Ejercicios resueltos. Guía Práctica TEMA I

Vector Gradiente. Derivada Direccional

Ejercicio 1. Corresponde al ejercicio 17 de la Guía Práctica Tema 1.

Dado el campo escalar $g(x,y) = x + y^2$,

a. Encontrar el vector gradiente del campo escalar $g(x,y)$ en el punto $(3,-1)$. Determinar la recta tangente a la curva de nivel $g(x,y) = 4$ en el punto $(3,-1)$.

b. Graficar la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente. Enunciar la propiedad utilizada.

Solución

a. El vector gradiente se calcula como:

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\hat{\jmath} = g_x(x,y)\hat{\imath} + g_y(x,y)\hat{\jmath} = \hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}$$

En el punto $(3,-1)$, el gradiente resulta:

$$\vec{\nabla} g(3,-1) = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$$

La recta tangente (en rigor, la pendiente de la recta tangente) se obtiene utilizando la propiedad de ortogonalidad entre curva de nivel y el vector gradiente. Por lo tanto, un vector normal al gradiente, será tangente a la curva de nivel en el punto dado.

Este vector se obtiene cambiando de lugar las componentes del gradiente y a UNA de ellas, cambiarle el signo[1]. Por ejemplo:

$$\vec{v}_{tan} = -2\,\hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

Otro caso podría ser:

$$\vec{v}_{tan} = 2\,\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$$

Note que ambos vectores tienen la misma pendiente:

$$m = \frac{\text{componente en dirección } \hat{\jmath}}{\text{componente en dirección } \hat{\imath}} = \frac{1}{2}$$

De esta manera, la recta tangente conocida un punto y la pendiente resulta:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

Reemplazando:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

Operando:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}$$

[1] Esto es para que el producto escalar componente a componente entre ambos vectores sea igual a cero.

b. La curva de nivel se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} g(x,y) = x + y^2 \\ g(x,y) = 4 \end{cases}$$

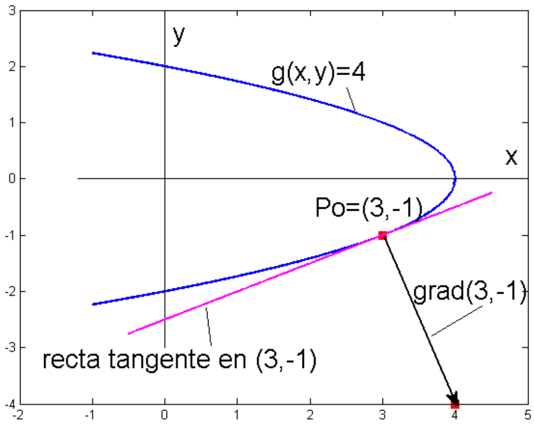
Por igualación, se tiene:

$$x + y^2 = 4$$

Despejando para obtener la forma explícita de la curva de nivel:

$$y = \pm\sqrt{4 - x}$$

La gráfica es:



La propiedad utilizada para encontrar la recta tangente fue la ortogonalidad entre el gradiente y la curva de nivel, como se explicó en el apartado anterior.

Ejercicio 2. Corresponde al ejercicio 21 de la Guía Práctica Tema 1.

La temperatura (en ºC) en la superficie de una placa metálica es $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección, a partir de $(2,-3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

Solución

Es un problema de derivada direccional. La dirección en la que se produce es en la misma del vector gradiente. El gradiente resulta:

$$\vec{\nabla}T(x,y) = \frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\hat{\jmath} = -8x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla}T(2,-3) = -16\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

Para obtener la dirección (versor $\hat{y}_\theta$), debe normalizarse el vector gradiente haciendo:

$$\hat{y}_\theta = \frac{\vec{\nabla}T(2,-3)}{\left\|\vec{\nabla}T(2,-3)\right\|} = \frac{-16\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}}{\sqrt{(-16)^2 + (6)^2}}$$

Por lo tanto, la dirección es:

$$\boxed{\hat{y}_\theta = \frac{-16}{\sqrt{292}}\hat{\imath} + \frac{6}{\sqrt{292}}\hat{\jmath}}$$

La tasa o ritmo de crecimiento en la dirección encontrada (máxima) es igual a:

$$D_{\hat{y}_\theta}T(P_0)_{máx} = \left\|\vec{\nabla}T(P_0)\right\|$$

$$D_{\hat{y}_\theta}T(P_0)_{máx} = \sqrt{(-16)^2 + (6)^2}$$

$$\boxed{D_{\hat{y}_\theta}T(P_0)_{máx} = \sqrt{292}}$$

Ejercicio 3. Ejercicios extras.

Calcular la derivada direccional de los siguientes campos:

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y) - \ln\left(\frac{2}{x-y}\right)$, en el punto $P_0\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y en la dirección que va desde el punto $P_1(8,-2)$ al punto $P_2(5\,,1)$

Nota. **Recuerde utilizar su calculadora en modo de cálculo de radianes**

Solución

Definición de derivada direccional, notación vectorial.

$$D_{\hat{y}_\theta}f(P_0) = \vec{\nabla}f(P_0) \cdot \hat{y}_\theta$$

- Vector gradiente de $f(x,y)$,

$$\vec{\nabla}f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\hat{\jmath} = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath} = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

$$\vec{\nabla}f(x,y) = \left[2xy\cos(x^2y) + \frac{x-y}{(x-y)^2}\right]\hat{\imath} + \left[x^2\cos(x^2y) - \frac{x-y}{(x-y)^2}\right]\hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla}f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \left[\pi\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{2}{\pi-2}\right]\hat{\imath} + \left[\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) - \frac{2}{\pi-2}\right]\hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla}f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = -0.702\,\hat{\imath} - 3.679\,\hat{\jmath} \;=\; (-0.702,\; -3.679)$$

- Cálculo del versor $\hat{y}_\theta$

Se construye un vector $\vec{v}$ que une los puntos P_1 y P_2 de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v} = (1-8)\hat{\imath} + [5-(-2)]\hat{\jmath} = -7\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$$

Debe normalizarse el vector, pues la norma de $\hat{y}_\theta$ es igual a 1:

$$\hat{y}_\theta = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\frac{7}{\sqrt{98}}\hat{\imath} + \frac{7}{\sqrt{98}}\hat{\jmath}$$

- Cálculo de la derivada direccional:

$$D_{\hat{y}_\theta} f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \hat{y}_\theta$$

$$D_{\hat{y}_\theta} f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = (-0.702\,\hat{\imath} - 3.679\,\hat{\jmath}) \cdot \left(-\frac{7}{\sqrt{98}}\hat{\imath} + \frac{7}{\sqrt{98}}\hat{\jmath}\right)$$

$$D_{\hat{y}_\theta} f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = -0.702\left(-\frac{7}{\sqrt{98}}\right) - 3.679\left(\frac{7}{\sqrt{98}}\right)$$

$$\boxed{D_{\hat{y}_\theta} f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = -2.105}$$

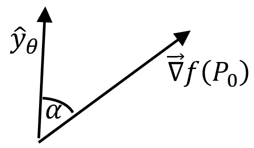
2. $f(x, y) = x\mathrm{e}^{y+2x}$, en el punto $P_0(1,1)$ y en la dirección que forma un ángulo de 68º con respecto al gradiente.

Solución

El cálculo de la derivada direccional, en este caso según el enunciado del problema, se realiza mediante,

$$D_{\hat{y}_\theta} f(P_0) = \left\|\vec{\nabla} f(P_0)\right\| \, \|\hat{y}_\theta\| \cos\alpha$$

Donde $\alpha = 68°$ es el ángulo entre el vector gradiente y la dirección.



- El gradiente de $f(x, y)$ resulta:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\hat{\jmath} = \left[\mathrm{e}^{y+2x} + 2x\mathrm{e}^{y+2x}\right]\hat{\imath} + \left[x\mathrm{e}^{y+2x}\right]\hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla} f(1,1) = 3e^3\,\hat{\imath} + e^3\,\hat{\jmath}$$

- Sabiendo que el módulo de $\hat{y}_\theta$ es igual a 1, la derivada direccional para una dirección a 68º del vector gradiente resulta:

$$D_{\hat{y}_\theta} f(P_0) = \|3e^3\,\hat{\imath} + e^3\,\hat{\jmath}\| \, \|1\| \cos(68º)$$

$$D_{\hat{y}_\theta} f(P_0) = \sqrt{(3e^3)^2 + (e^3)^2}\,\cos(68º)$$

Si su calculadora está en modo sexagesimal:

$$\boxed{D_{\hat{y}_\theta} f(P_0) = 63.516\cos(68º) = 23.793}$$

O, si prefiere usar su calculadora en radianes

$$\boxed{D_{\hat{y}_\theta} f(P_0) = 63.516\cos(1.186) = 23.793}$$