Colégio Dom Aguirre

REVISÃO – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE DO CICLO TRIGONOMÉTRICO
TURMA: 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

PROF. LUCAS FACTOR

Trigonometria no Triangulo Retângulo

Considere o triangulo retângulo abaixo:
Definimos seno (*sen)* de um ângulo α , cosseno (*cos*) de um ângulo α, tangente *(tg*) de um ângulo α ,cotangente *(cotg*) de um ângulo α, secante*(sec)* de um ângulo α e cossecante (*cossec*) de um ângulo α, como :

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{CatetoOposto}{Hipotenusa} = \frac{CO}{H}$$

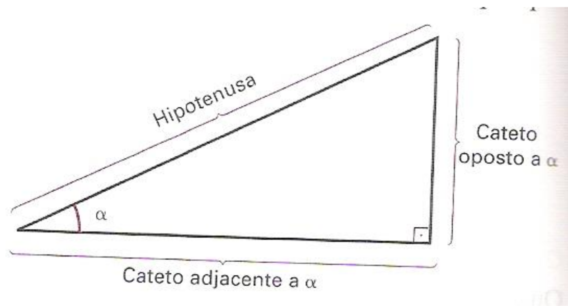
$$\cos(\alpha) = \frac{CatetoAdjacente}{Hipotenusa} = \frac{CA}{H}$$

$$tg(\alpha) = \frac{CatetoOposto}{CatetoAdjacente} = \frac{CO}{CA}$$

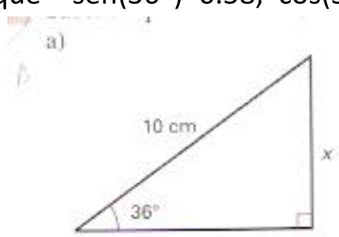
$$\cot g(\alpha) = \frac{CatetoAdjacente}{CatetoOposto} = \frac{CA}{CO}$$

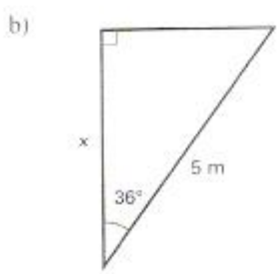
$$\sec(\alpha) = \frac{Hipotenusa}{CatetoAdjacente} = \frac{H}{CA}$$

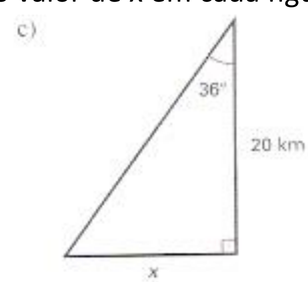
$$\cos\sec(\alpha) = \frac{Hipotenusa}{CatetoOposto} = \frac{H}{CO}$$



Exemplos:
Sabemos que sen(36º)=0.58, cos(36º)=0.80 e tg(36º)=0.72 , Calcular o valor de x em cada figura:







Resolução:

a) $\text{sen}(36°) = \frac{x}{10} \quad \Rightarrow \quad 0{,}58 = \frac{x}{10} \quad \Rightarrow x = 5{,}8cm$

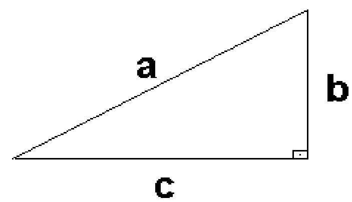
b) $\cos(36°) = \frac{x}{5} \quad \Rightarrow \quad 0{,}80 = \frac{x}{5} \quad \Rightarrow x = 4m$

c) $tg(36°) = \frac{x}{20} \quad \Rightarrow \quad 0{,}72 = \frac{x}{20} \quad \Rightarrow x = 14{,}4Km$

Teorema de Pitágoras:

Em todo triangulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Isto é:

$b^2 + c^2 = a^2$



Exemplo: Sabendo que α é um ângulo agudo e que $\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$, calcular $tg(\alpha)$ e $\cot g(\alpha)$.

Resolução:

Existe um triangulo retângulo com ângulo agudo α tal que o cateto adjacente a α mede 5 e a hipotenusa mede 13.Chamamos x o valor do cateto oposto ao ângulo agudo.

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$x^2 + 5^2 = 13^2$

$x^2 = 169 - 25$

$x^2 = 144$

$x = 12$

Logo, $tg(\alpha) = \frac{CatetoOposto}{CatetoAdjacente} = \frac{12}{5}$ e

$\cot g(\alpha) = \frac{CA}{CO} = \frac{5}{12}$

Exercício: Sabendo que α é um ângulo agudo e que $\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$, calcular $tg(\alpha)$ e $\cot g(\alpha)$.

Tabela dos Ângulos Notáveis

	30º	**45º**	**60º**
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cós	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Por convenção:

$\mathrm{sen}^n(\alpha) = (\mathrm{sen}(\alpha))^n$

$\cos^n(\alpha) = (\cos(\alpha))^n$

$\mathrm{sen}\ k\alpha = \mathrm{sen}(k\alpha)$

Exercícios:
Calcular o valor das expressões:

1) $E = \dfrac{\cos(60^\circ) + \cos^2(30^\circ)}{\text{sen}^3(30^\circ) + tg^5(45^\circ)}$

Resolução:

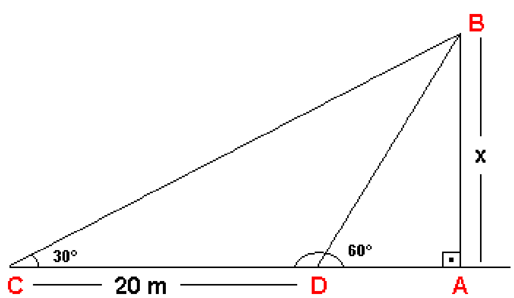
$$E = \frac{\frac{1}{2} + (\cos 30^\circ)^2}{(\text{sen}\,30^\circ)^3 + (tg\,45^\circ)^5} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1^5} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} + 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{10}{9}$$

2) $E = \dfrac{\text{sen}\,2x + \cos 4x}{\cos^2 2x}$ para *x=15º*

Resolução:

$$E = \frac{\text{sen}(2.15^\circ) + \cos(4.15^\circ)}{(\cos 2.15^\circ)^2} = \frac{\text{sen}(30^\circ) + \cos(60^\circ)}{(\cos 30^\circ)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

3)Determinar o valor de x na figura:



Resolução:
Como o triangulo BCD é isósceles, pois possui dois ângulos de mesma medida; logo, CD=BD=20m.
Assim, do triangulo ABD, temos que:

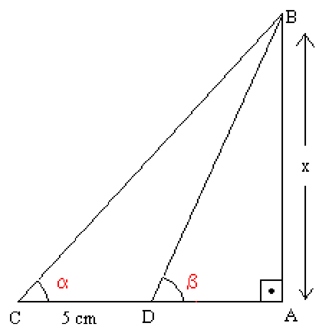
$$\text{sen}\,60^\circ = \frac{x}{BD} = \frac{x}{20}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20}$$

$$x = 10\sqrt{3}$$

Logo, $x = 10\sqrt{3}$ m

4) Sabendo que $tg\alpha = 2, \quad tg\beta = 3$, calcular o valor de x na figura



Resolução:
Vamos introduzir uma variável auxiliar, fazendo *DA=y.*
Assim do triangulo ABC temos:

$$tg\alpha = \frac{x}{5+y} \quad \Rightarrow 2 = \frac{x}{5+y}$$

Do triangulo ABD temos:

$$tg\beta = \frac{x}{y} \qquad \Rightarrow 3 = \frac{x}{y}$$

Devemos então resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{x}{5+y} & (I) \\ 3 = \dfrac{x}{y} \quad \Rightarrow y = \dfrac{x}{3} & (II) \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$2 = \frac{x}{5 + \frac{x}{3}} \quad \Rightarrow x = 30$$

Logo, $x = 30$ cm

Estudo na Circunferência
Unidades de Medidas de Arcos

- Sendo A e B pontos de uma circunferência de centro O, tal que o arco AB é $\frac{1}{360^o}$ dessa circunferência, define-se a medida do ângulo AÔB e a medida do arco AB como sendo um grau (1º); logo, uma circunferência mede 360º.
- Sendo A e B pontos de uma circunferência de centro O, tal que o arco AB tem o comprimento do raio dessa circunferência , define-se a medida do ângulo AÔB e a medida do arco AB como sendo um radiano (1 rad); logo, uma circunferência mede 2π rad, pois o comprimento de uma circunferência de raio *r* é $2\pi r$.

OBS: Radiano é a medida do ângulo central da circunferência, cujos lados determinam sobre a circunferência um arco de comprimento igual ao raio.

Transformação de Unidades de Medidas de Arcos

Uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se ambas são medidas de um mesmo arco. Por exemplo, 2π rad é equivalente a 360º, pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa.

Conseqüentemente, temos que:

π rad é equivalente a 180°

Disso segue que: 1° é equivalente(~) $\frac{1}{180}\pi$ rad e 1 rad é equivalente a $\frac{180°}{\pi}$

Exemplo: a)Ache a medida equivalente em radianos de 162°

b)Ache a medida equivalente em graus de $\frac{5\pi}{12}$ rad

Resolução:

a) 162° ~$162.\frac{\pi}{180}$ rad

162° ~ $\frac{9\pi}{10}$ rad

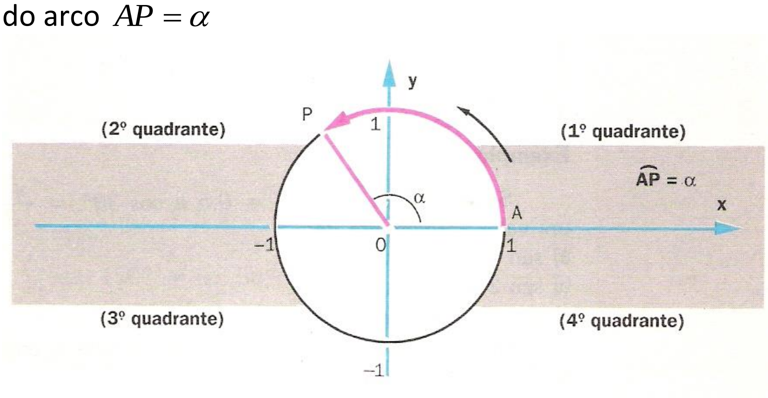
b) $\frac{5\pi}{12}\ rad \sim \frac{5\pi}{12}.\frac{180°}{\pi}$

$\frac{5\pi}{12} rad \sim\ 75°$

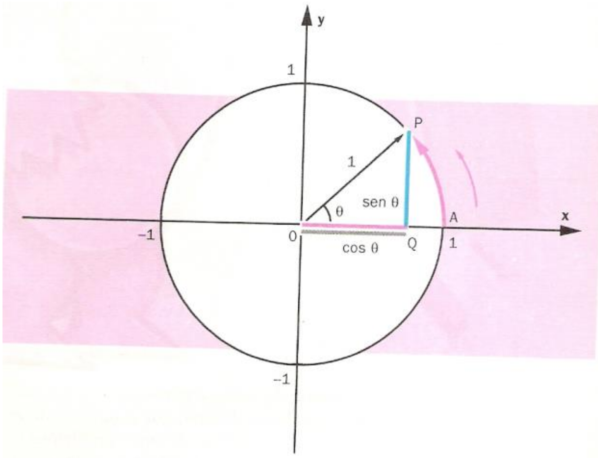
A Circunferência Trigonométrica

A Circunferência Trigonométrica também é chamada de ciclo trigonométrico, tem raio unitário (1) e centro na origem.

Sobre a circunferência serão fixados arcos, com origem no ponto A(1,0).Esses arcos serão percorridos no sentido anti-horário.Lembre-se de que a medida do ângulo central AÔP é igual á medida angular do arco $AP = \alpha$



Vejamos então, as definições de seno, cosseno e tangente de um arco de 0º a 360º ou de 0 rad a 2π rad



Definimos:

Seno de θ é a ordenada (correspondente ao eixoy)do ponto P (indicação: senθ)
Cosseno de θ é a abcissa (correspondente ao eixo x)do ponto P(indicação: cosθ)

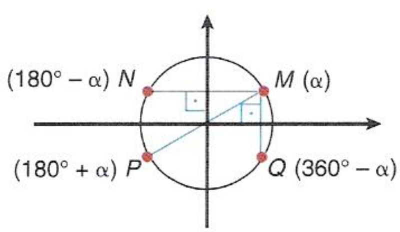
Observe na figura que permanecem validas as definições de seno e cosseno para ângulos agudos, num triangulo retângulo .Veja:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{QP}{raio} = \frac{QP}{1} = QP$$

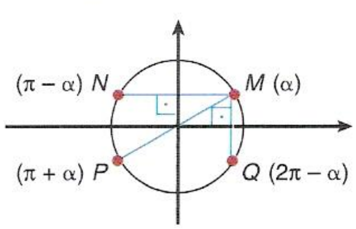
$$\cos\theta = \frac{OQ}{raio} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Simetrias

- Sendo α uma medida em graus

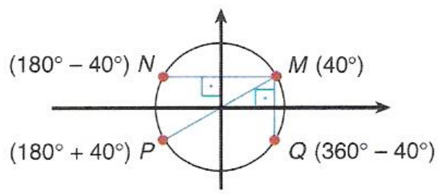


- Sendo α uma medida em radianos

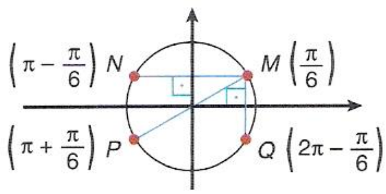


Exemplos:

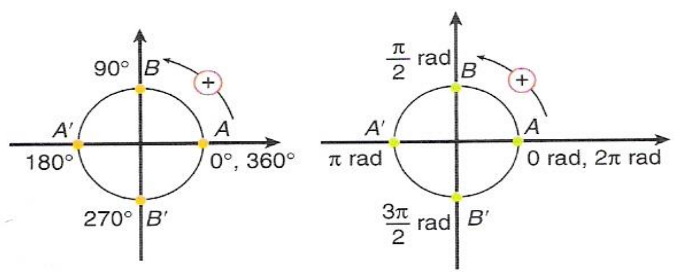
a)



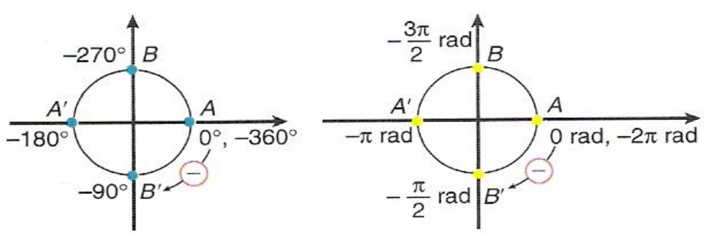
b)



- **Sentido anti-horário**



- **Sentido horário**



Assim:

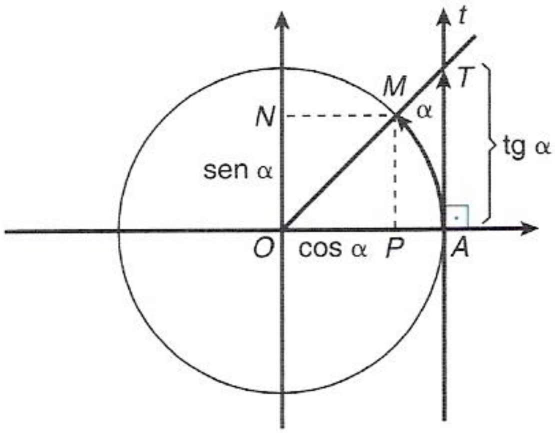
1° Quadrante: 0° a 90° ou (0 rad a $\frac{\pi}{2}$ rad)

2° Quadrante: 90° a 180° ou ($\frac{\pi}{2}$ rad a π)

3° Quadrante: 180° a 270° ou (π rad a $\frac{3\pi}{2}$ rad)

4° Quadrante: 270° a 360° ou ($\frac{3\pi}{2}$ rad a 2π)

Seno, Cosseno e Tangente de um Arco Trigonométrico



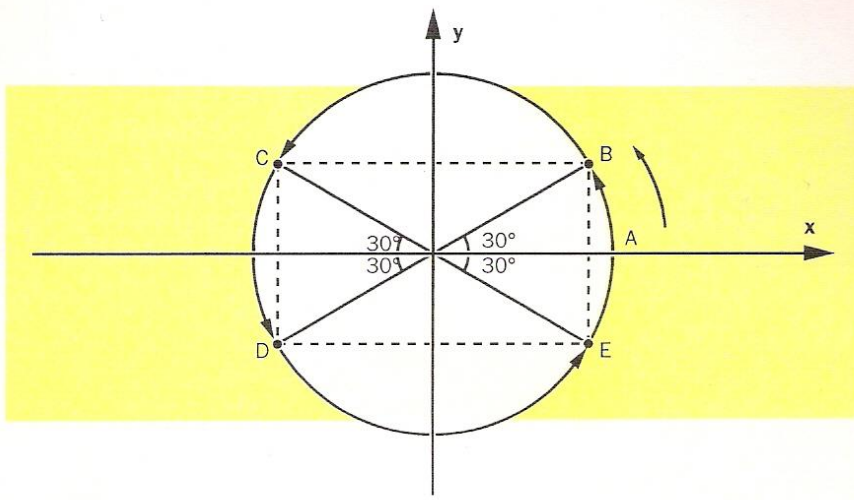
	0° 0 rad	90° $\frac{\pi}{2}$ rad	180° π rad	270° $\frac{3\pi}{2}$ rad	360° 2π rad
sen	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tg	0	∄	0	∄	0

A tabela dos ângulos notáveis e a relação $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}$, com seno $\alpha \neq 0$, continuam valendo para os arcos trigonométricos, pois a medida do ângulo central $M\hat{O}A$ é igual à medida do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$.

Exemplo: Sabendo que $\text{sen}\,30^o = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad e \qquad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$, achar um valor aproximado de:

a) sen 150º e cos 150º
b)sen 210º e cos 210º

Primeiro observe as simetrias da figura abaixo:

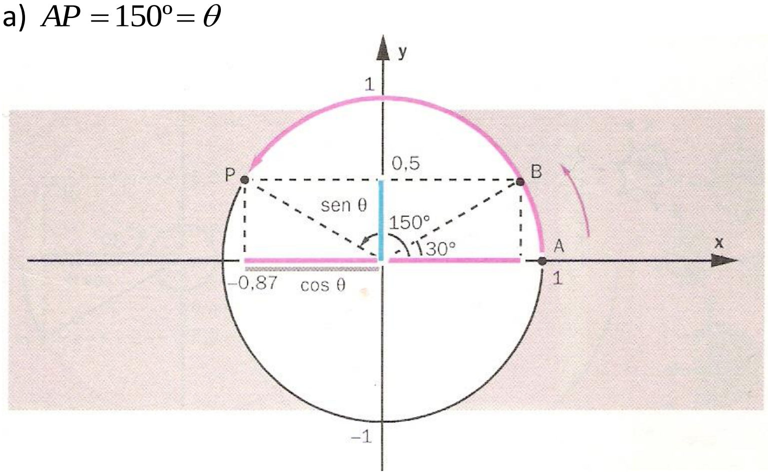


Elas permitem concluir que:

- $\overset{\frown}{AC} = 180^\circ - 30^\circ$, isto é, $\overset{\frown}{AC} = 150^\circ$. Além disso, o segmento $\overline{BC}$ é paralelo ao eixo x.
- $\overset{\frown}{AD} = 180^\circ + 30^\circ$, isto é, $\overset{\frown}{AD} = 210^\circ$. Os pontos B e D são diametralmente opostos.
- $\overset{\frown}{AE} = 360^\circ - 30^\circ$, isto é, $\overset{\frown}{AE} = 330^\circ$. O segmento $\overline{BE}$ é paralelo ao eixo y.

Solução:

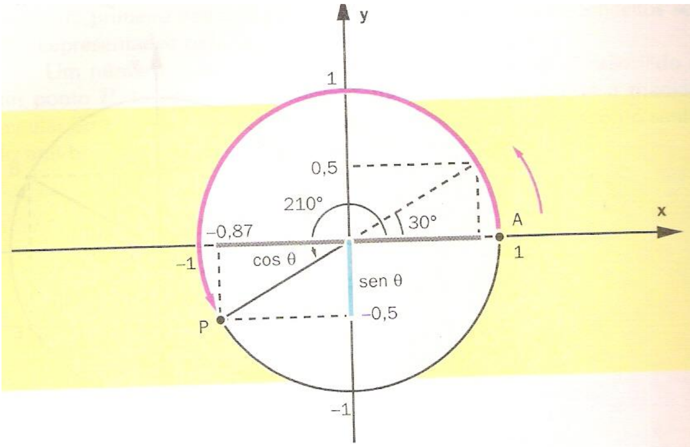
a) $AP = 150^\circ = \theta$



Então:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = 0{,}5 \\ \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ \cong -0{,}87 \end{cases}$$

b) $AP = 210^\circ = \theta$



Então:

$$\begin{cases} \text{sen}\, 210^\circ = -\text{sen}\, 30^\circ = -0{,}5 \\ \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ \cong -0{,}87 \end{cases}$$

O exemplo anterior mostra que há uma relação entre o quadrante e o valor de seno e cosseno. Sendo θ a medida de um arco e P a sua extremidade, notamos que:

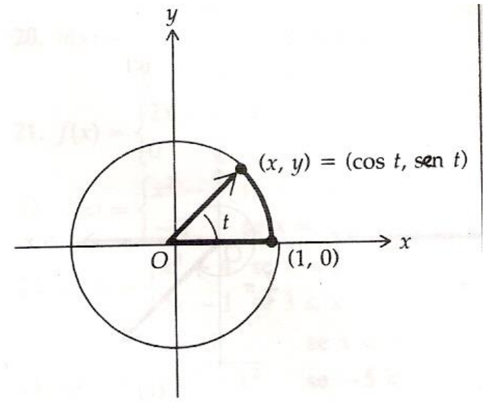
- P no primeiro quadrante: $\text{sen}\,\theta > 0 \quad e \quad \cos\theta > 0$;
- P no 2º quadrante: $\text{sen}\,\theta > 0 \quad e \quad \cos\theta < 0$;
- P no 3º quadrante: $\text{sen}\,\theta < 0 \quad e \quad \cos\theta < 0$
- P no 4º quadrante: $\text{sen}\,\theta < 0 \quad e \quad \cos\theta > 0$

Sendo θ a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante:

- $\text{sen}\,(180^\circ - \theta) = \text{sen}\,\theta \qquad e \qquad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
- $\text{sen}(180^\circ + \theta) = -\text{sen}\,\theta \qquad e \qquad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$
- $\text{sen}(360^\circ - \theta) = -\text{sen}\,\theta \qquad e \qquad \cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

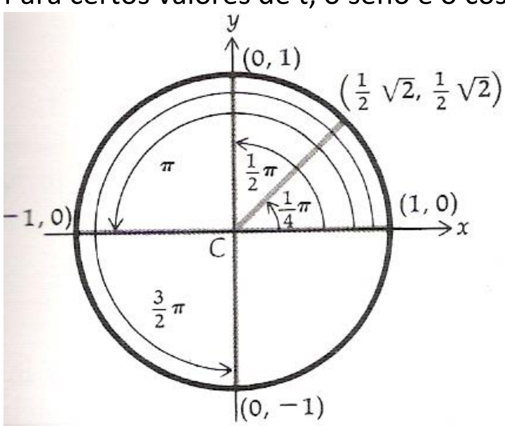
Funções Trigonométricas

Definição1: Suponha que t seja um numero real.Coloque na posição padrão um ângulo com *t* rad de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência do circulo unitário com centro na origem. Se P for o ponto *(x,y)*, então a função seno será definida por:
$\text{sen}\, t = y$ então a função cosseno será definido por $\cos t = x$



Vemos que *sen t* e *cos t* estão definidas para todos os valores de *t*. Assim o domínio das funções seno e cosseno é o conjuntos de todos os números reais .O maior valor da função é 1 e o menor é –1.As funções seno e cosseno assumem todos os valores entre –1 e 1; segue ,portanto, que imagem da função é [–1, 1].

Para certos valores de t, o seno e o cosseno são facilmente obtidos de uma figura.



Vemos que:

- sen(0) = 0 e cos(0) =1
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
- $\operatorname{sen}(\pi)=0$ $\qquad \cos(\pi)=-1$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ $\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Propriedades:

1) $\operatorname{sen}(-t)=-\operatorname{sen}(t)$ e $\cos(-t)=\cos(t)$

Ou seja, a função seno é uma função ímpar e a função cosseno é uma função par.

2) $\operatorname{sen}(t+2\pi)=\operatorname{sen} t$ e $\cos(t+2\pi)=\cos t$

Esta propriedade é chamada de Periodicidade.

Definição2: Uma função *f* será periódica se existir um numero real $p \neq 0$ tal que quando *x* estiver no domínio de *f*, então *x+p* estará também no domínio de *f* e *f(x+p)=f(x).*

O numero p é chamado de período de f.

Exemplo: Use a periodicidade da seno e cosseno para determinar o valor exato da função

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

b) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

c) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Resolução:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+16\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{16\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2.2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi+6\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi-6\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

Relação Fundamental da Trigonometria

- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Definição:

- $tg\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
- $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
- $\cos\sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Identidades Notáveis

- $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$
- $\cos\sec^2\alpha = 1 + \cot g^2\alpha$
- $(\operatorname{sen}\alpha).(\cos\sec\alpha) = 1$
- $(\cos\alpha).(\sec\alpha) = 1$
- $(tg\alpha).(\cot g\alpha) = 1$