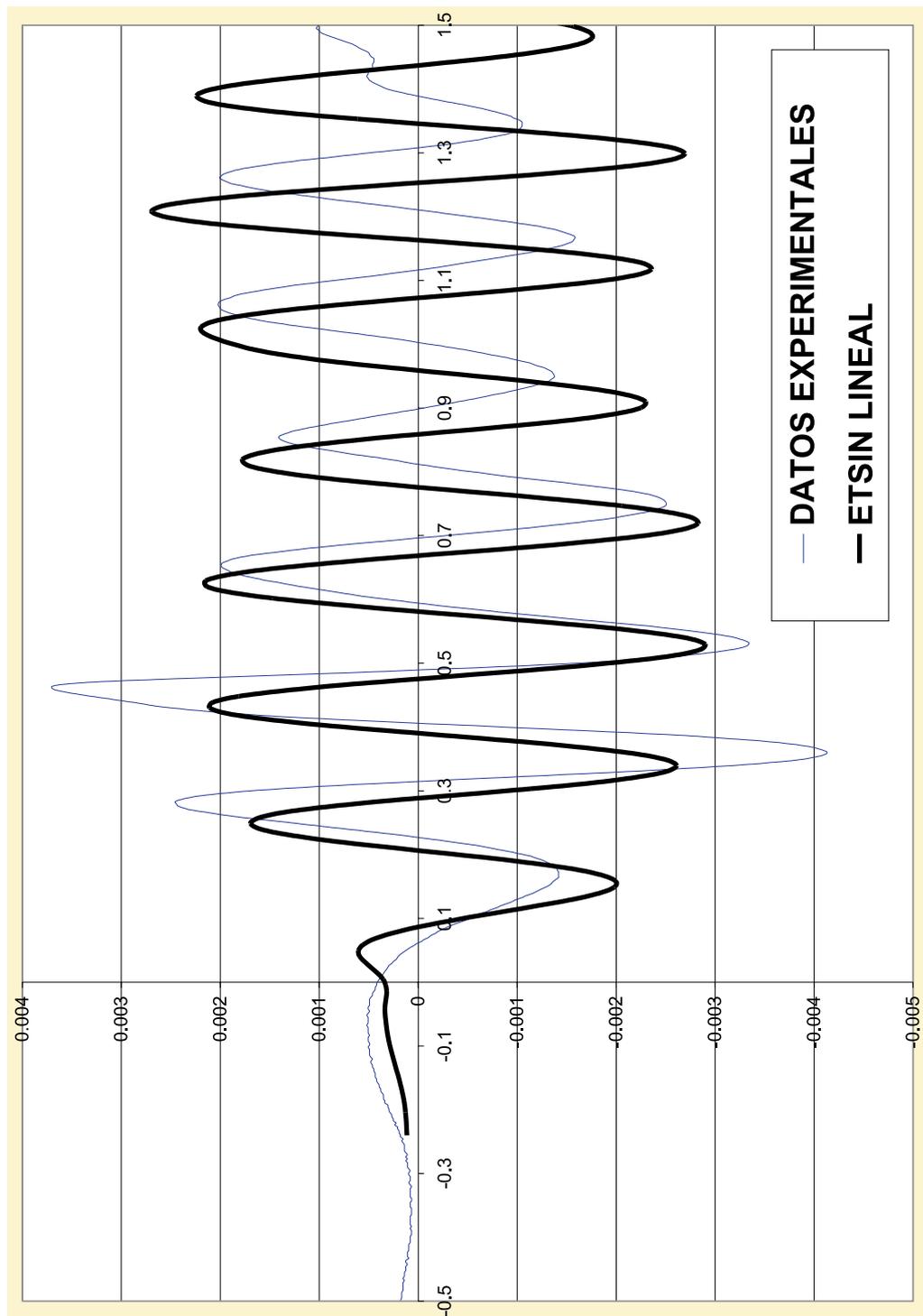


Figura 6.19: Perfil $y = 1.5508B$ del buque de carga general $V = 10.5Kn$ en lastre.

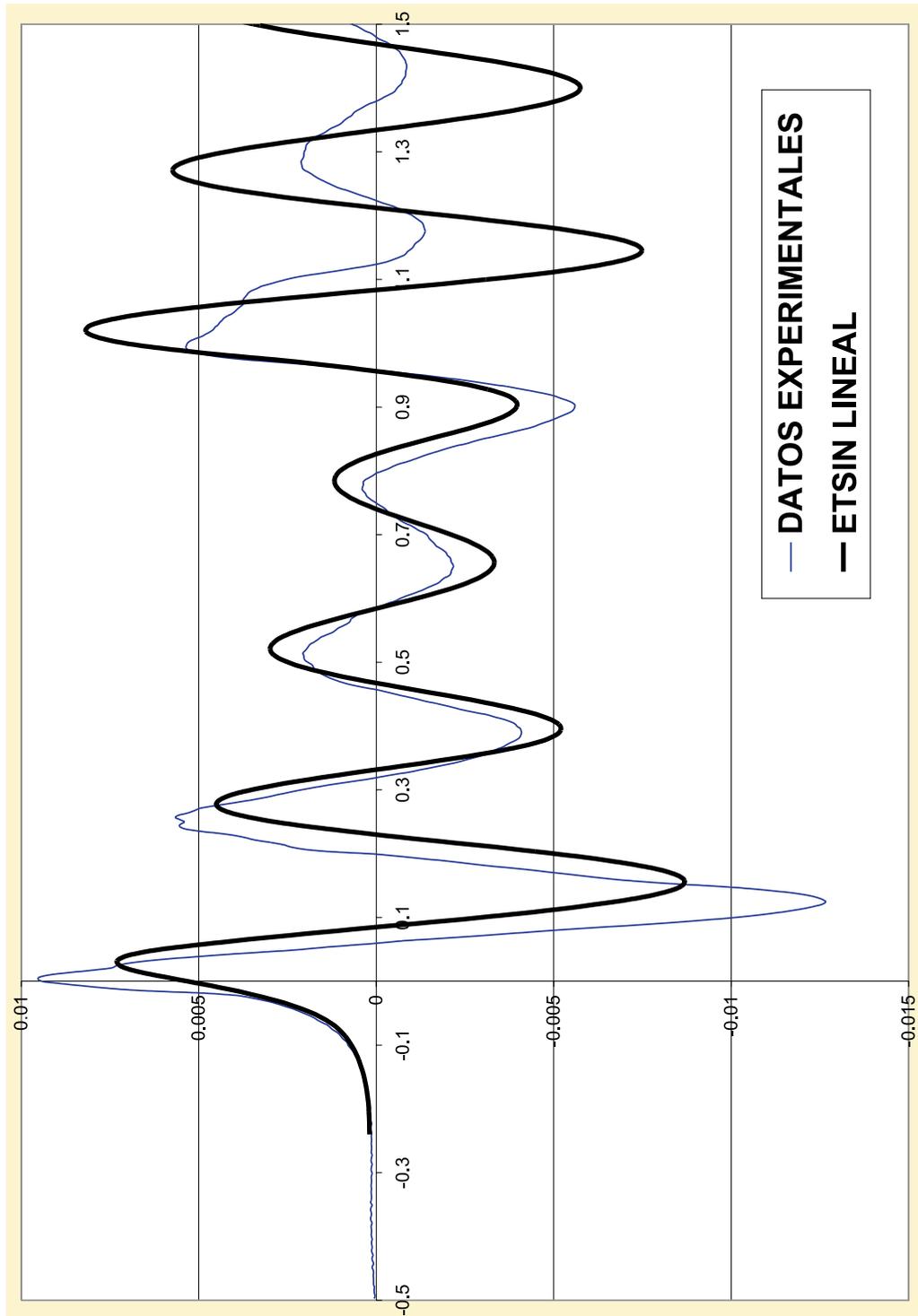


Figura 6.20: Perfil $y = 0.5665B$ del buque de carga general $V = 12Kn$ en lastre.

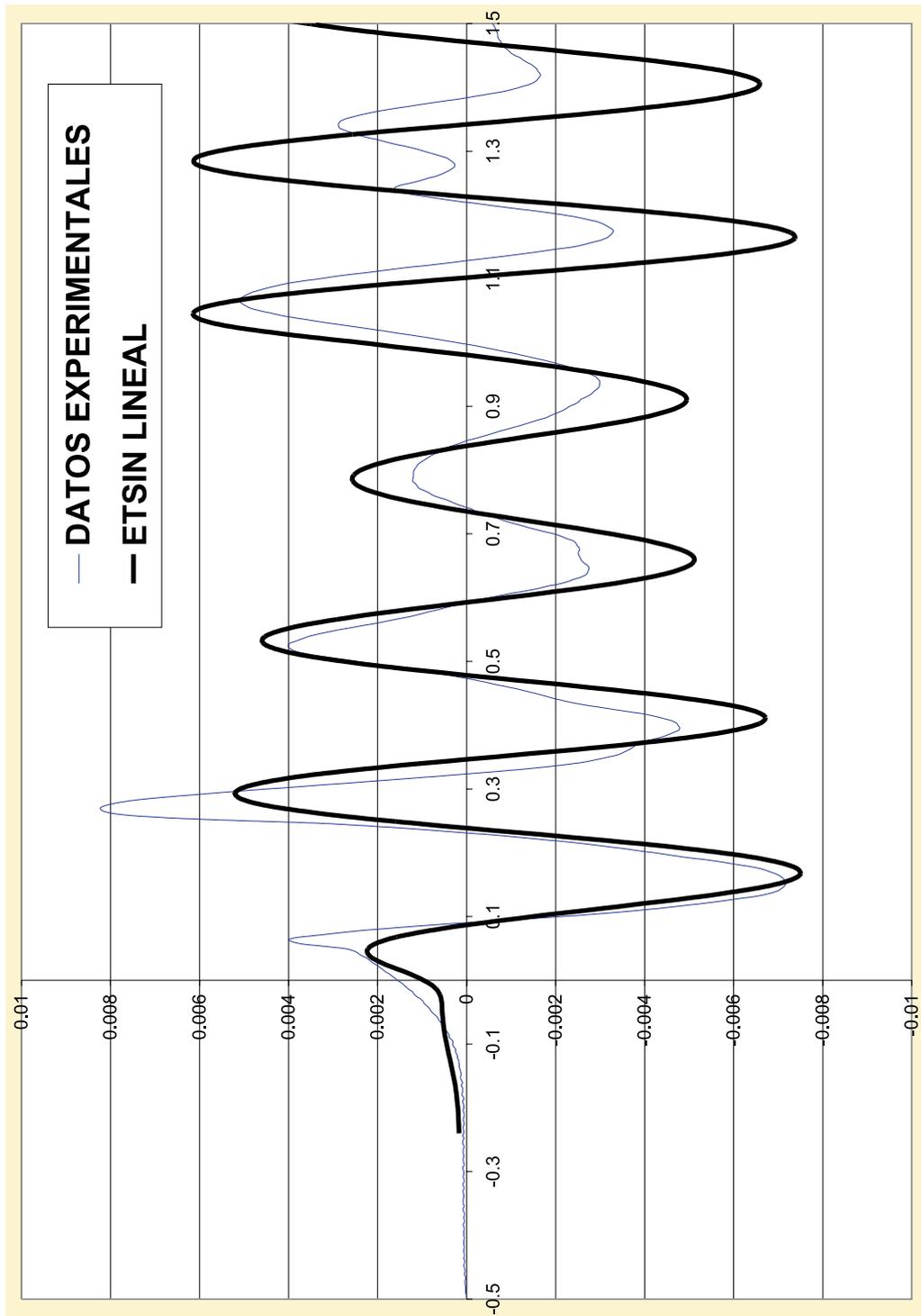


Figura 6.21: Perfil $y = 1.0587B$ del buque de carga general $V = 12Kn$ en lastre.

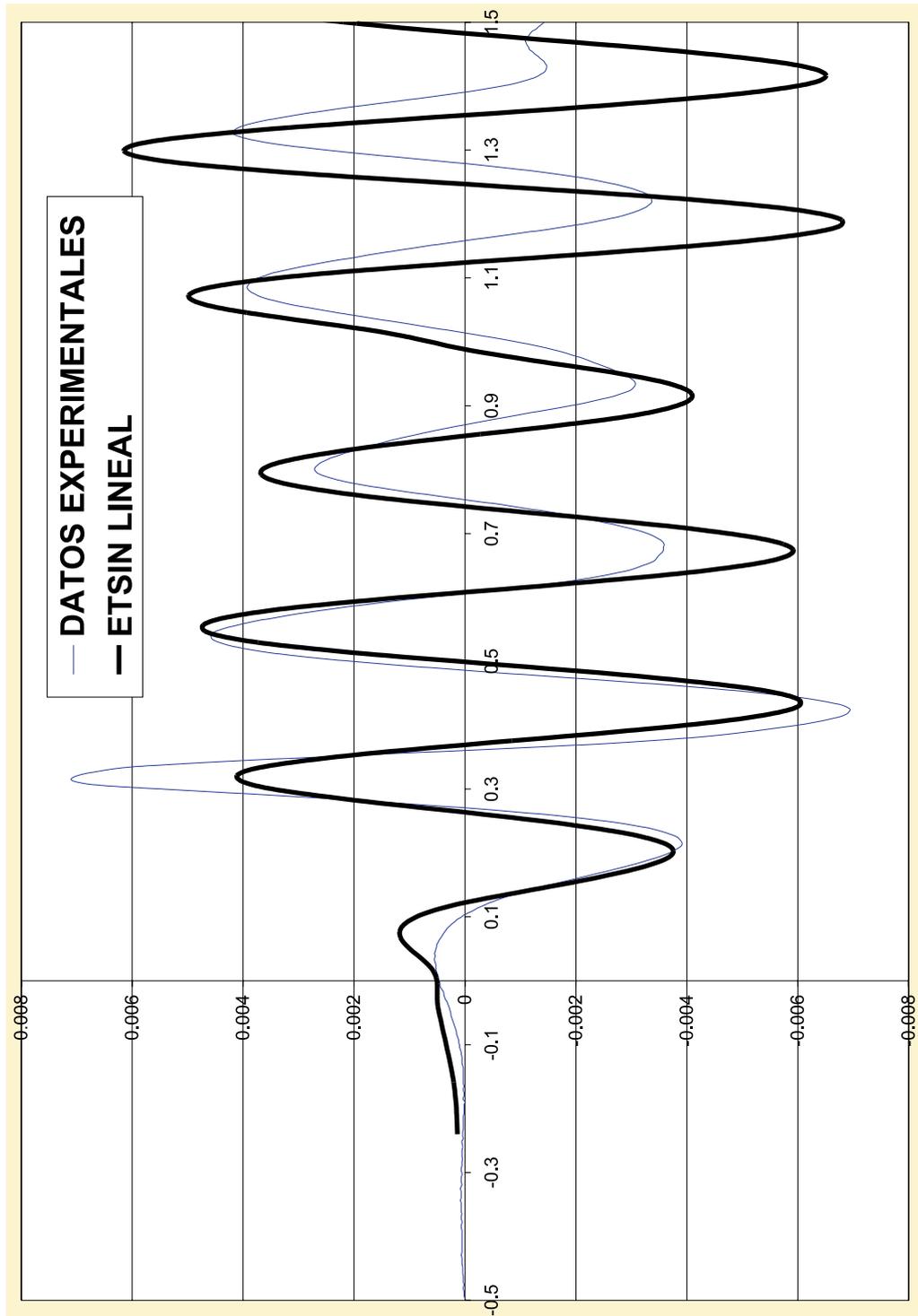
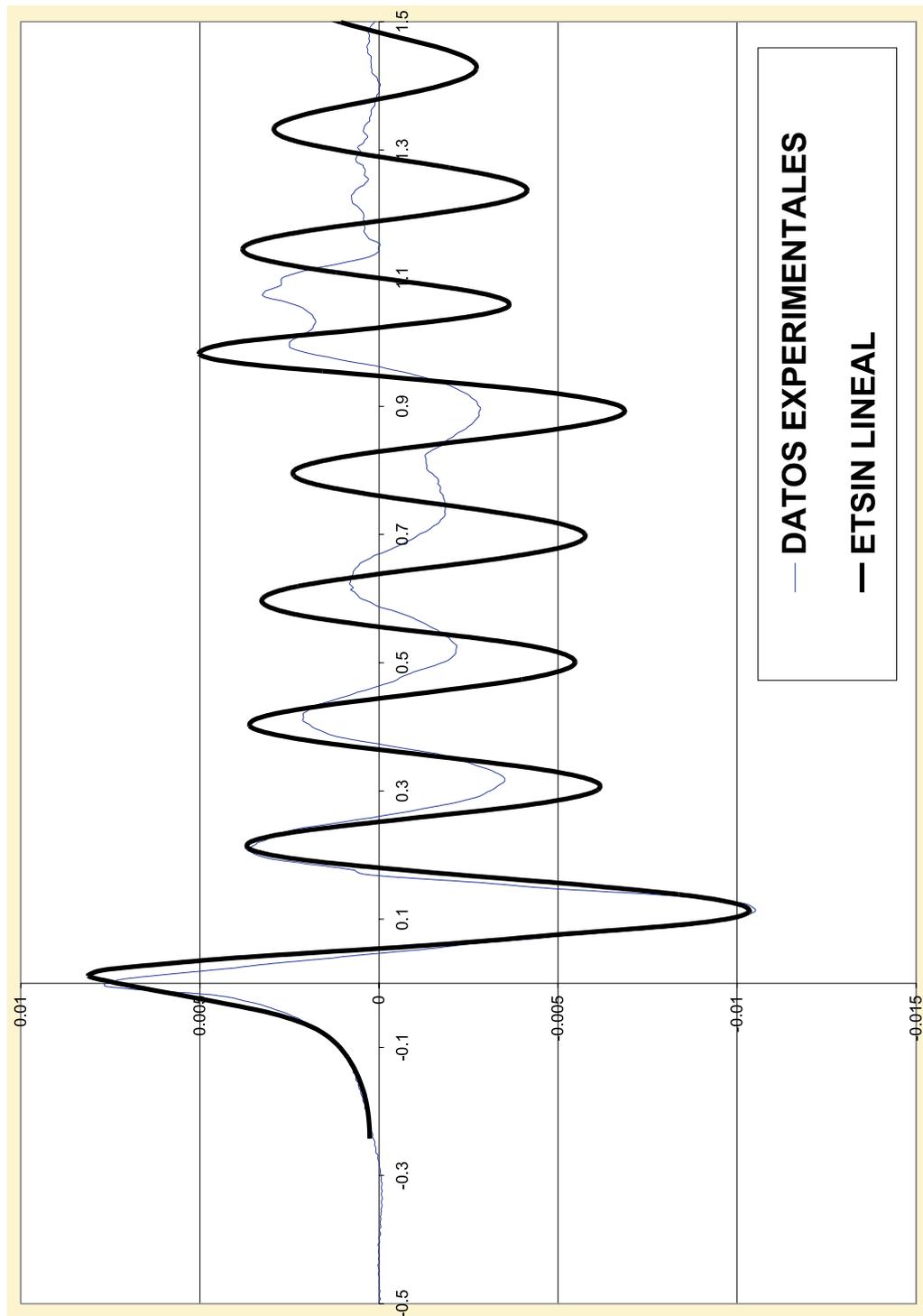
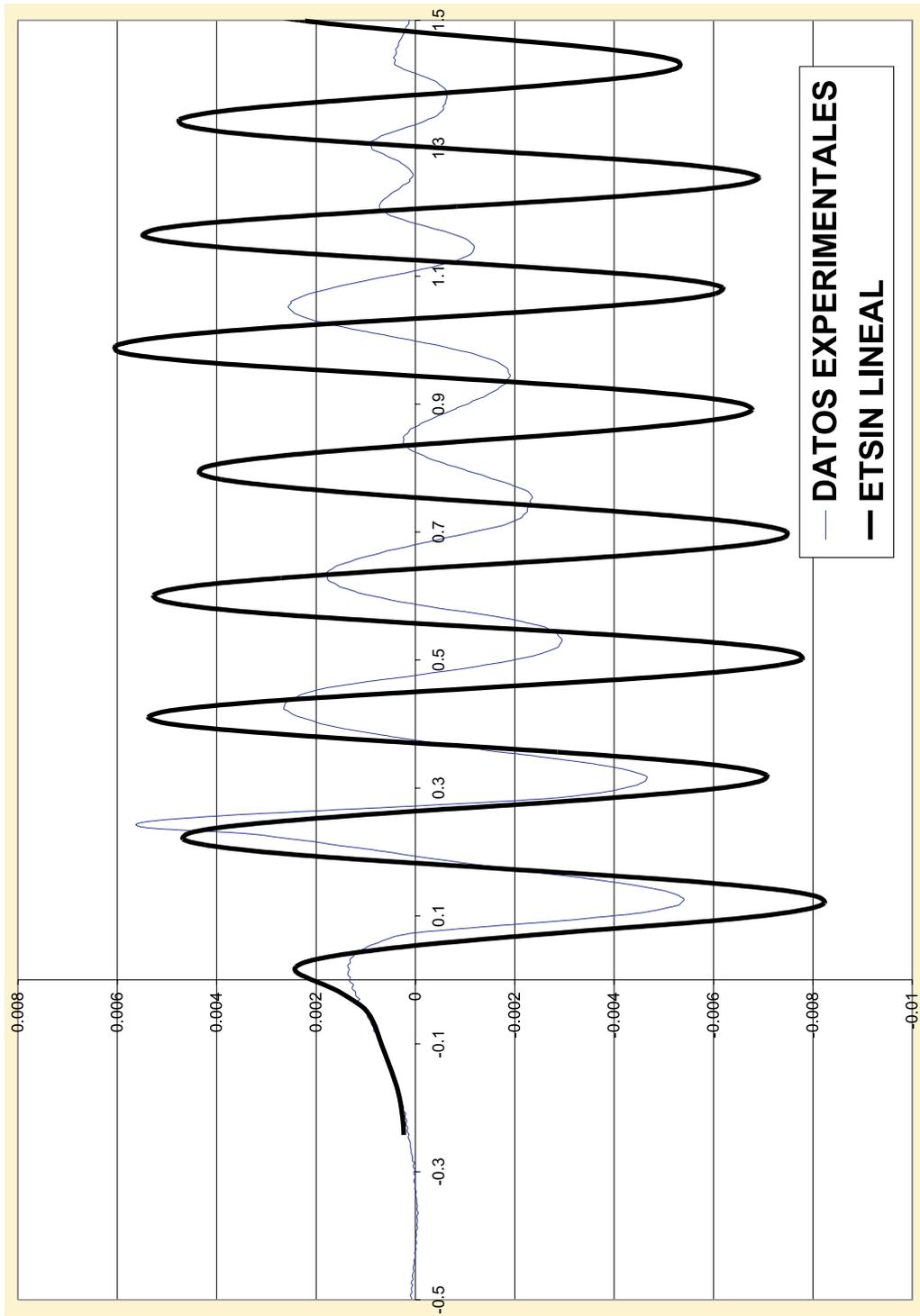


Figura 6.22: Perfil $y = 1.5508B$ del buque de carga general $V = 12Kn$ en lastre.



156
 Figura 6.23: Perfil $y = 0.5665B$ del buque de carga general $V = 10.5Kn$ a plena carga.



157
 Figura 6.24: Perfil $y = 1.0587B$ del buque de carga general $V = 10.5Kn$ a plena carga.

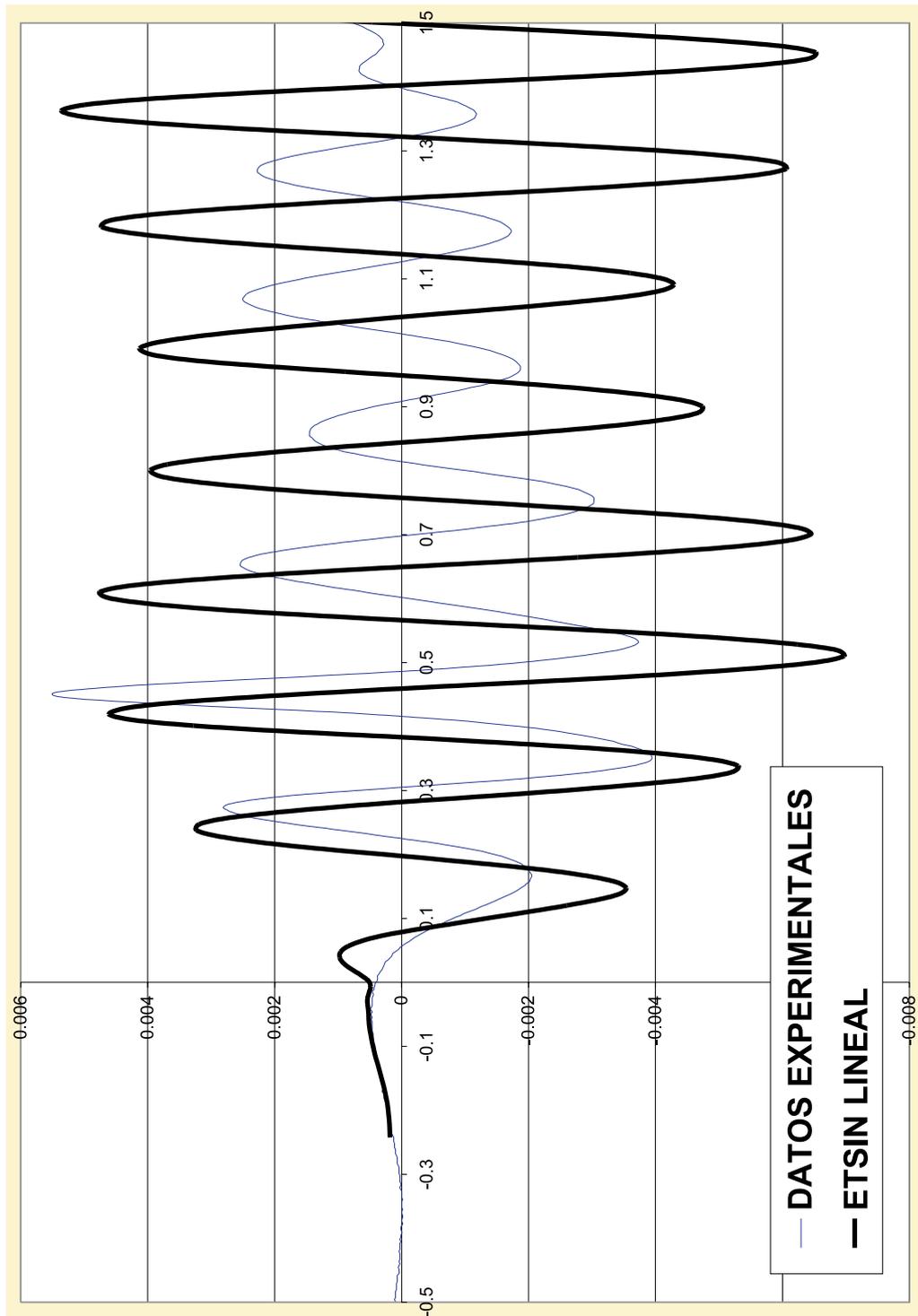
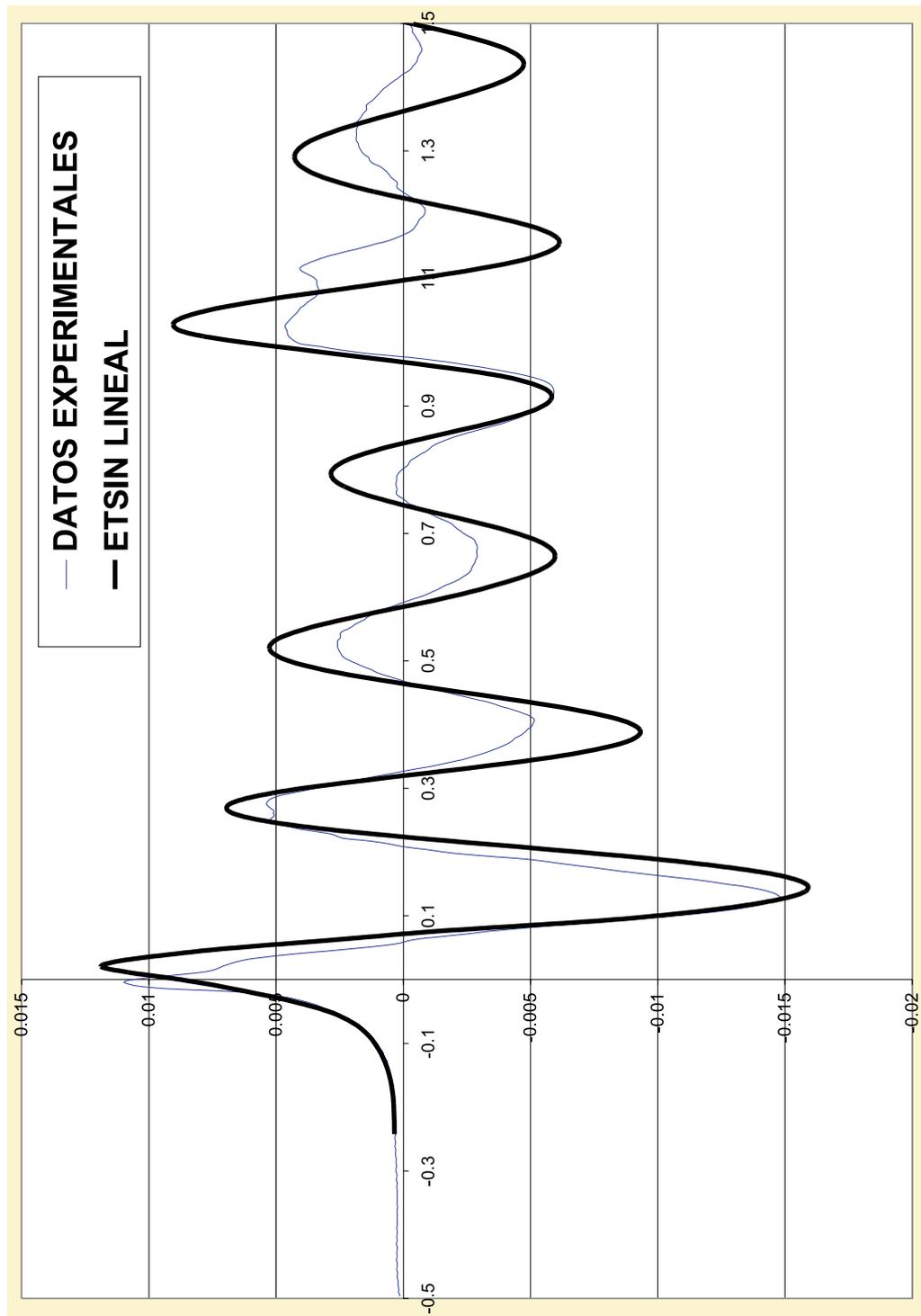
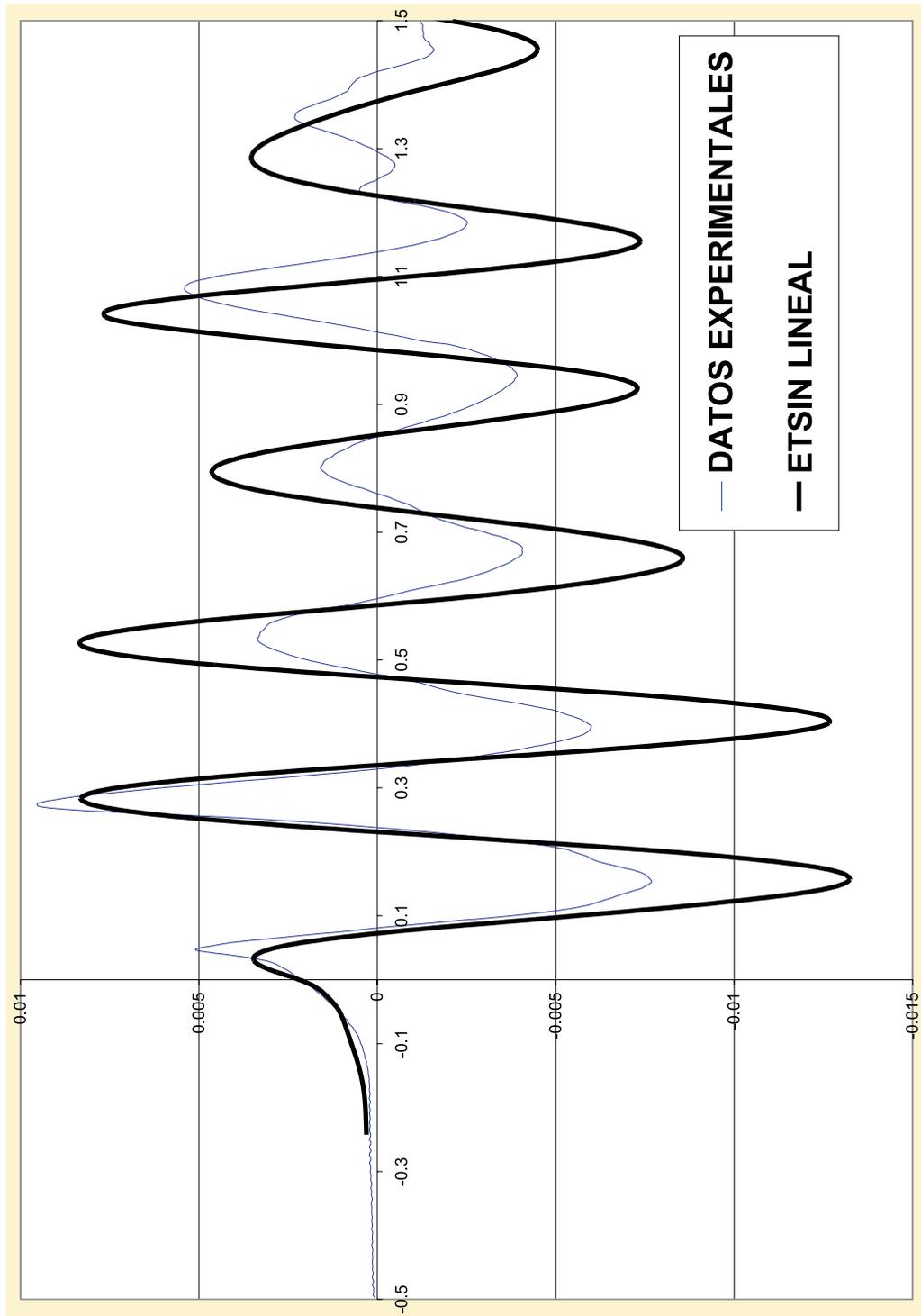


Figura 6.25: Perfil $y = 1.5508B$ del buque de carga general $V = 10.5Kn$ a plena carga.



159
 Figura 6.26: Perfil $y = 0.5665B$ del buque de carga general $V = 12Kn$ a plena carga.



160
 Figura 6.27: Perfil $y = 1.0587B$ del buque de carga general $V = 12Kn$ a plena carga.

6.4 Patrullera.

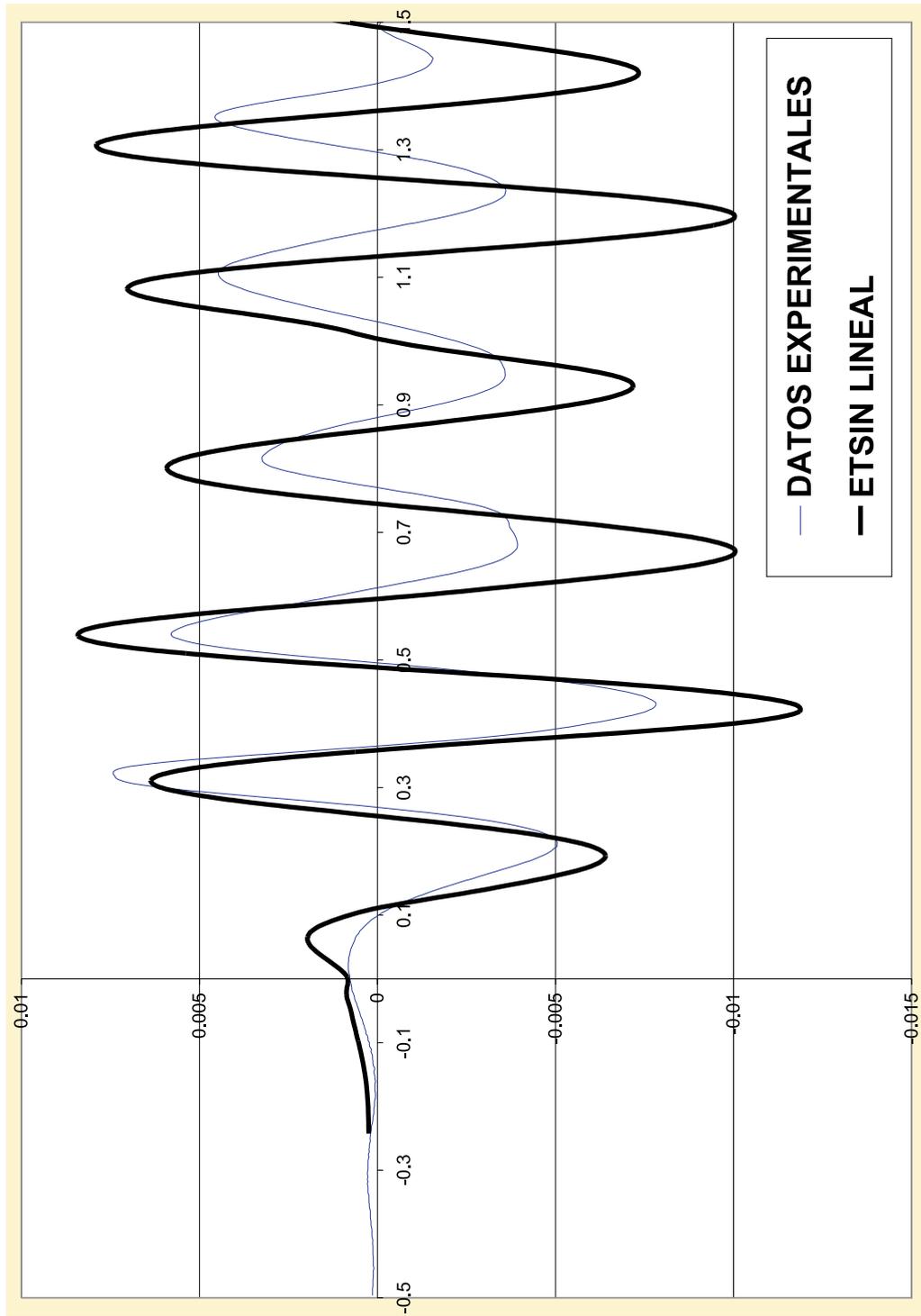
Este ejemplo es muy importante. La patrullera tiene popa de espejo y nos servirá para validar los cálculos que se refieren a la popa de espejo. Es un barco con un número de Froude bastante alto en su velocidad de proyecto. Sus características principales son las siguientes:

- $LPP = 63.00m$
- $B = 10.40m$
- $T = 3.22m$

Presentamos un alzado de la misma en la figura 6.29. También, como en los demás casos, presentamos un mallado del casco y de la superficie en las figuras 6.30 y 6.31. Es importante destacar que la panelización realizada en la superficie libre es típica de los buques con popa de espejo seca, como ya explicamos en 3.4.1.

Los primeros gráficos que presentamos en este caso corresponden al estudio del flujo en el borde de salida del espejo. Los resultados son francamente buenos, tanto en la condición dinámica como en la cinemática, sobre todo para el número de Froude más alto, como se puede observar en las figuras 6.32, 6.33, 6.34, 6.35, 6.36 y 6.37 .

Presentamos también cortes longitudinales correspondientes a tres números de Froude 0.228, 0.310 y 0.393. De cada uno de ellos presentamos el perfil de ola en la carena, y dos cortes, los correspondientes a 0.5665B y 1.5508B. Este es un buque más difícil. Los resultados para la velocidad más alta son buenos, tanto en amplitudes como en fases. Para la velocidad más baja aparecen problemas de resolución, y da la sensación de que también se dan ciertas inestabilidades en las medidas experimentales. Las figuras correspondientes son 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.43, 6.44, 6.45 y 6.46 .



162
 Figura 6.28: Perfil $y = 1.5508B$ del buque de carga general $V = 12Kn$ a plena carga.



Figura 6.29: Visualización de la patrullera.

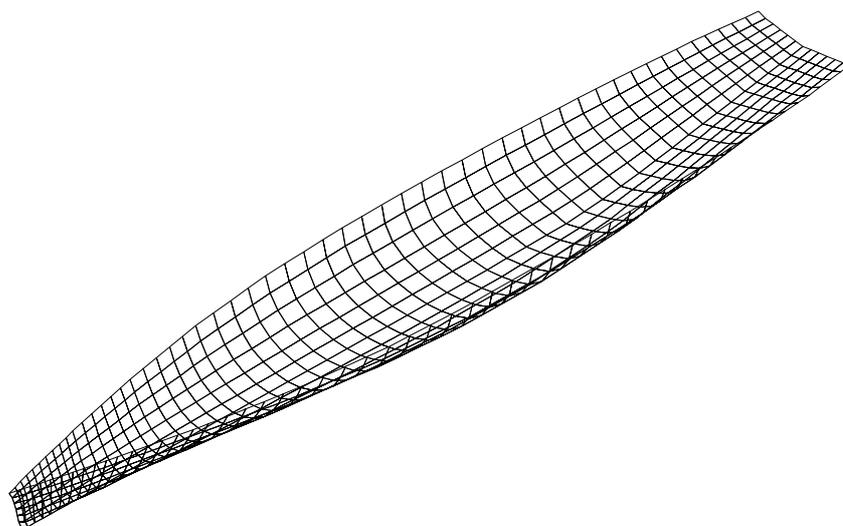


Figura 6.30: Mallado de la carena de la patrullera.

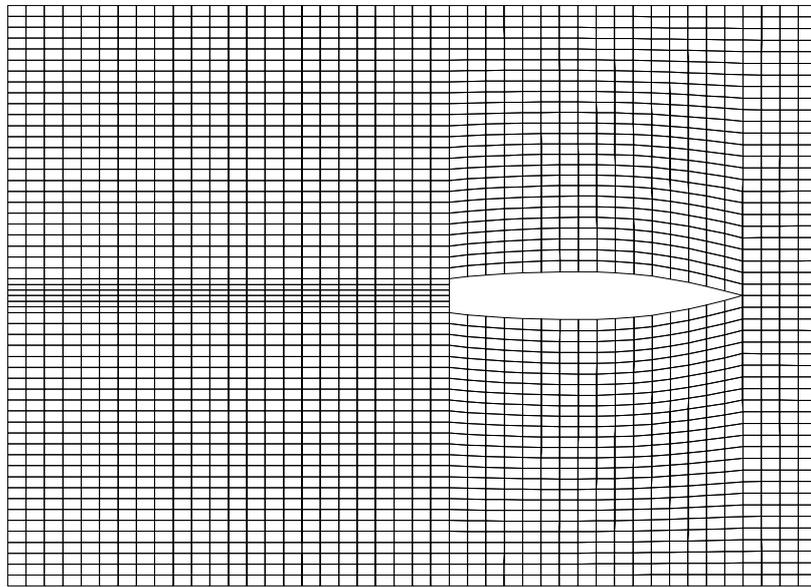


Figura 6.31: Mallado de la superficie libre de la patrullera.

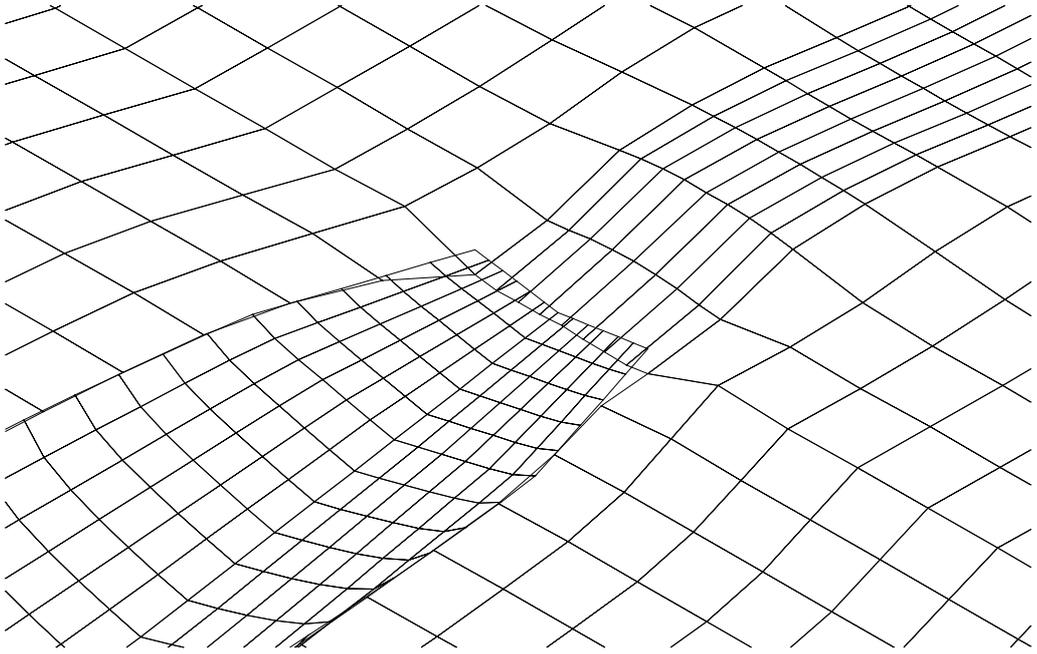


Figura 6.32: Zona de enganche, patrullera, $Fn = 0.228$.



Figura 6.33: Perfil del espejo, patrullera, $Fn = 0.228$.

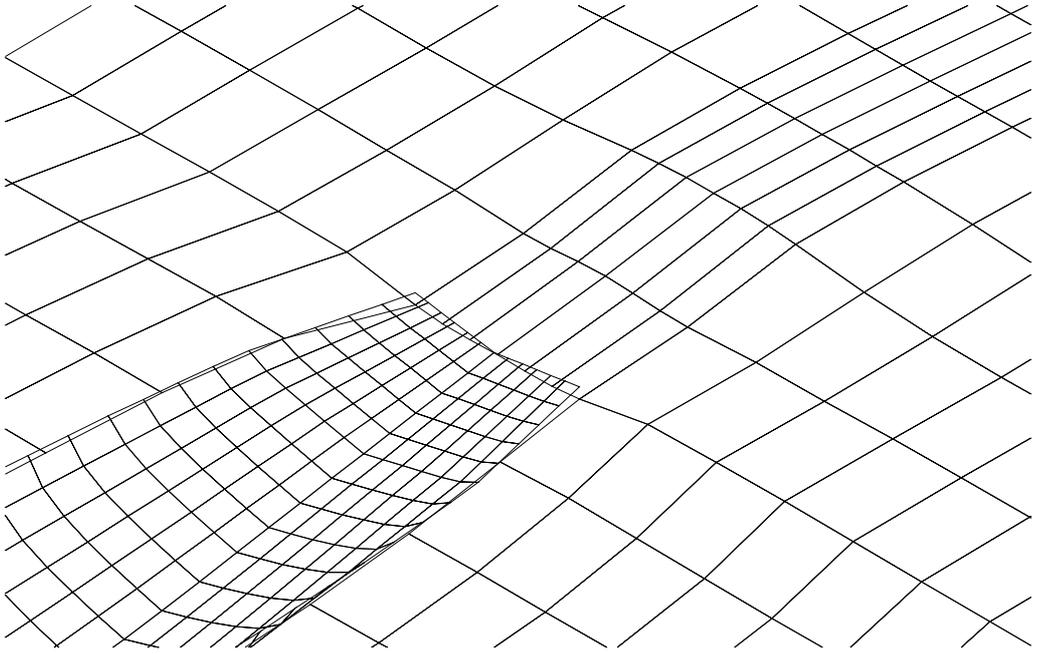


Figura 6.34: Zona de enganche, patrullera, $Fn = 0.310$.



Figura 6.35: Perfil del espejo, patrullera, $Fn = 0.310$.

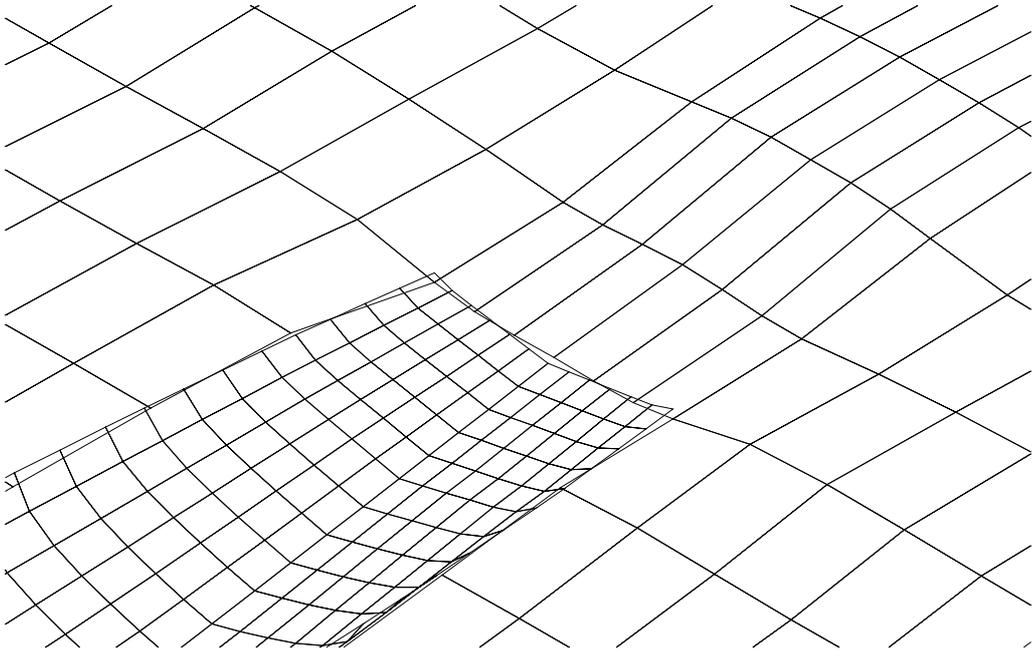


Figura 6.36: Zona de enganche, patrullera, $Fn = 0.393$.



Figura 6.37: Perfil del espejo, patrullera, $Fn = 0.393$.

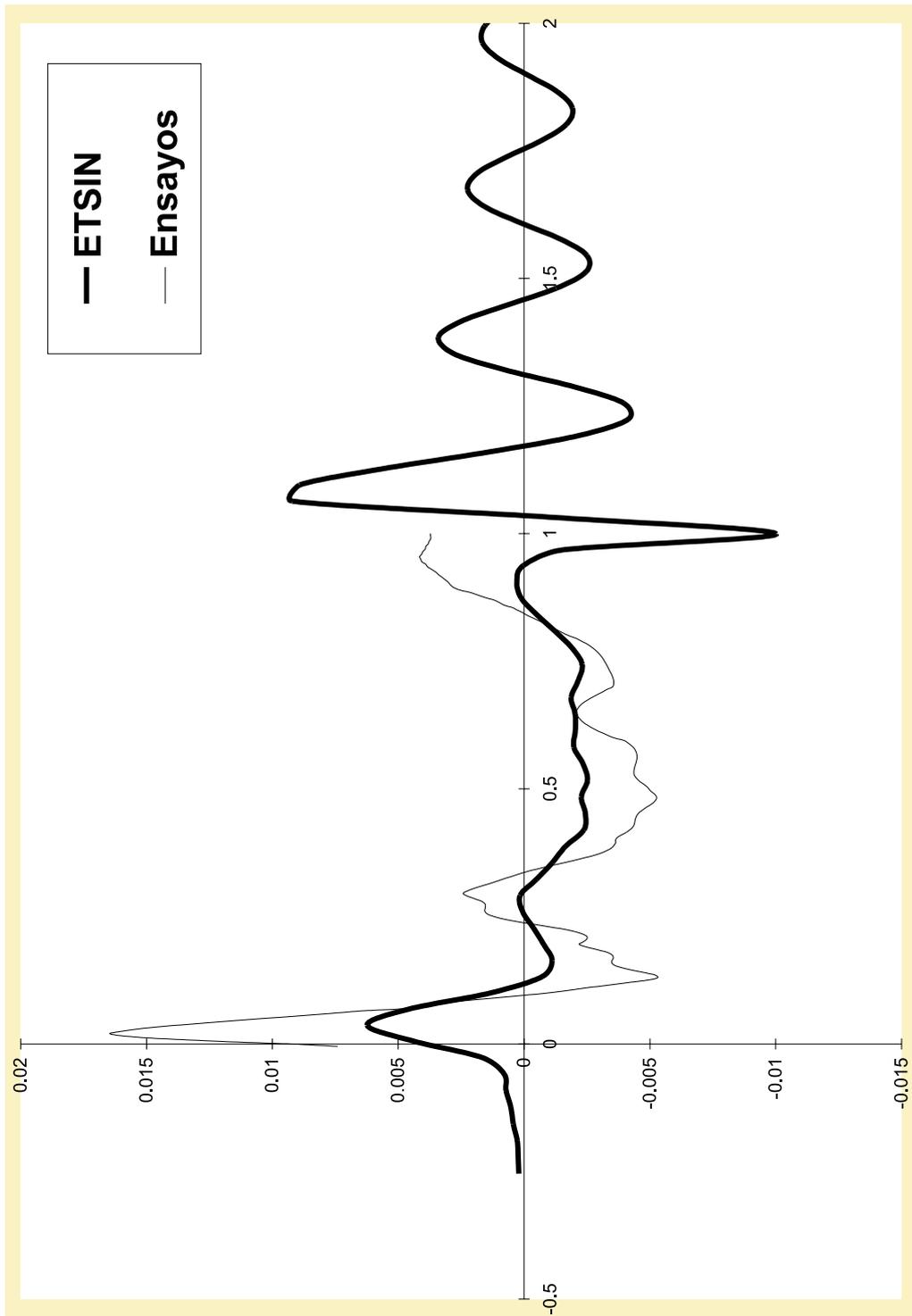


Figura 6.38: Perfil en el casco de la patrullera a $Fn = 0.228$.

6.5 Fragata DTMB 5415.

El modelo 5415 se concibió como diseño preliminar para una fragata para la marina americana en 1980. La geometría incluye tanto un domo de sónar como popa de espejo. La propulsión se consigue con dos hélices ubicadas en ejes soportados por arbotantes.

Hay una base de datos experimental importante debido al trabajo internacional en EFD/CFD y de análisis de errores en toma de datos experimentales realizado por el Iowa Institute of Hydraulic Research (IIHR), el Istituto Nazionale per Studi ed Esperienze di Architettura Navale (INSEAN), y el Naval Surface Warfare Center, Carderock Division (NSWC, antiguo canal David Taylor DTMB), ver referencias [9] [28] [1] [37]. Los datos para validación incluyen valores de capa límite y estela, cortes longitudinales del tren de olas, superficie del tren de olas en proa y popa y datos sobre wave breaking. Sólo existen datos a escala del modelo, aunque en el estudio que estamos realizando nosotros eso no es un problema, pues no hay efecto de escala, al no influir la viscosidad.

Las formas de este buque se presentan en las figuras 6.47 y 6.48. Son formas muy complicadas dada la existencia de un bulbo muy difícil de modelar y de efectos muy importantes en el flujo. Además es un buque con popa de espejo. Los resultados no son muy buenos y merecen un estudio más detallado.

También ha servido como test de validación de los cálculos de salida de flujo en popas con espejo. Como ya hemos explicado, estos cálculos requieren un mallado especial en la superficie libre que reflejamos en la figura 6.50. Los resultados referidos a la popa de espejo son buenos en la condición cinemática, de tangencia, y no lo son tanto en la condición dinámica, a medida que subimos la velocidad. Esto se refleja en los cortes longitudinales correspondientes al perfil del casco y es un tema sobre el que hay que trabajar y para el que se esperan mejoras sustanciales con un método no lineal.

Presentamos diferentes cortes longitudinales del tren de olas, dando valores adimensionalizados con la eslora entre perpendiculares y tomando el origen en la perpendicular de proa, ver figuras 6.57, 6.58, 6.59, 6.60, 6.61, 6.62, 6.63, 6.64, 6.65. Se disponen de datos experimentales correspondientes a tres velocidades, y para cada una de ellas disponemos del corte correspondiente al perfil del casco y de los dos cortes estandar $0.5665B$ y $1.5508B$. Los resultados son similares a los obtenidos para la patrullera: relativamente malos

a baja velocidad y buenos en amplitudes y fases para la velocidad más alta. Convendría hacer ensayos más detallados de este caso, cambiando las características del mallado, aunque dados los efectos del trimado, parece probable que las cosas mejoren con el uso de un método no lineal.

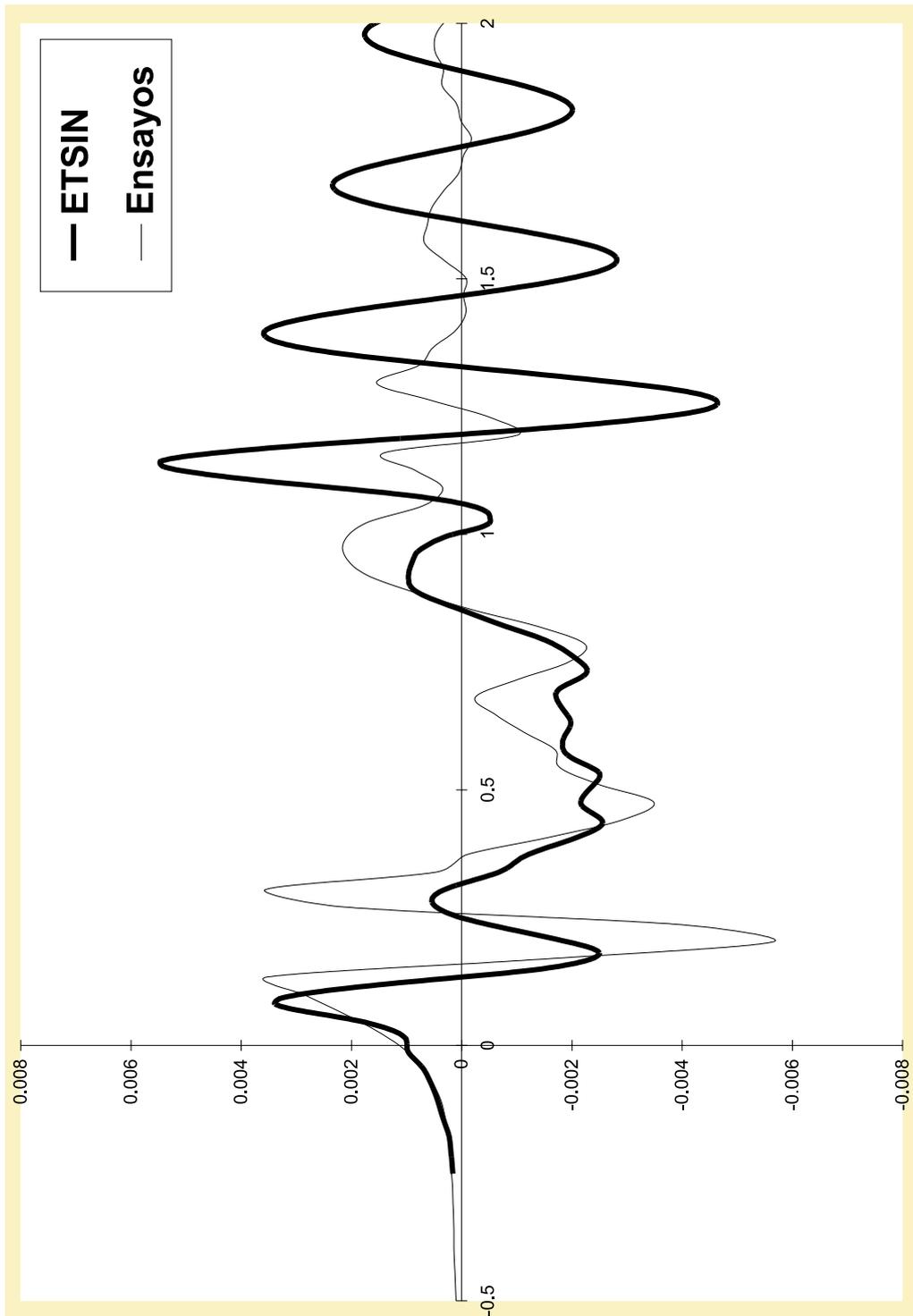


Figura 6.39: Perfil $y = 0.5665B$ de la patrullera a $Fn = 0.228$.

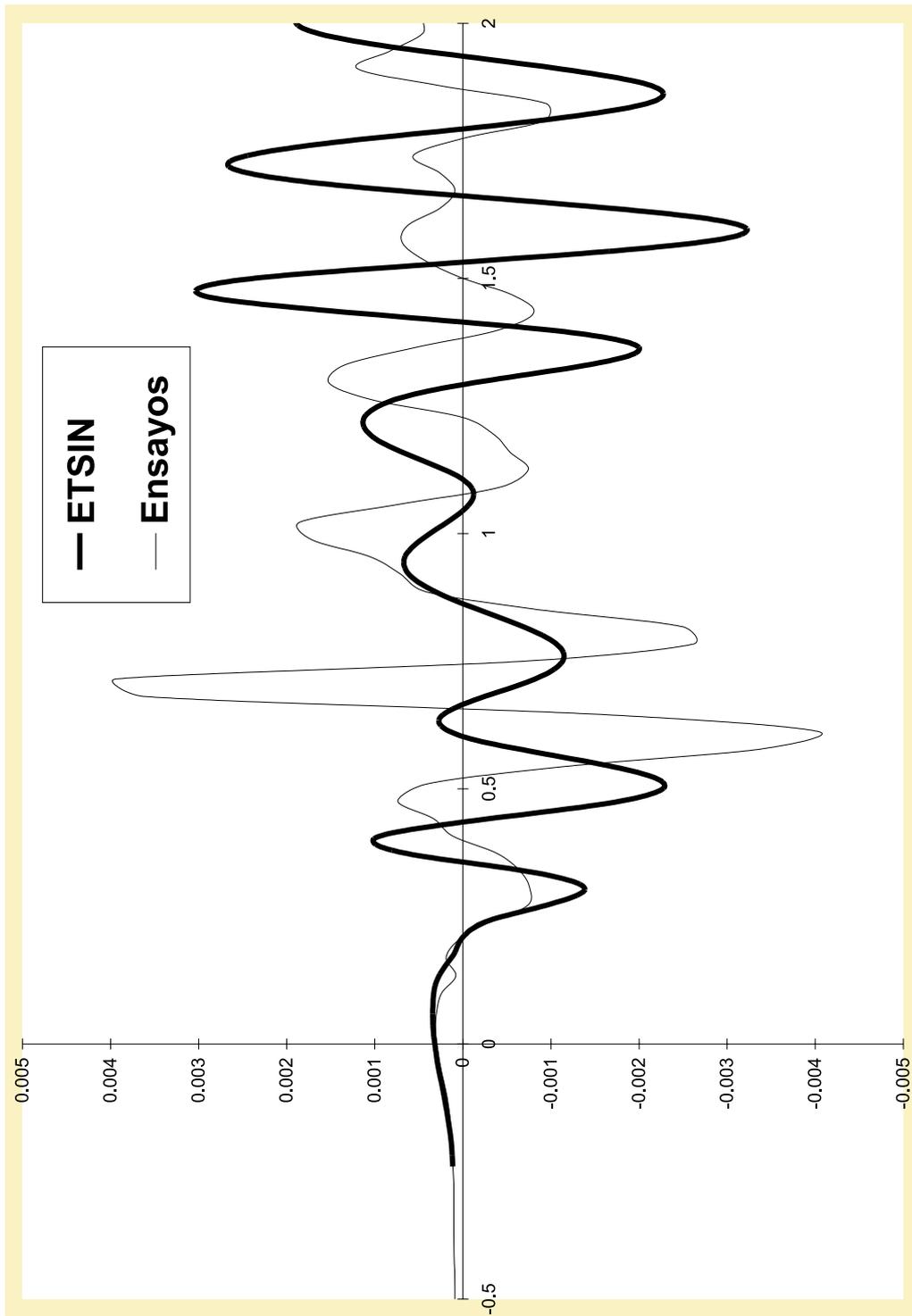


Figura 6.40: Perfil $y = 1.5508B$ de la patrullera a $Fn = 0.228$.

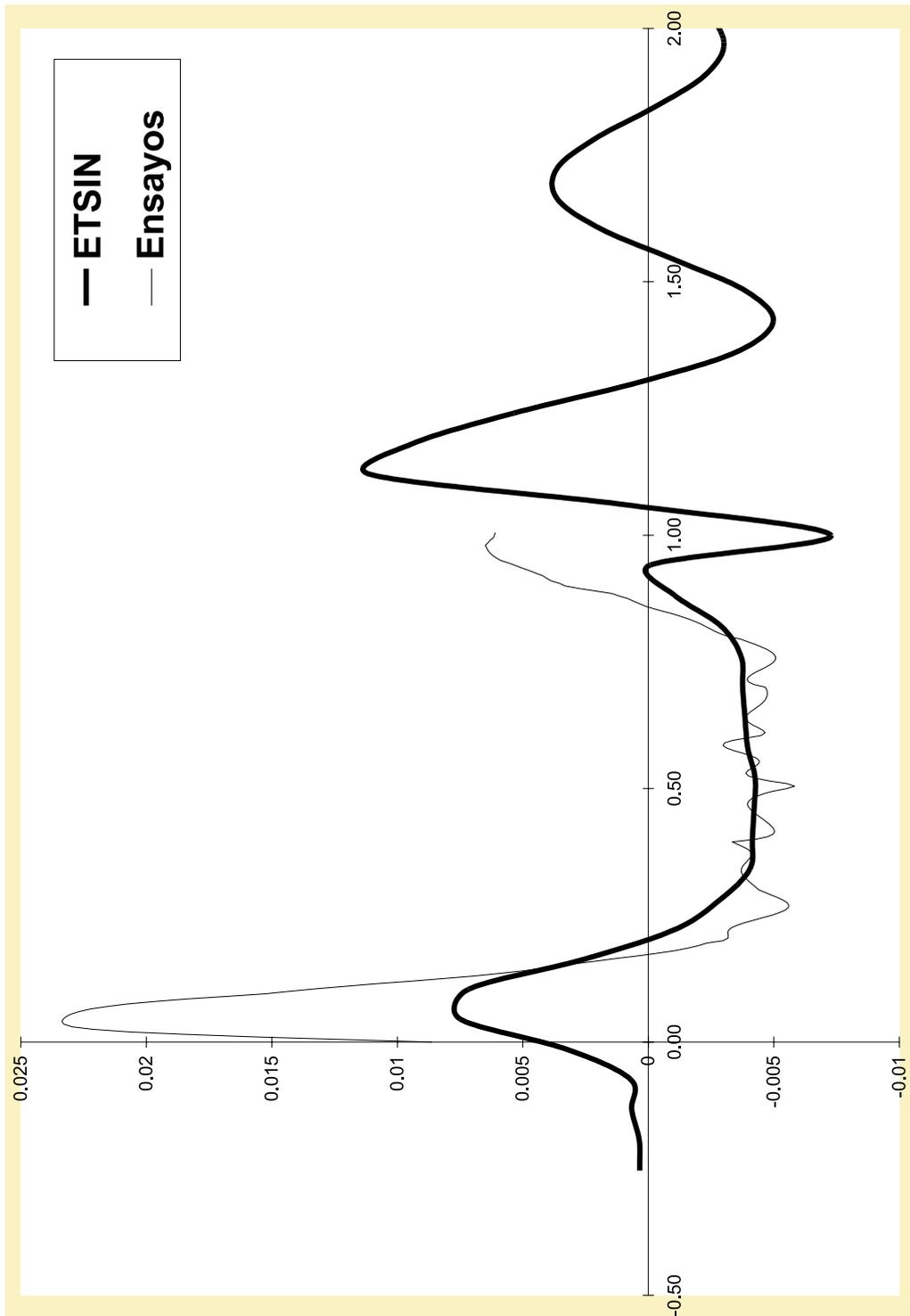


Figura 6.41: Perfil en el casco de la patrullera a $Fn = 0.310$.

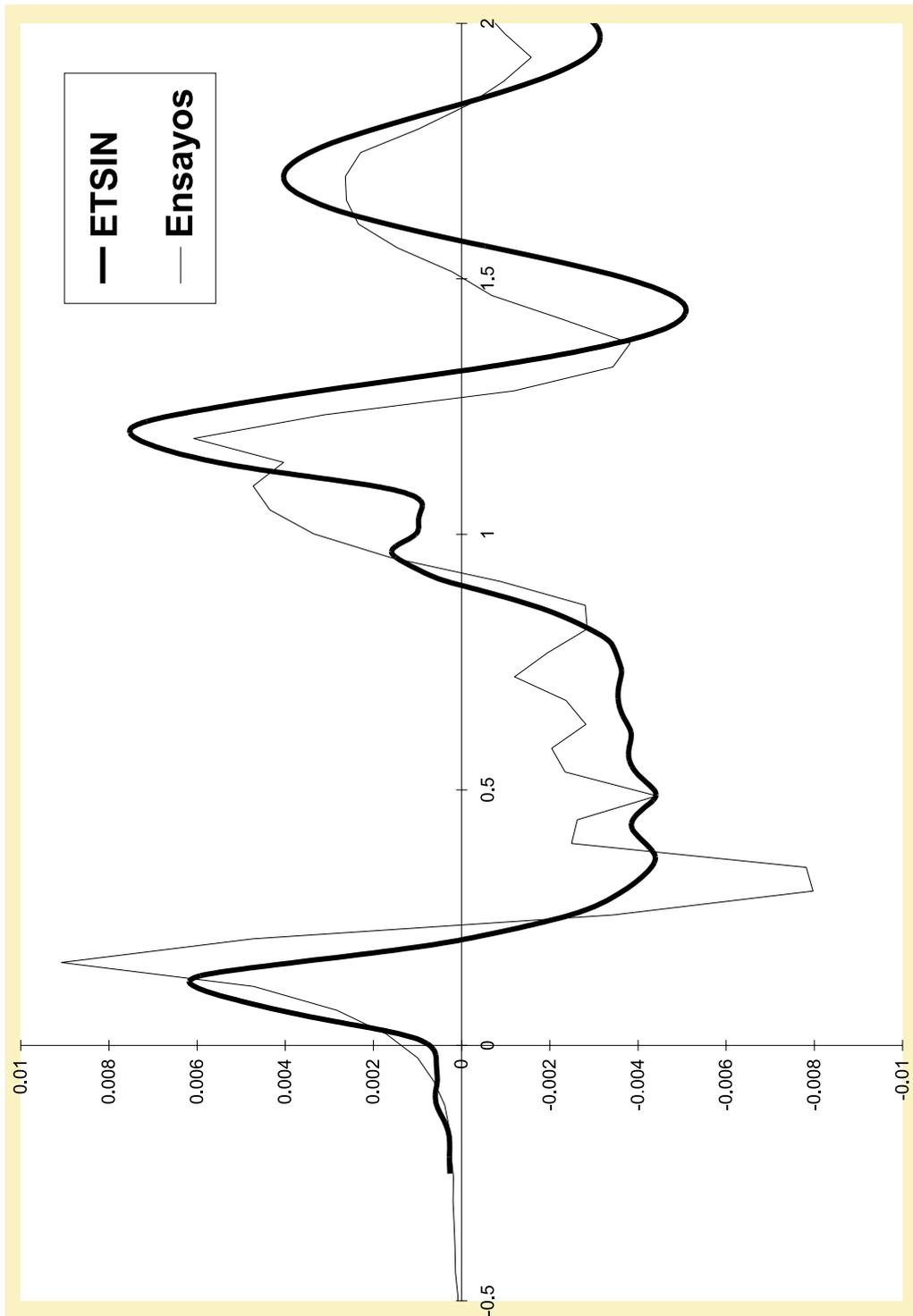


Figura 6.42: Perfil $y = 0.5665B$ de la patrullera a $Fn = 0.310$.

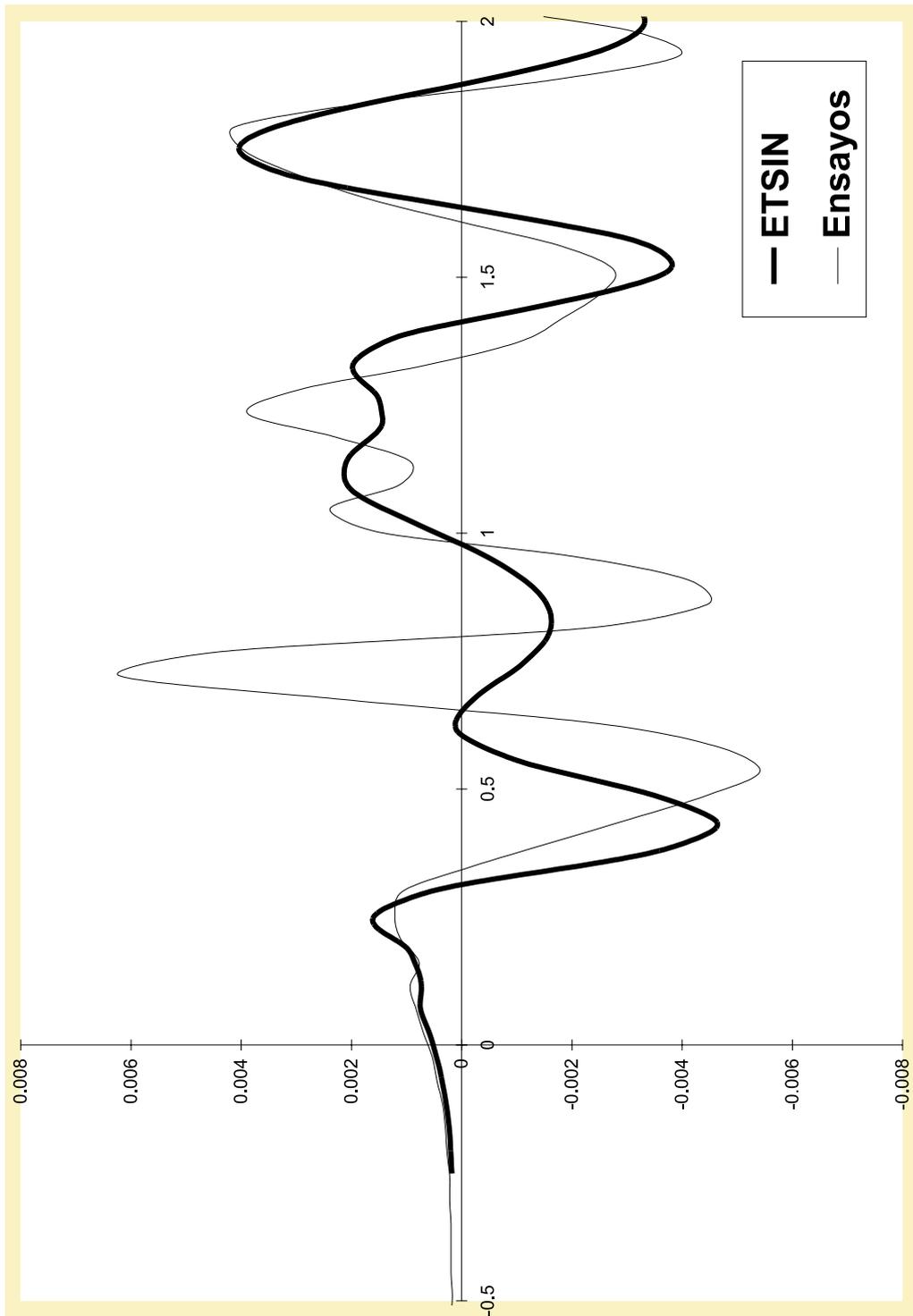


Figura 6.43: Perfil $y = 1.5508B$ de la patrullera a $Fn = 0.310$.

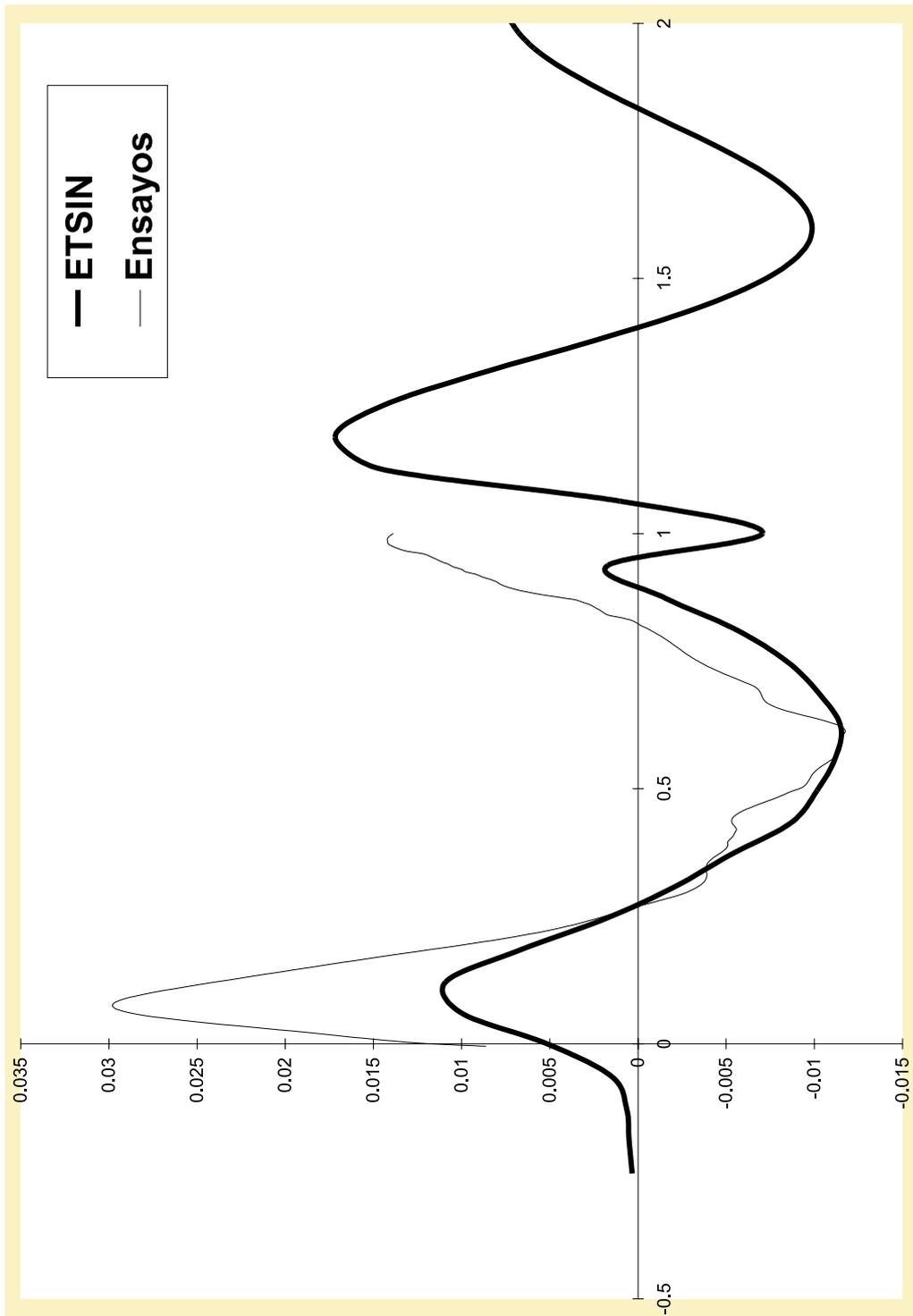


Figura 6.44: Perfil en el casco de la patrullera a $Fn = 0.393$.

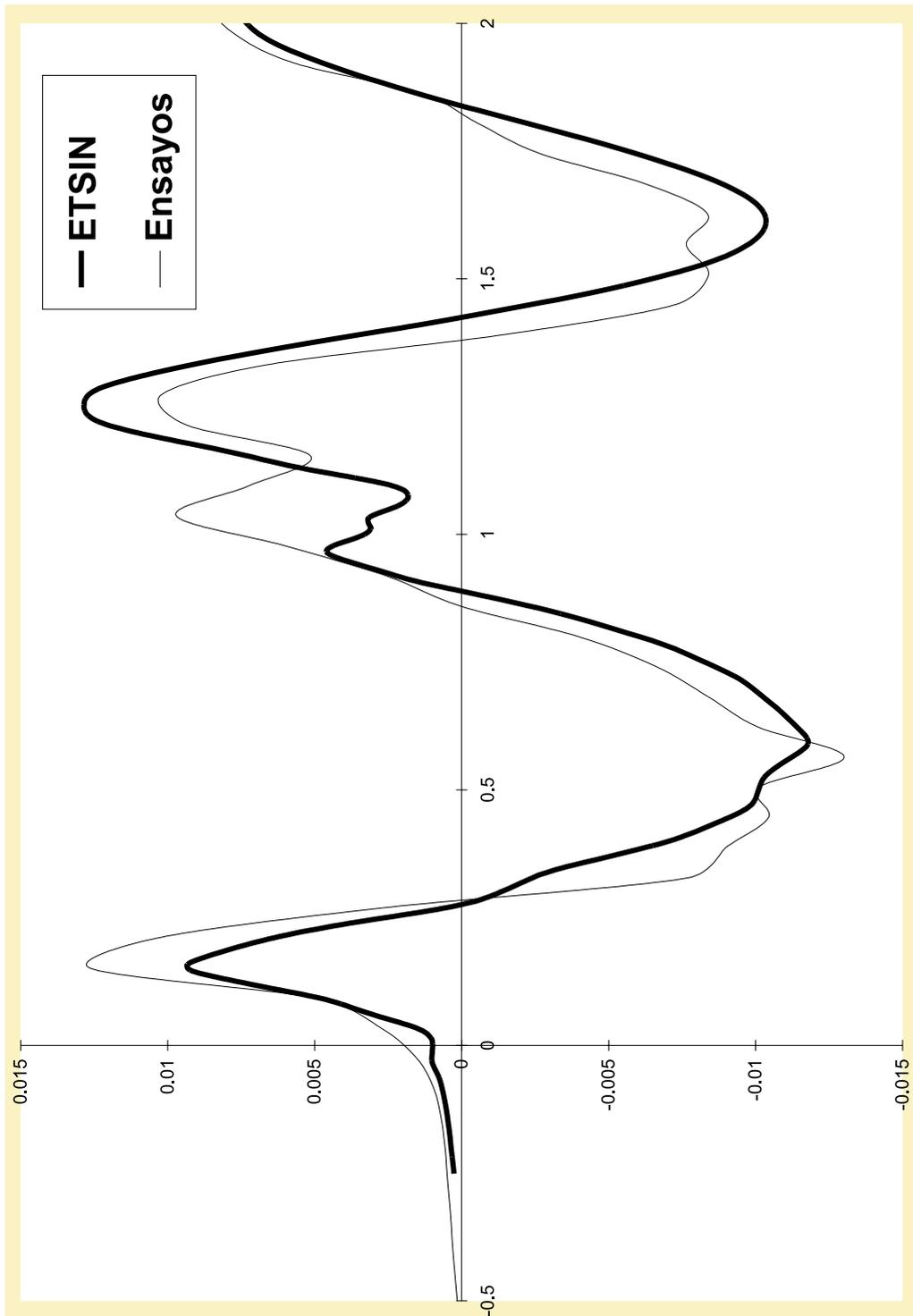


Figura 6.45: Perfil $y = 0.5665B$ de la patrullera a $Fn = 0.393$.

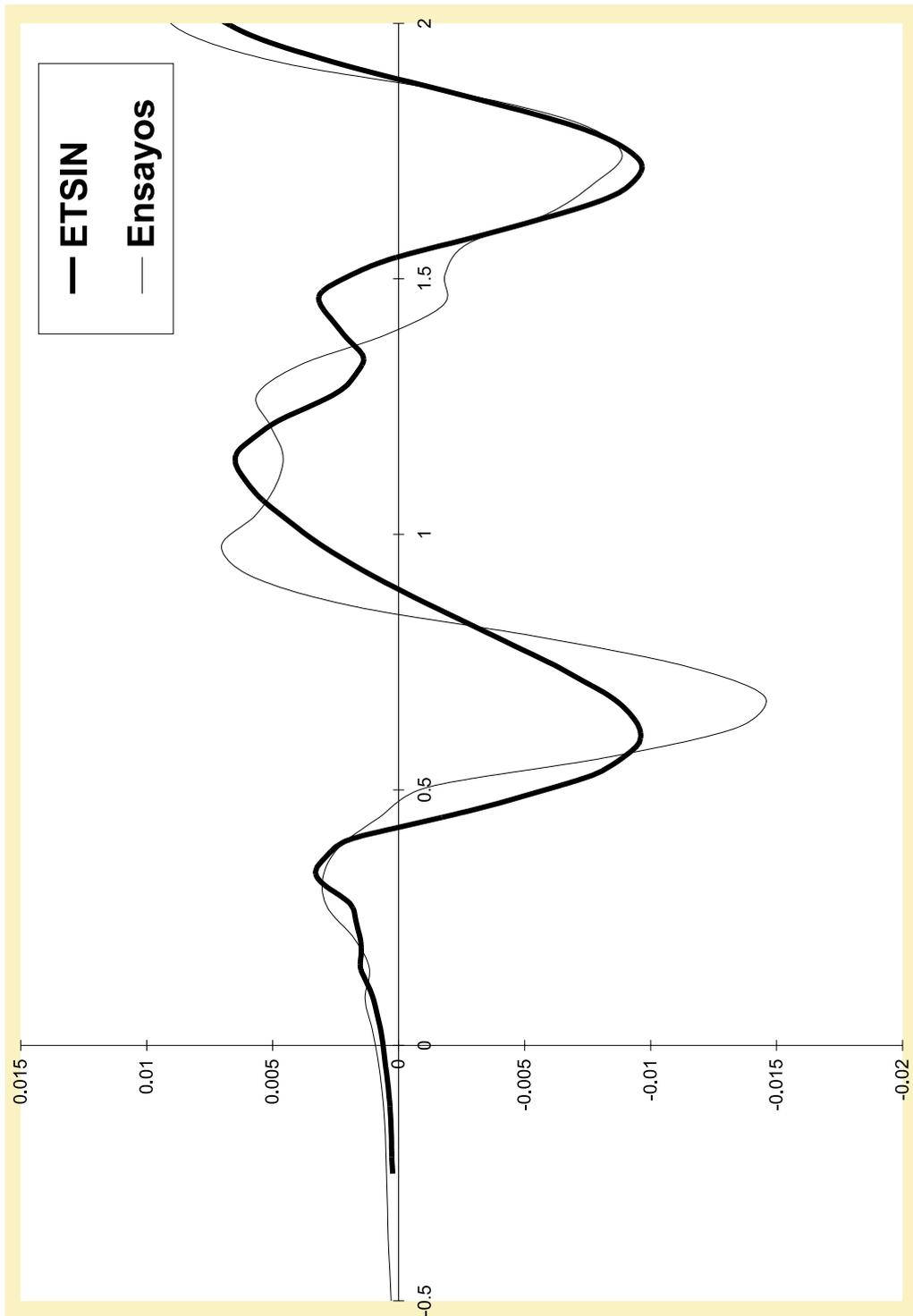


Figura 6.46: Perfil $y = 1.5508B$ de la patrullera a $Fn = 0.393$.



Figura 6.47: Visualización de la fragata 5415.

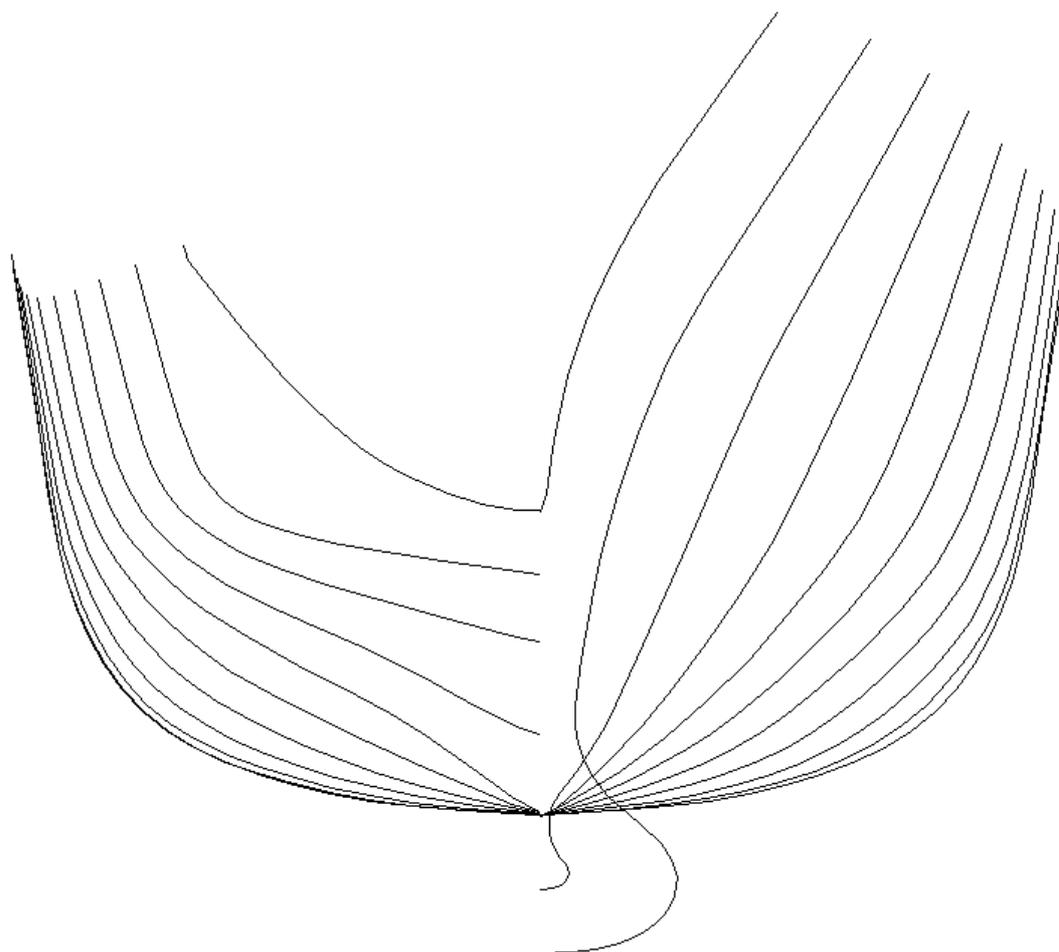


Figura 6.48: Caja de cuadernas de la fragata 5415.

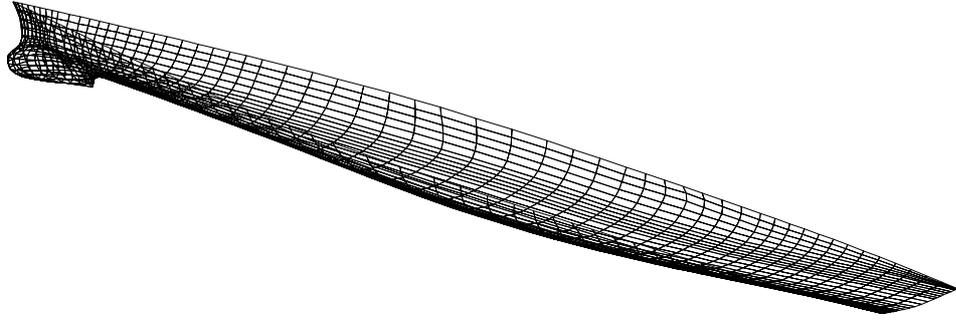


Figura 6.49: Mallado de la carena de la fragata 5415.

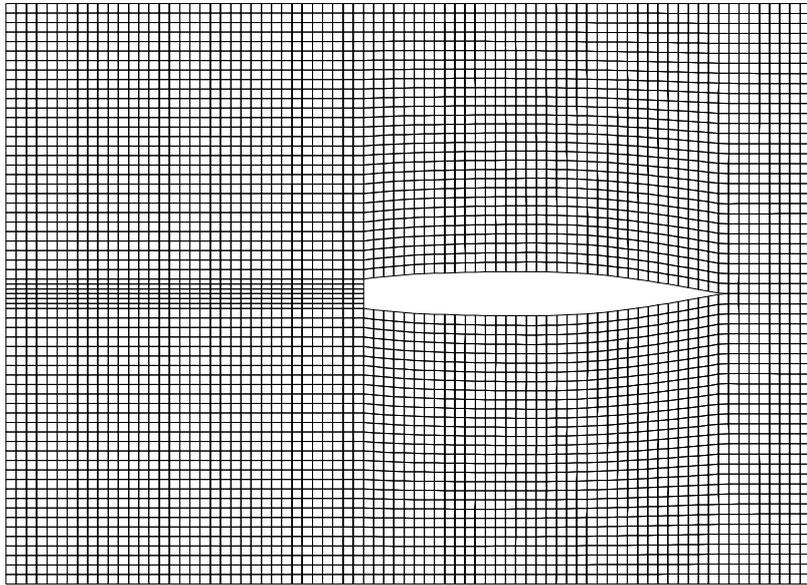


Figura 6.50: Mallado de la superficie libre de la fragata 5415.

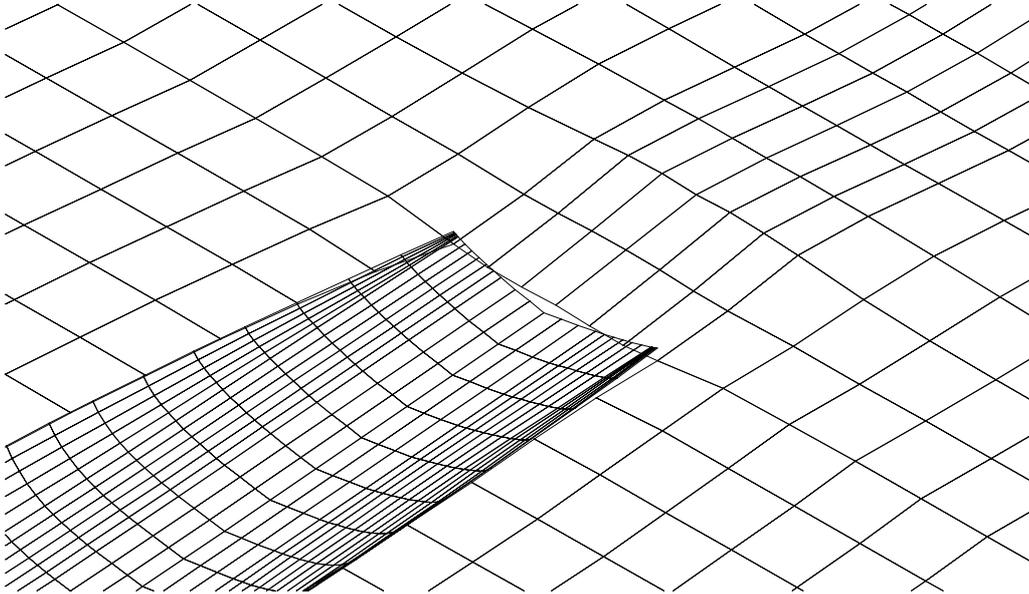


Figura 6.51: Zona de engancho, fragata 5415, $Fn = 0.178$.



Figura 6.52: Perfil del espejo, fragata 5415, $Fn = 0.178$.

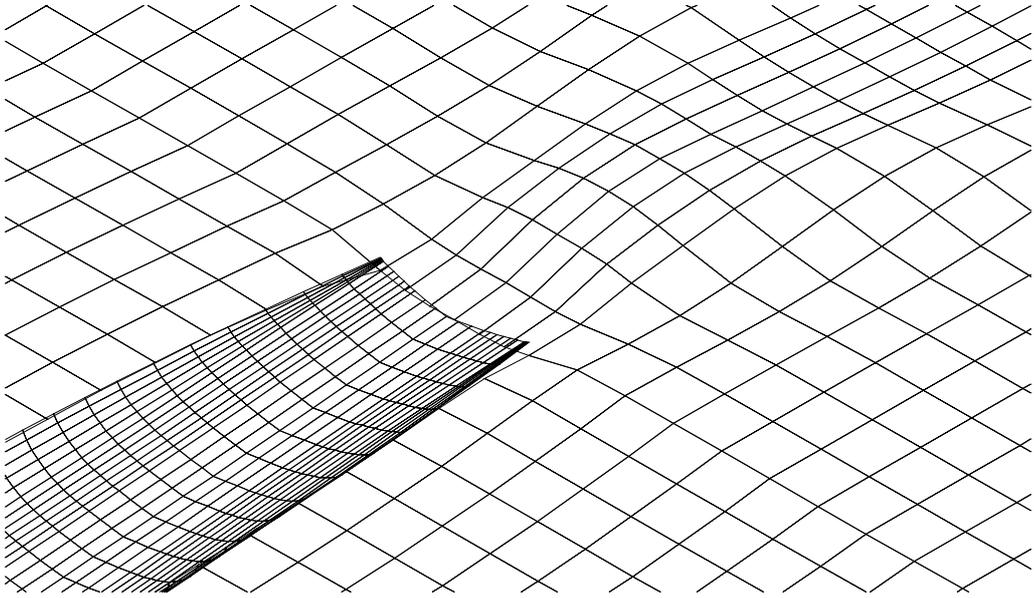


Figura 6.53: Zona de enganche, fragata 5415, $Fn = 0.297$.



Figura 6.54: Perfil del espejo, fragata 5415, $Fn = 0.297$.

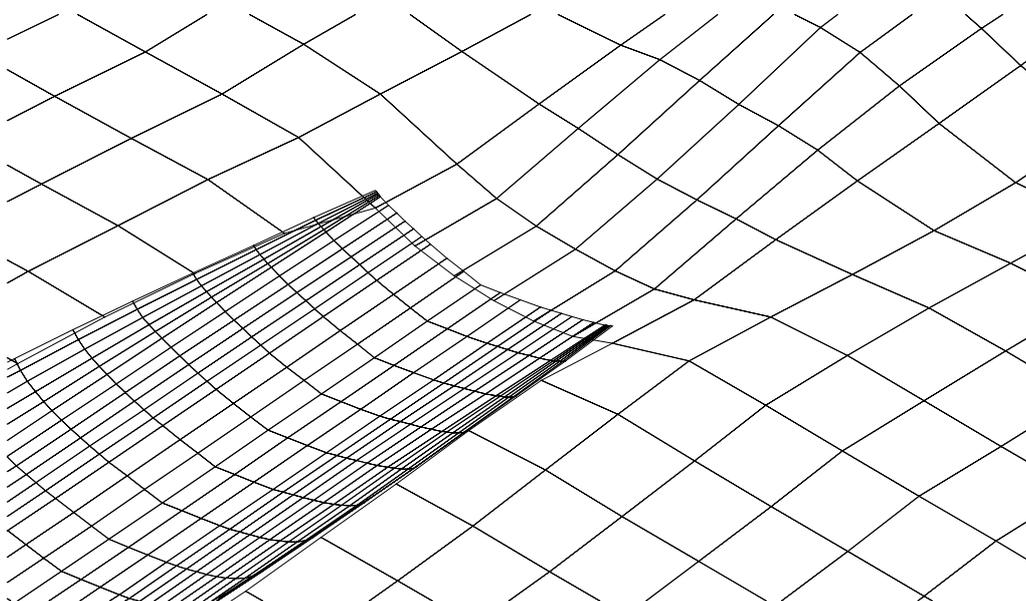


Figura 6.55: Zona de enganche, fragata 5415, $Fn = 0.416$.



Figura 6.56: Perfil del espejo, fragata 5415, $Fn = 0.416$.

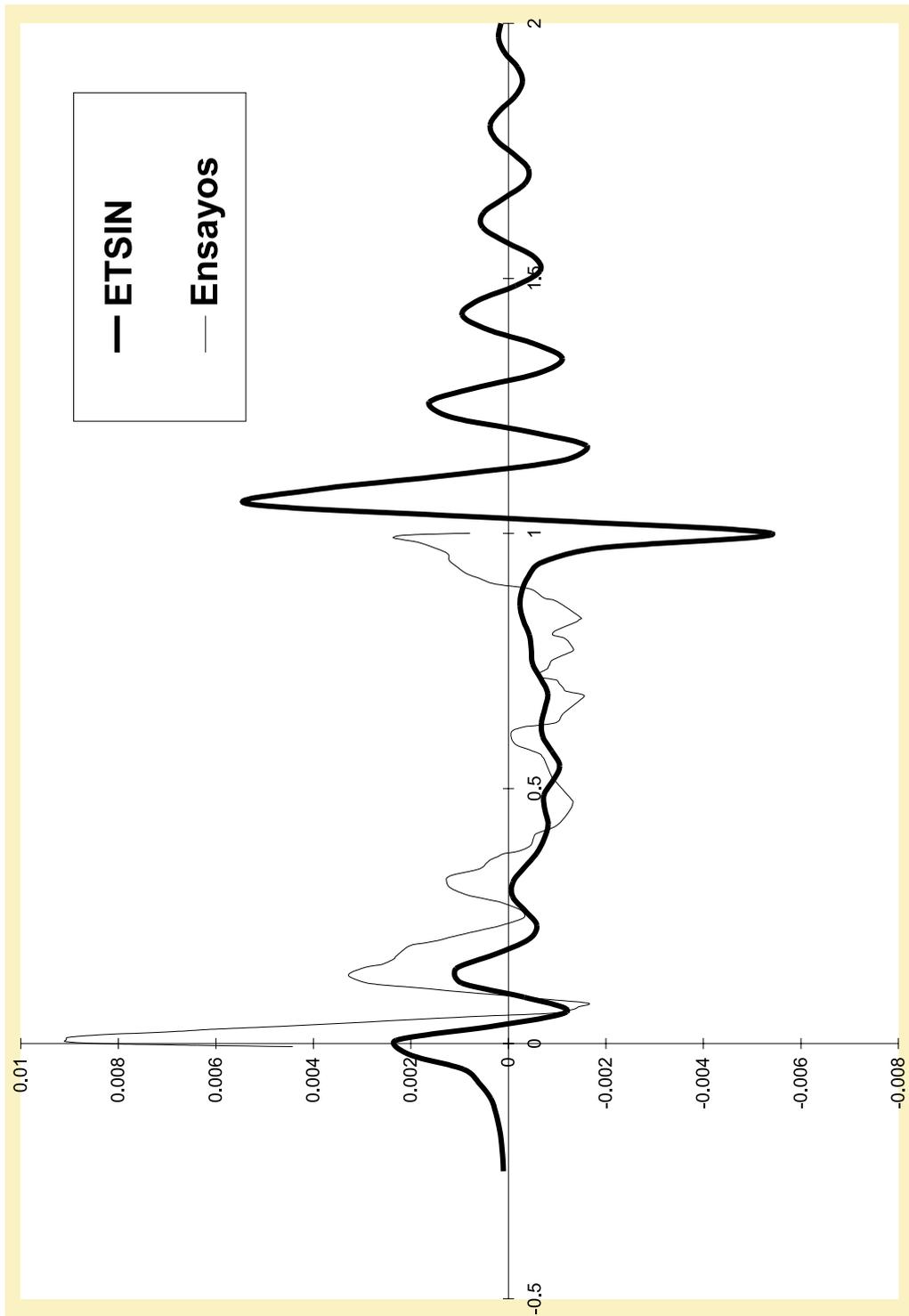


Figura 6.57: Perfil en el casco de la fragata 5415 a $Fn = 0.178$.

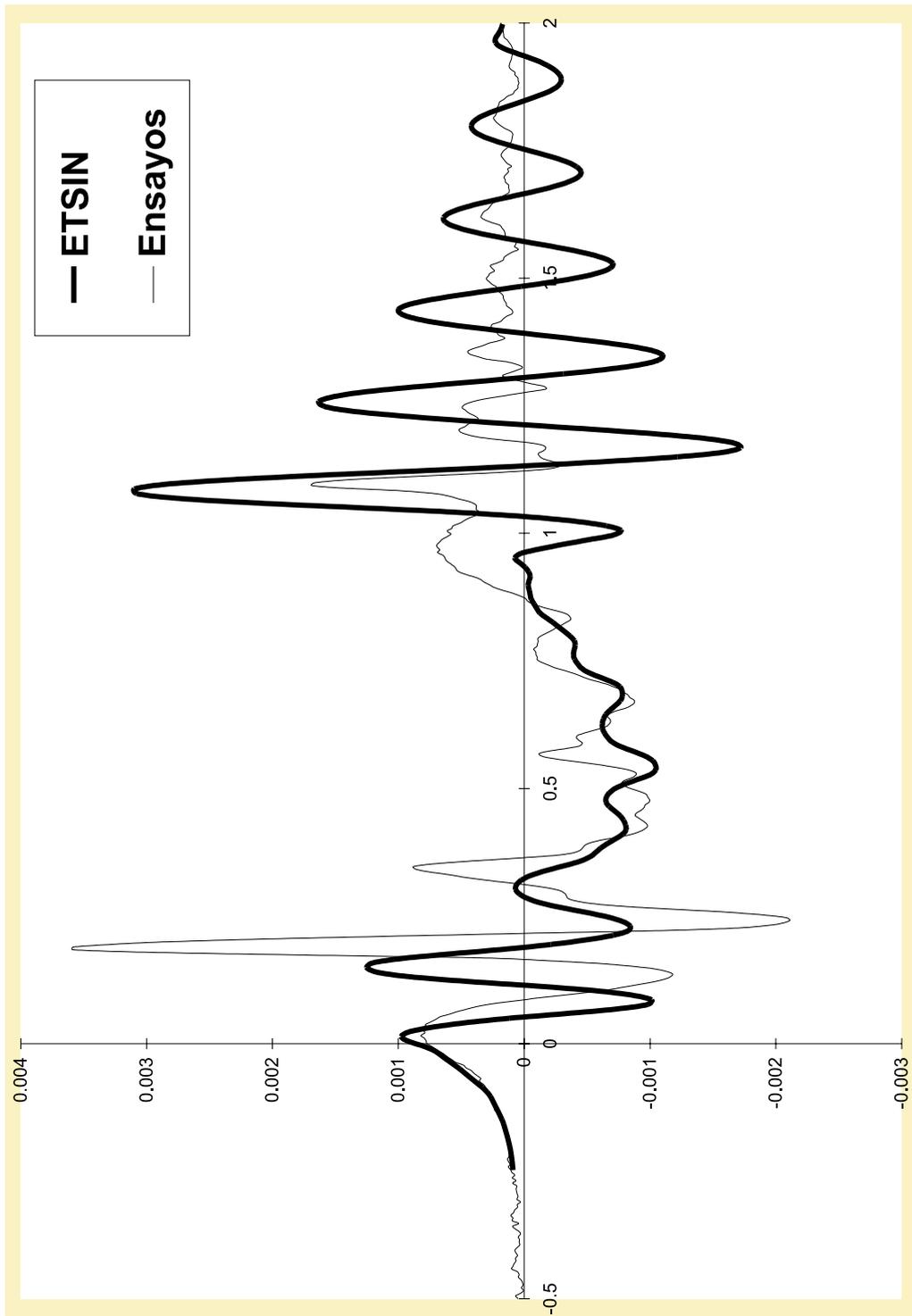


Figura 6.58: Perfil $y = 0.5665B$ de la fragata 5415 a $Fn = 0.178$.

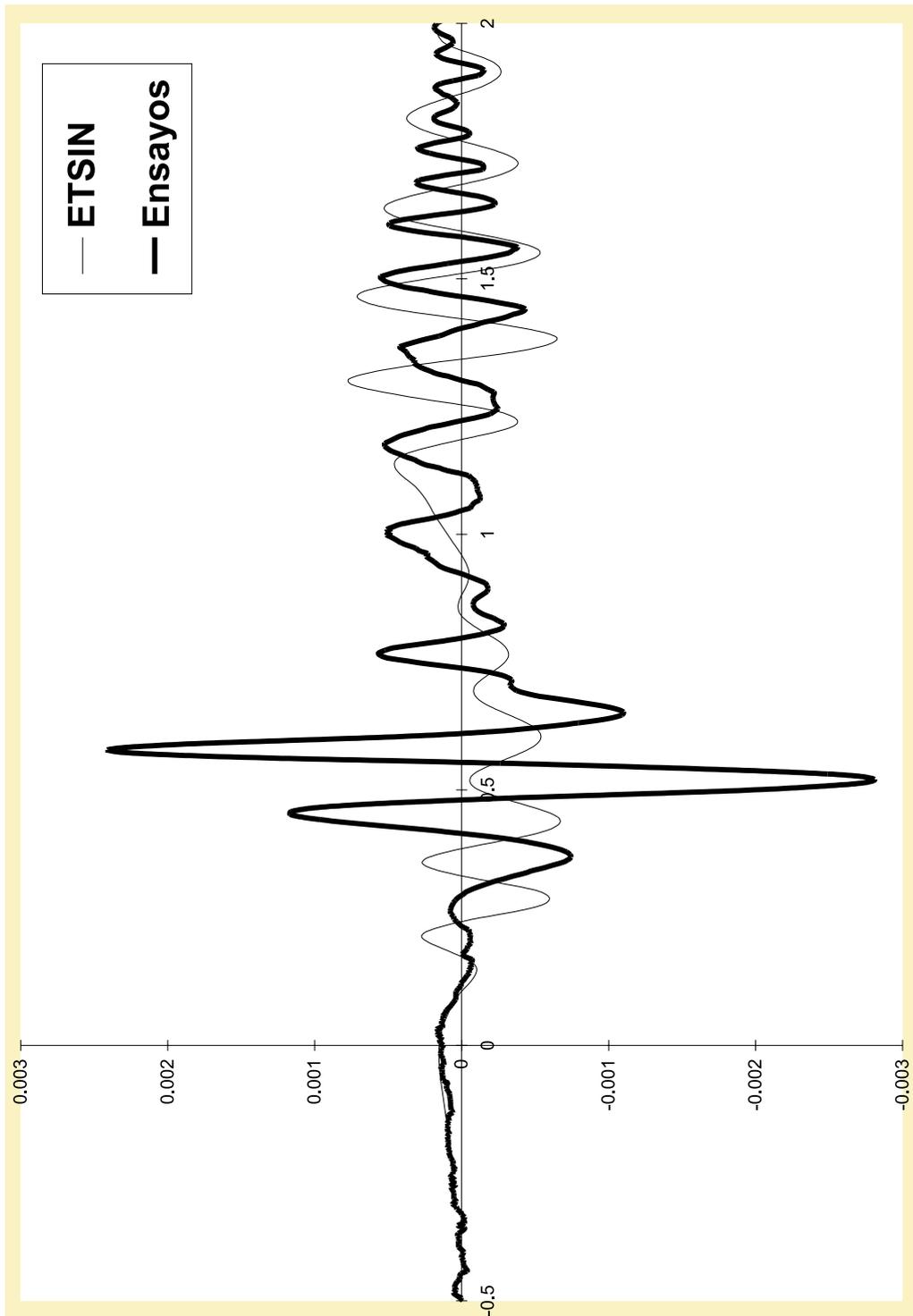


Figura 6.59: Perfil $y = 1.5508B$ de la fragata 5415 a $Fn = 0.178$.

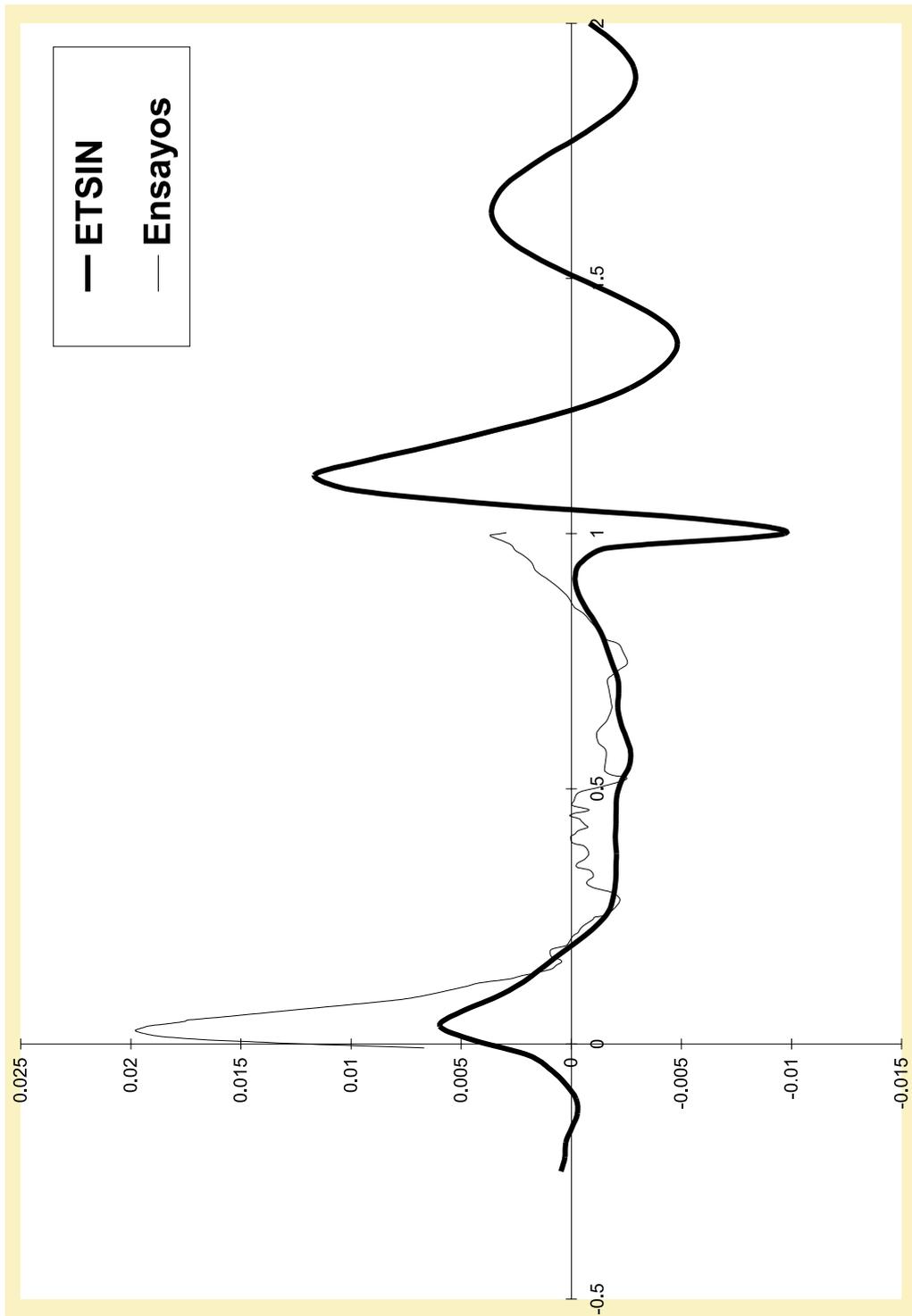


Figura 6.60: Perfil en el casco de la fragata 5415 a $Fn = 0.297$.

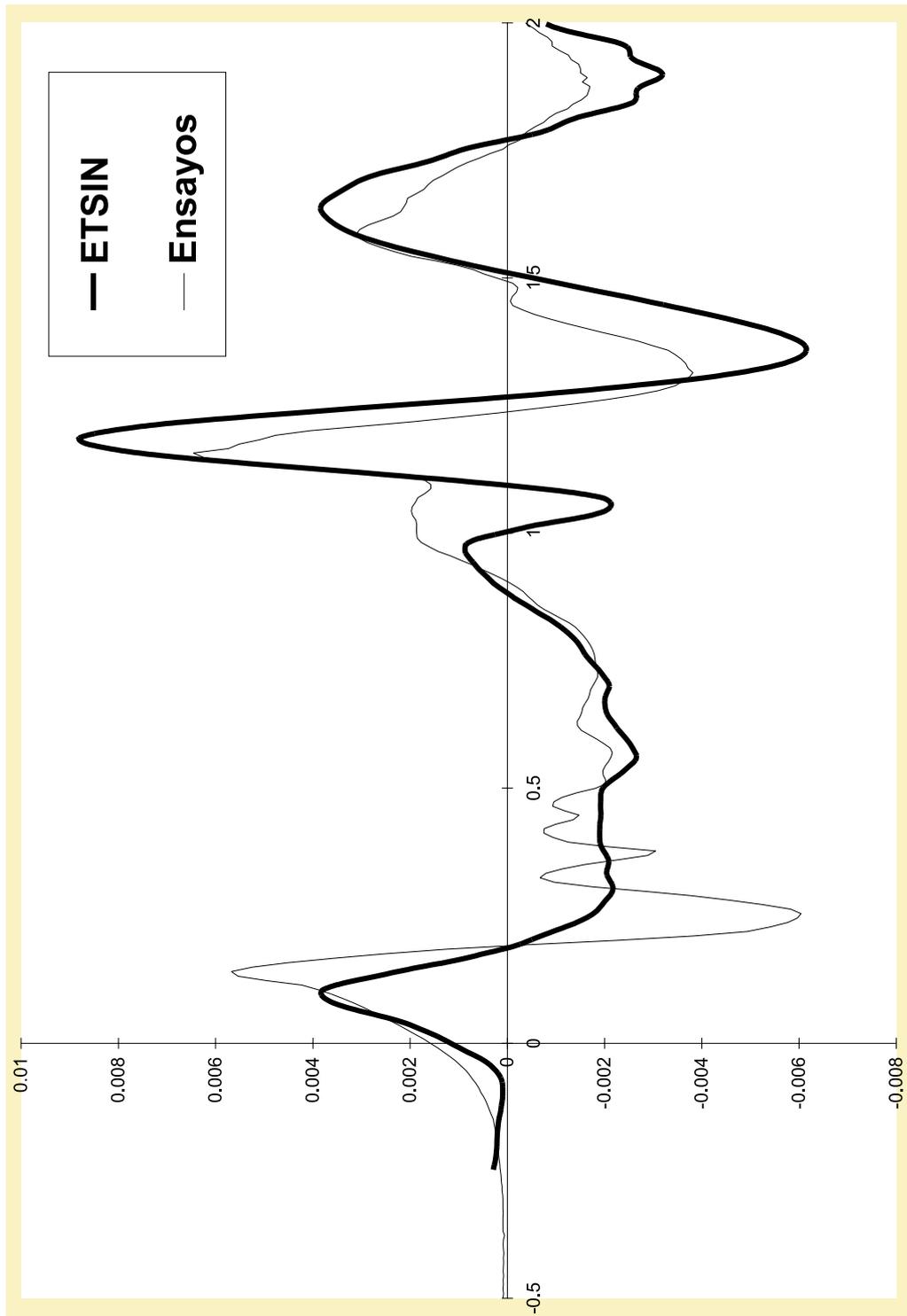


Figura 6.61: Perfil $y = 0.5665B$ de la fragata 5415 a $Fn = 0.297$.

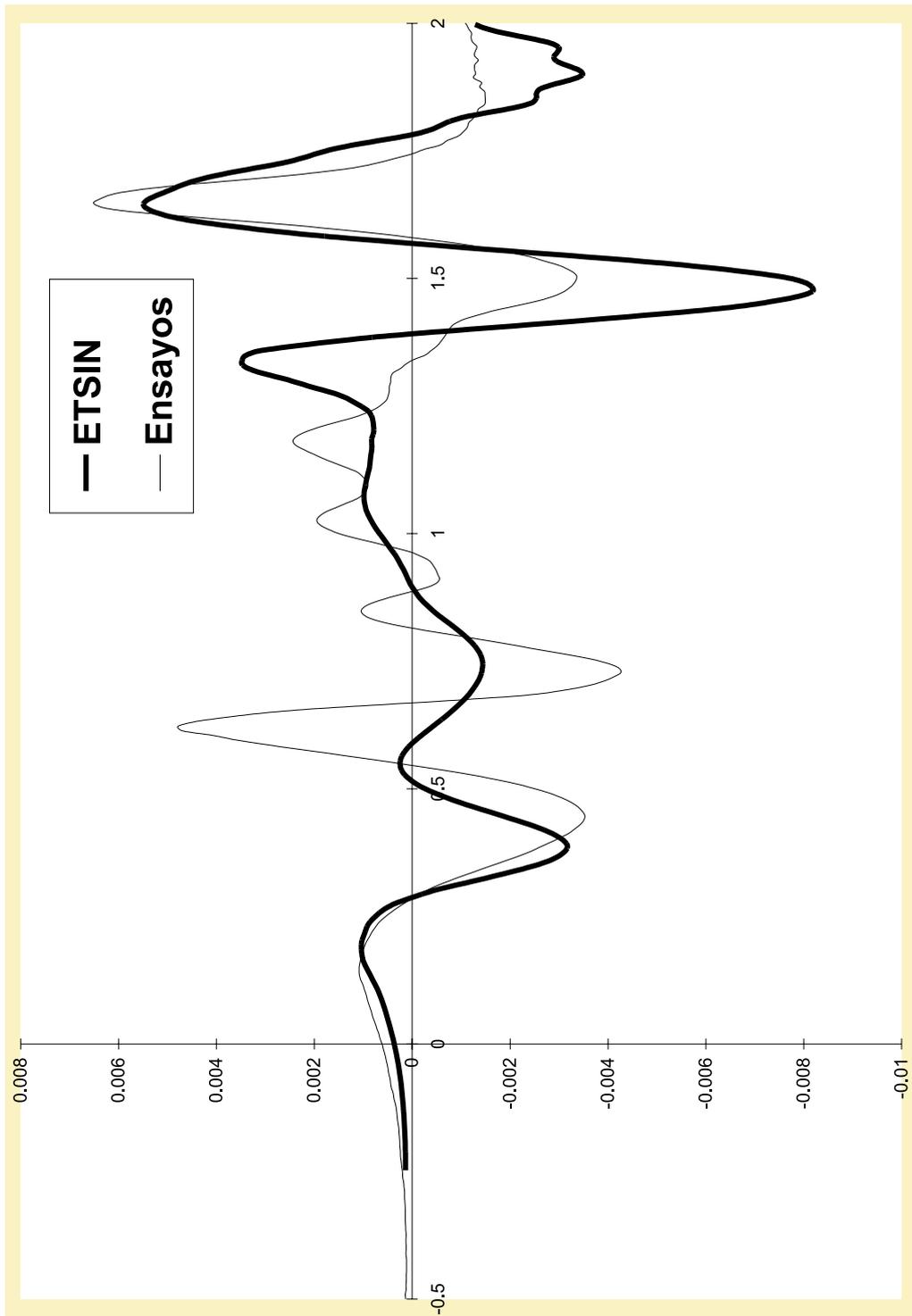


Figura 6.62: Perfil $y = 1.5508B$ de la fragata 5415 a $Fn = 0.297$.

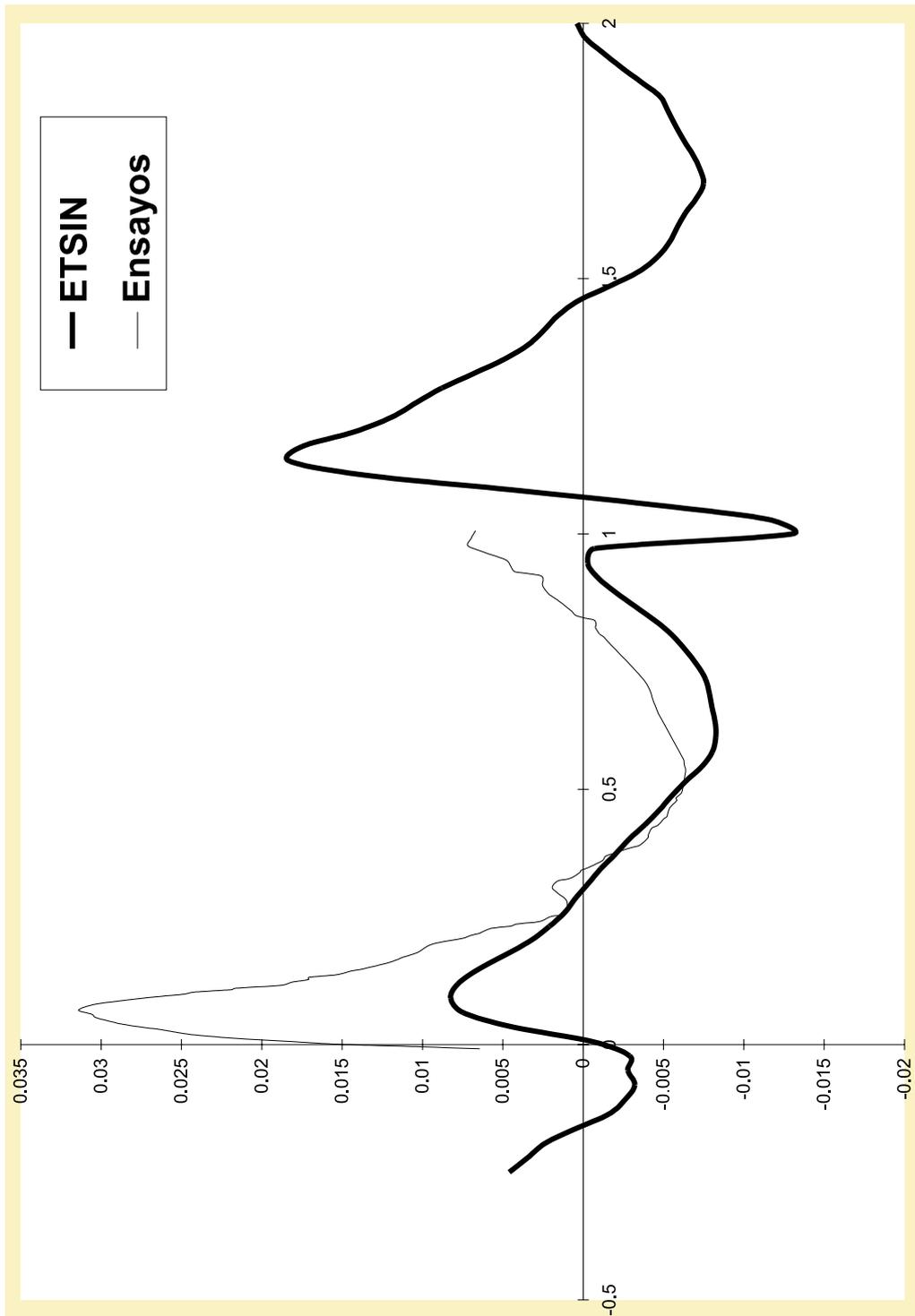


Figura 6.63: Perfil en el casco de la fragata 5415 a $Fn = 0.416$.

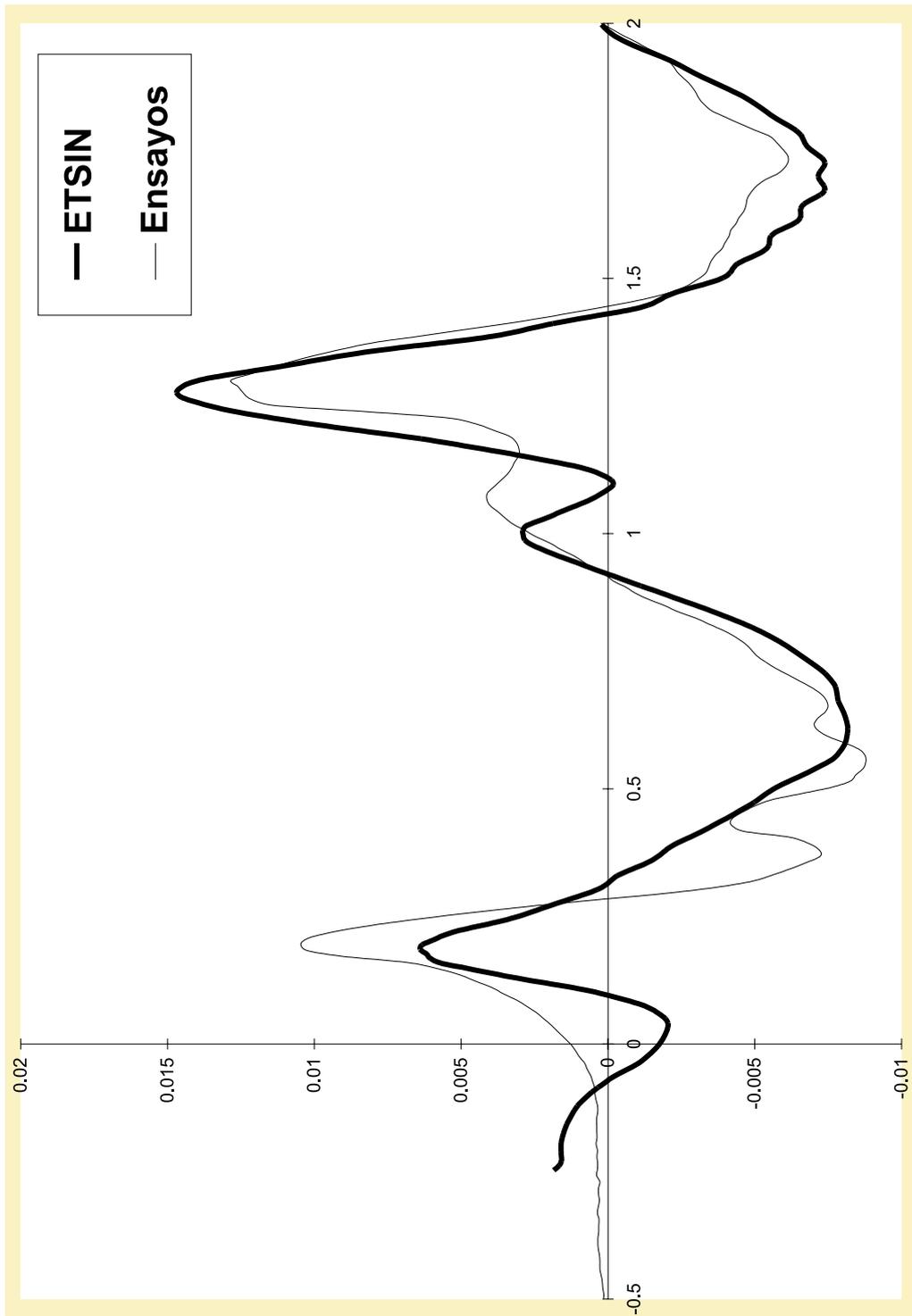


Figura 6.64: Perfil $y = 0.5665B$ de la fragata 5415 a $Fn = 0.416$.

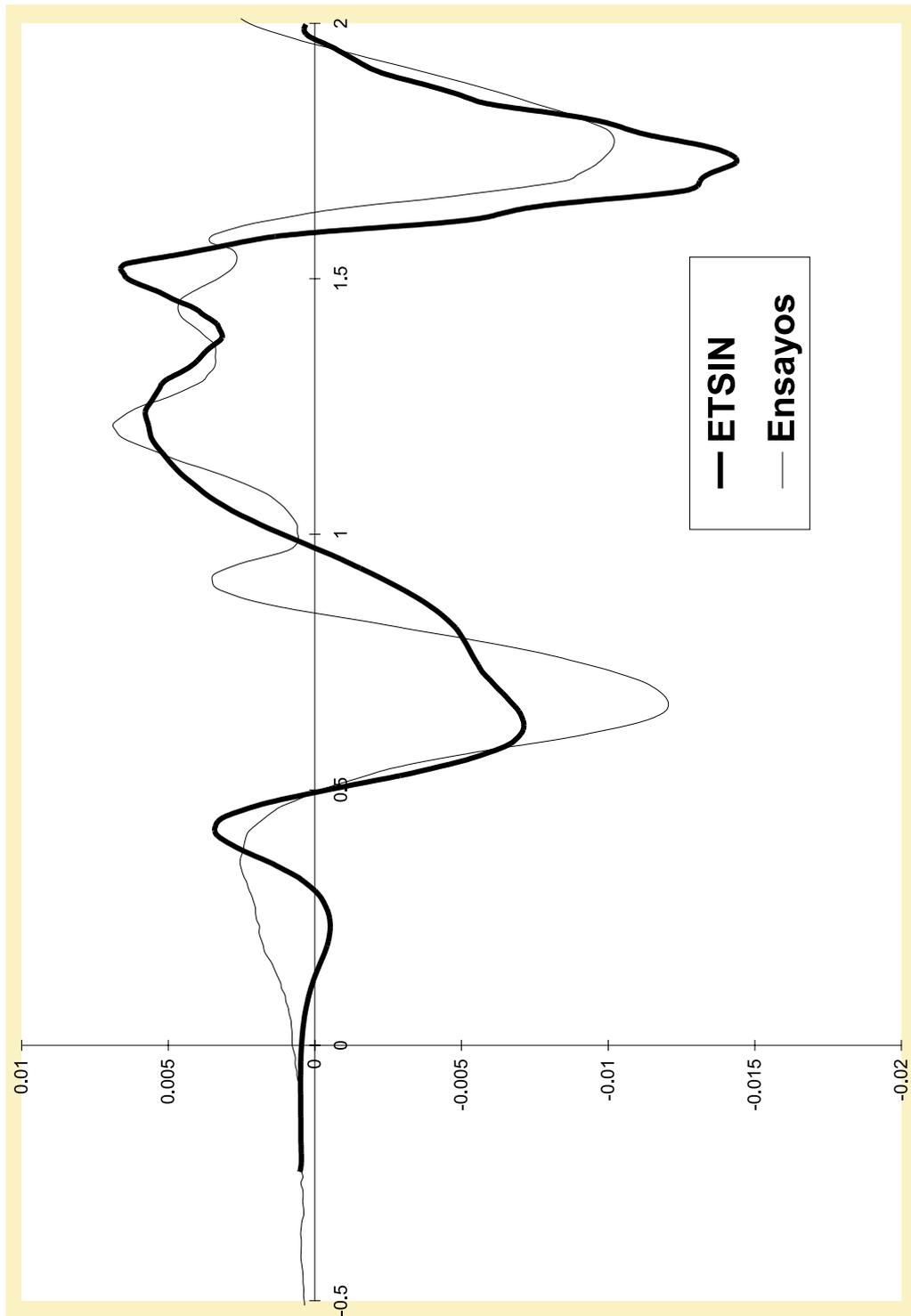


Figura 6.65: Perfil $y = 1.5508B$ de la fragata 5415 a $Fn = 0.416$.

Capítulo 7

Líneas de trabajo para el futuro.

Una vez seleccionado el cuerpo fundamental de la tesis centrado en la metodología desarrollada en la ETSIN alrededor de los métodos de paneles y tomada la decisión de su contenido, hemos decidido incluir en un capítulo de futuro una serie de líneas de investigación que continúan de modo natural las desarrolladas en esta tesis, y de las cuales ya tenemos resultados. Algunos de esos resultados no son todavía todo lo ajustados que hubiéramos deseado y las anomalías detectadas son en el momento actual, objeto de un análisis exhaustivo.

Sin duda, la continuación más natural de estos métodos pasa por la inclusión de una condición no lineal de superficie libre y esos trabajos son los primeros que describiremos. Lo siguiente es superar la limitación de los códigos potenciales y considerar la viscosidad en nuestros cálculos. Explicamos cómo estamos abordando este problema en la ETSIN resolviendo por elementos finitos las ecuaciones de Navier-Stokes con el método de las características[12]. Por último, describimos una de las aplicaciones prácticas de los métodos de paneles sobre los que estamos trabajando, más allá de la optimización de formas mencionada. Esta aplicación es la de la predicción del "wake wash" de buques rápidos, de la que ya tenemos resultados [44] [14].

7.1 Métodos potenciales con condición de superficie libre no lineal.

En el proceso natural de complicación del modelo potencial para ajustarse más a la realidad, el paso siguiente es incluir en el modelo la fuerte no linealidad del fenómeno en estudio. Esta no linealidad proviene en la teoría potencial sólo de la existencia de la superficie libre y por doble motivo, las condiciones de contorno que en ella se imponen son no lineales, y la situación real de la superficie libre es desconocida a priori. Ello obliga a resolver un problema de contorno para la ecuación de Laplace con condiciones de contorno no lineales que se deben aplicar en una frontera todavía desconocida.

Los distintos métodos disponibles para abordar el problema del flujo potencial estacionario con condición de superficie libre no lineal comparten un esquema común, diferenciándose entre ellos en pequeños detalles. Todos ellos asumen la hipótesis fuertemente local que supone que el fenómeno considerado es el resultado de una pequeña perturbación de un cierto estado base. En cada caso se debe precisar el sentido del adjetivo pequeño y se define el proceso iterativo que aproxima paso a paso la perturbación mediante técnicas locales.

Los parámetros fundamentales del algoritmo iterativo diseñado para el cálculo aproximado de la solución de este problema son:

- la elevación de la superficie de singularidades sobre la superficie libre.
- el factor de relajación en la actualización de la forma de la superficie libre después de cada iteración.

Comencemos enumerando las propiedades o cualidades que se deberían exigir en general, a un método no lineal:

1. Los términos de orden superior despreciados en los métodos linealizados, representando la transferencia de la condición de contorno de la superficie libre real a la superficie libre sin deformar son importantes, y algunas veces dominantes, en particular si los efectos no lineales son grandes. Como consecuencia, la condición de superficie libre debe ser impuesta en la superficie libre real, no en una aproximación de la misma.

2. Algunos de los efectos no lineales tienen un número de onda 2 o 3 veces mayor que la componente principal de la ola, por lo que los cálculos no lineales deben realizarse con discretizaciones lo más finas posibles, las que sean necesarias para captar estos efectos.
3. Los cálculos no lineales deben tener en cuenta del modo más preciso posible la intersección de la superficie libre y del casco. Esta exigencia es particularmente importante en popas de espejo o en flotaciones con fuerte curvatura.
4. El método debe ser capaz de modelar los flujos con popa de espejo evitando las inconsistencias que presentan algunos métodos lineales en este tema.
5. Es importante que el flujo, las distribuciones de presiones, y el tren de olas sean calculados del modo más preciso posible. Las optimizaciones de la carena se basan en esas informaciones y aunque la precisión con que calculemos la resistencia no es muy relevante, sí que deben observarse tendencias correctas en la misma.
6. El código debe ser lo suficientemente robusto y estable para un uso rutinario y su coste computacional debe ser pequeño, para facilitar su integración en la fase de diseño del buque.

Teniendo "in mente" estas propiedades, veamos los distintos métodos y códigos que o bien hemos ya desarrollado o bien están en distintas fases de desarrollo y cuya integración dentro de la metodología descrita en la tesis sería inmediata. Cada uno de ellos representa una línea de futuro en el tema de esta tesis. Si tenemos en cuenta las propiedades exigidas a un método no lineal, deberíamos calificar estos métodos de débilmente no lineales, reservando el calificativo no lineal para los métodos de flujo viscoso que describiremos en la sección siguiente.

7.1.1 Condición débilmente no lineal de superficie libre.

De acuerdo con la hipótesis local asumida, descomponemos en cada paso del proceso iterativo el potencial y la elevación en suma de dos componentes:

$$\phi = \Phi + \varphi \tag{7.1}$$

$$\eta = H + \delta\eta \quad (7.2)$$

donde

Φ es el potencial del flujo base o sea, el potencial total obtenido al finalizar la iteración anterior.

Como potencial base inicial del algoritmo iterativo, se puede elegir entre el potencial del método lineal, el del modelo doble, o bien directamente el del flujo libre.

φ es la diferencia entre el potencial base al comienzo del paso y el que obtendremos tras la iteración correspondiente, o sea el incremento que se produce en el potencial de base en el curso de la iteración considerada.

H es la altura base, que en principio se corresponde con la debida al flujo base Φ , pero que no tiene porque ser así en general. De hecho, en la primera iteración se suele tomar como altura base cero o sea, la superficie libre plana, y esta no es la correspondiente al método lineal.

$\delta\eta$ es la diferencia entre la altura base y la que vamos a obtener tras la iteración correspondiente, o sea el incremento en la altura base al finalizar la actual iteración.

Según vimos en 2.4, en la superficie libre - $z = \eta(x, y)$ - deben verificarse simultáneamente la condición cinemática 2.84, y la condición dinámica 2.85.

Haciendo uso de la descomposición considerada y despreciando en base a la pequeñez de la perturbación, los términos en los que aparecen productos de incrementos en flujos y alturas base podemos escribir la condición cinemática.

$$\Phi_x \cdot \eta_x + \Phi_y \cdot \eta_y + \varphi_x \cdot H_x + \varphi_y \cdot H_y - \Phi_z - \varphi_z = 0 \quad (7.3)$$

Despejando la elevación en la condición dinámica

$$\eta = \frac{1}{2g} (\nabla\phi_\infty^2 - \nabla\phi^2) \quad (7.4)$$

$$\eta = \frac{1}{2g} (\nabla\phi_\infty^2 - \nabla\Phi^2 - \nabla\varphi^2 - 2\nabla\Phi\nabla\varphi) \quad (7.5)$$

y despreciando de nuevo los productos de términos en incrementos obtenemos,

$$\eta = \frac{1}{2g} (\nabla\phi_\infty^2 - \nabla\Phi^2 - 2\nabla\Phi\nabla\varphi) \quad (7.6)$$

Entrando con esta elevación en la condición cinemática obtenemos,

$$\frac{1}{2g} \left(\Phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla \phi_\infty^2 - \nabla \Phi^2 - 2\nabla \Phi \nabla \varphi) + \varphi_x \cdot H_x + \varphi_y \cdot H_y - \Phi_z - \varphi_z = 0 \quad (7.7)$$

Como el flujo uniforme es constante,

$$-\frac{1}{2g} \left(\Phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla \Phi^2 + 2\nabla \Phi \nabla \varphi) + \varphi_x \cdot H_x + \varphi_y \cdot H_y - \Phi_z - \varphi_z = 0 \quad (7.8)$$

Por último, para abordar el proceso de discretización ordenadamente, pasamos al segundo miembro los términos conocidos de esta ecuación. Con ello tenemos

$$\begin{aligned} - \frac{1}{g} \left(\Phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla \Phi \nabla \varphi) + \varphi_x \cdot H_x + \varphi_y \cdot H_y - \varphi_z = \\ \frac{1}{2g} \left(\Phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla \Phi^2) + \Phi_z \end{aligned} \quad (7.9)$$

Discretización.

Parece claro que lo más complicado de discretizar en la ecuación anterior es el operador:

$$\Phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \quad (7.10)$$

Si llamamos:

$$\begin{pmatrix} a_{xl} & a_{xt} \\ a_{yl} & a_{yt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

tendremos

$$\begin{aligned} \Phi_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \Phi_x \cdot \left(a_{xl} \cdot \frac{\partial}{\partial l} + a_{xt} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) + \Phi_y \cdot \left(a_{yl} \cdot \frac{\partial}{\partial l} + a_{yt} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) = \\ (a_{xl} \cdot \Phi_x + a_{yl} \cdot \Phi_y) \cdot \frac{\partial}{\partial l} + (a_{xt} \cdot \Phi_x + a_{yt} \cdot \Phi_y) \cdot \frac{\partial}{\partial t} = L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.12)$$

con

$$L = a_{xl} \cdot \Phi_x + a_{yl} \cdot \Phi_y \quad (7.13)$$

$$T = a_{xt} \cdot \Phi_x + a_{yt} \cdot \Phi_y \quad (7.14)$$

La condición de superficie libre queda entonces

$$\begin{aligned} - \frac{1}{g} \left(L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \Phi \nabla \varphi) + \varphi_x \cdot H_x + \varphi_y \cdot H_y - \varphi_z = \\ \frac{1}{2g} \left(L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \Phi^2) + \Phi_z \end{aligned} \quad (7.15)$$

Discretizamos la geometría del mismo modo que se explica con todo detalle en 2.4.3 con lo que 7.15 se convierte en el panel j en:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i \cdot \left[\frac{1}{g} \left(L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \Phi \cdot v_{ij}) - v_{ijx} \cdot H_x - v_{ijy} \cdot H_y + v_{ijz} \right] = \frac{1}{2g} \left(L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \Phi^2) + \Phi_z \quad (7.16)$$

Lo mismo que con el potencial sucede a efectos de derivadas con las elevaciones :

$$H_x = a_{xl} \cdot H_l + a_{xt} \cdot H_t \quad (7.17)$$

$$H_y = a_{yl} \cdot H_l + a_{yt} \cdot H_t \quad (7.18)$$

Con todo ello podemos escribir (1.16) en la forma

$$A \cdot \sigma = b \quad (7.19)$$

Sistema lineal en el que σ es el vector de incógnitas y la matriz de coeficientes A , y el vector de términos independientes b , vienen dados por

$$A_{ji} = \frac{1}{g} \left(L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (2\nabla \Phi \cdot v_{ij}) - v_{ijx} \cdot H_x - v_{ijy} \cdot H_y + v_{ijz} \quad (7.20)$$

y

$$b_j = \frac{1}{2g} \left(L \cdot \frac{\partial}{\partial l} + T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \Phi^2) + \Phi_z \quad (7.21)$$

estando todas las expresiones evaluadas en el punto característico del panel j .

Los comentarios relativos al ahorro computacional en el caso de flujo simétrico, son semejantes a los del caso lineal. De hecho, también aquí se ha escrito un código especial que aprovecha esa circunstancia.

7.1.2 Resultados numéricos.

Hemos usado como test de validación inicial de las diferentes variantes de métodos no lineales ensayados, el caso del buque Serie 60 a número de Froude 0.316. Este caso es clásico para este tipo de ensayos y muy sencillo. Dado que este buque suele dar resultados aceptables en la mayoría de los casos, hemos realizado también cálculos con un buque de transporte de derivados de petróleo (petrolero de productos) de alto coeficiente de bloque y bajo número de Froude. De ambos, hemos presentado una exhaustiva validación en los

métodos lineales, ver 6.2 y 6.3.

De cada una de las geometrías presentamos para un número de Froude la siguiente información

1. Visualización del casco
2. Vista del mallado de la carena
3. Vista del mallado de la superficie libre
4. Residuo de las condiciones dinámicas y cinemáticas de superficie libre en cada iteración.

Resultados del buque de la Serie 60.

En la validación del método lineal habíamos incluido las figuras del mallado de la superficie libre y de la carena del Series 60, figuras 6.2, 6.3 y 6.4. Se presentan en las figuras siguientes los resultados correspondientes a un factor de relajación de 0.7, y a una elevación de la superficie de singularidades sobre la superficie libre del 1% de la ola propia del buque.

Se observa que la convergencia es buena aunque lenta. El perfil de ola es mejor que el correspondiente al método lineal, como se puede observar en las figuras 7.1 y 7.2. Se obtiene mayor precisión a la hora de captar el pico de proa de la ola con el método no lineal que con el lineal. Sin embargo estos resultados esperanzadores con el Serie 60 no se vieron refrendados cuando consideramos una geometría más real, como se puede ver a continuación.

Resultados del petrolero de productos.

Se presentan los resultados correspondientes a un factor de relajación de 0.7, con una elevación de la superficie de singularidades sobre la superficie libre del 1% de la ola propia del buque y a un número de Froude de 0.199.

Los resultados para diferentes factores de relajación y elevaciones fueron similares.

Se observa la presencia de grandes oscilaciones en los residuos en las primeras iteraciones hasta que finalmente se produce una divergencia clara.

Iteración	C.dinámica	C.cinemática
1	0.420974	1.579348
2	0.538722	2.217435
3	0.178667	0.983191
4	0.122663	0.491655
5	0.065351	0.395157
6	0.044766	0.294142
7	0.02978	0.269631
8	0.018099	0.189712
9	0.013567	0.189951
10	0.011807	0.128809
11	0.009857	0.136854
12	0.008525	0.099504
13	0.007275	0.100162
14	0.006323	0.076427
15	0.005414	0.074194
16	0.004714	0.058627

Tabla 7.1: Residuos condición dinámica y cinemática del Serie 60.

7.2 Métodos de flujo viscoso.

A pesar de los continuos avances en el desarrollo de técnicas numéricas y computacionales para cálculos fluido dinámicos, no existe de momento ningún código capaz de predecir con realismo el comportamiento hidrodinámico de un barco en movimiento.

Los únicos códigos que podemos considerar hoy día operativos en hidrodinámica numérica, son los del tipo DAWSON (lineal) o RAPID (no lineal) considerados en esta tesis, basados en la teoría del flujo potencial.

Estos códigos, cuyo campo de aplicación y posibilidades como herramienta de diseño, hemos ampliado sustancialmente en la tesis, son una buena respuesta al habitual compromiso entre el coste económico, el coste computacional y la calidad de la solución aproximada obtenida, pero aún siendo en general su convergencia buena y rápida, su calidad numérica es insuficiente en presencia de ciertas formas complejas o cuando las condiciones físicas se desvían de las

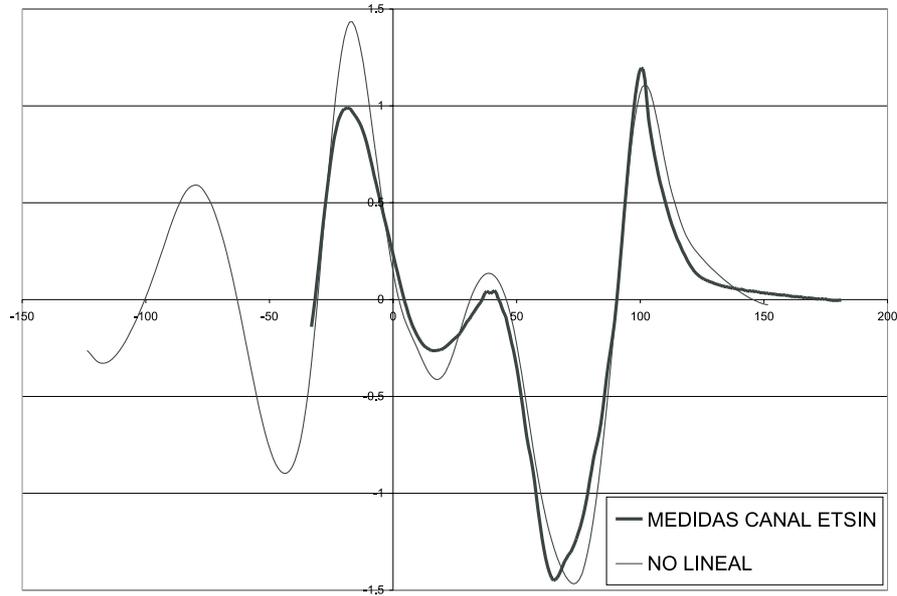


Figura 7.1: Cortes longitudinales Series 60 $Y/B=0.5665$.

ideales que permiten asegurar la existencia de un potencial de velocidades, como se desprende de los resultados del proceso intensivo de validación al que lo estamos sometiendo, por lo que a pesar de su evidente utilidad desde un punto de vista cualitativo en la etapa inicial de diseño, no han conseguido desbancar a las técnicas de ensayo con modelos en canal.

La imposibilidad de incorporar a esos códigos teorías de olas más completas que las consideradas en la sección anterior, limita su utilidad para predecir con suficiente precisión los fenómenos de turbulencia, el acoplamiento fluido-estructura, y otras singularidades y evidencia la necesidad de desarrollar códigos que resuelvan las ecuaciones de Navier-Stokes incluyendo los efectos de superficie libre y los debidos a la viscosidad turbulenta.

7.2.1 Formulación del problema matemático

El problema físico de evolución que se plantea es el del flujo incompresible viscoso alrededor de un cuerpo en presencia de superficie libre.

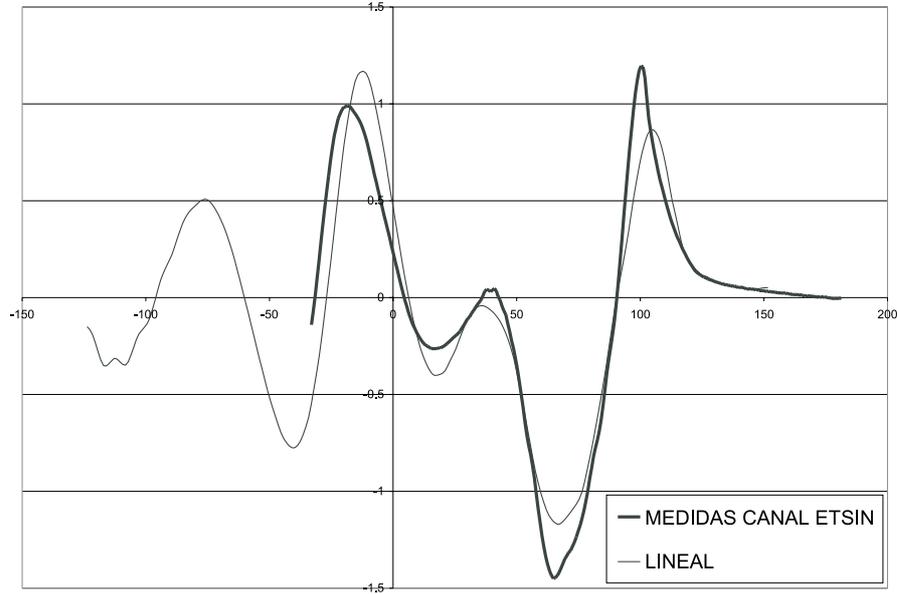


Figura 7.2: Cortes longitudinales Series 60 Y/B=0.5665.

Consideramos un dominio fluido $\Omega \subset R^3$ con fronteras Γ_∞ , Γ_B y Γ_{SL} . Suponemos que un cuerpo sólido B cuya superficie es Γ_B , avanza con velocidad $\mathbf{v}(t)$ en Ω . La frontera Γ_{SL} que es la superficie libre de Ω tiene por ecuación implícita en la referencia fijada $F(x, t) = 0$.

Las ecuaciones que gobiernan el problema físico anterior son las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes que en las variables primitivas "velocidad-presión" se escriben:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - g \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} & \text{(NS)} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{(EC)} \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

en donde $(0, T]$ es el intervalo temporal de integración de las ecuaciones y el resto de las variables y operadores son de conocimiento general. Destaquemos que $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ es la notación simbólica de los términos convectivos que se pueden agrupar en la derivada material de \mathbf{v} , con lo que el sistema no lineal

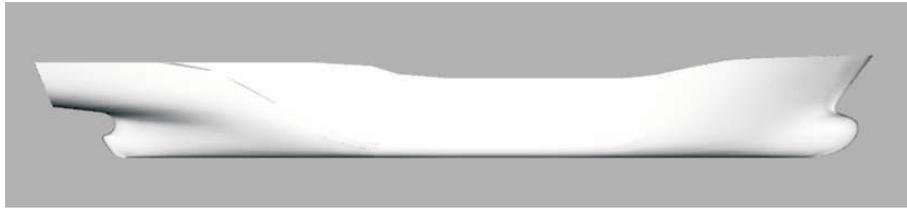


Figura 7.3: Visualización de la carena del petrolero.

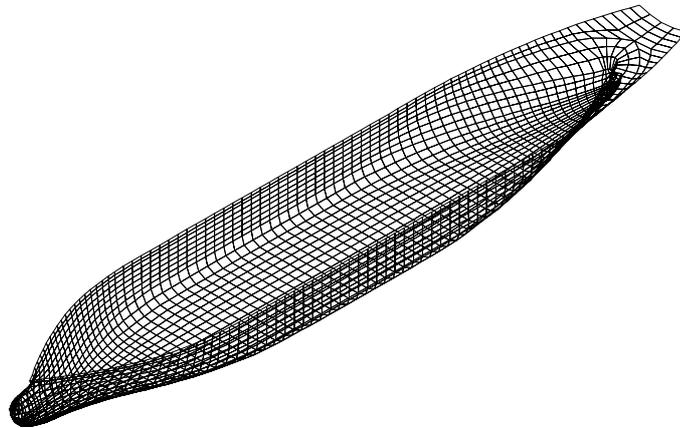


Figura 7.4: mallado de la carena del petrolero.

de NS se expresa.

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{dt} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p - g\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} & \text{(NS)} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{(EC)} \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

El sistema no lineal de NS está sometido a las condiciones iniciales y de contorno que ya hemos considerado en esta tesis en repetidas ocasiones pero cuya formulación es aquí más general. Tenemos por tanto las siguientes condiciones de contorno:

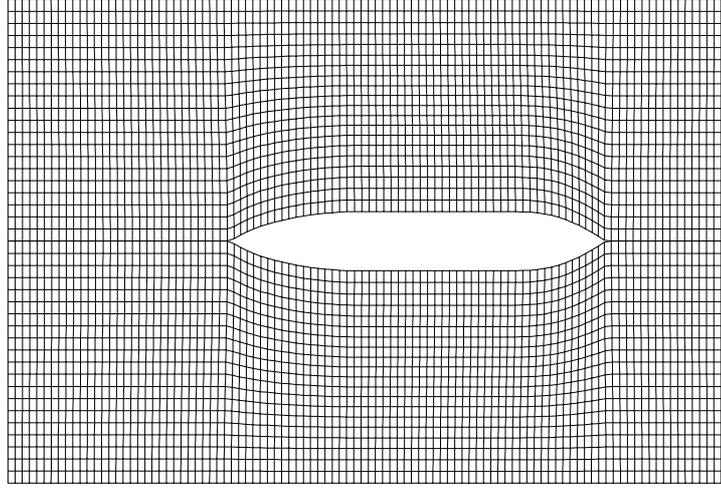


Figura 7.5: mallado de la superficie libre del petrolero.

Condiciones de Contorno(CC)

(CC1) En la frontera Γ_∞

$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}_\infty(x, t) \quad (\text{CC1})$$

(CC2) En la superficie del cuerpo sólido Γ_B (condición de impenetrabilidad)

$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}(t) \quad (\text{CC2})$$

(CSL) En la superficie libre Γ_{SL}

(a) Condición dinámica de superficie libre.

El vector $\mathbf{T}(x, \mathbf{n})$ de los esfuerzos en x para la dirección \mathbf{n} normal a la superficie libre, orientado hacia el exterior de Ω , debe ser continuo a través de Γ_{SL} .

Como dicho vector es nulo de uno de los dos lados de Γ_{SL} tendremos:

$$\mathbf{T}(x, \mathbf{n}) = c_{2,3} (\sigma \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\text{CDSL})$$

y ya que el tensor de esfuerzos de los fluidos incompresibles viene dado por

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\nu\mathbf{D}$$

Iteración	C.dinámica	C.cinemática
1	-0.459902	0
2	0.352801	0.001373
3	0.265988	0.002581
4	0.300485	0.003042
5	-0.291209	0.003192
6	-0.223283	0.001815
7	-8.978664	0.002191
8	-50062.17871	0.008456
9	-1.05916E+11	50.540316

Tabla 7.2: Residuos condición dinámica y cinemática del petrolero.

donde \mathbf{D} es el tensor de los ritmos de deformación, parte simétrica del gradiente del campo de velocidades, (CDSL) se escribirá :

$$\sum_j \left[-p\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \mathbf{n}_j = 0 \quad (\text{CDSL})$$

(b) Condición cinemática de superficie libre.

Continuidad de la componente normal de la velocidad, es decir, la velocidad normal del fluido debe ser igual a la velocidad normal de desplazamiento de la SL (que es cero), la velocidad relativa del medio respecto a la SL es tangencial.

Las derivadas materiales de $F(x, t)$ calculadas de un lado y de otro de Γ_{SL} deben ser nulas.

$$\frac{DF}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) F(x, t) = 0 \quad (\text{CCSL})$$

Si \mathbf{v}_Γ denota la velocidad en la frontera $\Gamma = \Gamma_\infty \cup \Gamma_B \cup \Gamma_{SL}$, tenemos en virtud de (EC)

$$\int_\Gamma \mathbf{v}_\Gamma \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

(CI) Condición inicial.

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \quad (\text{CI}).$$

7.2.2 Modelos numéricos del problema planteado

Las principales dificultades del problema matemático definido por las ecuaciones y condiciones anteriores son:

- (i) El problema planteado es no lineal. Los términos convectivos $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, son no lineales.
- (ii) La condición de incompresibilidad (EC).
- (iii) La solución de las ecuaciones (NS) son funciones vectoriales de x y t cuyas componentes están acopladas por los términos $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ y $\nabla \cdot \mathbf{v}$.
- (iv) La (CCSL) es responsable de la generación de una onda de choque cuyo rompimiento y posterior disipación se cree que son los dos mecanismos principales de la resistencia por formación de olas.

A pesar de esas dificultades, el uso de esquemas numéricos avanzados para el tratamiento de las ecuaciones incompresibles de Euler y de Navier-Stokes, ha permitido en los últimos años obtener predicciones más realistas de la resistencia por formación de olas.

De esos esquemas, los más ajustados utilizan un código para simular el flujo incompresible 3D acoplado con una ecuación de superficie libre. El proceso iterativo comienza obteniendo el campo de velocidades con el código 3D de flujo incompresible, velocidades que se introducen en la ecuación de superficie libre para actualizar su altura. Esta nueva altura cambia la presión prescrita en la superficie libre en el código de flujo incompresible, cerrando el bucle que define cada paso del proceso.

El problema de satisfacer de modo exacto la ecuación de continuidad en este tipo de flujos es bien conocido. Se puede utilizar la ecuación de conservación del momento para actualizar el campo de velocidades, pero no está claro cómo actualizar la presión conservando la masa, ya que en la condición de incompresibilidad no aparece ningún término de presión. Para tratar este problema se han diseñado varios métodos que podemos clasificar en dos fundamentales.

- Los basados en esquemas de proyección.

En el primer paso del proceso iterativo se estima un campo de velocidades. Imponiendo la condición de conservación de la masa se llega a

una ecuación de Poisson que una vez resuelta define la presión con la que se actualiza el campo de velocidades cerrando así el bucle.

- Los basados en esquemas de compresibilidad artificial, de origen aeroespacial.

En ellos, se modifica la ecuación de continuidad introduciendo un término artificial dependiente del tiempo, proporcional a la derivada respecto al tiempo de la presión con lo que se consigue hacer finita la velocidad infinita del sonido en medio incompresible. Con ello, se posibilita el uso de todas las técnicas desarrolladas para la simulación de flujo compresible. En el estado estacionario, ese término adicional desaparece obteniéndose la solución para flujo incompresible.

Ambas familias de esquemas se han usado con cierto éxito para la predicción de la superficie libre.

7.2.3 Método modificado de las características.

Nosotros comenzamos en 1993 a trabajar en la integración de las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes mediante un esquema temporal de pasos fraccionados que permite superar parte de los problemas anteriores ya que es capaz de desacoplar las dificultades derivadas de la no linealidad, de las derivadas de la ecuación de continuidad [3].

El esquema que seguimos está basado en el seguimiento efímero de las partículas de fluido y fué propuesto y analizado por Rodolfo Bermejo en [2] para los problemas hiperbólicos de transporte-difusión es decir, aquellos en los que los términos advectivos dominan a los términos difusivos. Dicho esquema es incondicionalmente estable, propiedad muy deseable, ya que permite un tamaño mayor del paso temporal entre pasos sucesivos de integración espacial.

Aplicamos dicho método a las ecuaciones de NS que en las variables primitivas "velocidad-presión" son un caso particular de las de transporte-difusión. En este esquema, los términos convectivos se integran a lo largo de las curvas características del flujo dentro de una descripción lagrangiana, usando para el resto de los términos de la ecuación de NS y de las condiciones del problema la descripción euleriana. De ahí que reciba el nombre de Método Modificado de las Características (MMC).

Eliminamos de este modo la integración de los términos no lineales convectivos $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ de la ecuación de NS, términos que se agrupan en la derivada material $\frac{D\mathbf{u}}{dt}$ del campo de velocidades que se integra siguiendo a la partícula fluida.

La evaluación numérica, lo más exactamente posible en cada instante t , de la condición cinemática de superficie libre $\frac{DF}{dt} = 0$ es uno de los aspectos fundamentales del flujo que queremos simular.

Una aproximación de dicha condición lineal en el paso temporal, permitió descubrir que la generación de ondas de choque en la superficie libre y su posterior proceso de rompimiento generando vorticidad que se disipa por turbulencia, son dos de los mecanismos más significativos en la resistencia por formación de olas y que cualquier versión linealizada de la condición cinemática de superficie libre es incapaz de generar el conjunto de fenómenos que acompañan a las ondas de choque de la superficie libre.

Esta conclusión limita la utilización de los códigos de flujo potencial que tratan de una forma simplificada el efecto de superficie libre en un intento de captar el fenómeno de la formación de olas.

Nosotros hemos desarrollado un método numérico económico y fácil de instrumentar, para calcular la puntos de la superficie libre, especialmente conveniente cuando se aplica combinado con el algoritmo MMC y cuya convergencia es cuadrática en el paso temporal. En cada paso de tiempo, el esquema de paso fraccionado da lugar a un problema de Stokes generalizado que se resuelve [2] utilizando un método iterativo basado en el método del gradiente conjugado que descompone dicho problema en una sucesión de problemas intermedios elípticos.

Debido a la complejidad de las formas geométricas se integran las ecuaciones transformadas de las de Navier-Stokes en un sistema de coordenadas curvilíneas que transforma el dominio físico en un dominio computacional cúbico de lado 1 y todas las aproximaciones de los diversos problemas intermedios que el algoritmo plantea, se formulan según el método de los elementos finitos.

La siguiente fase de nuestro algoritmo corresponde a su progresión en el tiempo mediante el mecanismo difusivo. Realizamos dicha progresión temporal

mediante el esquema de Crank-Nicholson.

7.2.4 Métodos del conjunto de nivel "level set".

Paralelamente al desarrollo del método anteriormente descrito se están desarrollando dentro del equipo de hidrodinámica numérica de la Escuela[12], otras alternativas ya que la complejidad del problema aconseja comparar si es posible, resultados provenientes de distintas aproximaciones.

Un cambio importante en el enfoque del problema del flujo incompresible viscoso con superficie libre en estudio, se consigue cuando se considera la superficie libre un caso especial de interfaz en el seno de un flujo de dos fluidos inmiscibles, en nuestro caso agua y aire por motivos evidentes, cuyas densidades y viscosidades respectivas se diferencian en varios órdenes de magnitud.

Son muchos los métodos que se han considerado para tratar el problema de la superficie libre dentro del enfoque descrito. Dichos métodos se pueden clasificar atendiendo al tipo de malla computacional usada en métodos de malla fija, métodos de malla adaptada al contorno móvil y métodos sin malla, y atendiendo a la forma de definir dinámicamente la superficie libre se distinguen dos tipos, el seguimiento de la interfaz (interface-tracking) y la captación y representación de la interfaz (interface-capturing).

El primer intento de tratamiento de superficie libre dentro del enfoque descrito, fue desarrollado a partir del método MAC (Marker-And-Cell method). Para definir la posición de la superficie libre, se utilizan marcadores lagrangianos, partículas sin masa que se introducen en el agua y en el aire cerca de la superficie libre inicial, y que se siguen a lo largo del movimiento. Este método es muy costoso de cálculo ya que además de la integración de las ecuaciones del movimiento, es necesario mover todos los marcadores en cada paso del tiempo, lo que se une a la dificultad de tener que imponer las condiciones de contorno sobre superficies curvas. Por contra, puede manejar cualquier número de fluidos y tratar interfaces sometidas a grandes deformaciones.

En el método del volumen de fluido VOF (volume of fluid), la forma de la superficie libre viene dada por los elementos de la malla de integración que están parcialmente llenos de agua y aire, y se obtiene resolviendo una ecuación de transporte que debe satisfacer la función c que define la fracción de agua que hay presente en cada elemento de la malla de integración, con

$c = 1$ si el elemento está lleno de agua y $c = 0$ si está lleno de aire.

La evolución de c viene gobernada por la ecuación de transporte

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{v}) = 0 \quad (7.22)$$

que en el caso de flujos incompresibles es invariante respecto a la transformación $c \rightarrow 1 - c$ lo que obliga a un cumplimiento estricto de la ecuación de continuidad.

Este método es más eficiente que el esquema MAC y se puede aplicar a superficies libres complejas que pueden incluir procesos de rompimiento de olas.

Todos los métodos propuestos anteriormente están formulados para una malla fija y el flujo se resuelve en los dos fluidos.

El modelo matemático de este tipo de flujo para fluidos incompresibles está definido por el sistema de Navier Stokes con un término debido a la tensión superficial

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \nu\Delta\mathbf{v} - \nabla p - g\mathbf{e}_3 + \sigma\kappa\delta(d)\mathbf{n} & \text{(NS)} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{(EC)} \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T]$$

donde σ es el coeficiente de tensión superficial, κ es la curvatura de la interfaz que separa ambos fluidos, d es la distancia normal a la interfaz, δ es la función delta de Dirac y \mathbf{n} es el vector unitario normal a la interfaz y los ejes están elegidos como antes.

Imponemos a la interfaz las condiciones de superficie libre.

- La superficie libre es una interfaz entre los dos fluidos que no permite ningún intercambio a su través (CCSL).
- Las fuerzas que actúan sobre los fluidos en la superficie libre están en equilibrio (CDSL).

Aquí se debe considerar de nuevo la tensión superficial que en el caso de altos gradientes de temperatura o en presencia de vientos fuertes, produce esfuerzos cortantes en la superficie libre que provocan movimientos de fluido de la región fría a la caliente, o en la dirección del viento según el caso.

Para calcular el perfil de ola que genera un barco en movimiento, basta con centrarse en el flujo de uno de los fluidos, el agua, y en la superficie libre, es decir, es suficiente con resolver las ecuaciones del movimiento sólo para el agua.

En este caso, el último término relativo a la fuerza de tensión superficial de la primera ecuación del sistema de ecuaciones NS desaparece de dicho sistema y la fuerza de tensión superficial sólo se incluye en la condición dinámica de superficie libre.

El método de la malla móvil es hasta la fecha el más utilizado en los cálculos de flujo viscoso alrededor de barcos. En este método, la malla que se adapta al contorno se mueve acompañando a la superficie libre. El sistema de ecuaciones resultante puede resolverse bien en el dominio físico mediante una formulación de volúmenes finitos o bien en un dominio cúbico o rectangular uniforme previa la adecuada transformación de coordenadas curvilíneas.

Nosotros utilizamos para representar dinámicamente la interfaz entre ambos fluidos la técnica del conjunto de nivel, una alternativa al método de la malla móvil que posee a nuestro juicio ciertas ventajas además de la posibilidad de comparar con facilidad los resultados obtenidos con ambos métodos.

En la técnica del conjunto de nivel se define en el instante inicial la interfaz agua-aire como la $(n - 1)$ -variedad de nivel cero de la función del nivel, una función de clase C^1 definida en el dominio de cálculo que contiene a ambos fluidos, como la distancia de cada punto del dominio a la superficie libre inicial conocida, afectada de un signo distinto según que estemos en el agua o en el aire.

El campo de velocidades del flujo transporta dicha función por convección, de modo que en cualquier instante la interfaz viene definida como el conjunto de nivel de la función transportada relativo al valor que se obtiene anulando su derivada material.

A medida que se transportan dichas magnitudes, el agua y el aire se van acoplando en las distintas zonas del dominio. El campo de velocidades transporta por convección pura la densidad y la viscosidad del fluido, de modo que se puede escribir una ecuación de transporte para cada una de estas magnitudes:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (7.23)$$

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \quad (7.24)$$

A cada lado de la interfaz la densidad y la viscosidad son constantes. Sin embargo en la interfaz ambas funciones son discontinuas lo que da lugar a dificultades numéricas.

Para suavizar el salto de discontinuidad en la interfaz de las propiedades físicas de ambos medios, éstas se suavizan en una cierta banda alrededor del conjunto de nivel cero.

Esta técnica del conjunto de nivel presenta las siguientes ventajas importantes

1. La información relevante del flujo en estudio, posición de la superficie libre mas las propiedades del fluido, las transporta por convección una sólo función.
2. La extensión del calculo de la función del nivel a tres dimensiones es sencilla.
3. Se prescinde de la superficie libre como contorno del dominio, luego no hay que imponer condiciones en ella.
4. Este método puede simular el rompimiento de olas.
5. Se puede usar tanto en el caso de que el sólido que genera la ola esté sumergido como si está semisumergido.

Modelo matemático 2D.

Sea $\Omega \subset R^n$ ($n = 2, 3$) un dominio abierto de frontera Γ suficientemente suave. Suponemos que en la frontera compartimos condiciones de contorno de dos tipos distintos, aplicadas a los subconjuntos Γ_D y Γ_N de una partición de la frontera es decir, tales que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ y que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$

Una vez excluido el término de tensión superficial, las ecuaciones de Navier Stokes 2D en forma conservativa y la condición de incompresibilidad convenientemente adimensionalizadas, expresadas en componentes se escriben:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{-1}{Fn^2} \cdot \delta_{i2} - \frac{1}{\varsigma_1} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Re \varsigma_1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (7.26)$$

donde F_n y Re tienen el significado habitual.

Las condiciones iniciales y de contorno a las que están sometidas dichas ecuaciones son:

$$v_i = v_i^{Dirichlet} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, t) \quad (7.27)$$

$$\tau_{ij}n_j = -pn_1 + \mu \frac{\partial v_i}{\partial n} = -\rho g(-z)n_i \quad \text{en } \Gamma_N \times (0, t) \quad (7.28)$$

$$v_i(x, 0) = v_0(x) \quad \text{en } \Omega \times (t = 0) \quad (7.29)$$

donde n es el vector unitario normal saliente al contorno Γ .

A estas ecuaciones hay que añadir la ecuación de transporte de la función del nivel ϕ :

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0 \quad (7.30)$$

donde:

$$\varsigma_1 = \begin{cases} 1; & \phi > \alpha \\ \lambda_1; & \phi < -\alpha \\ \bar{\varsigma}_1 + \Delta\varsigma_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi\phi}{2\alpha}\right) & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad (7.31)$$

$$\bar{\varsigma}_1 = 0.5 * (1 + \lambda_1) \quad (7.32)$$

$$\Delta\varsigma_1 = 0.5 * (1 - \lambda_1) \quad (7.33)$$

La función del nivel se define aquí positiva en el agua y negativa en el aire. λ_1 y λ_2 son las proporciones entre las propiedades del aire y el agua para la densidad y la viscosidad respectivamente, α representa la mitad del espesor de la banda finita en la que se suaviza el salto de discontinuidad de la densidad y viscosidad del agua al aire.

En el movimiento por convección de la función del nivel, la función transportada por el campo de velocidades ya no será en el curso del movimiento una función de distancia como en el instante inicial por lo que se debe reiniciar por iteración que asegure que su gradiente es 1, luego que α es constante en el tiempo.

En el código en desarrollo se puede tratar la superficie libre de los dos modos considerados, bien utilizando las condiciones de superficie libre para actualizar su altura, adaptándole después la malla correspondiente a la nueva altura, o bien resolviendo la ecuación que define la función del nivel reiniciándola por interpolación.

7.3 El problema de "wash wake" para buques rápidos.

7.3.1 Introducción.

En los últimos años hay un interés creciente por aumentar la velocidad de cierto tipo de buques. Además de los buques de uso militar, cuya velocidad ha sido siempre alta, hay tres sectores importantes correspondientes a buques de gran velocidad:

- buques "fast ferries", normalmente catamaranes aunque también monocascos, de unos 100 m de eslora, preparados para transportar unos 500 pasajeros y unas pocas decenas de coches y/o camiones a una velocidad altísima, entre 37 y 45 nudos.
- ferrys de alta velocidad, y de un peso muerto aceptable, que puede albergar más de 100 camiones y 1000 pasajeros y transportarlos a velocidades cercanas a los 30 nudos.
- portacontenedores de alta velocidad, grandes buques de hasta 2000 teus, que hacen grandes rutas a 25 nudos.

A menudo, algunos de estos buques operan en aguas de profundidad limitada, donde las olas de gran periodo que generan se convierten en olas de gran amplitud, lo que provoca daños en buques fondeados, playas y costas, muelles, etc.

7.3.2 Causas y efectos perjudiciales.

Normalmente, las olas que producen los buques de alta velocidad (desde ahora HSV) son más perjudiciales que las de los buques convencionales. Los HSV generan olas con periodos de (8 – 10s), doble que los de las olas generadas por los buques convencionales (4 – 5s). En la figura 7.6 presentamos un corte longitudinal típico del tren de olas de un buque navegando a alta velocidad, en régimen supercrítico. Cuando estas olas largas llegan a zonas de poca profundidad, su amplitud crece de un modo importante debido a la disminución de velocidad de propagación del frente de ondas (shoaling). Este efecto es mucho más importante para las olas largas que para las cortas de los

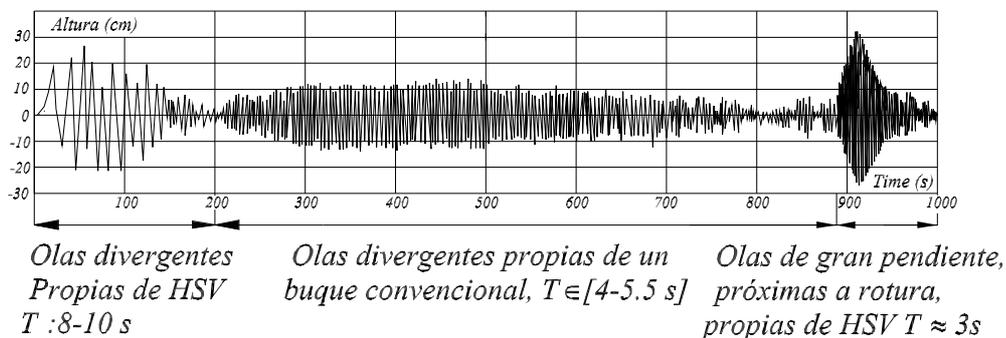


Figura 7.6: Corte longitudinal de un tren de olas supercrítico.

buques convencionales. Sin embargo, se han obtenido resultados aparentemente contradictorios cuando se ha reducido la velocidad de los HSV cerca de la playa, pues una reducción progresiva produce mucho más "wash", que una desaceleración brusca [26]. Ello es debido a la duración del paso por el régimen crítico.

Entre los efectos más importantes destacan:

- bañistas, pescadores, etc, que sufren el embate por sorpresa de estas olas, y además la zona en la que se encuentran se inunda muy rápidamente.
- pequeños barcos de recreo, que pueden quedar varados en los senos de estas olas de gran periodo, sufren grandes balances como documenta Gadd [11], en un caso en el que como las crestas oblicuas son casi regulares, pueden causar un balance importante a barcos pequeños, que a menudo tienen periodos propios similares a los de estas olas. En estos casos una amplitud de 0.1m supone una pendiente de ola de unos 6° , que en condiciones de resonancia induce un balance de $\pm 18^\circ$.
- problemas con el fondeo y amarre de embarcaciones, rotura de amarras, daños en los equipos de amarre del muelle, excesivo movimiento de muelles flotantes, incluso resonancia.
- también hay graves problemas de erosión del fondo, de transporte de sedimentos, de erosión de las orillas de los ríos, etc...

7.3.3 Criterios de aceptación.

Para evaluar las características de un determinado buque en lo que se refiere a generación de wash se han definido una serie de criterios de aceptación por las administraciones implicadas [14]. Existen reglamentos al respecto en Dinamarca [26], Reino Unido, Estados Unidos, Australia. Los criterios están basados en limitar la altura de la ola a una cierta distancia lateral del buque y a una determinada profundidad. También hay algunos criterios relativos a la energía del tren de olas. En los dos casos se obtiene esta información a partir de secciones longitudinales del tren de olas. Presentamos algunos ejemplos de estos criterios.

1. altura máxima de ola de 28 cm, medida 300 m desde crujía en la dirección lateral y en aguas profundas.
2. densidad de energía de la ola de 2450 J/m para la ola más alta del tren de olas medido otra vez a 300 metros de crujía en la dirección lateral y en aguas profundas.
3. Para profundidades de 3 metros y periodos más grandes que 4.5 segundos se debe verificar la relación

$$H_h < \beta_b^{3/2} \sqrt{\frac{T_c}{T_h}} H_c \quad (7.34)$$

en la que los subíndices h and c , se refieren a HSV y buques convencionales, respectivamente; H y T son la altura máxima de la ola a 3 metros y su periodo asociado, respectivamente. El parámetro β_b relaciona la altura de la ola justo antes de romper ("wave breaking") para un buque convencional y para un HSV, o sea,

$$H_{b,h} = \beta_b H_{b,c}$$

Una suposición razonable es que $\beta_b = 1$, o sea, que las alturas de ola antes de romper son iguales para los dos tipos de buques. Si (son datos razonables) el periodo más crítico de las olas de un HSV es de 9 segundos, su altura máxima será de 35 cm, suponiendo que la altura máxima correspondiente a un buque convencional será de 50 cm para un buque convencional. Este criterio demuestra que cuánto más grande es la ola producida por un HSV, más pequeña es la altura admisible.

7.3.4 Metodología de cálculo.

Hemos visto que estos criterios se refieren a características del tren de olas. Podemos calcular ese tren de olas con nuestro programa y plantearnos después cómo lo llevamos fuera de la malla computacional, a 300 metros del buque, o a zonas de profundidad limitada. Veamos cómo podemos conseguir esto. Lo más importante es entender que lo que pretendemos es calcular las olas lejos del buque. Por tanto, los efectos locales, en un entorno próximo al buque no nos interesan, y utilizaremos un modelo que permita simular sólomente los efectos globales. La expresión que nos permite calcular la elevación del oleaje para $-x \rightarrow \infty$, puede expresarse como una integral de Fourier, 4.24

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(u) \sin(sx + uy) + G(u) \cos(sx + uy)\} du$$

La teoría subyacente a estas técnicas se debe a Havelock [13] y a Eggers y Sharma [8], y ya ha sido explicada en el capítulo dedicado a estudiar los métodos teóricos para la estimación de la resistencia al avance, sección 4.2.

7.3.5 Resumen.

Como resumen a este asunto, destacamos una serie de ideas.

1. El problema del "wash" está relacionado con las olas generadas por buques rápidos y por la transformación en amplitud que estas olas sufren al llegar a la costa.
2. La gran amplitud de estas olas, y el hecho de que las zonas de navegación sean normalmente aguas protegidas o interiores hace que los daños ecológicos y a otros usuarios del medio marino sean a veces importantes e inadmisibles.
3. Los requerimientos legales se basan en estudios de amplitud y de energía del tren de olas obtenidos a unas determinadas distancias del buque y a unas determinadas profundidades.
4. Usamos los métodos objeto de la tesis para estimar el tren de olas, y usamos el método del corte longitudinal[8] para reconstruir todo el tren y extrapolar a la zona de definición de los requerimientos.

5. Para propagar a zonas de aguas poco profundas no son útiles los métodos del corte longitudinal, y hay que utilizar técnicas propias de los ingenieros de costas. En este sentido, lo óptimo sería propagar integrando las ecuaciones de Boussinesq, pero para grandes dominios, eso no es computacionalmente posible. Por tanto se usan modelos más sencillos (parabólicos)[26] para estimar la transformación de las olas por refracción con el fondo, y la difracción. También tienen en cuenta, los más sofisticados, las corrientes en la zona, el rozamiento con el fondo, etc.

Capítulo 8

Conclusiones y aportaciones.

8.1 Aportaciones.

1. Estudio sistemático de los flujos con popa de espejo.
 - (a) En los flujos con popa de espejo seca, se ha desarrollado una condición, la expansión de Taylor en el borde de salida mejorada, ver 3.4.3, que tiene en cuenta la existencia de componente vertical en la velocidad en el espejo.
 - (b) En los flujos con popa de espejo seca, se ha desarrollado una condición, la condición linealizada ETSIN 1, 3.4.4, que combina de modo muy inteligente la condición de tangencia y la condición dinámica en el espejo.
 - (c) En los flujos con popa de espejo seca, se ha desarrollado una condición, la condición linealizada ETSIN 2, 3.4.5, en la que mediante un parámetro se tienen en cuenta de modo explícito las condiciones cinemática y dinámica en el espejo.
2. Tratamiento de la transformación de derivadas en la superficie libre, mediante splines a lo largo de los puntos característicos de los paneles, ver sección 2.4.4. Las tangentes en cada punto a estas líneas son una consecuencia directa de esta definición. Los coeficientes de transformación de derivadas también. Se detalla cómo se incorpora este tratamiento a la discretización de la condición de Bruzzone de la superficie libre, ver sección 2.4.5.

3. Interpretación y análisis de los resultados obtenidos aplicándolos a casos experimentales reales.
4. Desarrollo de una metodología de trabajo nueva en este tipo de problemas. Se usa un potente modelador de geometrías comercial para tratar y dejar preparada para su mallado la geometría más compleja que se quiera concebir. Se usa un mallador comercial, que permite el mallado de la carena poniendo más énfasis en las zonas de mayores curvaturas. Desde aquí se ejecuta directamente nuestro módulo de cálculo y se recogen los resultados visualizándolos con el postproceso de este mismo paquete.
5. Una de las aportaciones más relevantes de esta tesis es la validación a la que han sido sometidos los resultados de los cálculos. De alguna de las formas se disponía de resultados experimentales, y de otras hemos tenido que obtenerlos con las posibilidades experimentales que nos ofrece el Canal de la ETSIN. De hecho, hemos hecho públicos esos resultados en la página web del Canal (<http://canal.etsin.upm.es/>), contribuyendo de modo importante al banco de datos de validación disponible. Hemos tenido también oportunidad de comparar estos resultados con los códigos comerciales disponibles, y los resultados son, al menos, de igual calidad.

8.2 Conclusiones.

1. Se ha desarrollado una herramienta valiosa para la evaluación de formas de buques en lo que se refiere a la optimización de las mismas para minimizar la resistencia por formación de olas. Esta herramienta está orientada a usuarios cualificados pero no expertos y está siendo utilizada en el Canal de Ensayos Hidrodinámicos de la ETSIN en el proceso de optimización de formas.
2. Los resultados son buenos en el tercio de proa si comparamos los cortes longitudinales. Hay divergencias en la ola del casco y en cortes muy alejados. Estas diferencias se explican por efectos locales y por falta de resolución. Por tanto, la herramienta está orientada a la optimización de formas en esa parte del buque: las formas del shoulder de proa, el

ángulo de entrada en la flotación y sobre todo la longitud, posición y forma del bulbo de proa.

3. Los métodos para estimar la resistencia por formación de olas explicados en el capítulo 4, utilizando integración de presiones no ofrecen resultados numéricos muy buenos, pero capturan razonablemente bien las tendencias. Sin embargo, el método de los cortes longitudinales no ofrece la fiabilidad necesaria. La aproximación que se hace con estos métodos despreciando completamente los efectos locales no parece suficientemente precisa, aunque necesitamos investigar más en este tema.
4. Es importante plantearse cuáles son los caminos a seguir a la terminación de esta tesis, para avanzar en el conocimiento de estos problemas. Hay varias direcciones que hemos dejado esbozadas en el capítulo 7, en el que se comentan los posibles desarrollos futuros en cuanto a los códigos de base para la aproximación numérica del problema global, y se presentan algunos resultados de códigos no lineales que se hallan en su última etapa (la más costosa) de implementación. En los flujos con popa en espejo hemos detectado algunos problemas a números de Froude alto. La resolución de estos problemas irá en paralelo con la construcción de un método no lineal, que posibilite tener en cuenta los efectos del trimado. Por otro lado, para cierto tipo de buques, los veleros de competición, es necesario estimar, además de la resistencia al avance, la sustentación generada por la quilla y el timón. Este problema de naturaleza aerodinámica se complica por la presencia de la superficie libre[18],[19]. Se empezaron estudios en esa dirección que no han continuado debido a la desaparición del equipo español de Copa América que eran los potenciales destinatarios de estos estudios. También existen una serie de nuevas posibilidades para los métodos potenciales, utilizando métodos multimalla para acelerar y mejorar la solución, otras formas de imponer las condiciones de contorno en los paneles [43] etc., sobre las que convendría trabajar para mejorar nuestros métodos. De cualquier modo, el cambio de método de aproximación del problema del flujo con superficie libre en estudio no afecta a la estructura de la herramienta diseñada por lo que su integración en la metodología descrita será inmediata. Además, en paralelo con las líneas aquí expuestas, hay otras ramas de avance que no hemos mencionado.
5. También es importante proceder a la distribución de esta herramienta

en los centro académicos afines, oficinas de proyectos, y oficinas técnicas de astilleros para contribuir a una mejor calidad en el diseño de las formas. Además, se ha elaborado una práctica de laboratorio dirigida a los estudiantes de la asignatura de Prácticas de Teoría del Buque, basada en estos códigos con la que esperamos que los estudiantes adquieran un conocimiento básico de las posibilidades de estos métodos.

Bibliografía

- [1] Avanzini, G., Benedetti, L., and Penna, R., Experimental Evaluation of Ship Resistance for RANS Code Validation, ISOPE 98, Montreal, Canada, Maggio 1998.
- [2] Bermejo, R., Pérez Rojas, L., Sánchez, J.M., Souto, A., Zamora, R., Sobre una línea de investigación en hidrodinámica numérica. Ingeniería Naval, Febrero 1993.
- [3] Bermejo, R., Pérez Rojas, L., Sánchez, J.M., Souto, A., Zamora, R., Una nota sobre esquemas para la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes por elementos finitos en hidrodinámica. Ingeniería Naval, Abril 1993.
- [4] Bermejo Rodolfo : Sobre un algoritmo de Elementos Finitos-Método Modificado de las Características para la Integración de la Ecuación de Transporte-Difusión. Tesis Doctoral, E.T.S.I.Navales, U.P.M. (1992)
- [5] Bruzzone, D., Numerical Evaluation of the Steady Free Surface Waves. Proceedings of CFD Workshop Tokyo 94. Vol 1. Pag 126-134.
- [6] Daube, O., and Dulieu, A.: A numerical approach of the nonlinear wave resistance problem. 3rd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Paris, France, 1981.
- [7] Dawson C.W.: A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems, Proceedings of Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. Berkeley, pp. 30-38, (1977)
- [8] Eggers, K.W.H., Sharma, S.D. & Ward, L.W., An Assesment of Some Experimental Methods for Determining the Wavemaking Characteristics of a Ship Form., *Trans. SNAME*, Vol. 75, pp. 112-157, 1967.

- [9] Fry, D.J., and Kim, Y.H., 1985, Bow Flow Field fo Surface Ships, Proceedings of the 15th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, Hamburg, pp. 319-346.
- [10] Gadd G.E.: A method of computing the flow and surface wave pattern around hull forms. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects, (1976).
- [11] Gadd G.E., The wash of boats on recreational waterways, Transactions of The Royal Institution of Naval Architects, pp. 261-280, 1994.
- [12] González, L.M., Integración de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de los elementos finitos y el método de las características. Aplicaciones a casos con superficie libre. Tesis Doctoral. Departamento de Arquitectura y Construcción Navales. E.T.S.I. Navales. U.P. Madrid. 2001.
- [13] Havelock, T.H., The Propagation Of Groups Of Waves in Dispersive Media, With Application To Waves Produced By a Travelling Disturbance., Proc. Royal Society of London, London, England, Series A, pp. 398-430, 1908.
- [14] Herreros, M.A., Souto, A. La influencia de los fenómenos "squat" y "wake wash" en el diseño de buques rápidos: Recomendaciones y límites aceptables. SSTT Ingeniería Naval. Cádiz. Mayo 2001.
- [15] Hess J.L., Smith A.M.O.: Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. Journal of Ship Research. September 1964
- [16] Hess J.L.: A higher order panel method for three-dimensional potential flow. Douglas Report N 62269-77-C-0437, 1979.
- [17] Hughes, M., Bertram, V.: A Higher-Order Panel Method for 3-D Free Surface Flows, Institut für Schiffbau, Bericht Nr. 558, Hamburg, Germany, 1995.
- [18] Janson C.E.: Potential Flow Panel Methods for the Calculation of Free-surface Flows with Lift. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Gothemburg, 1997.

- [19] Janson C.E.: A method for the prediction of wave resistance, lift and induced drag. Thesis submitted as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Licentiate of Engineering. Department of Naval Architecture and Ocean Engineering. Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1993.
- [20] Jensen G., Mi, Z.-X., Söding, H.: Rankine source methods for numerical solutions of the steady wave resistance problem. 16th Symp. Naval Hydrodynamics, Berkeley, USA, 1986.
- [21] Jensen G., Bertram V., Söding, H.: Ship Wave-Resistance Computations, Proc. 5th Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima, Japan 1988.
- [22] Kellogg O.D.: Foundations of Potential Theory: Frederick Ungar Publishing Company, NY, 1929, también en Dover Publications.
- [23] Kelvin, Deep sea ship-waves. Philosophical Magazine, ser. 6, vol. 11, No. 61, 1906.
- [24] Kim K.J.: Ship Flow Calculations and Resistance Minimisation. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1989.
- [25] Kim K.J., Lucas, T.: Nonlinear Ship Waves. 18th Symp. Naval Hydrodynamics, Ann Arbor, Michigan, USA, 1990.
- [26] Kofoed-Hansen, H., Kirkegaard, J., Technical Investigation of Wake Wash from Fast Ferries. Danish Hydraulic Institute, Report No. 5012, 1996.
- [27] Korving, C., Hermans, A.J.: The wave resistance for flow problems with a free surface. 2nd Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics, Berkeley, USA, 1977.
- [28] Longo, J. and Stern, F., "Resistance, Sinkage and Trim, Wave Profile, and Nominal Wake and Uncertainty Assessment for DTMB Model 5512," Proc. 25th ATTC, Iowa City, IA, 24-25 September 1998.
- [29] Pérez Rojas, L., Sánchez, J.M., Zamora, R., Bermejo, R., Souto, A. La Calidad en el Software. Validación del CFD (Computational Fluid Dynamics). Jornadas Ibéricas de Engenharia Naval. Lisboa, Noviembre 1997.

- [30] Pérez Rojas, L., Sánchez, J.M., Souto, A. A practical application of CFD: The optimization of the bulbous bow in a RO-RO ship. First International Conference on Marine Industry. Varna. Bulgaria. Junio 1996.
- [31] Maruo, H.R., Ogiwara, S.: A method of computation for steady ship waves with nonlinear free surface conditions. 4th Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics, Washington, USA, 1985.
- [32] Michell, J.H. The wave resistance of a ship. Philosophical Magazine, ser. 5, vol. 45, No. 272, 1898.
- [33] Musker, A.J., A panel method for predicting ship wave resistance. 17th Symposium on naval hydrodynamics, 1985.
- [34] Musker, A.J., Stability and Accuracy of a Non-Linear Model for the Wave Resistance Problem. 5th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, 1989.
- [35] Newman, J.H., Marine Hydrodynamics, MIT Press, Cambridge, Mass., USA. 402 pages, 1977.
- [36] Ni S.H.: Higher Order Panel Methods for Potential Flows with Linear and Non-Linear Free Surface Boundary Conditions. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1987.
- [37] Olivieri, A., and Penna, R., Uncertainty Assessment in Wave Elevation Measurements, ISOPE 99, Brest, France, June 99.
- [38] Oomen, A.: Free-surface potential flow computation using a finite-element method. 3rd Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics, Paris, France, 1981.
- [39] Raven, H.C., Variations on a theme by Dawson. 17th symposium in naval hydrodynamics. 1988.
- [40] Raven, H.C. A Solution method for the nonlinear ship wave resistance problem. Tesis doctoral Marin, 1996. ISBN 90-75757-03-4
- [41] Reed, A.M., Telste, J.G., Analysis of transom stern flows. 18th Symposium in Naval Hydrodynamics. Ann Arbor. USA. 1990.

- [42] Seto, H. On Rationalization of a Staggered Collocation Rankine Source Scheme. Transactions of The West-Japan Society of Naval Architects, No 90, 1995.
- [43] Söding, H.: Advances in Panel Methods. 21st Symp in Naval Hydrodynamics. Trondheim, 1996.
- [44] Souto, A., Ortiz, J.A. The influence of wake wash in ports operation. Second International Conference on Maritime Engineering and Ports. 27 - 29 September 2000, Barcelona, Spain
- [45] Telste, J.G., Reed, A.M., Calculation of transom stern flows. 6th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics. 2-5 August, 1993. Iowa City. Iowa. USA.
- [46] Toda Y., Stern F., Longo J.: Mean-flow measurements in the boundary layer and wake and wave field of a series60 $C_B = 0.6$ ship for Froude numbers .16 and .316 IIHR report n.352, The University of Iowa, Iowa City, July 1991.
- [47] Tulin, M.P., Hsu, C.C. Theory of High-Speed Displacement Ships with Transom Sterns. Journal of Ship Research, 30(3):186-93. 1986.
- [48] Ursell, F. Steady wave patterns on a non-uniform steady fluid flow., Journal of Fluid Mechanics, 9, pp. 333-346, 1960.
- [49] Xia F.: Numerical Calculation of Ship Flows, with Special Emphasis on the Free Surface Potential Flow. PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 1987.