

# Robótica Industrial

Apontamentos teóricos

Exercícios para aulas práticas

Problemas de exame resolvidos

*Vítor M. F. Santos*

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de Aveiro

2003-2004





# Conteúdo

|  |            |
|--|------------|
| <b>1. INTRODUÇÃO</b>   | <b>1-2</b> |
| 1.1 ORIGEM DO TERMO 'ROBOT'  | 1-2        |
| 1.2 ALGUMAS DEFINIÇÕES DE ROBOT E ROBÓTICA   | 1-2        |
| 1.3 CLASSIFICAÇÃO DE ROBOTS  | 1-3        |
| 1.3.1 Gerações (cronologicamente)  | 1-3        |
| 1.3.2 Nível de inteligência do controlador (pela JIRSA)                                | 1-3        |
| 1.3.3 Nível de controlo dos programas no controlador                                   | 1-3        |
| 1.3.4 Linguagem de programação   | 1-3        |
| 1.4 ALGUNS MARCOS NA HISTÓRIA DA ROBÓTICA  | 1-3        |
| 1.5 OS MANIPULADORES ROBÓTICOS   | 1-4        |
| 1.5.1 Robótica fixa versus robótica móvel  | 1-4        |
| 1.5.2 Elementos principais de um manipulador (ou robot industrial)                     | 1-4        |
| 1.6 O ROBOT E A AUTOMAÇÃO  | 1-5        |
| 1.6.1 Tipos de automação   | 1-5        |
| 1.6.2 Aplicações tradicionais dos manipuladores industriais                            | 1-6        |
| 1.7 IMPORTÂNCIA DO ROBOT INDUSTRIAL  | 1-6        |
| <b>2. ESTRUTURA E TIPOLOGIA DE MANIPULADORES</b>                                       | <b>2-2</b> |
| 2.1 COMPONENTES  | 2-2        |
| 2.1.1 Braço mecânico   | 2-2        |
| 2.1.2 Ponta ou Garra (End-effector)  | 2-2        |
| 2.1.3 Actuadores   | 2-3        |
| 2.1.4 Sensores   | 2-4        |
| 2.1.5 Controlador  | 2-5        |
| 2.2 TIPOS DE JUNTAS  | 2-6        |
| 2.2.1 Graus de liberdade e graus de mobilidade   | 2-6        |
| 2.2.2 Representação e arranjo cinemático   | 2-7        |
| 2.2.3 O braço humano   | 2-7        |
| 2.3 ESPAÇO DE TRABALHO E TIPOS DE MANIPULADORES  | 2-7        |
| 2.3.1 Cartesiano (PPP)   | 2-8        |
| 2.3.2 Cilíndrico (RPP)   | 2-8        |
| 2.3.3 Esférico (RRP)   | 2-9        |
| 2.3.4 Articulado Horizontal - SCARA (RRP)  | 2-9        |
| 2.3.5 Articulado vertical (antropomórfico) - RRR                                       | 2-10       |
| 2.4 RESOLUÇÃO, REPETIBILIDADE, PRECISÃO  | 2-10       |
| <b>3. SISTEMAS DE COORDENADAS</b>  | <b>3-2</b> |
| 3.1 NOÇÕES INTRODUTÓRIAS - REVISÕES  | 3-2        |
| 3.1.1 Sistemas de eixos  | 3-2        |
| 3.1.2 Vectores e Matrizes  | 3-2        |
| 3.1.3 Pontos e referenciais  | 3-6        |
| 3.2 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ELEMENTARES   | 3-7        |
| 3.2.1 Exemplos de transformações   | 3-7        |
| 3.2.2 A notação matricial para representar transformações de um ponto a duas dimensões | 3-8        |
| 3.2.3 Matriz rotação para um caso geral  | 3-11       |
| 3.2.4 Limitações da matriz de transformação para representar a translação              | 3-12       |
| 3.3 COORDENADAS HOMOGÉNEAS   | 3-12       |
| 3.3.1 Introdução de componentes adicionais na matriz de transformação                  | 3-12       |
| 3.3.2 Transformações compostas - produtos de matrizes de transformação                 | 3-13       |
| 3.4 MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO A 3 DIMENSÕES  | 3-15       |
| 3.4.1 Generalização dos conceitos para 3 dimensões                                     | 3-15       |
| 3.4.2 Componentes da matriz de transformação   | 3-15       |
| 3.4.3 Interpretações do que significa a matriz de transformação                        | 3-16       |
| 3.4.4 Pós-multiplicação e pré-multiplicação de matrizes de transformação               | 3-18       |
| 3.4.5 Transformações inversas  | 3-19       |
| 3.4.6 Grafos e equações de transformação   | 3-21       |
| 3.5 ORIENTAÇÃO E ÂNGULOS DE EULER (RPY)  | 3-25       |

|           |   |             |
|-----------|---|-------------|
| 3.5.1     | <i>A componente de orientação numa transformação</i> .....  | 3-25        |
| 3.5.2     | <i>Formas de expressar a orientação</i> .....   | 3-26        |
| <b>4.</b> | <b>CINEMÁTICA DIRECTA DE MANIPULADORES</b> .....  | <b>4-2</b>  |
| 4.1       | CINEMÁTICA DE UM MANIPULADOR.....   | 4-2         |
| 4.1.1     | <i>Definição</i> .....  | 4-2         |
| 4.1.2     | <i>Espaço das juntas e espaço cartesiano</i> .....  | 4-2         |
| 4.1.3     | <i>O algoritmo da Cinemática Directa</i> .....  | 4-3         |
| 4.2       | PARÂMETROS DE JUNTAS E ELOS.....  | 4-3         |
| 4.2.1     | <i>Eixo de uma junta</i> .....  | 4-3         |
| 4.2.2     | <i>Os quatro parâmetros de elos e juntas</i> .....  | 4-4         |
| 4.2.3     | <i>Alguns exemplos de elos</i> .....  | 4-5         |
| 4.2.4     | <i>Os parâmetros cinemáticos variáveis</i> .....  | 4-8         |
| 4.2.5     | <i>Transformação <math>{}^{i-1}A_i</math> associada a um elo</i> .....  | 4-9         |
| 4.3       | ATRIBUIÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS.....  | 4-10        |
| 4.3.1     | <i>Exemplos simples de sistemas de coordenadas</i> .....  | 4-10        |
| 4.3.2     | <i>Algoritmo de Denavit-Hartenberg</i> .....  | 4-13        |
| 4.3.3     | <i>Representação de Denavit-Hartenberg para um PUMA de 6 DOF</i> .....  | 4-13        |
| 4.4       | EXEMPLOS DE CONSTRUÇÃO DA CINEMÁTICA DIRECTA.....   | 4-14        |
| 4.4.1     | <i>Um manipulador a 5 DOF (Microbot Alpha II)</i> .....   | 4-14        |
| 4.4.2     | <i>Um manipulador do tipo SCARA (4 DOF)</i> .....   | 4-16        |
| 4.5       | ÂNGULOS FINAIS DE ORIENTAÇÃO EM FUNÇÃO DAS VARIÁVEIS DE JUNTA.....  | 4-18        |
| 4.5.1     | <i>Comparação da matriz RPY(<math>\phi, \theta, \psi</math>) com a parte rotacional da matriz <math>{}^R T_H</math></i> ..... | 4-18        |
| 4.5.2     | <i>Limitações de precisão e reformulação</i> .....  | 4-19        |
| 4.5.3     | <i>Exemplo de aplicação a um manipulador com 2 DOF em 3 dimensões</i> .....   | 4-21        |
| <b>5.</b> | <b>CINEMÁTICA INVERSA</b> .....   | <b>5-2</b>  |
| 5.1       | O PROBLEMA.....   | 5-2         |
| 5.1.1     | <i>Resolução para um manipulador RR no plano</i> .....  | 5-2         |
| 5.1.2     | <i>Resolução para o manipulador RR a 3D</i> .....   | 5-3         |
| 5.1.3     | <i>Métodos e condições de existência de soluções</i> .....  | 5-4         |
| 5.1.4     | <i>A redundância cinemática</i> .....   | 5-4         |
| 5.2       | ALGORITMO PARA UMA HEURÍSTICA DE CINEMÁTICA INVERSA.....  | 5-6         |
| 5.3       | RECURSO A TRANSFORMAÇÕES INVERSAS E COMPARAÇÃO DOS ELEMENTOS MATRICIAIS.....  | 5-7         |
| 5.4       | SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO USUAL NO PROBLEMA DA CINEMÁTICA INVERSA.....   | 5-8         |
| 5.5       | ALGUMAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS PADRÃO.....   | 5-8         |
| 5.5.1     | <i>Robot planar de 3 elos</i> .....   | 5-9         |
| 5.5.2     | <i>Solução do braço antropomórfico a 3 DOF</i> .....  | 5-10        |
| 5.5.3     | <i>Solução do punho esférico</i> .....  | 5-12        |
| 5.5.4     | <i>Manipuladores com um punho esférico</i> .....  | 5-14        |
| <b>6.</b> | <b>CINEMÁTICA DIFERENCIAL</b> .....   | <b>6-2</b>  |
| 6.1       | A PROBLEMÁTICA.....   | 6-2         |
| 6.2       | TRANSFORMAÇÕES DIFERENCIAIS.....  | 6-2         |
| 6.2.1     | <i>Conceitos</i> .....  | 6-2         |
| 6.2.2     | <i>Metodologia de utilização</i> .....  | 6-3         |
| 6.2.3     | <i>Exemplo numérico</i> .....   | 6-4         |
| 6.3       | O JACOBIANO DE UM MANIPULADOR.....  | 6-5         |
| 6.3.1     | <i>Determinação do Jacobiano</i> .....  | 6-6         |
| 6.3.2     | <i>Jacobiano inverso</i> .....  | 6-7         |
| 6.3.3     | <i>Recurso à pseudo-inversa</i> .....   | 6-9         |
| 6.4       | SINGULARIDADES.....   | 6-9         |
| <b>7.</b> | <b>INTRODUÇÃO AO PLANEAMENTO DE TRAJECTÓRIAS</b> .....  | <b>7-12</b> |
| 7.1       | TIPOS DE MOVIMENTO.....   | 7-12        |
| 7.2       | ABORDAGENS PARA PLANEAMENTO DE TRAJECTÓRIAS.....  | 7-12        |
| 7.3       | PLANEAMENTO NAS JUNTAS.....   | 7-13        |
| 7.3.1     | <i>Função para a continuidade da velocidade</i> .....   | 7-13        |
| 7.3.2     | <i>Planeamento nas juntas com pontos intermédios de passagem</i> .....  | 7-14        |
| 7.3.3     | <i>Alternativa a polinómios de ordem superior</i> .....   | 7-15        |
| 7.4       | PLANEAMENTO NO ESPAÇO OPERACIONAL.....  | 7-17        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 7.4.1     | <i>Princípios</i> .....   | 7-17       |
| 7.4.2     | <i>Problemas no planeamento do espaço operacional</i> .....                   | 7-19       |
| <b>8.</b> | <b>INTRODUÇÃO À VISÃO POR COMPUTADOR</b> .....                                | <b>8-1</b> |
| <b>8.</b> | <b>INTRODUÇÃO À VISÃO POR COMPUTADOR</b> .....                                | <b>8-1</b> |
|           | INTRODUÇÃO E GENERALIDADES .....  | 8-2        |
|           | <i>Definição e áreas da visão por computador</i>                              |            |
|           | <i>A imagem digital</i>   |            |
|           | <i>Técnicas de iluminação</i>   |            |
|           | GEOMETRIA DA FORMAÇÃO DE IMAGEM .....   | 8-10       |
|           | <i>Transformação geométrica</i>   |            |
|           | <i>Calibração da câmara</i>   |            |
|           | PROCESSAMENTO A BAIXO NÍVEL .....   | 8-13       |
|           | <i>Relações entre os elementos de imagem (pixels)</i>                         |            |
|           | <i>Ferramentas para processamento espacial de imagem: filtros e técnicas.</i> |            |
|           | ABORDAGEM A MÉDIO NÍVEL E MORFOLOGIA.....                                     | 8-21       |
|           | <i>Operadores e operações morfológicas</i>                                    |            |
|           | <i>Segmentação</i>  |            |

## Enquadramento e objectivos da disciplina

A designação robótica industrial surge do estudo dos manipuladores robóticos que são usualmente conhecidos por **robots industriais**. A disciplina tem como principal objectivo o de dar formação sobre os princípios da manipulação robótica e a sua fundamentação matemática. Desse modo, não se aborda uma linguagem particular para a programação de robots industriais, mas espera-se que, no final, um aluno com aproveitamento e com conhecimentos rudimentares de programação, consiga aprender e compreender uma qualquer linguagem para programar manipuladores.

A disciplina enquadra-se no período final de uma licenciatura com afinidade à automação, e pressupõe bons conhecimentos de álgebra e das grandezas e conceitos de mecânica, bem como uma razoável capacidade de lidar com objectos no espaço a três dimensões.

Antes de entrar no ponto central do programa, que são a cinemática directa, inversa e diferencial, é dado um certo destaque a sistemas de coordenadas e transformações geométricas para permitir uma progressão mais sólida pelo programa dentro.

Em detrimento da estática e dinâmica de manipuladores, que se reconhece ser de importância muito relevante, nomeadamente para o controlo, projecto e concepção de braços robóticos, optou-se por fazer uma introdução à visão por computador pelo facto de tal área se apresentar como das mais importantes na robótica industrial actual. Igualmente consequência desse cuidado é a relativamente pequena dimensão da atenção dada ao planeamento de trajectória. Todavia, os fundamentos e métodos principais estão contemplados e assegurados.

Na componente prática os alunos trabalharão em MatLab que se revela uma ferramenta perfeitamente indicada para estas matérias onde a manipulação de vectores e matrizes é, a modo de dizer, obrigatória.

## Bibliografia

**Introduction to Robotics** – P. McKerrow, *Addison-Wesley*, 1993.

**Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence** – K. Fu, R. Gonzalez, C. Lee, *McGraw-Hill*, 1987.

**Modeling and Control of Robot Manipulators** – L. Sciavicco, B. Siciliano, *McGraw-Hill*, 1996.

**Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control** – R. Paul, *MIT Press*, 1981.

**Introduction to Robotics: Mechanics and Control** – J. Craig, *Addison-Wesley*, 1989.

**Fundamentals of Robotics: Analysis & Control** – R. J. Schilling, *Prentice-Hall*, 1990.

**Industrial Robotics: Technology, Programming, and Applications** – M. P. Grover *et al.*, *McGraw-Hill*, 1986.

**Mechanics and Control of Robots** – K. Gupta, *Springer Verlag*, 1997.

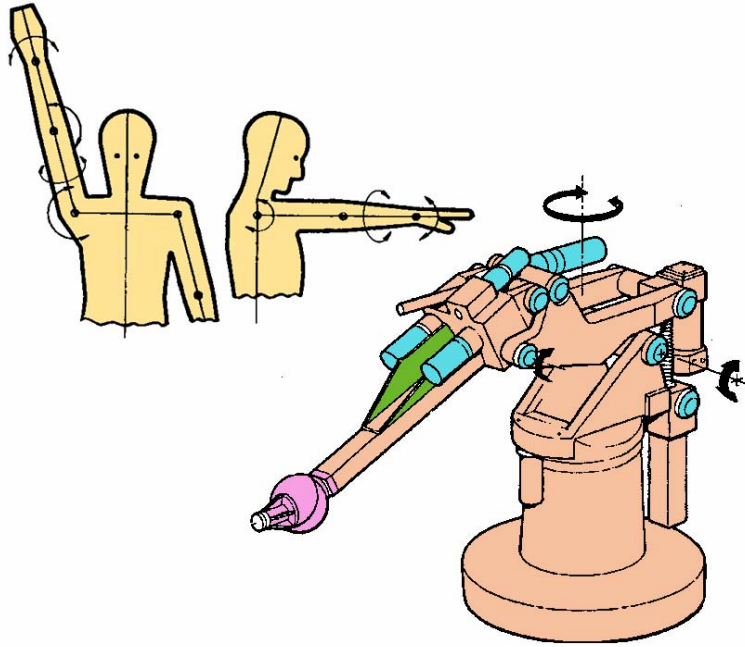
**Industrial Robotics Handbook** – V. Hunt, *Industrial Press Inc.*, 1983.

## Nota

Este documento não substitui a bibliografia. Trata-se de resumos, de carácter não totalmente completo e, por vezes, de densidade variável na abordagem dos diversos assuntos.

# *Capítulo 1*

## *Introdução*



# 1. Introdução

## 1.1 Origem do termo 'robot'

Em português há o termo alternativo "robô". O termo eslavo *Robota* significa trabalhos forçados ou escravos, e teve a sua divulgação numa peça de 1921 de Karel Čapek.

Numa evolução do mito passando pelo sonho de Čapek (entre outros) até à ficção dos tempos correntes, o conceito de robot ou servo do homem tem ocupado a mentalidade do ser humano. Um exemplo contemporâneo dessa realidade foi dado pelo grande contributo de Isaac Asimov, que chegou a definir as Leis da Robótica por volta de 1950:

- 1ª Lei: Um robot não pode maltratar um ser humano, ou pela sua passividade deixar que um ser humano seja maltratado.
- 2ª Lei: Um robot deve obedecer às ordens dadas por um ser humano, excepto se entrarem em conflito com a 1ª lei.
- 3ª Lei: Um robot deve proteger a sua própria existência desde que essa protecção não entre em conflito com a 1ª ou 2ª lei.

## 1.2 Algumas definições de Robot e Robótica

Texto da FAQ comp.robotics

*"Dispositivos electromecânicos pré-programáveis para execução de uma variedade de funções."*

Dicionário Webster:

*"Dispositivo automático que executa funções normalmente atribuídas a humanos ou uma máquina com a forma de um humano."*

ESHED Robotics, 1984

*"Um robot é um braço mecânico; um manipulador concebido para levar a cabo muitas tarefas diferentes, e capaz de ser programado sucessivamente. Para levar a cabo as tarefas atribuídas, o robot move componentes, objectos, ferramentas e outros dispositivos especiais por meio de movimentos e pontos pre-programados."*

Em 1986, P. McKerrow propôs para robot a seguinte definição:

*"Um robot é uma máquina que pode ser programada para fazer uma variedade de tarefas, do mesmo modo que um computador é um circuito electrónico que pode ser programado para fazer uma variedade de tarefas."*

McKerrow

*"Robótica é a disciplina que envolve: a) o projecto, construção, controlo e programação de robots; b) o uso de robots para resolver problemas; c) o estudo dos processos de controlo, sensores e algoritmos usados em humanos, animais e máquinas, e; d) a aplicação destes processos de controlo e destes algoritmos para o projecto de robots."*

The Robot Institute of America

*"Um robot é manipulador multi-funcional, programável, projectado para mover materiais, componentes, ferramentas ou dispositivos especiais através de movimentos programáveis variáveis para a execução de uma variedade de tarefas."*

Standard International ISO 8373:1994(E/F) :

*"Manipulating industrial robot: Automatically controlled, reprogrammable multipurpose manipulator programmable in three or more axes, which may be either fixed to place or*



*mobile, of use in industrial automation applications. The robot includes - the manipulator - the control system (hardware and software)”*

Usualmente o termo **Robótica** emprega-se para indicar a disciplina associada ao uso e programação de robots, e a expressão **Engenharia Robótica** é mais específico e refere-se à construção de robots e dispositivos robóticos.

Nem todos os sistemas automáticos são robots; os sistemas automáticos de funções fixas, como alguns brinquedos com mobilidade ou mesmo uma máquina de Comando Numérico não são consideradas robots. Para ter esse estatuto, deverá o dispositivo ter uma capacidade de programação e, mais ainda, de alguma adaptação ao problema prático. Claramente, um robot pressupõe um sistema que interage fisicamente pelo movimento de certas componentes mecânicas.

### 1.3 Classificação de robots

#### 1.3.1 Gerações (cronologicamente)

- 1ª-**Robots executores** (*playback*) - repetem uma sequência de instruções pré-gravada como a pintura ou soldadura.
- 2ª-**Robots controlados por sensores** - possuem malhas fechadas de realimentação sensorial. Tomam decisões com base nos sensores.
- 3ª-**Robots controlados por visão** - a malha fechada de controlo inclui um sistema de visão (imagem que é processada)
- 4ª-**Robots com controlo adaptativo** - o robot pode reprogramar as suas acções com base nos seus sensores.
- 5ª-**Robots com inteligência artificial** - usa técnicas de inteligência artificial para tomar as suas decisões e até resolver problemas.

#### 1.3.2 Nível de inteligência do controlador (pela JIRSA)

- Dispositivos manuais** - operados por pessoas
- Robots de sequências fixas
- Robots de sequências variáveis** - onde o operador pode mudar a sequência com facilidade.
- Robots executores** (*playback*) - onde o operador humano guia o robot a executar uma tarefa fixa.
- Robots controlados numericamente** - o operador fornece apenas o programa do movimento, em vez de o ensinar manualmente
- Robots inteligentes** - percebem e interagem com alterações no ambiente.

#### 1.3.3 Nível de controlo dos programas no controlador

- Inteligência artificial** - instruções de alto nível que serão decompostas pelo sistema em funções de mais baixo nível.
- Modo de controlo** - os movimentos do sistema são modelizados incluindo as interacções dinâmicas entre os diferentes mecanismos. As trajectórias são planeadas à partida, bem como os pontos de contacto com os elementos a trabalhar (manipular). Deste modelo é formulada uma estratégia e os comandos de controlo são enviados para próximo nível mais baixo.
- Servo-sistema** - os actuadores controlam os parâmetros do dispositivo usando os dados sensoriais nas malhas de controlo.

#### 1.3.4 Linguagem de programação

- Sistema guiados** - O operador indica os movimentos que o robot deve fazer
- Programação ao nível do robot** - O utilizador escreve um programa a especificar as sequências de movimentos que o robot terá de executar.
- Programação ao nível de tarefa** - o programador especifica apenas as acções a tomar sobre os objectos que o robot manipulará.

### 1.4 Alguns marcos na história da robótica

- 1801 – J. Jacquard inventou um tear programável
- 1959 – Primeiro robot comercial introduzido pela Planet Corporation. Era controlado por fins-de-curso e excêntricos

- 1960 – Primeiro robot “Unimate”. Princípios de controlo numérico e actuadores hidráulicos. No ano seguinte foi instalado na Ford.
- 1968 – Um robot móvel desenvolvido no Stanford Research Institute: “Shakey”. Câmara de vídeo e sensores de contacto.
- 1971 – O braço de Stanford desenvolvido pela Universidade de Stanford com actuação eléctrica.
- 1973 – Primeira linguagem de programação de robots: WAVE seguida em 1974 pela linguagem AL. As duas deram lugar mais tarde ao aparecimento da VAL, linguagem comercial da Unimation
- 1978 – PUMA introduzido pela Unimation
- 1979 – SCARA desenvolvido na Universidade de Yamanashi com introdução comercial em 1981.
- 1981 – Robot com actuação directa (“direct drive”) desenvolvido na CMU
- 1983 – Projecto para uma linha flexível de montagem automatizada com o uso de robots.
- 1997 – A Honda anuncia o primeiro robot humanóide que sobe escadas.

## 1.5 Os manipuladores robóticos

### 1.5.1 Robótica fixa versus robótica móvel

As três categorias principais de robots são

- Os manipuladores - robots industriais
- Os veículos auto-guiados (AGV)
- Os robots móveis

As principais diferenças entre estas categorias incidem nos seguintes pontos:

- Conhecimento contínuo da posição (*verdade nos braços*),
- Aplicações distintas (*manipulação e transporte*),
- Necessidade de percepção do ambiente (*crucial nos móveis*),
- tipo de programação usada (*normalmente mais exigente nos robot móveis*).

### 1.5.2 Elementos principais de um manipulador (ou robot industrial)

#### 1.5.2.1 Braço e punho (arm-wrist)

O braço é a parte do manipulador que está normalmente associada ao posicionamento (x, y, z) no espaço físico cartesiano, ou operacional. O punho afecta essencialmente a orientação ( $\theta, \phi, \psi$ ) da garra, pinça ou outros end-effector.

Todavia, é muito comum que haja efeitos cruzados – o braço afectar também a orientação e o punho afectar a posição cartesiana. Estes componentes de um manipulador são constituídos por partes rígidas, os elos (*links*), ligadas entre si pelas juntas (*joints*)

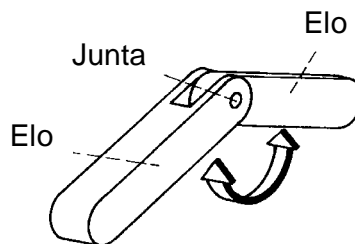


Figura 1.1 - Elos e junta de um manipulador

#### 1.5.2.2 O controlador

Unidade capaz de gerar informação de activação de um ou mais actuadores com base num algoritmo de controlo. Esse algoritmo pode levar em linha de conta o comando desejado, o estado corrente do actuador,

e o próprio ambiente. Os algoritmos mais comuns recorrem ao chamado controlo PID (proporcional-integral-diferencial).

Quando não existente em separado, o controlador chega a incluir a unidade de potência, ou seja, o elemento que liga directamente ao actuador fornecendo-lhe a energia que necessita com base numa informação de baixo teor energético, como são os sinais eléctricos à saída de muitos controladores.

Por vezes, o controlador faz parte de um sistema maior de interligação com o utilizador exterior, como é o caso de um computador pessoal. Nestes casos o controlador pode assumir a forma de uma carta de expansão do próprio computador, ou ser um dispositivo exterior que comunica com o computador de uma forma padrão, como por exemplo, uma ligação série RS232.

Esta integração num computador, devido ao abundante número de ferramentas de interface disponíveis, permite mais facilmente especificar os comandos desejados para o controlador, ou até de os gerar de forma automática, como fazem muitos programas (software).

### 1.5.2.3 Actuadores

Dispositivos que geram e impõem movimento a uma qualquer parte mecânica pelo desenvolvimento de forças e binários baseada num princípio físico de conversão de energia. Podem ser, por exemplo, motores eléctricos, cilindros hidráulicos, ou pneumáticos, electro-ímanes, etc. Têm muitas vezes associados elementos adicionais de transmissão mecânica. Fazem a actuação

### 1.5.2.4 Sensores

Elementos destinados à medição do estado interno do manipulador bem como à percepção do ambiente exterior. Principais tipos de sensores usados num manipulador: codificadores, fins-de-curso, sensores de força, detectores de proximidade capacitivos e indutivos, etc. Fazem a percepção.

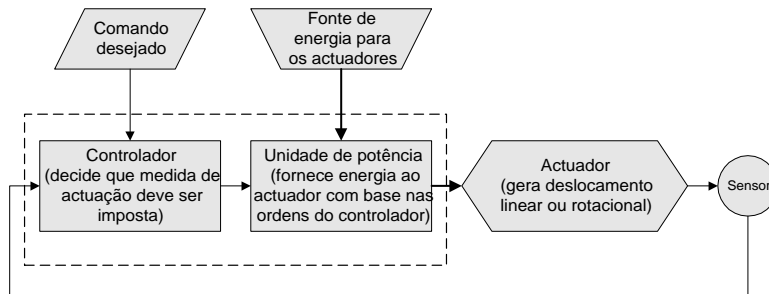
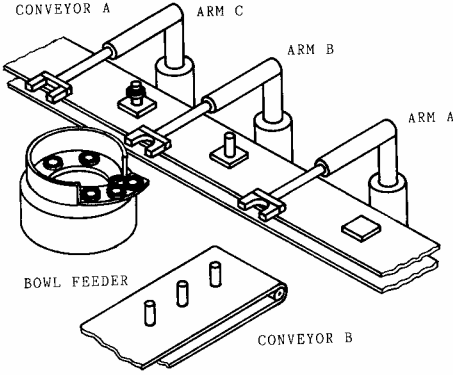
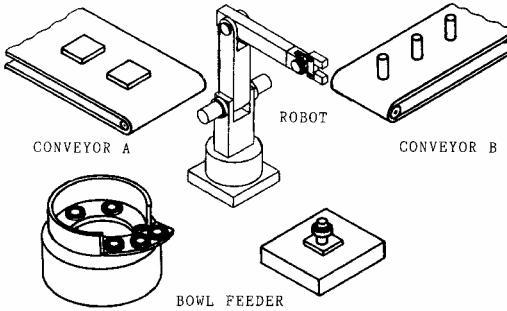


Figura 1.2 - Um sistema de controlo tradicional

## 1.6 O robot e a automação

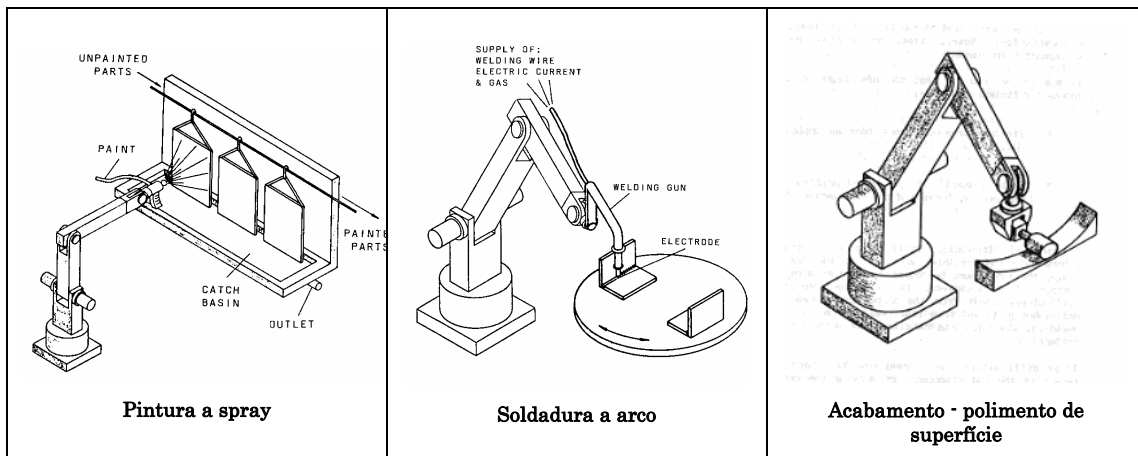
### 1.6.1 Tipos de automação

A automação pode ser de dois tipos fundamentais: rígida e flexível (programada)

|  |   |
|--|---|
|  <p><b>Figura 1.3 - Automação rígida</b></p>  |  <p><b>Figura 1.4 - Automação flexível</b></p>                          |
| <p><b>Rígida</b> – cada componente do sistema tem sempre a mesma função ou conjunto limitado de funções sem possibilidade de alteração de modo simples, obrigando à existência de vários componentes por vezes afins</p> | <p><b>Flexível</b> a multiplicidade de componentes da automação rígida é reduzida pelo introdução de um sistema mais versátil: caso dos manipuladores</p> |

### 1.6.2 Aplicações tradicionais dos manipuladores industriais

As aplicações tradicionais mais importantes são as seguintes: manipulação de materiais, soldadura (*spot welding*), pintura a *spray*. Há muitos construtores de robots manipuladores no mundo actual: alguns exemplos mais importantes de construtores e marcas são: ABB, KUKA, STAUBLI, ADEPT, PUMA, ...



**Figura 1.5 - Algumas aplicações industriais de manipuladores**

## 1.7 Importância do robot industrial

O robot industrial vê a sua importância surgir a vários níveis:

- **Técnica:** Vantagem e versatilidade
- **Humana:** Tarefas pesadas ou desagradáveis para humanos
- **Económica:** Um mesmo equipamento pode ter múltiplas funções e substituir vários equipamentos distintos.

A atestar a importância do robot industrial vêm os números expressos nos gráficos das figuras seguintes que mostram como o parque robótico mundial tem evoluído muito nos últimos 10 anos na indústria (Fonte: Revista Robótica 1999)

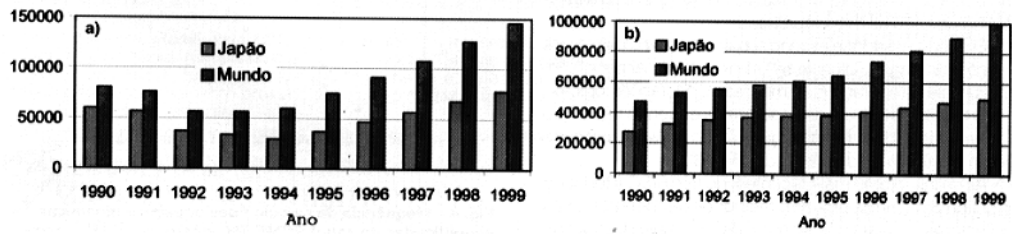


Figura 1.6 - Número de robots vendidos por ano e número estimado de robots industriais em serviço.

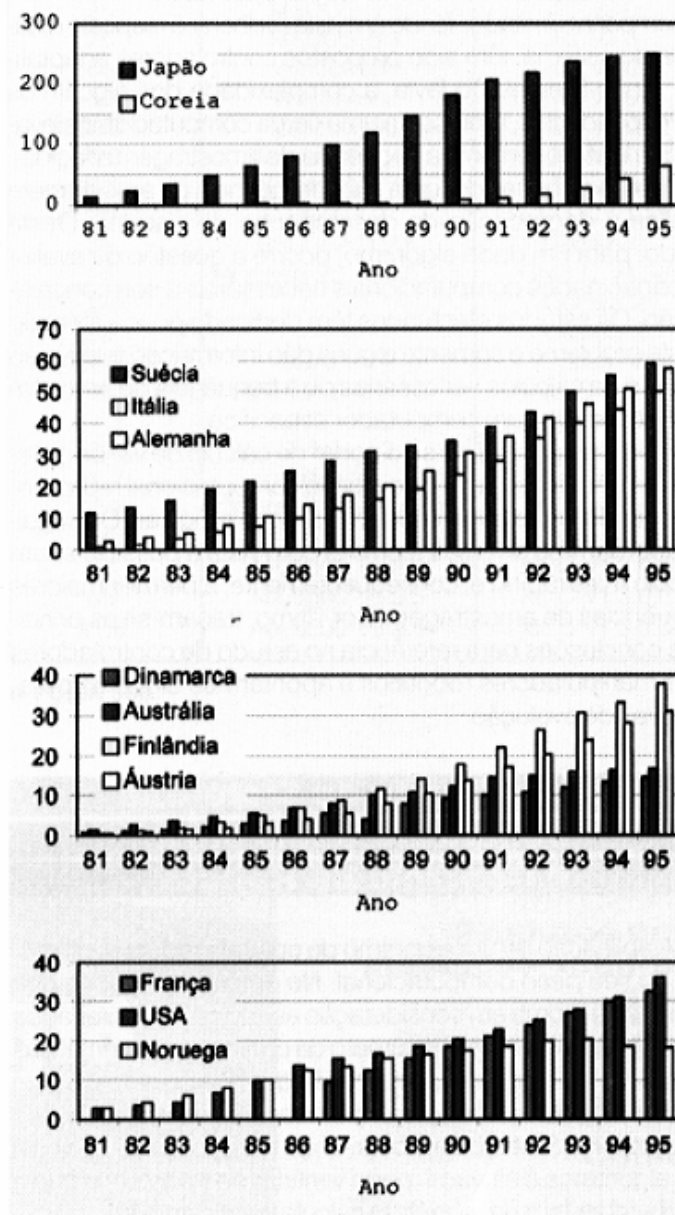


Figura 1.7 - Número de robots por 10 000 trabalhadores na indústria

# *Capítulo 2*

## *Estrutura e Tipologia de Manipuladores*



## 2. Estrutura e Tipologia de Manipuladores

### 2.1 Componentes

#### 2.1.1 Braço mecânico

O braço mecânico é constituído por juntas e elos (*joints and links*). Os elos são usualmente blocos alongados rígidos, e são ligados uns aos outros através das juntas. Os elos podem variar a sua posição relativa e estão normalmente associados em série. Existem variadíssimas combinações de elos e juntas de acordo com as aplicações, e que mais adiante se descreverão os tipos mais comuns.

#### 2.1.2 Ponta ou Garra (*End-effector*)

Componente ligado à extremidade do braço, isto é, ligado ao último elo do manipulador, e que tem funções adicionais (agarrar ou prender um objecto, ou ainda um dispositivo com funções adicionais mais específicas). A ponta ou *end-effector* pode ser do tipo garra (*gripper*) ou uma ferramenta (*tool*).

##### 2.1.2.1 Garras

As garras de apreensão mecânica (pinça) são bastante comuns e eis de seguida alguns exemplos:

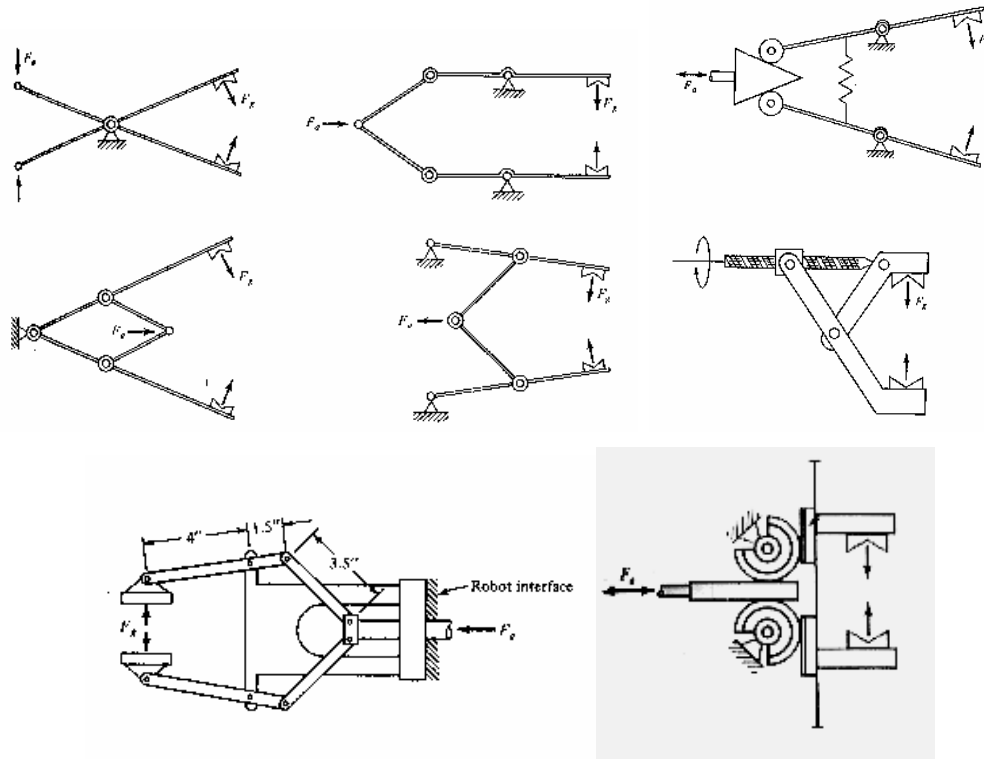


Figura 2.1 - Alguns princípios e tipologias de garras

De notar o tipo de forças/movimentos aplicados e os resultados nas diversas situações. Saliente-se a garra do topo direito que pode servir para agarrar objectos de dimensão variável graças à sua mola. Ou ainda, a garra na última ilustração, na região inferior direita, cujos dedos (pinças) se deslocam de forma perfeitamente linear.

Além das garras do tipo pinça há ainda aquelas de funcionamento baseado em:

- Vácuo
- Magnética
- Adesivos
- Ou outros tipos dos quais se destacam as mãos antropomórficas

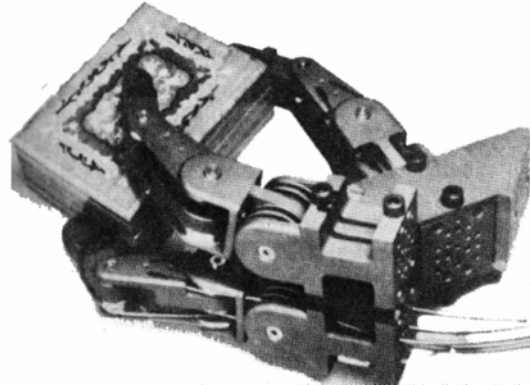


Figura 2.2 - Mão (garra) antropomórfica

### 2.1.2.2 Ferramentas

Nas ferramentas a variedade é muito grande mas as principais incluem as seguintes:

- Soldadura
- Corte jacto de água
- Furador, polidor, etc.

### 2.1.3 Actuadores

Os componentes que utilizam uma fonte de energia para fazer mover as juntas; são de três tipos essenciais. Eis uma breve comparação dos três tipos de actuadores:

| Característica                           | Tipos de actuadores                                  |   |   |
|--|--|---|---|
|  | <i>Eléctricos</i>                                    | <i>Hidráulicos</i>  | <i>Pneumáticos</i>  |
| Controlo                                 | Fácil. Possibilidade de ser elaborado.               | Hoje em dia mais facilitado com as electro servo-válvulas | Muito difícil devido a questões de compressibilidade do ar                          |
| Velocidades                              | Grande   | Média/Grande  | Muito grande  |
| Binário a baixa velocidade (acelerações) | Pequenos/Médios                                      | Grande  | Pequenos  |
| Precisão                                 | Boa. Limitada pelo uso de transmissão                | Boa   | Má, excepto em operações a posições fixas.  |
| Funcionamento em situação estática       | Mau. Requer travões.                                 | Excelente. Trata-se de funcionamento normal.              | Bom. Não há risco de danificação do sistema.  |
| Questões ambientais                      | A presença de arcos eléctricos pode ser indesejável. | Perigo de fugas de óleo.                                  | Sistemas limpos. Risco de poluição sonora de componentes, compressores e das fugas. |
| Custos                                   | Relativamente baixos                                 | Altos   | Relativamente baixos  |

Tabela 2-I - Breve comparação dos principais tipos de actuadores

Em cada junta há normalmente um actuador. Ao contrário, no corpo humano, há normalmente 2



músculos por cada junta para a moverem em direcções opostas.

### 2.1.3.1 Tipo de actuação

Directa - O elemento móvel do actuador é acoplado à junta directamente.

Indirecta - o elemento móvel do actuador é acoplado à junta mediante um sistema de transmissão.

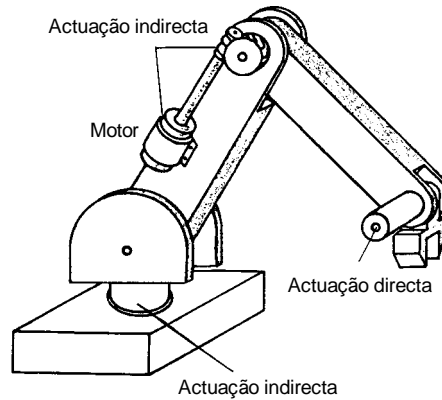


Figura 2.3 - Ilustração da actuação directa e indirecta

Os motores eléctricos são normalmente usados em actuação indirecta (indirect drive) devido à combinação **alta velocidade/binário baixo**. São excepções os casos dos motores especiais como os motores passo a passo, ou os chamados *direct-drive motors*, que têm uma concepção especial e permitem altos binários a baixas rotações. Porém, alguns destes tipos são por enquanto motores de grandes dimensões e peso, portanto limitados a poucas aplicações nos manipuladores; é possível encontrá-los na base, ou seja, a actuar a primeira junta do manipulador.

### 2.1.4 Sensores

Fornecem informação ao controlador, nomeadamente em que local estão as diversas juntas do manipulador. Além destes sensores internos há também os interruptores de fim de curso que delimitam as deslocações extremas das juntas. Existem também os sensores externos dedicados a recolher informação adicional sobre o ambiente.

#### 2.1.4.1 Sensores de posição

Potenciómetros,  $V_0(t) = K\theta(t)$

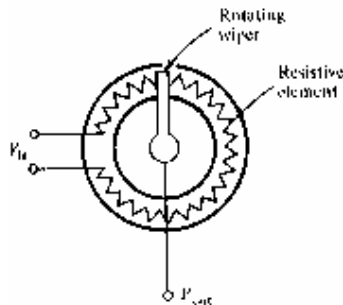


Figura 2.4 - Um potenciómetro como indicador de posição angular

Codificadores (incrementais e absolutos)

Os codificadores (especialmente os ópticos) apresentam a vantagem de não possuir contactos sujeitos a desgaste como o poderia ser o cursor de um potenciómetro.

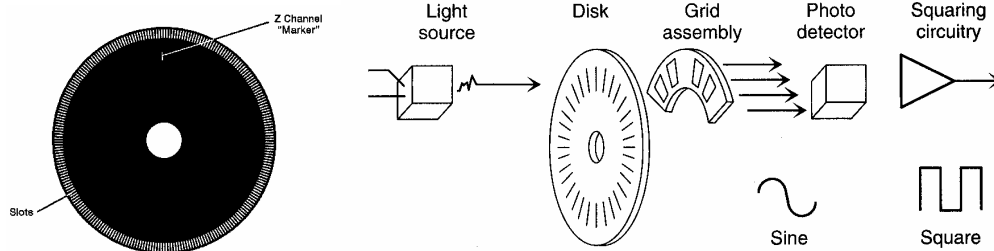


Figura 2.5 - O disco de um codificador óptico relativo e sistema de descodificação relativa (direita)

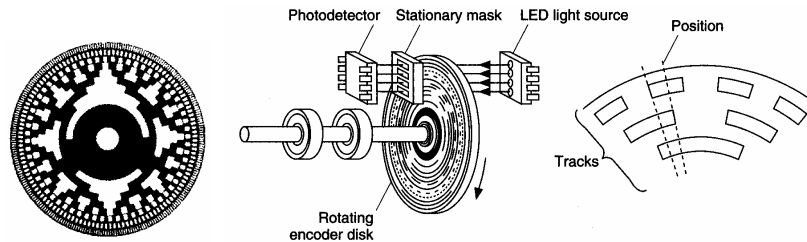


Figura 2.6 - O disco de um codificador óptico absoluto e sistema de descodificação absoluta (direita)

2.1.4.2 Sensores de velocidade

Dispositivos que indicam a velocidade angular: Tacómetros:  $V_0(t) = K_t \omega(t) = K_t \dot{\theta}(t)$

2.1.5 Controlador

O controlador é o componente que determina e, frequentemente, monitoriza o movimento de cada junta. Geralmente o controlador faz outras operações relacionadas com a aplicação. A operação fundamental é a função de controlo em cada junta, isto é, o processo pelo qual se procura que os elos/juntas fiquem posicionados ou tenham o movimento desejado numa dada tarefa a cumprir. Esse processo tem de obviar os problemas de que as acções de um certo actuador não têm os efeitos desejados, ou seja, terá de haver um controlo em malha fechada ou chamado controlo realimentado. Note-se porém que há sistemas (mormente didácticos) onde o controlo é feito em malha aberta. Quer isso dizer que os actuadores são activados e que se espera que cumpram exactamente o previsto. Isso é possível em certa medida com motores passo-a-passo.

Se designarmos por  $m(t)$  a entrada de um controlador, e à diferença entre a saída desejada para o sistema (actuador) e a sua real saída chamarmos erro  $e(t)$ , as funções de controlo mais comuns são as seguintes:

- on-off:  $m(t) = \begin{cases} K_0 & \Leftarrow e(t) < 0 \\ -K_0 & \Leftarrow e(t) \geq 0 \end{cases}$
- proporcional:  $m(t) = K_p e(t)$
- proporcional + diferencial (PD):  $m(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$
- proporcional + diferencial +integral (PID):

Relembra-se que o valor  $m(t)$  designa a entrada a aplicar no controlador em cada instante.

## 2.2 Tipos de juntas

As juntas são essencialmente de dois grandes tipos:

- As prismáticas (P) onde o movimento relativo dos elos é linear
- As rotacionais (R) onde o movimento relativo dos elos é rotacional.
- Existe ainda um terceiro tipo de junta designada por esférica (S) que no fundo é a combinação de três juntas rotacionais com o mesmo ponto de rotação.

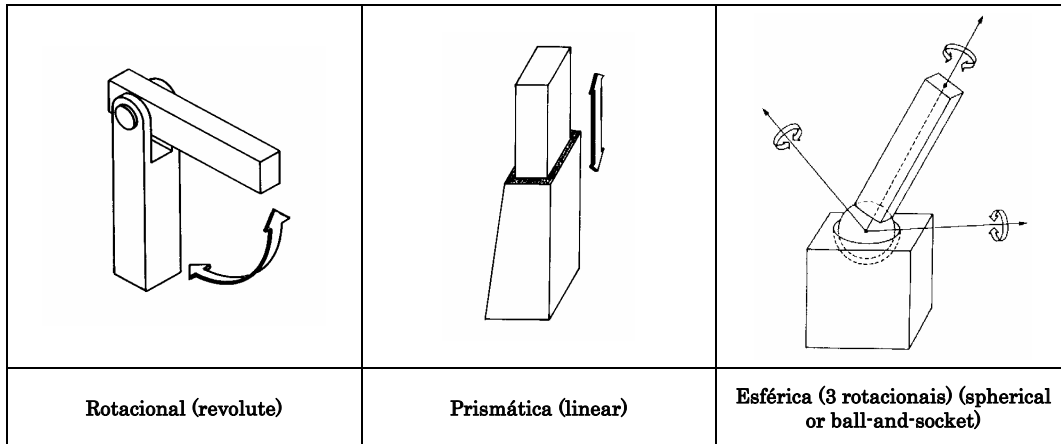


Figura 2.7 - Tipos de juntas

Na maioria dos manipuladores, as juntas são normalmente divididas em dois grupos:

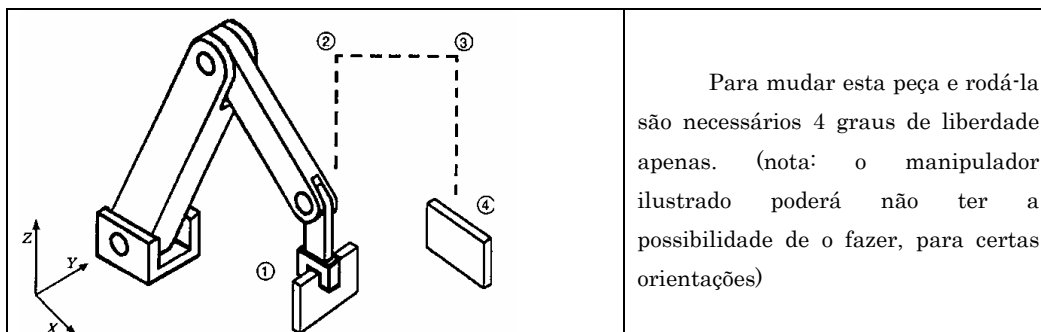
- Juntas principais (3 juntas mais próximas da base)
- Juntas secundárias ou juntas do punho (as restantes juntas, mais próximas do *end-effector*)

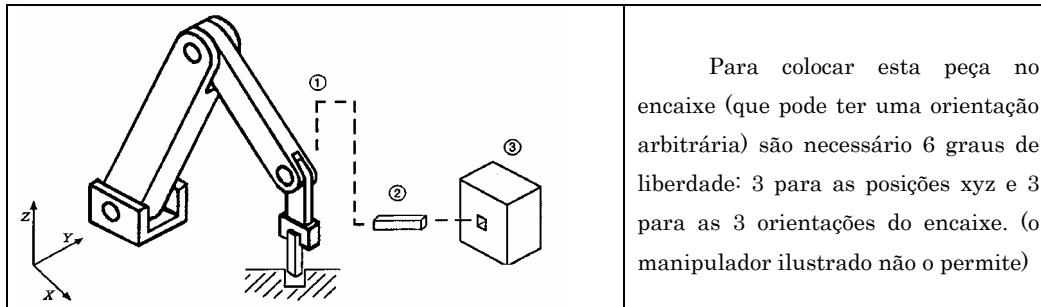
### 2.2.1 Graus de liberdade e graus de mobilidade

Graus de liberdade (*degrees-of-freedom - DOF*) é o número total de movimentos independentes que um dispositivo pode efectuar. Um cubo no espaço a 3 dimensões pode deslocar-se ao longo dos três eixos, e também rodar em torno de cada um deles, dando assim um total de 6 graus de liberdade para a sua movimentação.

Algo diferente são os graus de mobilidade, associados ao número de juntas existentes. Um exemplo comum desta diferença são os tripés: na verdade em cada pé temos várias juntas prismáticas que afectam o mesmo o mesmo movimento, isto é ao longo daquele eixo em particular. Se em cada pé houver 3 juntas, teremos um tripé com **3** graus de liberdade mas **9** graus de mobilidade.

Exemplos de graus de liberdade necessários para certas tarefas:





Para colocar esta peça no encaixe (que pode ter uma orientação arbitrária) são necessário 6 graus de liberdade: 3 para as posições xyz e 3 para as 3 orientações do encaixe. (o manipulador ilustrado não o permite)

Figura 2.8 - Graus de liberdade necessários para dois exemplos de movimento

### 2.2.2 Representação e arranjo cinemático

Frequentemente, em diversa literatura existe uma simbologia própria para representar de uma forma padrão um manipulador e as suas juntas. De seguida ilustra-se um caso para um manipulador RRP e mais uma junta esférica.

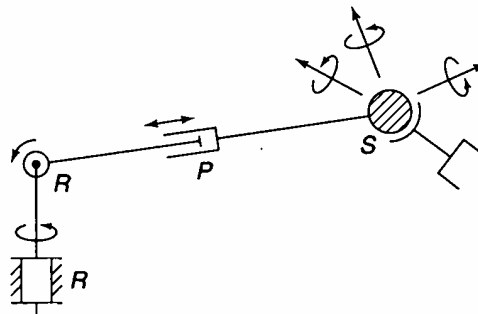
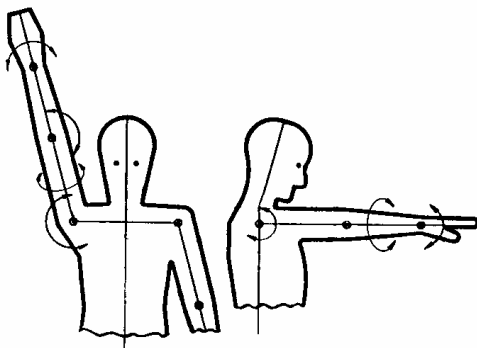


Figura 2.9 - Representação de um manipulador com as juntas RRPS, num total de 6 DOF

### 2.2.3 O braço humano

Cada braço humano, excluindo a mão e os dedos, dispõe de 7 graus de liberdade:



| <i>Junta</i>              | <i>Tipo</i> | <i>Graus de liberdade (DOF)</i> |
|---------------------------|-------------|---------------------------------|
| Ombro ( <i>Shoulder</i> ) | Esférica    | 3                               |
| Cotovelo ( <i>Elbow</i> ) | Rotacional  | 1                               |
| Pulso ( <i>Wrist</i> )    | Esférica    | 3                               |

Figura 2.10 - Graus de liberdade do braço humano

## 2.3 Espaço de trabalho e tipos de manipuladores

Espaço ou volume de trabalho (*workspace or volume space*) de um manipulador é a região dentro da qual o manipulador pode posicionar o *end-effector*.

Quando se classifica um robot pela sua estrutura cinemática, isto é, pelo seu espaço de trabalho, apenas as juntas principais são usadas. Assim, há essencialmente 5 categorias de estruturas cinemáticas

que se ilustram e descrevem resumidamente de seguida:

- Cartesiana (PPP)
- Cilíndrica (RPP)
- Esférica (RRP)
- Articulado horizontal ou SCARA (RRP)
- Articulado vertical ou antropomórfico (RRR)

### 2.3.1 Cartesiano (PPP)

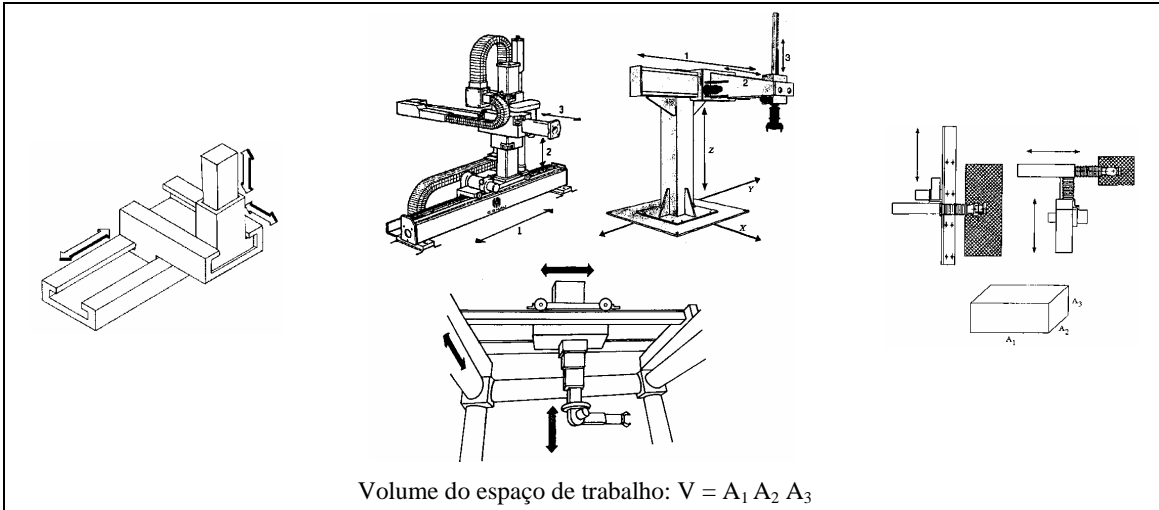


Figura 2.11 - Manipulador cartesiano (PPP)

### 2.3.2 Cilíndrico (RPP)

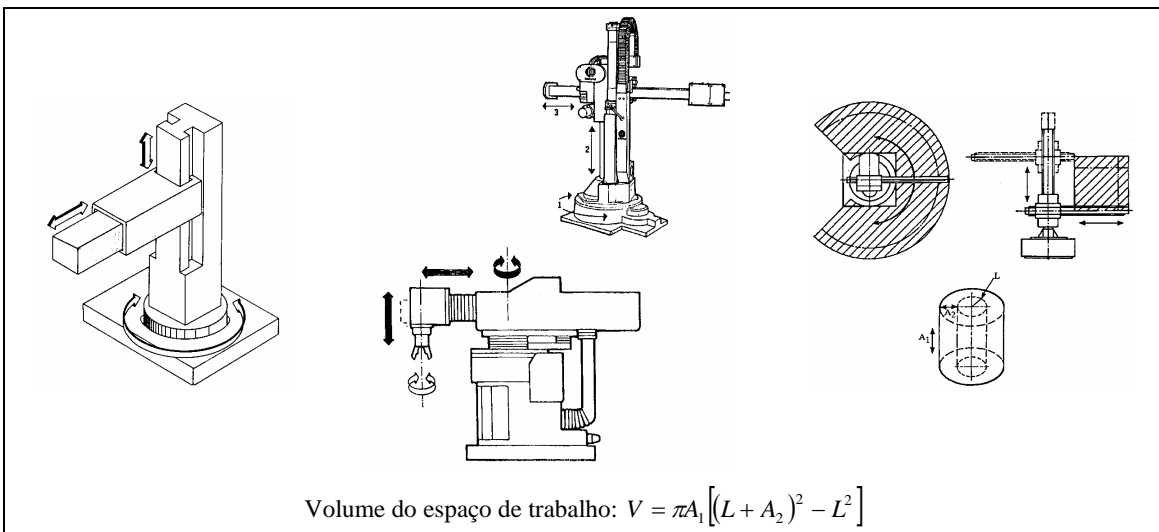


Figura 2.12 - Manipulador Cilíndrico (ou RPP)

2.3.3 Esférico (RRP)

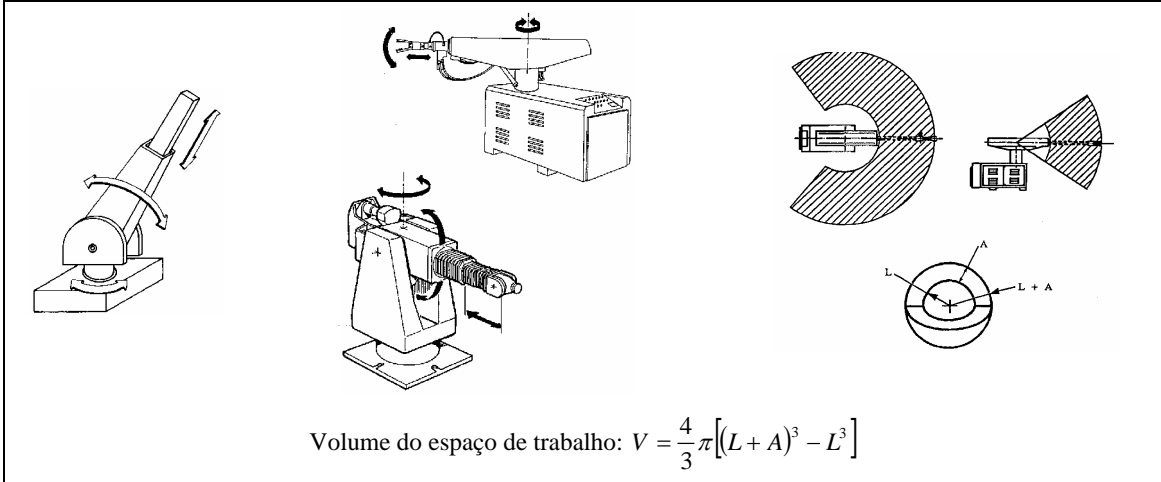


Figura 2.13 - Manipulador Esférico (RRP)

2.3.4 Articulado Horizontal - SCARA (RRP)

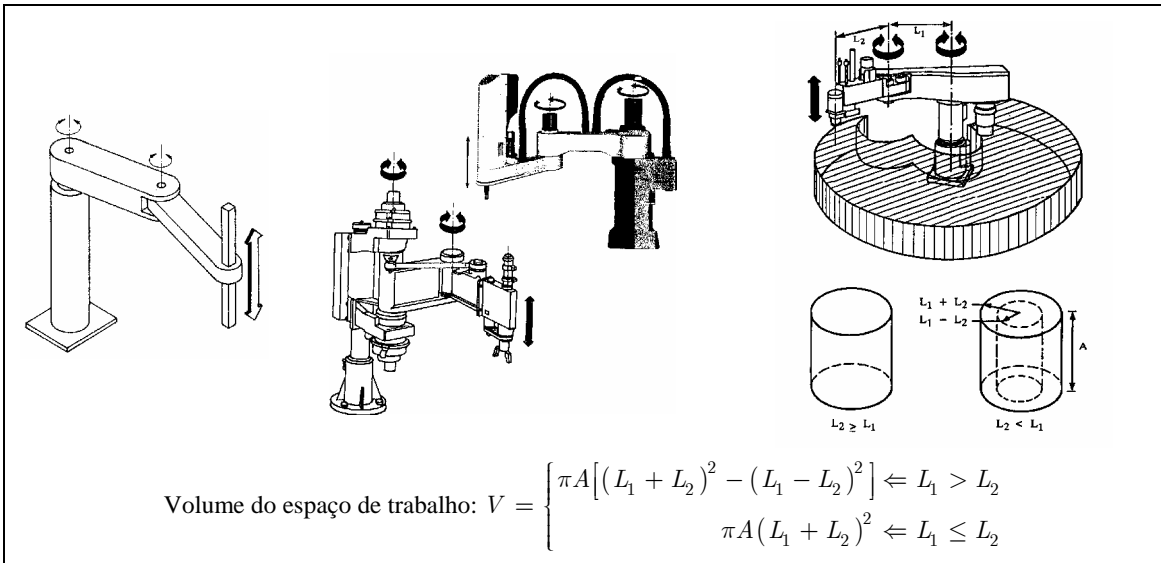


Figura 2.14 - Manipulador Articulado Horizontal-SCARA (RRP)

2.3.5 Articulado vertical (antropomórfico) - RRR

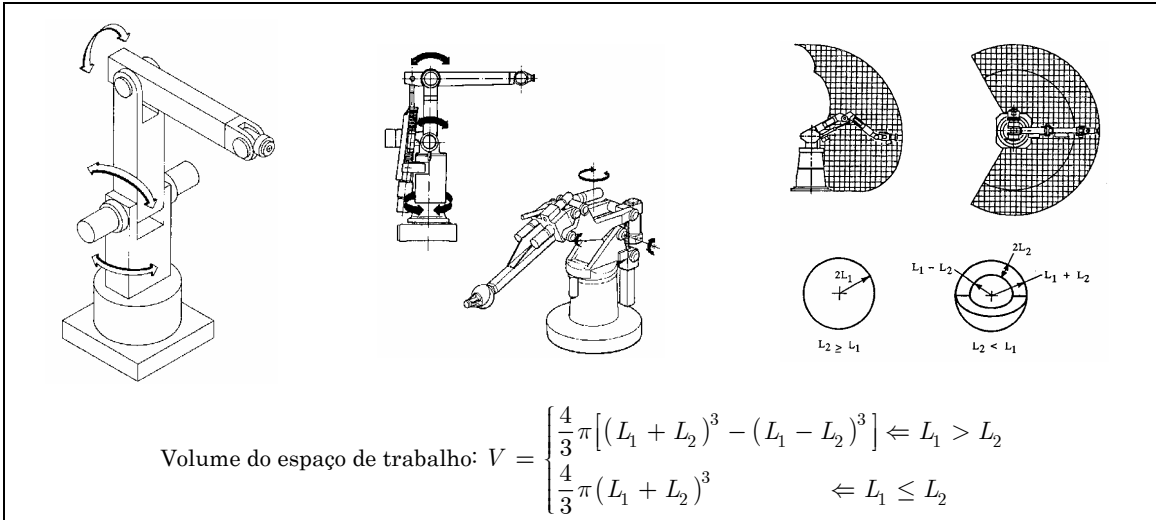


Figura 2.15 - Manipulador Articulado vertical (ou antropomórfico) (RRR)

Podemos comparar os volumes de trabalho admitindo que as juntas rotacionais varrem 360° e que as prismáticas são todas iguais de comprimento L e que se deslocam o comprimento A e que A=L. Resulta assim a seguinte tabela

|                       |                            |
|-----------------------|----------------------------|
| Cartesiano            | $V = L^3$                  |
| Cilíndrico            | $V = 3\pi L^3$             |
| Esférico              | $V = \frac{28}{3} \pi L^3$ |
| Articulado Horizontal | $V = 4\pi L^3$             |
| Articulado Vertical   | $\frac{32}{3} \pi L^3$     |

Note-se que o volume do espaço de trabalho aumenta com o número de juntas rotacionais.

2.4 Resolução, Repetibilidade, Precisão

**Resolução:** o menor movimento incremental de uma junta; normalmente detectável pelo dispositivo de medição (codificador). Exemplo, se o codificador tiver 180 incrementos então a sua resolução será de 180 incrementos por volta ou seja  $360^\circ/180 = 2^\circ$ . Esta é a resolução angular, que pode ser convertida em resolução espacial em função do comprimento da junta ( $=L * \sin(ResolAngular)$ )

**Repetibilidade:** traduz a diferença de posição (linear em geral) com que o robot volta a recolocar-se num ponto visitado anteriormente.

**Precisão:** traduz a diferença entre uma posição realmente atingida e a posição desejada pela programação. Está relacionada com a resolução e por certo não poderá ser melhor que o valor daquela (ou +/- metade) - afectado pela carga transportada e variável conforme a zona do espaço de trabalho.

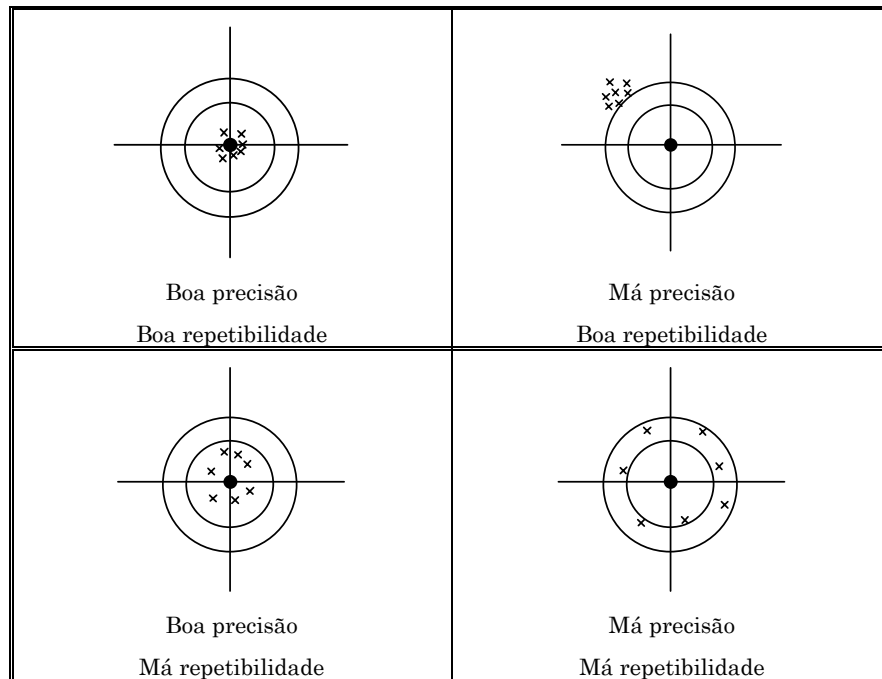
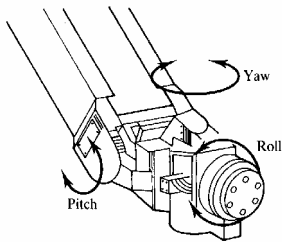
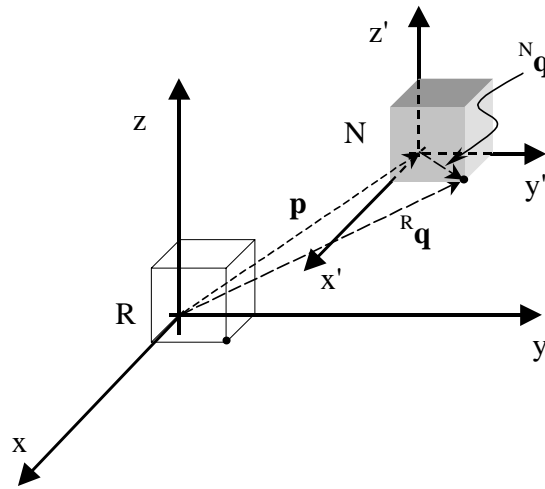


Figura 2.16 - Ilustração da precisão e repetibilidade



# Capítulo 3

## Sistemas de Coordenadas



$$RPY(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -S\phi C\psi + C\phi S\theta S\psi & S\phi S\psi + C\phi S\theta C\psi & 0 \\ S\phi C\theta & C\phi C\psi + S\phi S\theta S\psi & -C\phi S\psi + S\phi S\theta C\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3. Sistemas de Coordenadas

### 3.1 Noções introdutórias - revisões

#### 3.1.1 Sistemas de eixos

Os sistemas de eixos coordenados a usar são ortogonais e directos. Directos significa que o sentido positivo dos ângulos é medido pela convenção usual (sentido anti-horário) e que é ilustrado na Figura 3-17.

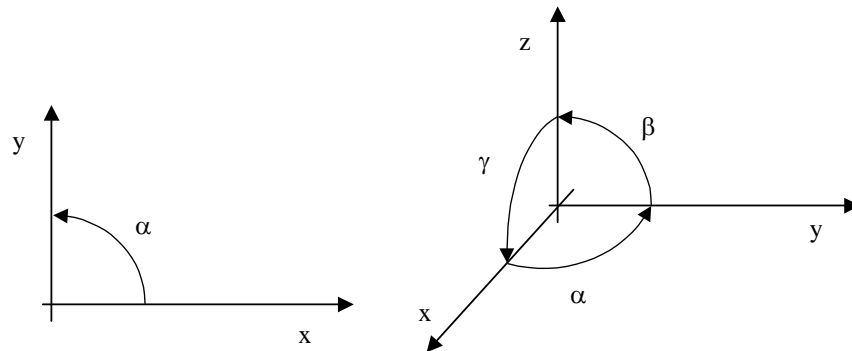


Figura 3-17 - Sistemas directos de coordenadas a duas e três dimensões.

#### 3.1.2 Vectores e Matrizes

Um ponto no espaço é representável por um vector com 3 coordenadas (2 se for no plano), em particular um vector coluna, como se descreverá adiante. O termo vector é frequentemente associado a um conceito de movimento ou deslocação numa dada direcção (e sentido). Quando se referem as coordenadas de um vector, neste último significado, está-se a pensar num vector aplicado na origem do sistema de eixos e com as coordenadas do seu ponto extremo. Assim, no exemplo ilustrado de seguida, o vector  $\vec{r}$  tem as mesmas coordenadas do ponto P; se bem que estejam em causa dois conceitos formalmente distintos, eles estão relacionados de tal forma que podemos usar o conceito de vector com representação matricial, para representar qualquer das entidades geométricas (ponto e vector) sem perigo de confusão:  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  ou

$$P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

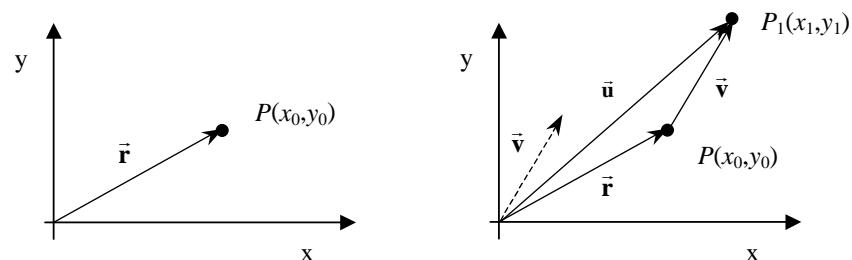


Figura 3-18 - Um ponto e um vector no plano. Ilustração da soma de um ponto com um vector

Por outro lado, define-se também a soma de um ponto com um vector, que resulta num segundo ponto ( $P_1 = P + \vec{v}$ ). Geometricamente, isso equivale a que o vector a somar tenha a sua origem situada no ponto inicial ( $P$ ) e não na origem do sistema de eixos. Porém, e pelo exposto acima, dizer que o resultado da soma é um novo ponto, é dizer também que é um segundo vector. Desse modo, a soma de um ponto com um vector (e forçosamente nesta ordem porque a soma de um vector com um ponto não é definida!) equivale também à soma de dois vectores. No lado direito da Figura 3-18 podemos verificar que o vector  $\vec{v}$ , para efeitos de soma (traduzindo a tal deslocação ou movimento), é aplicado no ponto  $P$ , se bem que a sua representação livre (como é muitas vezes dito) está representada a tracejado e aplicada na origem do sistema de coordenadas. Estas duas representações são todavia a mesma identidade traduzida numa propriedade comum (a equipolência); não obstante essa propriedade, são dois segmentos de recta orientados distintos (estão em posições diferentes do plano). Este conceito de segmento de recta orientado não é neste contexto interessante, e por isso restringir-nos-emos ao conceito de vector e da propriedade de equipolência que ele traduz.

Podemos então extrair da Figura 3-18 que  $P_1 = P + \vec{v}$  ou ainda  $\vec{v} = P_1 - P$ , e dessa forma determinar as coordenadas do vector  $\vec{v}$  à custa dos dois pontos. O ponto  $P_1$  tem como coordenadas  $(x_1, y_1)$  que são na verdade as coordenadas do vector associado  $\vec{u}$ . Como se espera,  $\vec{u} = \vec{r} + \vec{v}$ .

No que diz respeito à nomenclatura, as designações de vectores são indicadas por uma letra minúscula com uma seta por cima, em caracteres romanos (não itálicos) e por vezes ainda por essa mesma letra em tom carregado (*bold*). Essas duas representações (seta e *bold*) foram usadas acima mas, por facilidade de escrita, em geral, usa-se só uma delas, e de preferência a versão a carregado, exceptuando-se os casos do texto manuscrito onde a versão com seta é preferível. Por outro lado, para representar matrizes (arranjos rectangulares de números ou expressões distintos entre si), dos quais os vectores são casos particulares, usam-se letras romanas maiúsculas em tom carregado (a seta já não faria muito sentido visto se perder a imagem geométrica da tal propriedade do sentido do movimento). Em suma, e para facilitar a escrita ao longo deste texto, usaremos as representações indicadas na tabela seguinte:

| Entidade   | Notação das representações  | Exemplos   |
|------------|---|--|
| Vectores   | Letra romana minúscula a carregado sem (ou eventualmente com) seta por cima | $\vec{v} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ |
| Matrizes   | Letra romana maiúscula sem seta por cima                                    | $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$        |
| Coordenada | Letra minúscula em itálico (eventualmente romana)                           | $x_0 = 5, y_2 = 12$  |
| Ponto*     | Letra maiúscula (romana ou itálica)   | $P_1 = P_1 \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$                            |
| Ângulo     | Letra grega minúscula   | $\alpha = \frac{\pi}{3}$   |

\*Quando, em vez de ponto, pensarmos numa postura no espaço (posição e orientação), o conceito de ponto desvanece-se e falaremos de um vector que se representará com letras minúsculas como convencionado.

As matrizes podem ser quadradas ou não quadradas. As quadradas têm as duas dimensões iguais, isto é, igual número de linhas e de colunas. Há um tipo particular de matrizes não quadradas designadas por vectores que têm uma só linha ou uma só coluna.

|  |  |   |   |
|--|--|---|---|
| $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 10 \\ -4 & 2 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{u} = [1 \quad 4 \quad -2 \quad 1]$ |
| Matriz quadrada de ordem 3 (3X3)   | Matriz não quadrada de dimensão 3X5  | Vector coluna   | Vector linha                                |

Das operações com matrizes há a destacar as que se descrevem a seguir.

### 3.1.2.1 Produto de um escalar por uma matriz

É uma operação que resulta numa matriz cujos elementos são todos afectados pelo mesmo factor multiplicativo:

$$\lambda \mathbf{T} = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$$

### 3.1.2.2 Inversão de uma matriz

A inversão de uma matriz (quadrada) é a operação pela qual se determina a sua inversa. A inversa de uma matriz  $\mathbf{A}$  é uma outra matriz, representada por  $\mathbf{A}^{-1}$ , tal que o produto das duas resulta na matriz identidade:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Só as matrizes quadradas não singulares têm inversa. A matriz inversa pode ser obtida, em geral, pela matriz adjunta de  $\mathbf{A}$  dividida pelo determinante de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{Adj(\mathbf{A})}{\det \mathbf{A}}$$

A matriz adjunta de uma matriz é obtida pela substituição de cada termo pelo seu co-factor e transpondo a matriz de co-factores.

### 3.1.2.3 Produto interno (escalar) de vectores

O produto interno é uma operação que resulta num escalar cujo valor é dado por:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_x u_x + v_y u_y = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cos \alpha$$

onde  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$  e  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  e  $\alpha$  é o ângulo definido pelos dois vectores.

Esta operação é comutativa. Não faz sentido falar de associatividade porque o produto interno só está definido entre dois vectores, não entre um vector e um escalar (aquele que resultaria do primeiro produto interno).

### 3.1.2.4 Produto externo de vectores ou produto vectorial

O produto externo de vectores é uma operação que resulta num terceiro vector perpendicular aos dois primeiros. Há vários símbolos para representar esta operação e de seguida indicam-se alguns mais comuns. A operação traduz-se deste modo:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$

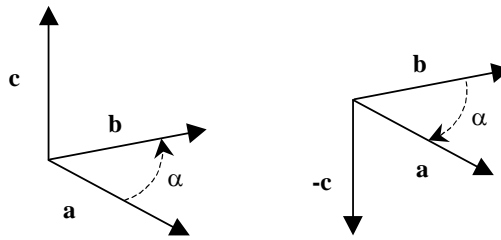


Figura 3-19 - Produto vectorial e a sua anti-comutatividade.

O vector resultante tem um sentido que advém do sistema directo usado, e que se representa na Figura 3-19, do lado esquerdo. Uma regra prática para determinar o sentido do vector resultante consiste na chamada "regra da mão direita"; os dedos da mão estão fechados à excepção do polegar que indica o sentido do vector resultante e os restantes dedos indicam o sentido do ângulo entre os vectores. Vê-se claramente que o produto externo de vectores não é comutativo, e aliás é anti-comutativo, como se observa da Figura 3-19. Quer isto dizer que:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{c}$$

A definição de produto vectorial leva-nos à seguinte expressão:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{\mathbf{i}} - (a_x b_z - b_x a_z) \hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{\mathbf{k}}$$

onde  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  é a base ortonormada do sistema de coordenadas (versores unitários) e  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$  e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}.$$

Ainda sobre o produto vectorial pode-se dizer o seguinte:

$$\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot |\sin \alpha|$$

### 3.1.2.5 Produto genérico de matrizes

Duas matrizes só são multiplicáveis se tiverem a correcta concordância de dimensões. Cada novo elemento da uma matriz produto resulta do produto (interno) de cada vector linha do primeiro operando matricial com cada vector coluna da segunda matriz operando. Deste modo se verifica que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz; no que respeita as dimensões das matrizes envolvidas pode dizer-se, simbolicamente, o seguinte:  $(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$ .

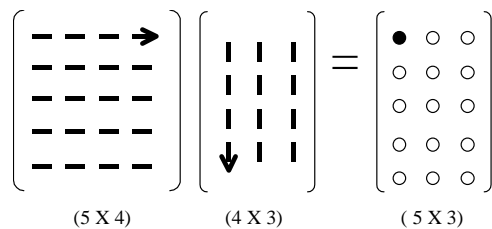


Figura 3-20 - Ilustração da obtenção de um elemento de uma matriz num produto de duas matrizes

### 3.1.3 Pontos e referenciais

Qualquer ponto no espaço pode ser visto (designado) de diferentes formas consoante o referencial usado; trata-se sempre do mesmo ponto fisicamente mas é a sua descrição que se adequa com o ponto de vista (referencial). Admitindo dois referenciais designados por R e N respectivamente, um mesmo ponto  $\mathbf{q}$

pode ser expresso num e noutro por  ${}^R\mathbf{q} = \begin{bmatrix} {}^Rq_x \\ {}^Rq_y \\ {}^Rq_z \end{bmatrix}$  e  ${}^N\mathbf{q} = \begin{bmatrix} {}^Nq_x \\ {}^Nq_y \\ {}^Nq_z \end{bmatrix}$  (Figura 3-21).

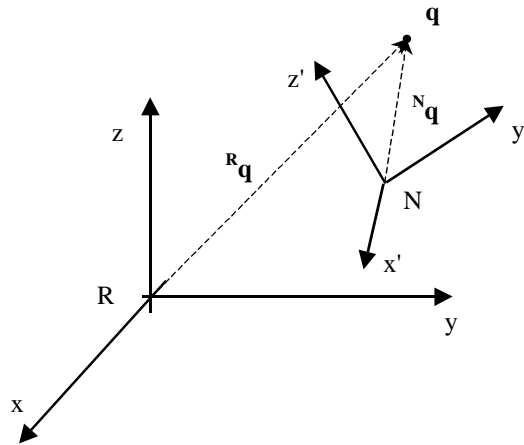


Figura 3-21 - Um ponto q visto de dois referenciais diferentes

A relação entre  ${}^R\mathbf{q}$  e  ${}^N\mathbf{q}$ , como se verá mais tarde, tem necessariamente a ver com a relação de posição e orientação entre os dois referenciais, ou seja, da forma como se obtém um a partir do outro.

Uma outra questão importante é a movimentação de pontos. Movimentar um ponto no espaço significa alterar-lhe as coordenadas, isto é, passar de uma posição  $\mathbf{q}_1$  para uma posição  $\mathbf{q}_2$  visto do mesmo referencial; este processo designa-se por translação no espaço e, geometricamente, pode ser traduzido pela adição/subtração de vectores como referido na secção 3.1.2.

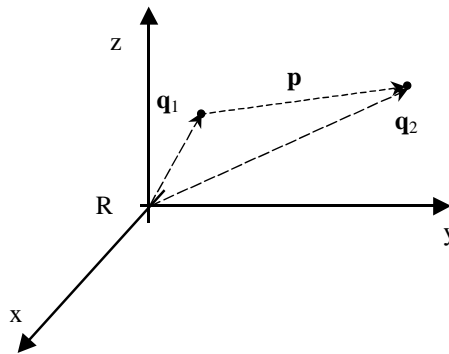


Figura 3-22 - Translação de um ponto

Atentando para a Figura 3-22 podemos escrever que  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$  ou que  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{p}$ . Assim, efectuou-se uma translação representada pelo vector  $\mathbf{p}$  e as novas coordenadas do ponto são dadas por

$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_{2x} \\ q_{2y} \\ q_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ q_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$ . Fazer a translação de um segmento de recta (Figura 3-23) implica calcular as

novas coordenadas dos seus dois extremos e, nesse caso, ter-se-ia as seguintes relações  $\mathbf{q}_{A2} = \mathbf{q}_{A1} + \mathbf{p}$  e

$$\mathbf{q}_{B2} = \mathbf{q}_{B1} + \mathbf{p}$$

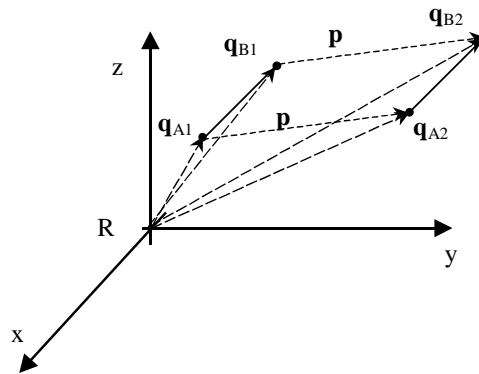


Figura 3-23 - Translação de um segmento de recta.

Fazer a translação de figuras mais complexas implicaria recalculer todos as novas posições de todos os pontos relevantes. Por exemplo, para calcular a nova descrição (posição) de um cubo, teríamos de calcular as novas coordenadas dos seus oito vértices após a translação. Claramente, este processo não é interessante (em especial para transformações mais complexas que a translação, como veremos mais adiante), e requer-se portanto uma forma alternativa e mais genérica para determinar a nova posição do cubo e de qualquer ponto nele contido. Essa alternativa passa pela definição de um segundo referencial solidário com o objecto a mover. No instante inicial, antes da transformação, os referenciais coincidem, mas após a transformação teremos ainda o referencial original (R) e o novo referencial (N). O processo ilustra-se na Figura 3-24. O ponto  ${}^N\mathbf{q}$  assinalado traduz as coordenadas de um dos vértices (escolha arbitrária) no novo referencial, mas são também as coordenadas desse mesmo ponto, em R, antes de haver qualquer translação! Após a translação, no referencial N, solidário com o objecto, essas coordenadas mantêm-se, mas no referencial que foi deixado para trás (R) esse ponto tem agora as coordenadas  ${}^R\mathbf{q}$ . A relação entre essas coordenadas é obviamente dada por  ${}^R\mathbf{q} = {}^N\mathbf{q} + \mathbf{p}$ . Note-se que o vector  $\mathbf{p}$  está descrito no referencial original ( $\mathbf{p} = {}^R\mathbf{p}$ ), donde, em rigor, se deva procurar escrever  ${}^R\mathbf{q} = {}^N\mathbf{q} + {}^R\mathbf{p}$ .

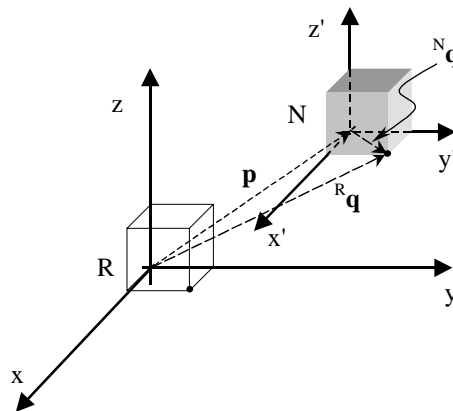


Figura 3-24 - Translação de um cubo e do referencial a ele associado.

## 3.2 Transformações geométricas elementares

### 3.2.1 Exemplos de transformações

Pela experiência física do dia a dia, é possível conceber transformações geométricas diferentes da translação, das quais a rotação é o exemplo mais comum. Por exemplo, uma rotação no espaço 3D, em torno

do eixo dos  $zz$ , de um dado ângulo  $\alpha$ ,  $Rot(z,\alpha)$ , ou uma translação de valor  $a$  ao longo do eixo dos  $yy$ ,  $Trans(y,a) = Trans(0,a,0)$ , podem ser ilustradas do seguinte modo:

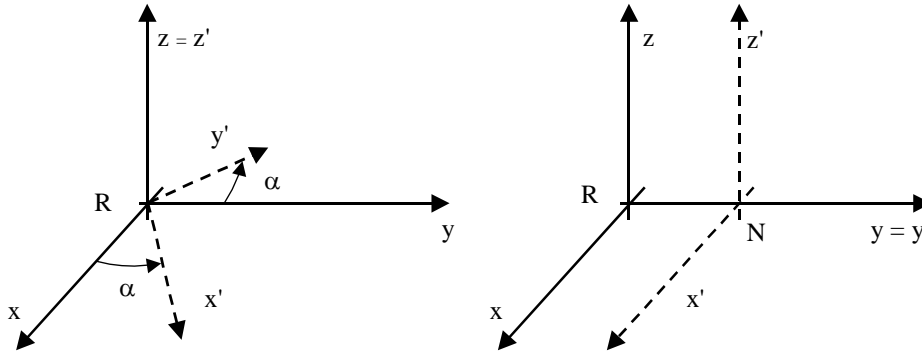


Figura 3-25 - Ilustração das transformações  $Rot(z,\alpha)$  e  $Trans(y,a)$ .

Na verdade, e como facilmente se deduz da Figura 3-25, no espaço a três dimensões há seis transformações geométricas independentes, 3 translações e 3 rotações elementares:  $Trans(x,a)$ ,  $Trans(y,a)$ ,  $Trans(z,a)$ ,  $Rot(x,\alpha)$ ,  $Rot(y,\alpha)$  e  $Rot(z,\alpha)$ . Naturalmente, e como se verá mais adiante, transformações sucessivas resultam numa outra transformação decomponível nas seis transformações elementares.

### 3.2.2 A notação matricial para representar transformações de um ponto a duas dimensões

#### 3.2.2.1 Transformação geométrica genérica

Se atentarmos ao caso da translação no espaço (a 2D para simplificar), poderemos escrever o seguinte:

$$\begin{cases} x_1 = x + p_x \\ y_1 = y + p_y \end{cases}$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Podemos todavia admitir um caso de transformação geométrica, linear, absolutamente genérica onde cada nova coordenada possa depender não só de um parâmetro independente, mas também de todas as coordenadas originais. Uma expressão desse género seria dada por:

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + p_x \\ y_1 = cx + dy + p_y \end{cases}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

Designemos por  $\mathbf{T}$  a matriz quadrada indicada,  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , e por  $\mathbf{p}$  o vector usado como termo

independente na expressão anterior. Rapidamente se verifica que a transformação de translação é obtida fazendo  $\mathbf{T}$  identidade e  $\mathbf{p}$  o vector de translação. Podemos assim considerar um conjunto de situações para valores de  $\mathbf{T}$  e de  $\mathbf{p}$ , e procurar relacioná-los com transformações geométricas conhecidas. Vamos primeiramente admitir um conjunto de situações onde temos o caso particular de  $\mathbf{p} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , ou seja, sem



translação.

### 3.2.2.2 Matriz identidade (transformação nula) e sem translação

se  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  virá  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , ou seja, não há transformação geométrica alguma;

a matriz identidade não introduz transformação geométrica.

### 3.2.2.3 Reflexão em relação a um eixo (simetria axial)

se  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  virá claramente  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$  ou geometricamente:

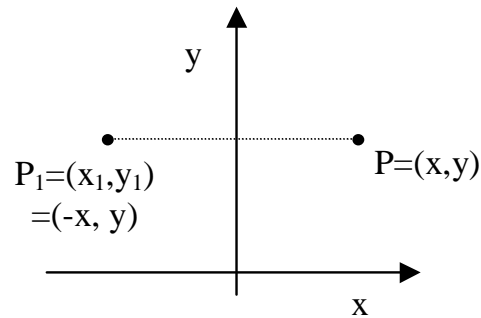


Figura 3-26 - Simetria axial

### 3.2.2.4 Reflexão em relação à origem (simetria central)

se  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  virá  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$  ou geometricamente

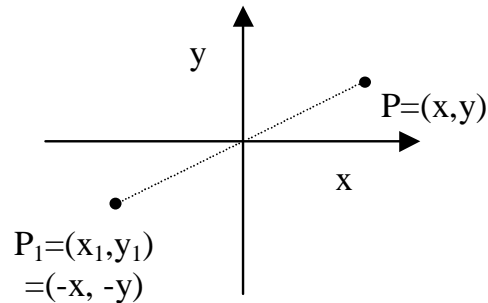


Figura 3-27 - Simetria central

### 3.2.2.5 Factor de escala

Uma transformação curiosa é dada por  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , que resulta em

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ y \end{bmatrix}.$$

Sobre um ponto poderia ter efeitos aparentes de uma translação, mas não é de facto uma translação. Basta pensar quando aplicada a um objecto mais complexo como um segmento de recta. Seja por exemplo o segmento delimitado pelos pontos A(1,1) e B(2,2) e seja  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . É imediato concluir que:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Geometricamente a operação pode ser representada como ilustrado na Figura 3-28.

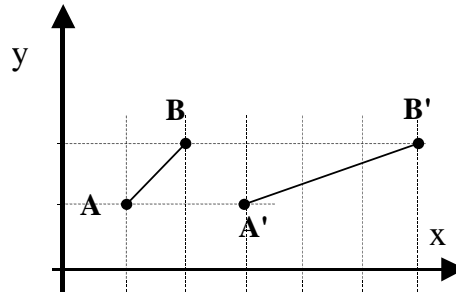


Figura 3-28 - Transformação de escala aplicada ao segmento AB

A transformação anterior não é uma translação porque não há nenhum vector que adicionado a qualquer ponto de AB resulte no ponto respectivo de A'B', ou em símbolos  $\neg \exists_r : \forall_{P \in \overline{AB}}, P' = P + r$ . Basta verificar por outro lado que o novo segmento é mais longo!

### 3.2.2.6 Rotação de 90°

Se  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  então temos uma transformação de rotação de 90° em torno da origem do sistema de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

O fenómeno é melhor ilustrado com um exemplo. Se pensarmos num triângulo com os seguintes vértices A(2,1), B(2,-1) e C(4,0), após as transformações virá:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } C' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que se representa geometricamente na Figura 3-29.

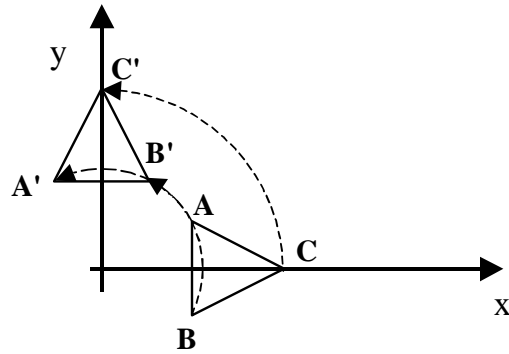


Figura 3-29 - Rotação de 90° no plano em torno da origem.

### 3.2.3 Matriz rotação para um caso geral

Pode-se verificar que a matriz de rotação de 90° vista anteriormente é compatível com o seguinte:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

Poder-se-á induzir que uma matriz de rotação genérica seja dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

Vamos provar que assim é. Seja um dado ponto no plano com coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e coordenadas polares  $(l, \theta)$ . Posteriormente, é aplicada a esse ponto uma rotação de valor  $\phi$  em torno da origem, resultando no ponto de coordenadas  $(x_1, y_1)$ .

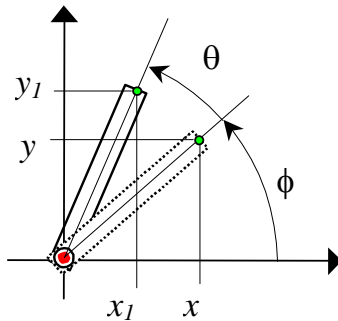


Figura 3-30 - Rotação genérica de um ponto no plano

A partir da Figura 3-30 é possível extrair as seguintes relações:

$$\begin{cases} x_1 = l \cos(\theta + \phi) = l(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) \\ y_1 = l \sin(\theta + \phi) = l(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta) \end{cases}$$

como  $\begin{cases} x = l \cos \theta \\ y = l \sin \theta \end{cases}$  virá:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

e finalmente em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

### 3.2.4 Limitações da matriz de transformação para representar a translação

A translação tem um efeito independente das coordenadas. Está associada ao termo  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$  indicado nas expressões mencionadas a partir da secção 3.2.2.1. Porém, seria vantajoso, pelo menos do ponto de vista computacional, ter uma forma de representar uma transformação geométrica de forma compacta e elegante, em vez de uma matriz e um vector independente.

## 3.3 Coordenadas homogéneas

### 3.3.1 Introdução de componentes adicionais na matriz de transformação

Uma solução para a questão anterior (secção 3.2.4) obtém-se observando a expressão  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$ . Basta conceber uma forma alargada de definir as coordenadas de um vector e rescrever então:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & p_x \\ c & d & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os termos introduzidos fazem surgir uma igualdade adicional (1=1), que é verdadeira, e não altera em nada o conhecimento do sistema, mas tem a vantagem de integrar numa única matriz os efeitos da rotação e de uma translação (pode ainda representar outros efeitos irrelevantes neste momento).

As coordenadas resultantes (com o termo unitário adicional) são designadas coordenadas homogéneas, e este caso é uma situação particular da definição geral de coordenadas homogéneas: se

$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ , então a variante homogénea é dada por  $\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ k \end{bmatrix}$ . Nestes capítulos dedicados ao estudo dos

sistemas de coordenadas usa-se o caso particular de  $k=1$ .

A matriz de transformação (homogénea) é assim constituída por secções com significados específicos:

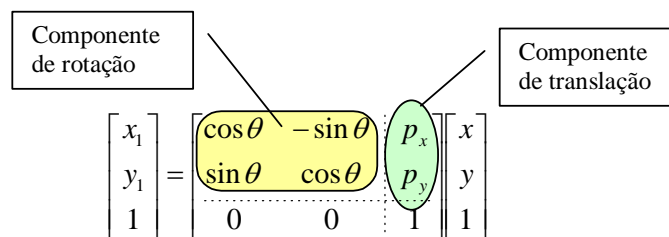


Figura 3-31 - Componentes da matriz de transformação a duas dimensões.

Assim, uma rotação pura, no plano, traduz-se pela expressão:

$$Rot(\theta) = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e uma translação pura, no plano, pela expressão:

$$Trans(p_x, p_y) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

### 3.3.2 Transformações compostas - produtos de matrizes de transformação

Uma transformação geométrica transforma um ponto noutro; portanto, uma sucessão de transformações traduz-se na multiplicação das diversas transformações. Basta relembra a propriedade associativa da multiplicação de matrizes para o demonstrar:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}_N (\dots (\mathbf{T}_3 \cdot (\mathbf{T}_2 \cdot (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{p}))) = (\mathbf{T}_N \dots \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1) \mathbf{p} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}$$

Assim, uma transformação composta é ela mesma uma transformação geométrica.

Observe-se porém que a ordem das multiplicações (operação das transformações) não é necessariamente comutativa. É-o para as translações puras e também para as rotações puras no plano (no espaço não é!), mas não o é para transformações genéricas. De seguida demonstram-se estas situações uma por uma.

#### 3.3.2.1 Sucessão de Translações (comutativo)

Sejam duas translações:

$$\mathbf{T}_1 = Trans(a_x, a_y) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ e } \mathbf{T}_2 = Trans(b_x, b_y) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Rapidamente se verifica que:

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_x + b_x \\ 0 & 1 & a_y + b_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$$

#### 3.3.2.2 Sucessão de Rotações no plano (comutativo)

Sejam duas rotações no plano:

$$\mathbf{T}_1 = Rot(\theta_1) = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ e } \mathbf{T}_2 = Rot(\theta_2) = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Por facilidade de notação, convencionando as abreviações  $C\theta_i = \cos \theta_i$  e  $S\theta_i = \sin \theta_i$ , o produto das duas transformações resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \left[ \begin{array}{cc|c} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - S\theta_1 C\theta_2 & 0 \\ S\theta_1 C\theta_2 + C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 + C\theta_1 C\theta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

ou ainda, usando as regras do seno e do co-seno da soma de ângulos:

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Também se vê claramente que a operação é comutativa, e geometricamente corresponde a rodar incrementalmente os sucessivos ângulos de rotação.

### 3.3.2.3 Sucessão de Translações e rotações (não comutativo)

Menos tolerante é o caso da ordem de aplicação de translações e rotações. De facto, também se demonstra com grande facilidade que a operação não é comutativa.

Sejam as transformações:

$$\mathbf{T}_1 = Trans(p_x, p_y) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ e } \mathbf{T}_2 = Rot(\theta) = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Como se espera, até da própria definição de transformação geométrica, é imediato obter o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= Trans(p_x, p_y) Rot(\theta) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Mas, por outro lado, a operação na ordem inversa resulta de forma bem diferente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 &= Rot(\theta) Trans(p_x, p_y) = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & p_x \cos \theta - p_y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_x \sin \theta + p_y \cos \theta \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

### 3.4 Matrizes de transformação a 3 dimensões

#### 3.4.1 Generalização dos conceitos para 3 dimensões

Os conceitos abordados no caso do plano são, com relativamente pouco esforço, generalizáveis para o espaço a três dimensões. A translação tem mais um grau de liberdade e portanto haverá mais uma coordenada nos vectores. Todavia, a rotação deve agora ser definida em torno de um eixo, havendo, por isso, 3 tipos de rotações possíveis; as rotações no espaço 3D apresentam portanto mais diversidade e complexidade do que no plano.

Em coordenadas homogêneas um ponto é agora dado por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.4.2 Componentes da matriz de transformação

A matriz de transformação para o espaço 3D assume também as dimensões apropriadas:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b & c & p_x \\ d & e & f & p_y \\ g & h & i & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sub-matriz  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ , representará agora todo o conjunto de rotações passíveis de

afectar a transformação como se descreve mais à frente. O vector  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$  traduz naturalmente a translação.

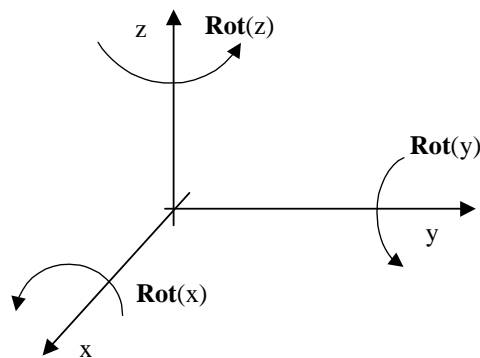


Figura 3-32 - Rotações no espaço a 3D.

Como foi já mencionado, a rotação pode ser feita em torno de três eixos distintos, como se ilustra na Figura 3-32. A variante mais intuitiva é a rotação em torno dos eixo dos zz que deriva de imediato da rotação do plano. As outras variantes são menos intuitivas mas a sua demonstração não é de forma nenhuma complexa; bastará pensar na expressão usada para o plano a 2D e arranjar as matrizes de transformação

adequadas. Assim virá:

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso de rotações compostas em torno de dois ou mais eixos a componente de rotação (orientação) da matriz de transformação será mais complexa do que o das rotações simples indicadas atrás.

A matriz de transformação geométrica, homogénea, tem, além das rotações e da translação mais quatro termos (a última linha). Nesta abordagem os valores dessa linha só interessam ser [0 0 0 1], mas noutros contextos terão a importância adequada, nomeadamente no tratamento geométrico de imagem digital: são exemplos disso a perspectiva e o factor de escala global.

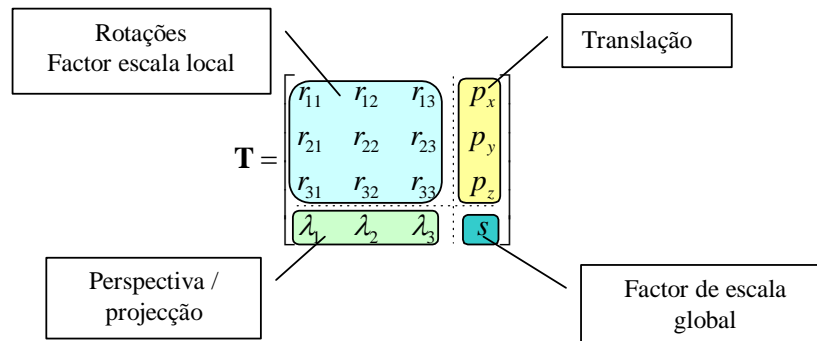


Figura 3-33 - Componentes da matriz de transformação a 3D.

### 3.4.3 Interpretações do que significa a matriz de transformação.

É possível individuar três interpretações/significados principais de uma matriz de transformação, que se resumem de seguida:

- Indica as transformações geométricas operadas sobre um ponto para o levar para outro local geométrico:  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_0$ . Este facto traduz também o movimento imposto a um ponto, sempre dentro de um mesmo referencial. Não são aqui óbvias todas as implicações da transformação se o objecto for um ponto, em especial as componentes de rotação.



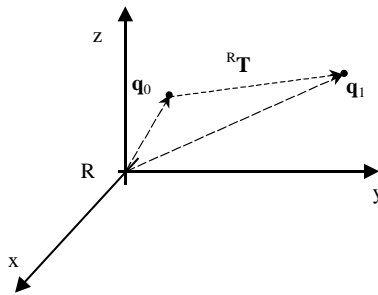


Figura 3-34 - Significado de  ${}^R\mathbf{T}$ : movimentação de um ponto

- Relaciona as coordenadas de um mesmo ponto físico em dois referenciais diferentes, ou seja:  ${}^R\mathbf{q} = {}^R\mathbf{T}_N \cdot {}^N\mathbf{q}$ . Muda-se o ponto de vista, e no caso anterior mudava-se o ponto!

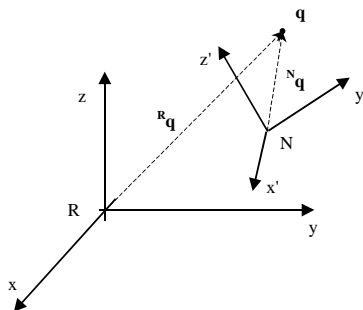


Figura 3-35 - Significado de  ${}^R\mathbf{T}$ : movimentação (criação) de um referencial

- Transformação de um referencial (R) noutro referencial (N):  ${}^R\mathbf{T}_N$ . Trata-se da criação de um novo referencial por translação e rotação. Para tentar criar uma melhor imagem do processo, bastará pensar que havia um segundo referencial N inicialmente coincidente com o referencial R mas solidário com o seu ponto de origem; a esse ponto foi depois aplicada a transformação levando consigo o referencial N. A matriz de transformação representa todas as componentes de posição e orientação de um novo referencial N em relação a um referencial original R. Isto é, é possível identificar na matriz  ${}^R\mathbf{T}_N$  os quatro vectores que indicam a orientação (três dos quatro vectores) e a posição cartesiana (um vector) do novo sistema de coordenadas. Na expressão seguinte  $\mathbf{x}_N$  é o vector que indica a direcção do novo eixo dos xx em relação à base canónica do sistema R, e  $\mathbf{y}_N$  e  $\mathbf{z}_N$  os vectores para as direcções dos novos eixos dos yy e dos zz respectivamente:

$${}^R\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{x}_N & \mathbf{y}_N & \mathbf{z}_N & \mathbf{p}_N \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

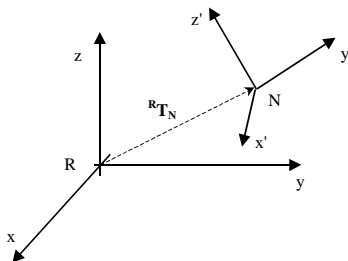


Figura 3-36 - Significado de  ${}^R\mathbf{T}$ : relação entre dois referenciais.

### 3.4.4 Pós-multiplicação e pré-multiplicação de matrizes de transformação

Foi visto anteriormente que a ordem de multiplicação das transformações era importante (secção 3.3.2) porque se fosse alterada o resultado seria diferente. Ou seja, se uma transformação  ${}^R\mathbf{T}_1$  for seguida no tempo de uma transformação  ${}^R\mathbf{T}_2$ , então isso equivale a ter uma transformação global  ${}^R\mathbf{T} = {}^R\mathbf{T}_2 \cdot {}^R\mathbf{T}_1$ . Ou seja, a transformação final resulta da pré-multiplicação das transformações aplicadas sucessivamente no tempo.

Porém, põe-se a questão: e o que significará a transformação  ${}^R\mathbf{T}' = {}^R\mathbf{T}_1 \cdot {}^R\mathbf{T}_2$ ? Isto é, em que é que resulta a pós-multiplicação de transformações? O problema compreende-se melhor com um exemplo, que se faz no plano a 2D para mais fácil visualização.

Seja uma transformação  $\mathbf{T}_1 = \text{Rot}(45^\circ)$  e uma transformação  $\mathbf{T}_2 = \text{Trans}(x, a)$  que usaremos para criar novos referenciais. A primeira situação que experimentamos é  $\mathbf{T}_A = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ . Significa que primeiro rodamos o referencial e em seguida lhe aplicamos uma translação, como se ilustra na Figura 3-37, do lado esquerdo. A segunda situação será designada por  $\mathbf{T}_B = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$  e significa que primeiro é aplicada uma translação segundo o eixo dos xx e depois uma rotação em torno da origem. O resultado é o ilustrado no lado direito da mesma figura. No primeiro caso,  $\mathbf{T}_2$  foi pré-multiplicado a  $\mathbf{T}_1$ , no segundo caso,  $\mathbf{T}_2$  foi pós-multiplicado.

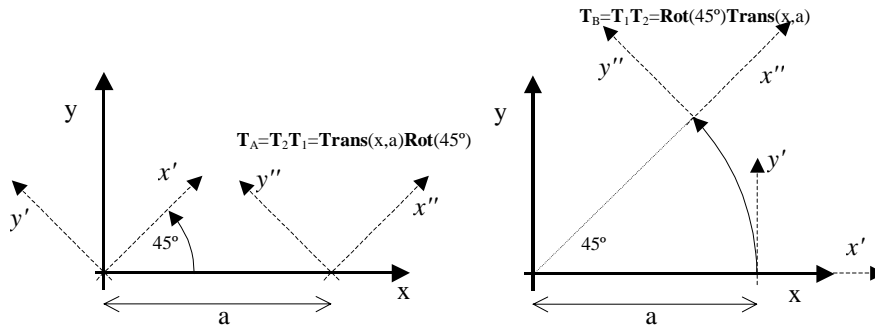


Figura 3-37 - Diferenças entre pré- e pós-multiplicação de transformações.

Em ambas as situações, as transformações foram realizadas em relação ao referencial original (xy). Imagine-se porém uma alternativa que seria aplicar as transformações em relação a cada referencial recém-criado. Ou seja, são usados os referenciais intermédios para as novas transformações a aplicar. Digamos então o seguinte: aplicar a rotação (no único referencial ainda existente) e depois a aplicar translação ao longo do referencial resultante da rotação. Geometricamente o processo pode ser ilustrado como na figura seguinte:

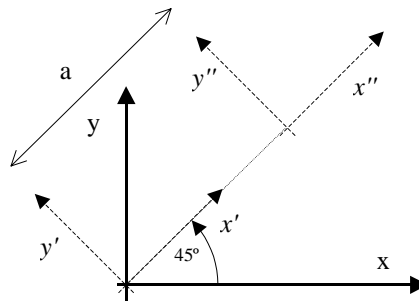


Figura 3-38 - A segunda transformação (translação) foi realizada no novo referencial.

O resultado da Figura 3-38 é muito interessante pois coincide com o resultado do segundo caso da Figura 3-37 (lado direito), isto é,  $\mathbf{T}_B = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ , ou seja, a pós-multiplicação da matriz. Prescinde-se de demonstração formal, mas podemos afirmar o seguinte: a **pré-multiplicação** de uma transformação por outra equivale a aplicar esta segunda no **referencial global**: a **pós-multiplicação** de uma transformação por outra equivale a aplicar esta segunda no **novo referencial**.

Segue-se um problema mais complexo usando o enunciado anterior. Determinar o novo referencial depois de translacionar o original de uma unidade em cada eixo, depois rodá-lo 90° em torno do novo eixo dos yy, translacionar 1 unidade no novo eixo dos xx, e depois translacionar 1 unidade negativa no eixo dos zz do referencial original.

A transformação é dada pelo seguintes passos:

| Passo 4          | Passo 1      | Passo 2    | Passo 3      |
|------------------|--------------|------------|--------------|
| T= Trans(0,0,-1) | Trans(1,1,1) | Rot(y,90°) | Trans(1,0,0) |

Note-se que o passo 4 foi uma pré-multiplicação e os restantes (2 e 3) foram pós-multiplicações. Graficamente o processo percorreu as seguintes fases:

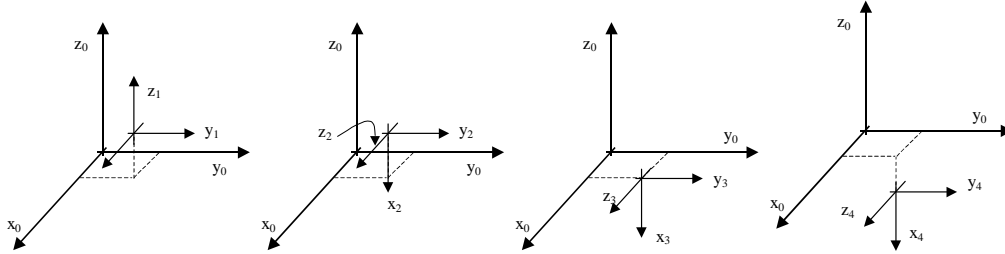


Figura 3-39 - Os quatro passos da transformação  $T=Trans(0,0,-1)Trans(1,1,1)Rot(y,90°)Trans(1,0,0)$

Do ponto de vista matricial obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A interpretação da matriz final é directa e confirmável pelo diagrama da Figura 3-39: o novo eixo dos xx aponta no sentido contrário do eixo dos zz original; o novo eixo dos yy aponta no mesmo sentido do eixo dos yy original, e o novo eixo dos zz aponta no sentido do eixo dos xx original. Finalmente, a origem do novo sistema de coordenadas está no ponto (1,1,-1) medido no referencial original.

### 3.4.5 Transformações inversas.

A obtenção de um novo ponto pela aplicação de uma dada transformação geométrica pressupõe que o processo inverso é igualmente possível: trata-se tão simplesmente de obter um ponto (o original) a partir de outro (o que era designado de novo). Matematicamente o processo traduz-se do seguinte modo:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_0 \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0$$

Ou seja, pelo recurso à inversa de uma matriz, foi possível inverter o processo de transformação geométrica. Deste modo, a inversa da matriz de transformação é também ela, necessariamente, uma matriz de transformação.

Como transformação que é, a transformação inversa assume todos os significados já conhecidos. Em particular, realce-se a transformação de referenciais de onde sai a expressão:  $({}^R \mathbf{T}_N)^{-1} = {}^R \mathbf{T}_N^{-1} = {}^N \mathbf{T}_R$ .

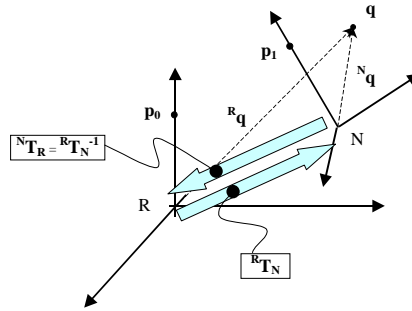


Figura 3-40 - Transformação inversa

Na Figura 3-40 pretende-se ilustrar o processo de transformação inversa e algumas relações entre pontos. O ponto  $\mathbf{p}_0$  sobre um dos eixos no referencial R tem o seu correspondente, após a transformação directa, no ponto  $\mathbf{p}_1$  sobre o eixo do novo referencial, N. Note-se que  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_1$  podem ser vistos como pontos diferentes num mesmo referencial (esquecendo o outro referencial), ou cada um no seu referencial como resultado de uma transformação de referencial. A partir da Figura 3-40 podemos ainda escrever uma panóplia de expressões que poderão ajudar a compreender melhor as diversas relações.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 \\ {}^N \mathbf{q} &= {}^N \mathbf{T}_R \cdot {}^R \mathbf{q} \\ {}^R \mathbf{q} &= {}^N \mathbf{T}_R^{-1} \cdot {}^N \mathbf{q} = {}^R \mathbf{T}_N \cdot {}^N \mathbf{q} \\ {}^N \mathbf{p}_0 &= {}^N \mathbf{T}_R \cdot {}^R \mathbf{p}_0, \quad {}^R \mathbf{p}_1 = {}^R \mathbf{T}_N \cdot {}^N \mathbf{p}_1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Note-se que nas relações anteriores se tem  $\mathbf{T} = {}^R \mathbf{T}_N$ . Só uma questão de contexto permite dispensar os índices; na verdade, quando não pensamos no significado de transformação de referenciais, não faz sentido falarmos de referenciais, e aí, os índices que os descrevem (R,N,...) não têm utilidade particular. Ou seja, quando nas expressões acima intervém um único ponto, mas visto de referenciais diferentes ( ${}^R \mathbf{q}$  e  ${}^N \mathbf{q}$ , por exemplo), é necessário indicar a ordem da transformação (de R para N ou de N para R). Quando relacionamos dois pontos diferentes num mesmo referencial ( $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_1$  por exemplo), em geral a transformação entre eles não carecerá de índices desde que não haja ambiguidade. Em caso de dúvida ou de potencial ambiguidade sugere-se o uso dos referidos índices!

A matriz de transformação tem propriedades particulares que permitem definir uma regra muito expedita para calcular a sua inversa. De facto, se uma matriz transformação for dada por:

$$\mathbf{T} = \left[ \begin{array}{ccc|c} ROT & p_x & & \\ & p_y & & \\ & p_z & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} & \vec{p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

então a sua inversa será dada por:

$$\mathbf{T}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & -\vec{p} \cdot \vec{x} \\ & (ROT)^T & & -\vec{p} \cdot \vec{y} \\ & & & -\vec{p} \cdot \vec{z} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Note-se o uso da seta (redundante) para reforçar a lembrança a natureza dos objectos em causa. Como dito anteriormente, o seu uso não era aqui obrigatório, contudo a sua presença recordará que, por

exemplo o produto  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$  é um produto interno (escalar) de vectores.

### 3.4.6 Grafos e equações de transformação

Um dos problemas mais frequentes em robótica industrial, e na automação em geral, consiste em determinar a posição relativa entre um componente e um seu sub-componente, sabendo as suas posições, em relação a um referencial comum (como por exemplo a bancada de trabalho). Por outras palavras, qual deve ser a transformação a aplicar ao sub-componente para o encaixar num local bem definido no componente principal. Para melhor ilustrar a questão, imagine-se um parafuso (ou pino) que queremos encaixar numa dada cavidade; note-se que a localização do pino e da cavidade são conhecidos. Após a identificação das partes, devem definir-se referenciais associados a cada um deles e, a partir daí, procurar as relações entre os referenciais. No exemplo do pino, Figura 3-41, os referenciais associados devem ser de tal forma que, na posição final, após o encaixe, os eixos deverão todos coincidir, porque é esse o objectivo da montagem (*assembling*).

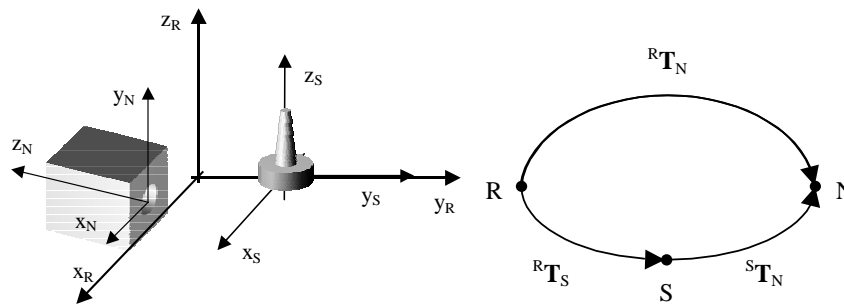


Figura 3-41 - Problema da inserção geométrica de um pino numa cavidade

Do grafo da Figura 3-41 podemos escrever a seguinte relação:  ${}^R\mathbf{T}_N = {}^R\mathbf{T}_S \cdot {}^S\mathbf{T}_N$ . Há varias formas de demonstrar essa relação mas eis uma das formas mais expeditas: seja um ponto  $\mathbf{q}$  qualquer no espaço com as diversas coordenadas  ${}^R\mathbf{q}$ ,  ${}^S\mathbf{q}$  e  ${}^N\mathbf{q}$  consoante o referencial de onde é visto. Do exposto na secção 3.4.3 podemos escrever sucessivamente:

$${}^S\mathbf{q} = {}^S\mathbf{T}_N {}^N\mathbf{q}$$

$${}^R\mathbf{q} = {}^R\mathbf{T}_S {}^S\mathbf{q}$$

Combinando as duas expressões vem:

$${}^R\mathbf{q} = {}^R\mathbf{T}_S ({}^S\mathbf{T}_N {}^N\mathbf{q}) = ({}^R\mathbf{T}_S {}^S\mathbf{T}_N) {}^N\mathbf{q}$$

Comparando a expressão anterior com  ${}^R\mathbf{q} = {}^R\mathbf{T}_N {}^N\mathbf{q}$  virá finalmente:

$${}^R\mathbf{T}_N = {}^R\mathbf{T}_S {}^S\mathbf{T}_N$$

Nesta expressão, e lembrando a situação da Figura 3-41, e o grafo de transformação, verifica-se que há um termo desconhecido, trata-se de  ${}^S\mathbf{T}_N$ , daí a expressão de designar por equação de transformação. A sua resolução é todavia muito simples, recorrendo apenas à álgebra de matrizes:

$${}^S\mathbf{T}_N = {}^R\mathbf{T}_S^{-1} \cdot {}^R\mathbf{T}_N$$

Note-se que a transformação  ${}^S\mathbf{T}_N$  não traduz a trajetória que deve fazer o pino para chegar ao encaixe; traduz apenas uma relação geométrica de posição e orientação que servirá de base ao cálculo do eventual movimento/trajetória, que será tema a abordar noutro capítulo. Mais ainda,  ${}^S\mathbf{T}_N$  traduz a posição e orientação da cavidade como vista do referencial do pino, isto é, a acção de controlo ou geração do movimento prescindirá do referencial global R, é no pino que tudo começa.

Propõe-se ainda um outro exemplo mais elaborado onde se pretende descobrir a relação entre o

*end-effector* de um manipulador e o ponto de contacto com um objecto a pegar. A Figura 3-42 mostra uma situação possível onde se assinalam os diversos referenciais: W – referencial global de trabalho (como a bancada ou sala), R – referencial da base do robot (localização da base do robot na bancada), H – referencial do *end-effector* (depende do estado corrente das diversas articulações do robot), O – referencial do objecto a pegar (localização do objecto sobre a bancada), G – referencial do ponto de contacto no objecto (local onde o *end-effector* deverá estabelecer contacto, como por exemplo o ponto central de uma face do objecto cuja descrição geométrica é perfeitamente definida e conhecida). O grafo de transformação é concebido levando em linha de conta que é no ponto G que se pretende o objectivo da operação.

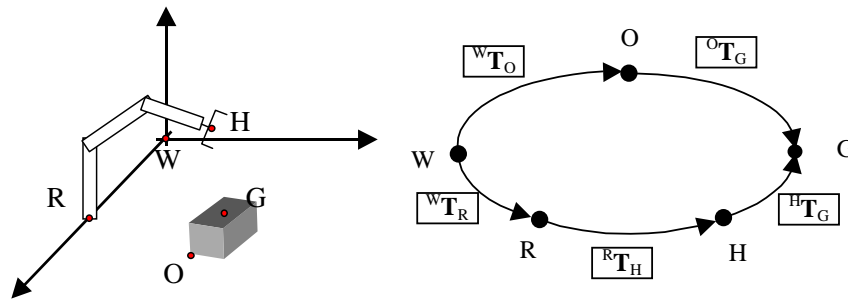


Figura 3-42 - Transformações geométricas de um processo simples de manipulação

A partir do grafo de transformação podemos escrever a equação de transformação cuja variável (termo desconhecido) é  ${}^H\mathbf{T}_G$ :

$${}^W\mathbf{T}_R \cdot {}^R\mathbf{T}_H \cdot {}^H\mathbf{T}_G = {}^W\mathbf{T}_O \cdot {}^O\mathbf{T}_G$$

Finalmente sai a expressão final:

$${}^H\mathbf{T}_G = {}^R\mathbf{T}_H^{-1} \cdot {}^W\mathbf{T}_R^{-1} \cdot {}^W\mathbf{T}_O \cdot {}^O\mathbf{T}_G$$

### 3.4.6.1 Exemplo de uma montagem vista do referencial da peça

Para terminar esta secção, propõe-se um exemplo numérico de um processo de montagem que consiste em determinar a transformação a aplicar no paralelepípedo, e do seu ponto de vista, de tal modo que encaixe na peça mãe ao longo das arestas assinaladas com uma seta a carregado. Escolheram-se os pontos A e B para origem dos referenciais respectivos e assinalaram-se os eixos como indicado para satisfazer os requisitos de alinhamento final.

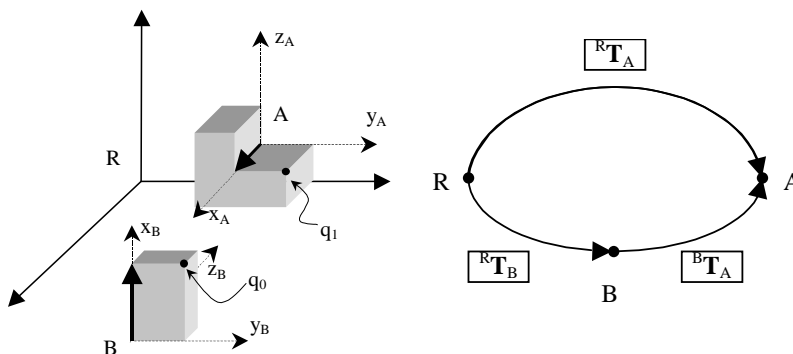


Figura 3-43 - Exemplo de montagem.

Sabendo que  ${}^R\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  e  ${}^R\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  determinar a transformação necessária a aplicar à peça, do

seu ponto de vista, para ela encaixar, isto é, determinar  ${}^B\mathbf{T}_A$ . O grafo de transformação é o ilustrado, e dele sairá de imediato que  ${}^B\mathbf{T}_A = {}^R\mathbf{T}_B^{-1} \cdot {}^R\mathbf{T}_A$ . A partir dos pontos dados, e observando a orientação dos eixos dos sistemas ilustrados, é imediato concluir o seguinte:

$${}^R\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^R\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, e pelas propriedades da matriz de transformação homogênea, podemos concluir que:

$${}^B\mathbf{T}_A = {}^R\mathbf{T}_B^{-1} \cdot {}^R\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar que o procedimento está correcto, experimentemos o resultado em dois pontos distintos. Atente-se porém às coordenadas e aos sistemas de coordenadas que se usam em cada caso! A transformação  ${}^B\mathbf{T}_A$  é a transformação a operar sobre o paralelepípedo, mas visto do seu próprio referencial. As coordenadas que resultam serão também no seu próprio referencial. Podemos verificar *a posteriori* o seu valor noutros referenciais conhecidos só para efeitos de confirmação. Tome-se por exemplo o ponto B propriamente dito que, no seu referencial, tem as seguintes coordenadas:

$${}^B\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

Após a transformação em causa ( ${}^B\mathbf{T}_A$ ), as suas coordenadas, sempre no referencial B e que designamos por  ${}^B\mathbf{B}'$ , serão dadas por:

$${}^B\mathbf{B}' = {}^B\mathbf{T}_A \cdot {}^B\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mas, no referencial A, que ponto é este? Sabendo  ${}^B\mathbf{T}_A$  (e consequentemente  ${}^A\mathbf{T}_B$ ), para qualquer ponto do espaço é válida a seguinte relação  ${}^A\mathbf{q} = {}^A\mathbf{T}_B \cdot {}^B\mathbf{q} = {}^B\mathbf{T}_A^{-1} \cdot {}^B\mathbf{q}$ .

Portanto,

$${}^A\mathbf{T}_B = {}^B\mathbf{T}_A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e por conseguinte,  ${}^A\mathbf{B}' = {}^A\mathbf{T}_B \cdot {}^B\mathbf{B}'$ , ou seja

$${}^A\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

como seria de esperar, visto este ponto não ser mais do que a origem do sistema A.

Um segundo teste pode ser feito a um outro vértice do paralelepípedo ilustrado na Figura 3-43. No referencial B, temos o ponto indicado por  $\mathbf{q}_0$ , que terá como coordenadas nesse referencial  ${}^B\mathbf{q}_0$ . Esse ponto vai ser movimentado para a posição  $\mathbf{q}_1$ , que terá coordenadas  ${}^B\mathbf{q}_1$  ou  ${}^A\mathbf{q}_1$ , conforme o referencial. Admitindo as

dimensões 2x4x3 para o paralelepípedo, teremos então, como se pode observar da referida figura, o seguinte:

$${}^B \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que deverá também este ser o valor para  ${}^A \mathbf{q}_1$  porque a localização  $\mathbf{q}_1$  o ponto de destino de  $\mathbf{q}_0$  aquando da transformação. E por isso,  $\mathbf{q}_1$  visto de A tem o mesmo valor que  $\mathbf{q}_0$  visto de B, ou seja,  ${}^A \mathbf{q}_1 = {}^B \mathbf{q}_0$ . Assim, para verificar esta igualdade, passemos à verificação da transformação para este outro vértice do paralelepípedo:

$${}^B \mathbf{q}_1 = {}^B \mathbf{T}_A \cdot {}^B \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mas, pelo raciocínio já executado anteriormente,

$${}^A \mathbf{q}_1 = {}^A \mathbf{T}_B \cdot {}^B \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que resulta em  ${}^A \mathbf{q}_1 = {}^B \mathbf{q}_0$  como se esperava.

### 3.4.6.2 Exemplo de montagem vista do referencial global

No exemplo concreto anterior pode ressaltar uma questão. A transformação pretendida era suposta ser aplicada no referencial da peça a mover, tal como sucedeu. Porém, é igualmente legítimo procurar determinar a transformação a aplicar mas visto do referencial global R. Reformulando, qual deve ser, vista de R, a transformação a aplicar ao bloco que está em B de forme que "encaixe" no referencial A? Vamos primeiro clarificar e distinguir esta situação da situação anterior (transformação vista do bloco a mover).

**Primeira situação:** o objecto sofreu  ${}^R \mathbf{T}_B$  e em seguida deve sofrer  ${}^B \mathbf{T}_A$  para atingir  ${}^R \mathbf{T}_A$ , isto é:  ${}^R \mathbf{T}_B \cdot {}^B \mathbf{T}_A = {}^R \mathbf{T}_A$ . A segunda transformação (no tempo), por ser vista do novo referencial (B), é pós-multiplicada à transformação original.

**Segunda situação:** o objecto sofreu  ${}^R \mathbf{T}_B$  e em seguida deve sofrer uma transformação  $\mathbf{T}_2$  para atingir  ${}^R \mathbf{T}_A$ . Todavia,  $\mathbf{T}_2$  deve ser vista do referencial global R e por isso deve ser pré-multiplicada a  ${}^R \mathbf{T}_B$ :  $\mathbf{T}_2 \cdot {}^R \mathbf{T}_B = {}^R \mathbf{T}_A$ . Como  $\mathbf{T}_2$  pretende transformar do referencial B para A, visto de R, vamos designá-la do seguinte modo  $\mathbf{T}_2 = {}^R \mathbf{T}_{B,A}$ .

Feita a distinção de situações podemos então escrever:

$${}^R \mathbf{T}_{B,A} \cdot {}^R \mathbf{T}_B = {}^R \mathbf{T}_A$$

ou seja,

$${}^R \mathbf{T}_{B,A} = {}^R \mathbf{T}_A \cdot {}^R \mathbf{T}_B^{-1}$$

Substituindo, virá:



$${}^R\mathbf{T}_{B,A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bastará agora aplicar aos pontos já usados na situação anterior e confirmar os resultados.

$${}^R\mathbf{T}_{B,A} \cdot {}^R\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^R\mathbf{A}$$

O ponto  $\mathbf{q}_0$ , tem no referencial R as coordenadas:

$${}^R\mathbf{q}_0 = {}^R\mathbf{T}_B \cdot {}^B\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o ponto  $\mathbf{q}_1$ , tem no referencial R as coordenadas:

$${}^R\mathbf{q}_1 = {}^R\mathbf{T}_B \cdot {}^B\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, e como se esperava, a transformação operada sobre o ponto  $\mathbf{q}_0$  resulta no ponto  $\mathbf{q}_1$ , tudo visto do referencial R:

$${}^R\mathbf{T}_{B,A} \cdot {}^R\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^R\mathbf{q}_1$$

## 3.5 Orientação e ângulos de Euler (RPY)

### 3.5.1 A componente de orientação numa transformação

Numa matriz de transformação geométrica, como já visto, há uma sub-matriz que traduz a orientação do novo sistema de coordenadas com respeito ao sistema de coordenadas anterior. Essa sub-matriz de 3x3 contém na verdade os versores das três direcções dos três eixos.

$${}^R\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ROT} & \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N & \mathbf{y}_N & \mathbf{z}_N & \mathbf{p}_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa orientação é o resultado de uma sequência de 3 rotações em torno de três eixos distintos, que traduz os três graus de liberdade rotacional que existem no espaço.

As sub-matrizes de rotação (*ROT* na expressão anterior) apresentam algumas propriedades que se podem tornar úteis em certas circunstâncias, nomeadamente as seguintes:

- A sua inversa é igual à sua transposta:  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- As suas colunas são ortogonais:  $\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \wedge i \neq j$
- O seu determinante é unitário:  $\det(\mathbf{R}) = 1$

### 3.5.2 Formas de expressar a orientação

Podendo efectuar rotações em torno de três eixos (Figura 3-32) afigura-se um variado número de combinações possíveis. Esse número é aumentado pelo facto de cada rotação em torno de um dado eixo poder ser feita em relação ao referencial original ou ao novo referencial recém-criado.

Aos ângulos de rotação em torno de cada um dos três eixos chamam-se usualmente ângulos de Euler e o seu significado depende da combinação de rotações usadas. O número de combinações distintas é de 12 e de seguida descrevem-se as duas mais usadas.

#### 3.5.2.1 Roll-Pitch-Yaw (RPY)

A combinação de ângulos mais imediata é a de pensar a rotação, em relação a um referencial fixo, segundo os eixos x, y e z por esta ordem. Esta sequência é frequentemente conhecida pelos termos ingleses *Roll-Pitch-Yaw*.

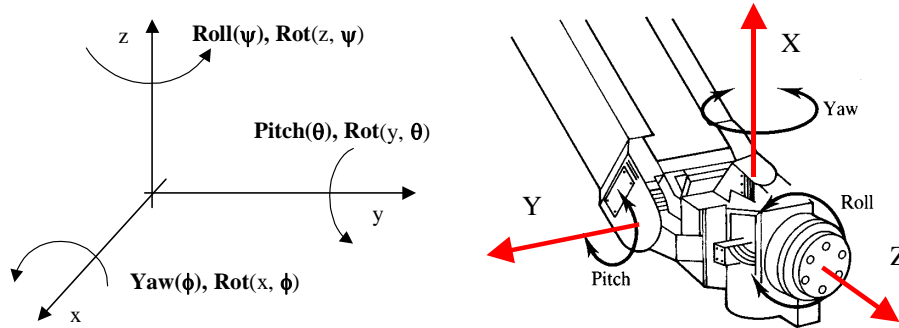


Figura 3-44 - Rotações RPY e correspondência usual num punho de manipulador.

Matematicamente a matriz de transformação é obtida do seguinte modo:

$$\mathbf{Rot}(\phi, \theta, \psi) = RPY(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{Rot}(z, \psi) \mathbf{Rot}(y, \theta) \mathbf{Rot}(x, \phi)$$

ou, após desenvolvimento:

$$RPY(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -S\phi C\psi + C\phi S\theta S\psi & S\phi S\psi + C\phi S\theta C\psi & 0 \\ S\phi C\theta & C\phi C\psi + S\phi S\theta S\psi & -C\phi S\psi + S\phi S\theta C\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usualmente também se definem as seguintes expressões:

$$Roll(\phi) = \mathbf{Rot}(z, \phi) , Pitch(\theta) = \mathbf{Rot}(y, \theta) , Yaw(\psi) = \mathbf{Rot}(x, \psi) .$$

#### 3.5.2.2 Ângulos de Euler (tipo II)

Uma outra variante para os ângulos de Euler muito usada, é a chamada tipo II (se bem que esta designação varie muito com os autores). A sequência é a de rotação em torno do eixo dos zz, rotação em torno do novo eixo dos yy, e finalmente rotação em torno do novo eixo dos zz. Esta variante também se designa ângulos de Euler tipo Z-Y<sub>N</sub>-Z<sub>N</sub>, onde o índice N lembra que se trata de transformações no novo sistema de coordenadas.

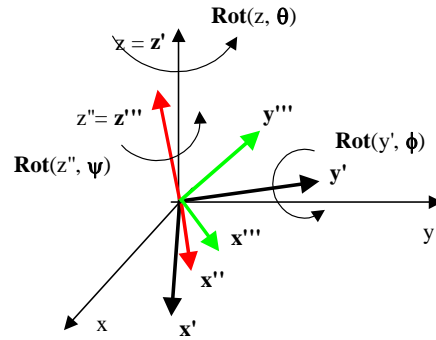


Figura 3-45 - Ângulos de Euler do tipo II (Z-Y<sub>N</sub>-Z<sub>N</sub>)

Matematicamente a operação pode ser expressa da seguinte forma:

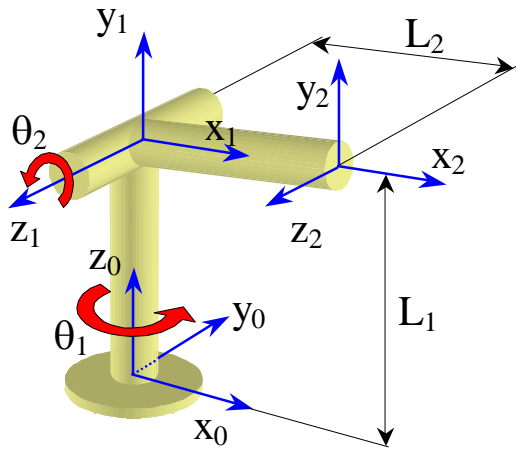
$$Euler_{II}(\theta, \phi, \psi) = \mathbf{Rot}(z, \theta) \mathbf{Rot}(y, \phi) \mathbf{Rot}(z, \psi)$$

Após expansão matricial, e relembrando da pós multiplicação efectuada para a segunda e terceira rotação no tempo, chegamos ao resultado:

$$Euler_{II}(\theta, \phi, \psi) = \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\psi - S\phi S\psi & -C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta & 1 \\ S\phi C\theta C\psi + C\phi S\psi & -S\phi C\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta & 1 \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Capítulo 4

## Cinemática Directa de Manipuladores



| <i>Elo</i> | $\theta$   | $\alpha$ | $l$   | $d$   |
|------------|------------|----------|-------|-------|
| 1          | $\theta_1$ | $+\pi/2$ | 0     | $L_1$ |
| 2          | $\theta_2$ | 0        | $L_2$ | 0     |

$${}^R\mathbf{T}_H = {}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & L_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & L_2 S_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4. Cinemática Directa de Manipuladores

### 4.1 Cinemática de um manipulador

#### 4.1.1 Definição

A cinemática de um manipulador é o estudo do conjunto de relações entre as posições, velocidades e acelerações dos seus elos.

O estudo que aqui se inicia diz respeito apenas aos manipuladores série, que aliás é a categoria que inclui a grande maioria de manipuladores industriais e didácticos. Os manipuladores série caracterizam-se pelo facto de todas as juntas ligarem dois e apenas dois elos consecutivos.

A relação entre o referencial de origem e o referencial da extremidade (mão) do manipulador é dada por uma transformação  ${}^R T_H$  que, todavia, não dá qualquer indicação sobre as relações entre os elos intermédios. Desse modo, para fazer um estudo da cinemática, e outros, é necessário, antes de mais, definir sistemas de coordenadas associados a cada elo, ou seja, atribuir-lhe referenciais. Por outro lado, a relação geométrica entre elos é traduzível por uma matriz de transformação: para ir de um extremo de um elo (junta ou base do robot) até ao outro extremo do elo (a junta seguinte ou a extremidade do robot) far-se-ão translações e rotações. Em suma, um dado elo  $i$  terá associado a si a matriz de transformação  $A_i$ , onde a primeira matriz,  $A_1$ , relaciona o primeiro elo com a base fixa, e a última matriz,  $A_n$ , relaciona o referencial da mão com o último elo. É então claro que  ${}^R T_H = A_1 A_2 \dots A_n$ . A Figura 4.1 esquematiza as transformações associados a um manipulador de 3 elos.

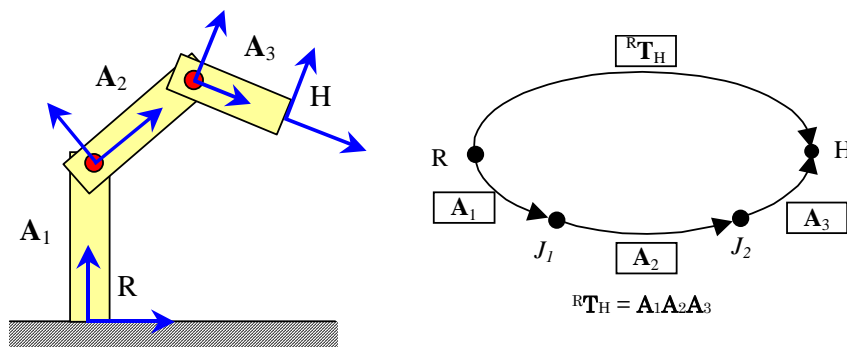


Figura 4.1 - Matriz de transformação de um manipulador série com 3 elos

#### 4.1.2 Espaço das juntas e espaço cartesiano

O estudo da cinemática divide-se em dois tipos de problemáticas: localização da mão a partir das posições das juntas (cinemática directa), e determinação das posições das juntas a partir da posição da mão (cinemática inversa).

Podemos assim definir dois espaços de variáveis: o espaço das variáveis das juntas, ou simplesmente espaço das juntas, e o espaço cartesiano ou operacional. A dimensão do espaço operacional é 6 (3 translações e 3 orientações) e o espaço das juntas tem como dimensão o número de juntas do manipulador. As operações

do espaço das juntas para o espaço cartesiano não apresentam qualquer ambiguidade, mas o contrário pode não ser verdade. De facto, o espaço das juntas é muitas vezes redundante, isto é, nem sempre é possível estabelecer uma relação unívoca com o espaço cartesiano, significando que várias configurações no espaço das juntas resultam na mesma configuração no espaço operacional

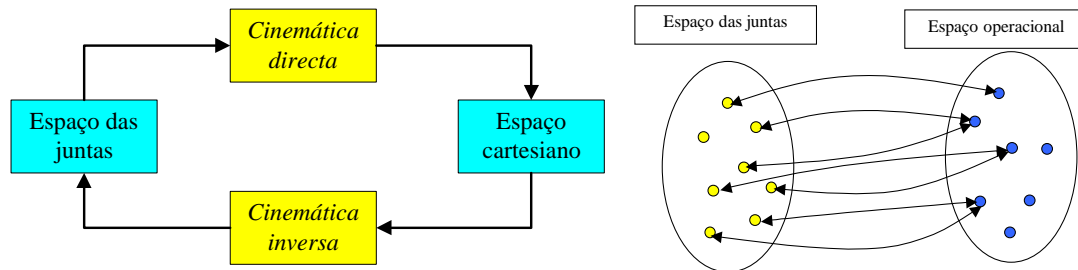


Figura 4.2 - Cinemática directa e inversa, e natureza não biunívoca da sua inter-relação

### 4.1.3 O algoritmo da Cinemática Directa

Implementar a cinemática directa de um manipulador significa, portanto, determinar as relações que exprimem um ponto no espaço cartesiano,  $\vec{r}$ , em função de um ponto no espaço das juntas,  $\vec{q}$ , isto é  $\vec{r} = \mathbf{F}_{directa}(\vec{q})$ .

Os passos ou algoritmo para definir tal relação são, essencialmente, os seguintes:

- Colocar o robot na posição zero (descrito adiante)
- Atribuir um sistema de coordenadas a cada elo
- Descrever as relações (translações e rotações) entre as variáveis das juntas e dos elos
- Determinar as matrizes de transformação  $\mathbf{A}_i$  dos diversos elos.
- Multiplicar os  $\mathbf{A}_i$  e obter a expressão  ${}^R\mathbf{T}_H$
- Obter as coordenadas de posição da mão
- Obter as coordenadas de orientação da mão

## 4.2 Parâmetros de juntas e elos

Para atribuir sistemas de coordenadas a um elo será preciso levar em conta a sua própria geometria e as consequências que terá no elo seguinte da cadeia. No intuito de obter uma forma coerente e prática de determinação desses sistemas de coordenadas, é necessário definir conceitos tais como o eixo de uma junta ou os parâmetros cinemáticos dos elos e juntas associadas.

### 4.2.1 Eixo de uma junta

O eixo de uma junta é o eixo relacionado com a simetria do movimento inerente à própria junta e que pode coincidir com o eixo de um ou outro elo ou mesmo ser-lhe ortogonal; de seguida descrevem-se as situações tipo. O eixo de uma junta fará parte do sistema de coordenadas associados ao elo, e convencionam-se que seja o eixo das coordenadas  $z$ .

#### Eixo de junta rotacional

No caso de termos dois elos colineares, então o eixo da junta coincide com o eixo longitudinal dos elos, como se ilustra na Figura 4.3 do lado esquerdo. Este tipo de arranjo de junta colinear rotacional é muito usado em punhos de manipuladores. No caso dos elos terem o eixo de rotação perpendicular ao seu eixo longitudinal (Figura 4.3, lado direito), estamos em presença de um arranjo muito comum para cotovelos, ou seja o eixo da junta é ortogonal.

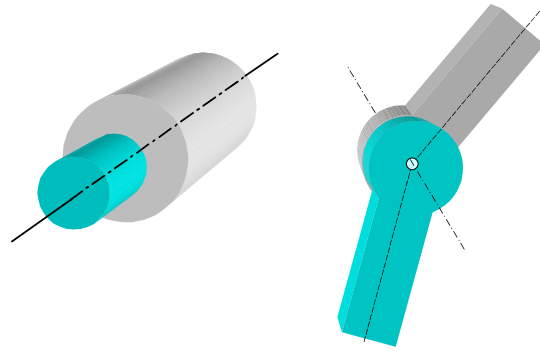


Figura 4.3 - Eixo de junta colinear e ortogonal em juntas rotacionais

**Eixo de uma junta prismática**

Para juntas prismáticas a abordagem é semelhante. Existem os casos de junta colinear ou junta ortogonal, conforme se ilustra na Figura 4.4, do lado esquerdo e direito, respectivamente.

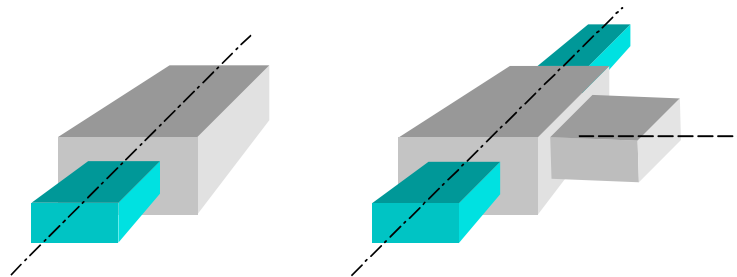


Figura 4.4 - Eixo de junta colinear e ortogonal em juntas prismáticas

**4.2.2 Os quatro parâmetros de elos e juntas**

Um elo é um elemento rígido que mantém fixas as relações entre juntas sucessivas e pode ser caracterizado com um determinado número de parâmetros geométricos/cinemáticos no que diz respeito à transformação geométrica que opera. Os elos intermédios são delimitados por duas juntas; à que o precede na série de ligações designa-se aqui por junta anterior, e à outra designa-se posterior ou seguinte. Excepções devem ser levadas em conta para os elos extremos do manipulador, onde só há uma junta delimitadora. Apresenta-se de seguida uma definição conceptual de cada um dos quatro parâmetros cinemáticos, à qual se junta uma definição formal que será usada mais adiante, a propósito do Algoritmo de Denavit-Hartenberg. Para se compreender a definição formal recorre-se a uma simbologia própria, a saber:

- $O_i$  – Ponto de origem do sistema de coordenadas  $i$ .
- $z_i \cap x_i$  – Ponto de intersecção entre o eixo  $z_i$  e o eixo  $x_i$
- $\overline{O_i, P_i} \Big|_{x_i}$  – Distância do ponto  $O_i$  ao ponto  $P_i$  medido ao longo do eixo  $x_i$
- $\angle (x_i, z_i) \Big|_{y_i}$  – Ângulo medido da direcção de  $x_i$  para a direcção de  $z_i$  em torno do eixo  $y_i$

**Comprimento do elo ( $l_i$ )**

Distância medida ao longo da normal comum entre os eixos das juntas. Traduz o conceito de afastamento linear entre os eixos das juntas. Formalmente<sup>1</sup>:  $l_i = \overline{(z_{i-1} \cap x_i), O_i} \Big|_{x_i}$ .

<sup>1</sup> Alguns autores preferem usar a letra  $a$  para designar este parâmetro.

**Distância entre elos ou deslocamento de juntas ( $d_i$ )**

O deslocamento de juntas traduz, em geral, a distância entre elos medida ao longo do eixo da junta anterior. Definição formal:  $d_i = \overline{O_{i-1}, (z_{i-1} \cap x_i)}_{z_{i-1}}$

**Ângulo de junta ( $\theta_i$ )**

Ângulo definido normalmente entre o eixo de um elo e o eixo do elo seguinte. Definição formal:  $\theta_i = \angle(x_{i-1}, x_i)_{z_{i-1}}$

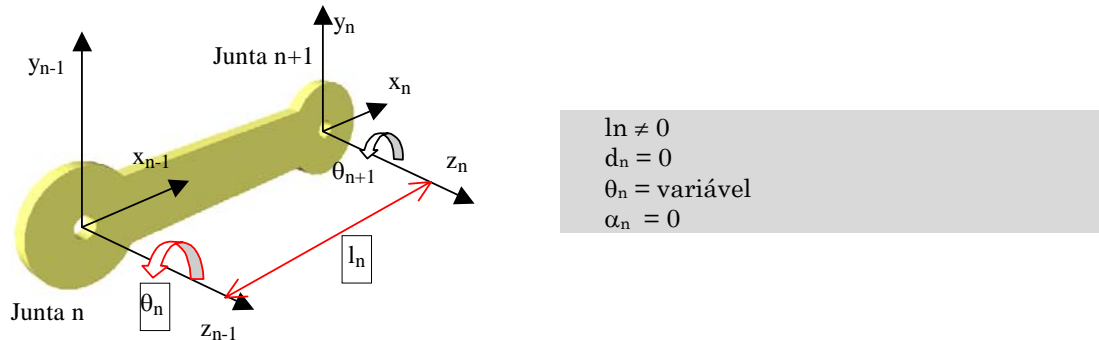
**Ângulo de torção do elo ( $\alpha_i$ )**

Ângulo de torção que o elo impõe desde o eixo da junta anterior até ao eixo da junta seguinte. Definição formal:  $\alpha_i = \angle(z_{i-1}, z_i)_{x_i}$

**4.2.3 Alguns exemplos de elos**

De seguida apresentam-se várias geometrias de elos com o intuito de ilustrar os diversos parâmetros que afectam a cinemática de um manipulador. A definição dos sistemas de coordenadas não é muito rígida à excepção da definição do eixo zz que coincide com o eixo da junta, como convencionado. O  $n$ -ésimo elo e a sua junta anterior ( $n$ -ésima) são responsáveis pela definição do sistema de coordenadas  $n$  que se considera solidário com o elo. O sistema de coordenadas ( $n-1$ ) é aquele sobre o qual opera a junta  $n$  e o respectivo elo  $n$ . Desse modo, o sistema de coordenadas 0 (zero) é o primeiro de todos e refere-se à base fixa do manipulador.

Regras adicionais serão propostas mais adiante de uma forma estruturada para a definição do algoritmo de Denavit-Hartenberg. Em todos os casos seguintes, o elo é o  $n$ -ésimo da cadeia.



**Figura 4.5 – Exemplo 1 de elo – juntas rotacionais paralelas**



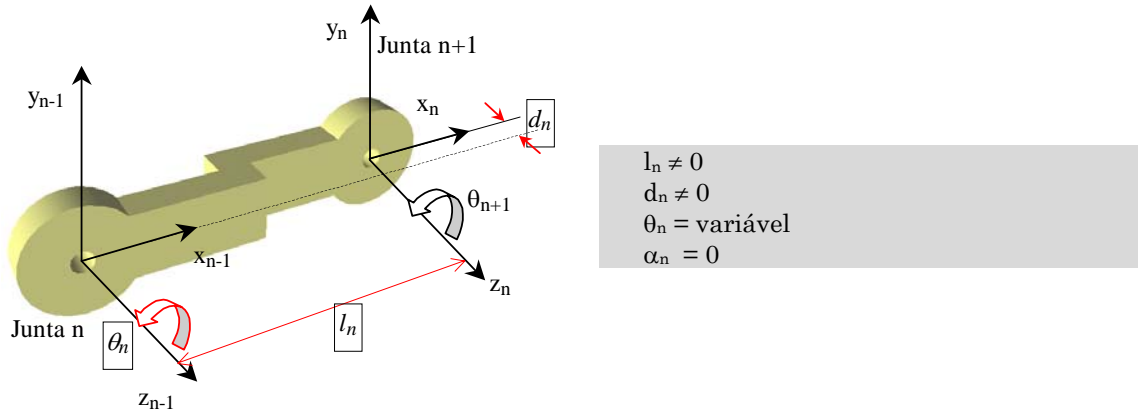


Figura 4.6 – Exemplo 2 de elo: juntas rotacionais paralelas com desalinhamento

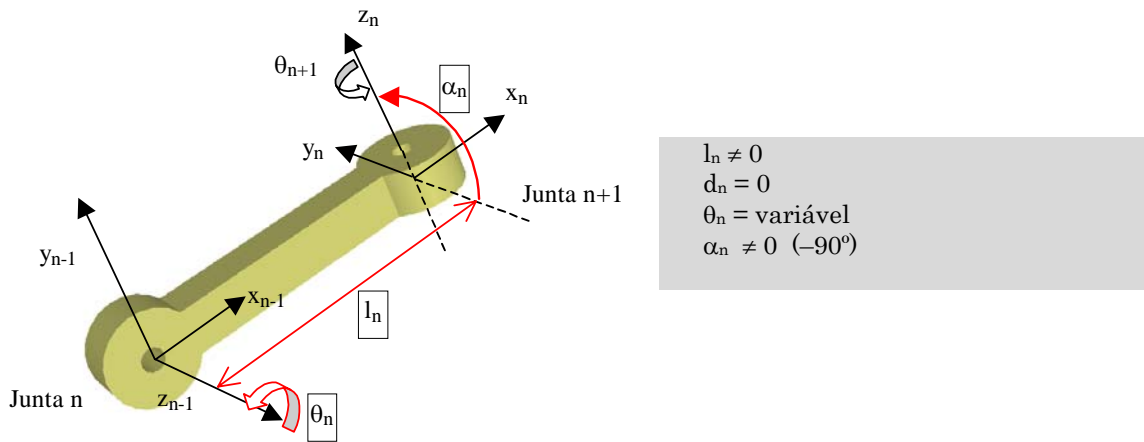


Figura 4.7 - Exemplo 3 de elo: juntas rotacionais ortogonais

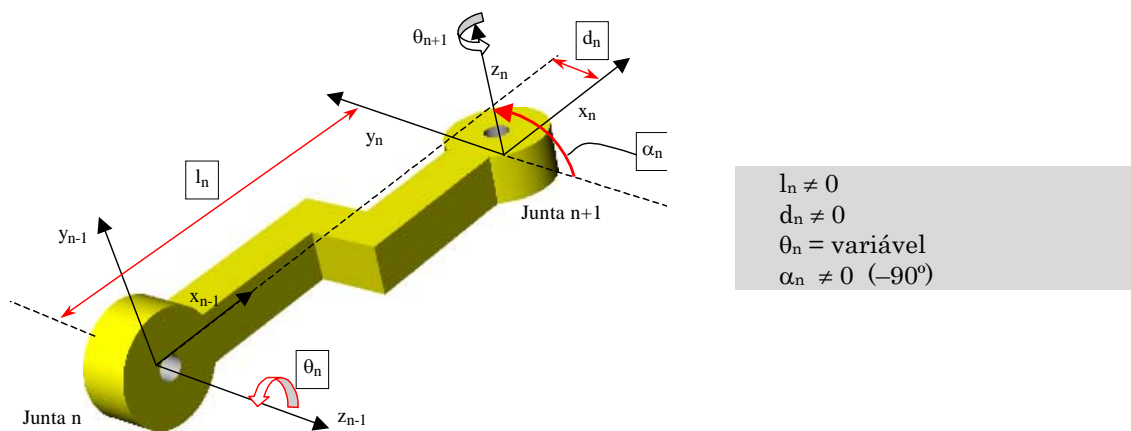
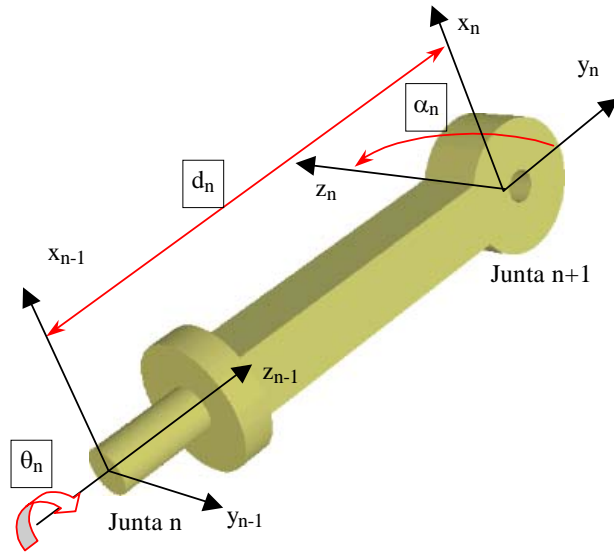
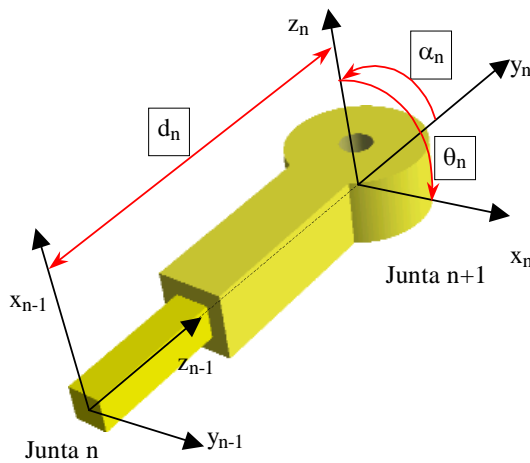


Figura 4.8 – Exemplo 4 de elo: juntas rotacionais ortogonais e com desalinhamento



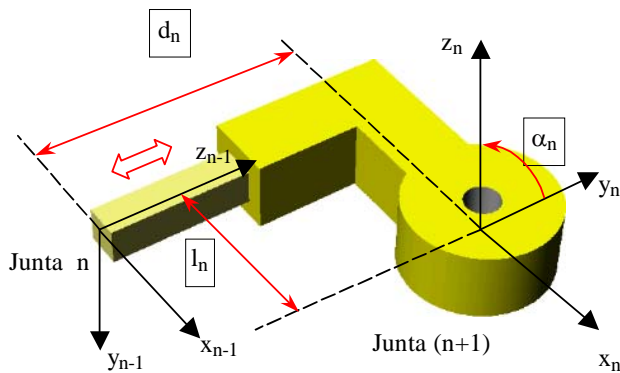
$l_n = 0$   
 $d_n \neq 0$   
 $\theta_n = \text{variável}$   
 $\alpha_n \neq 0 (+90^\circ)$

Figura 4.9 - Exemplo 5 de elo: juntas rotacionais ortogonais (2º tipo)



$l_n = 0$   
 $d_n \neq 0 (\text{variável})$   
 $\theta_n \neq 0 (+90^\circ)$   
 $\alpha_n \neq 0 (+90^\circ)$

Figura 4.10 - Exemplo 6 de elo: junta prismática e rotacional, ortogonais



$l_n \neq 0$   
 $d_n = \text{variável}$   
 $\theta_n = 0$   
 $\alpha_n \neq 0 (+90^\circ)$

Figura 4.11 - Exemplo 7 de elo: junta prismática e rotacional, ortogonais (2º tipo)

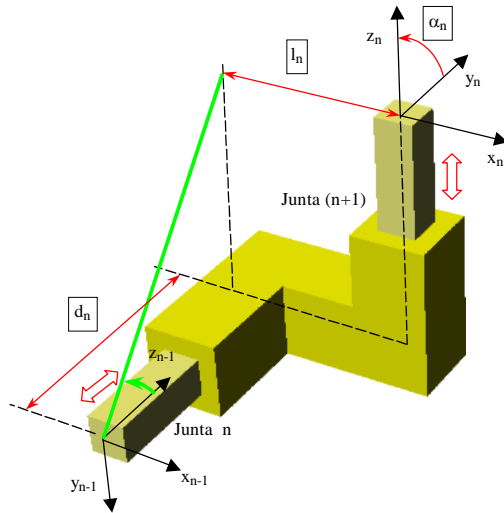


Figura 4.12 – Exemplo 8 de elo. Geometria mais elaborada com juntas prismáticas ortogonais

Parâmetros aparentes:  
 $l_n \neq 0$   
 $d_n = \text{variável}$   
 $\theta_n = 0$   
 $\alpha_n \neq 0 (+90^\circ)$

A traço mais grosso indicam-se os reais parâmetros não contemplados de facto nos 4 parâmetros cinemáticos aparentes acima indicados.

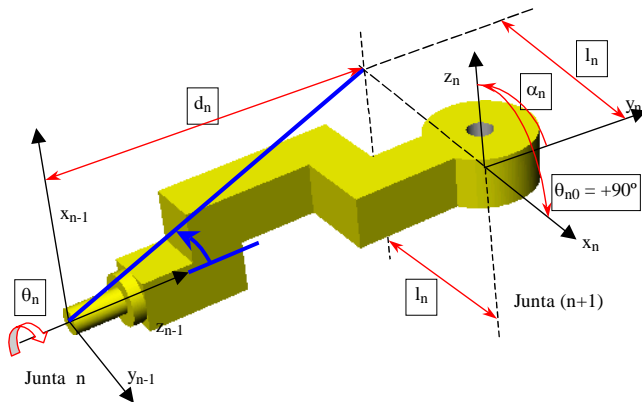


Figura 4.13 - Exemplo 9 de elo. Geometria mais elaborada com juntas rotacionais ortogonais

Parâmetros aparentes:  
 $l_n \neq 0$   
 $d_n \neq 0$   
 $\theta_n = 90^\circ + \text{variável}$   
 $\alpha_n \neq 0 (+90^\circ)$

A traço mais grosso indicam-se os reais parâmetros não contemplados de facto nos 4 parâmetros cinemáticos aparentes acima indicados.

Os casos representados na Figura 4.12 e na Figura 4.13 são os mais complexos de todos os apresentados aqui, e uma aplicação simplista das regras usadas nos casos restantes mostrar-se-ia insuficiente porque aparentemente faltaria um termo de translação. Na verdade, uma escolha mais criteriosa de dois parâmetros permitiria obviar esse problema. Na referidas figuras ilustra-se a traço mais grosso (e de cor diferente) essas medidas a ter de levar em conta; bastaria repensar, por exemplo, os parâmetros  $d_n$  e  $\alpha_n$ . Note-se que em algumas situações, como é o caso da Figura 4.12, a definição da matriz de transformação é simples (translações e rotações simples e bem definidas), e prescindiria de todo este processo de o recurso aos parâmetros cinemáticos.

#### 4.2.4 Os parâmetros cinemáticos variáveis

Obviamente que os parâmetros cinemáticos não são sempre todos constantes, senão a transformação geométrica seria constante, e portanto o manipulador imóvel. Dos quatro parâmetros indicados dois estão associados à componente móvel (juntas); são as variáveis de junta. Se uma junta for rotacional, a variável de junta é o ângulo de junta  $\theta_i$ . Se a junta for prismática, a variável de junta é o deslocamento da junta, ou distância entre elos,  $d_i$ .

A tabela seguinte resume os conceitos mais importantes sobre os parâmetros cinemáticos.

| Parâmetro               | Símbolo     | Junta rotacional | Junta prismática | Definição formal   |
|-------------------------|-------------|------------------|------------------|--|
| Ângulo de junta         | $\theta_i$  | variável         | fixo             | $\theta_i = \angle(x_{i-1}, x_i) \Big _{z_{i-1}}$              |
| Deslocamento de junta   | $d_i$       | fixo             | variável         | $d_i = \overline{O_{i-1}, (z_{i-1} \cap x_i)} \Big _{z_{i-1}}$ |
| Comprimento do elo      | $l_i (a_i)$ | fixo             | fixo             | $l_i = \overline{(z_{i-1} \cap x_i), O_i} \Big _{x_i}$         |
| Ângulo de torção do elo | $\alpha_i$  | fixo             | fixo             | $\alpha_i = \angle(z_{i-1}, z_i) \Big _{x_i}$                  |

Tabela 4.1 - Tabela dos parâmetros cinemáticos

Para efeitos de uma abordagem genérica, diz-se que o vector variáveis de junta é designado por  $\mathbf{q}$  e dado pela seguinte expressão:

$$\vec{\mathbf{q}} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T, \quad q_i = \begin{cases} \theta_i & \Leftarrow \text{rotacional} \\ d_i & \Leftarrow \text{prismática} \end{cases}$$

#### 4.2.5 Transformação ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ associada a um elo

Depois do exposto é imediato concluir que o elo  $i$ , associado à sua junta  $i$ , realiza uma transformação geométrica, dando origem ao referencial  $i+1$ , que pode ser decomposta nas quatro operações elementares:

- Rotação  $\theta_i$  em torno do eixo da junta ( $z_{i-1}$ )
- Translação “longitudinal” ao longo do eixo do elo ( $x_i$ ) do seu próprio comprimento ( $l_i$ )
- Translação “transversal” ao longo do eixo da junta ( $z_i$ ) do afastamento entre juntas ( $d_i$ )
- Rotação  $\alpha_i$  do eixo da junta ( $z_i$ ) em torno do eixo longitudinal ( $x_i$ ) do elo

Repare-se que estas transformações elementares surgem concatenadas em sequência, e por esta ordem, se bem que as translações possam comutar entre si, o que significa globalmente obter-se uma transformação final por pós-multiplicação sucessiva, resultando na matriz  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  ou mais simplesmente,  $\mathbf{A}_i$ :

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{Rot}(z, \theta_i) \mathbf{Trans}(l_i, 0, 0) \mathbf{Trans}(0, 0, d_i) \mathbf{Rot}(x, \alpha_i)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & l_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & l_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Os elos de um manipulador são numerados a partir da base e o primeiro elo (móvel) é o elo número 1 que se segue à primeira junta, ou junta número 1. A base fixa é designada o elo 0. Sistema de coordenadas 0 (zero) será aquele a partir do qual se faz toda a transformação geométrica do manipulador. Há frequentemente mais do que uma possibilidade de o fazer, conforme o interesse do problema. A Figura 4.14 ilustra duas possibilidades alternativas (a segunda a tracejado) para definir o sistema de coordenadas inicial (zero) de um manipulador do tipo PUMA com 6 graus de liberdade: 6 juntas, 6 elos (móveis mais uma base ou elo 0). Deve referir-se que haveria ainda várias outras possibilidades de escolher os sistemas de eixos.

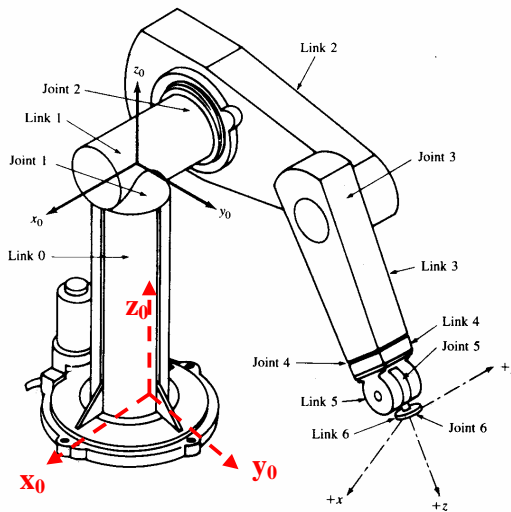


Figura 4.14 - Elos e juntas de um manipulador do tipo PUMA. Assinala-se a tracejado uma alternativa para o sistema de referência.

### 4.3 Atribuição de sistemas de coordenadas

#### 4.3.1 Exemplos simples de sistemas de coordenadas

Apresentam-se agora dois exemplos de atribuição de sistemas de coordenadas e a determinação de parâmetros cinemáticos de coordenadas em dois manipuladores simples com dois graus de liberdade cada. Antes de mais define-se que a posição zero de um manipulador (*Zero* ou *Home Position*) é aquela em que as variáveis de junta estão nos seus valores 0. Ou seja, as juntas rotacionais estão alinhadas com a referência e as juntas prismáticas estão recolhidas.

##### Um manipulador planar a 2 DOF

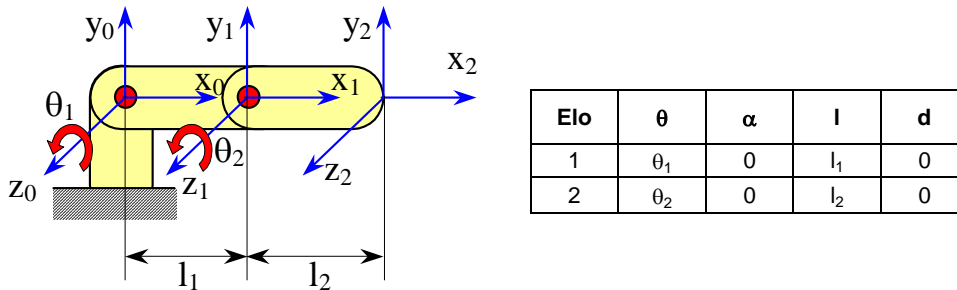


Figura 4.15 - Sistemas de coordenadas e parâmetros cinemáticos de um robot planar a 2 DOF

O manipulador planar a 2 graus de liberdade (*degrees of freedom* - DOF) é o mais simples dos manipuladores interessantes, e a atribuição de sistemas de coordenadas é relativamente óbvia; bastará atender ao eixo das duas juntas, e o resto sai naturalmente. Outras configurações seriam possíveis mas sem vantagens adicionais. Podemos agora determinar as suas expressões de cinemática directa usando a relação (4.1) e fazendo as simplificações de escrita  $C_1 = C\theta_1$  e  $S_1 = S\theta_1$ :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 C(0) & S_1 S(0) & l_1 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 C(0) & -C_1 S(0) & l_1 \cdot S_1 \\ 0 & S(0) & C(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando as expressões obtidas virá:

$${}^0\mathbf{T}_2 = {}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_1 C_2 - S_1 S_2 & -C_1 S_2 - S_1 C_2 & 0 & l_2 C_1 C_2 - l_2 S_1 S_2 + l_1 C_1 \\ S_1 C_2 + C_1 S_2 & -S_1 S_2 + C_1 C_2 & 0 & l_2 C_2 S_1 + l_2 S_2 C_1 + l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que, fazendo  $C_{12} = C_{1+2} = C(\theta_1 + \theta_2)$ , podemos simplificar em:

$${}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2 S_{12} + l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Analisando esta matriz podemos desde logo individuar as coordenadas (x,y,z) do *end-effector* do manipulador. Dada a simplicidade do manipulador, era possível obter estas mesmas coordenadas por análise geométrica directa como se demonstra na Figura 4.16. Porém, a matriz de transformação além de ser genérica, possui mais informação. Por exemplo, dela se extrai também que a orientação do sistema de coordenadas da mão ( $x_H, y_H$ ) aponta nas novas direcções dadas pelos vectores  $[C_{12} \ S_{12}]^T$  e  $[-S_{12} \ C_{12}]^T$ , respectivamente. Mais uma vez é claro que estas orientações também se deduziriam pela análise geométrica, mas não de forma tão directa.

Coordenada x do extremo do manipulador:

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = L_1 C_1 + L_2 C_{12}$$

Coordenada y do extremo do manipulador:

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = L_1 S_1 + L_2 S_{12}$$

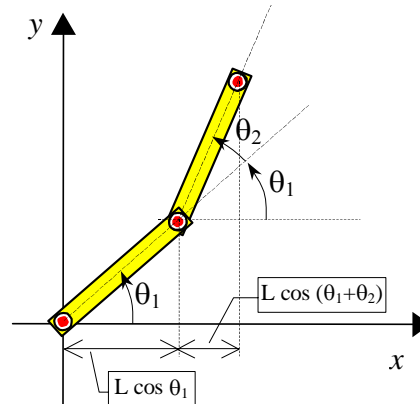
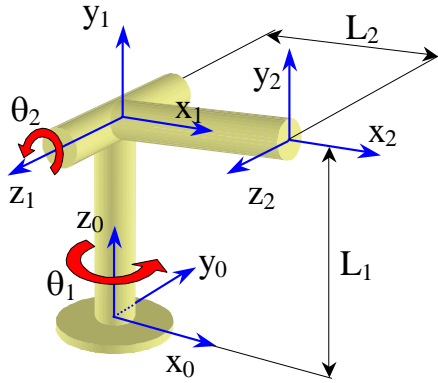


Figura 4.16 - Coordenadas para um manipulador planar a 2 DOF

**Um manipulador não planar a 2 DOF**


| Elo | $\theta$   | $\alpha$ | $l$   | $d$   |
|-----|------------|----------|-------|-------|
| 1   | $\theta_1$ | +90      | 0     | $L_1$ |
| 2   | $\theta_2$ | 0        | $L_2$ | 0     |

**Figura 4.17 - Sistemas de coordenadas e parâmetros cinemáticos de um robot de 2 DOF no espaço a 3D**

O manipulador 2 DOF no espaço 3D, embora simples, já exigiu mais alguma atenção na atribuição dos sistemas de coordenadas. Vejamos, por exemplo, o caso do referencial da base. Se  $x_0$  não tivesse a direcção indicada e apontasse ao invés na direcção simétrica de  $y_0$  (indicado), e dada a direcção apresentada por  $x_1$ , o ângulo de junta  $\theta_1$  (que se mede de  $x_0$  para  $x_1$  em torno de  $z_0$ ) teria de ter um termo constante que seria neste caso +90°, ou seja  $(\theta_1+90^\circ)$ ! Só assim se garantiria uma expressão correcta do referencial da mão em relação ao referencial de origem  $(x_0, y_0, z_0)$ . Repare-se também que neste manipulador já há distância entre elos,  $d_1 = L_1$ .

As expressões para obter a cinemática directa são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 C(90) & S_1 S(90) & 0 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 C(90) & -C_1 S(90) & 0 \cdot S_1 \\ 0 & S(90) & C(90) & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 C(0) & S_2 S(0) & L_2 \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 C(0) & -C_2 S(0) & L_2 \cdot S_2 \\ 0 & S(0) & C(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^R \mathbf{T}_H &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & L_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & L_2 S_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Como esperado, os resultados são um pouco mais complexos, mas mesmo assim verificáveis por uma análise geométrica. Por exemplo, observa-se que a coordenada  $z$  é dada pela soma  $L_2 S_2 + L_1$ . Se  $\theta_2$  for maior que zero e menor que 90°, ou seja, quando a junta 2 “levanta” o elo que lhe sucede, vê-se que à coordenada  $z$  da posição de repouso  $L_1$  (como indicado na Figura 4.17), é adicionado um termo proporcional ao comprimento do segundo elo afectado do seno do ângulo da sua orientação. Outras observações similares se poderiam fazer.

### 4.3.2 Algoritmo de Denavit-Hartenberg

Nos exemplos anteriores, a atribuição dos sistemas de coordenadas foi muito empírica, tendo-se usado o eixo da junta e procurado que os diversos eixos  $x$  saíssem sempre colineares para facilitar a definição do ângulo de junta, conforme definição já referida na secção 4.2.2.; obter as expressões da cinemática directa a partir dos parâmetros tabelados foi feito sem dificuldades de maior. No entanto, se os manipuladores se complicarem o procedimento complica-se e dever-se-á recorrer a uma metodologia mais sistemática. O algoritmo de Denavit-Hartenberg (algoritmo D-H) propõe essa metodologia muito bem estruturada para, no algoritmo da cinemática directa, obter os sistemas de coordenadas e as transformações associadas a cada elo de um manipulador. Para ser aplicado, as juntas têm de estar numeradas por ordem crescente, começando pela base do manipulador. Pode ser dividido em 4 etapas fundamentais que se subdividem em vários passos elementares repetidos parcialmente em ciclos, consoante o número de elos do manipulador. Na Tabela 4.2, que descreve o algoritmo, admite-se que o manipulador tem  $n$  juntas e para ele se definirão  $n+1$  sistemas de coordenadas, sendo o último o associado à mão ou garra.

|     |   |
|-----|---|
| 1   | Estabelecer o sistema de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ na base de suporte, com $z_0$ ao longo do eixo da junta 1. Convencionar $x_0$ e $y_0$ de forma conveniente.  |
|     | <b>For</b> $i=1$ <b>to</b> $n-1$  |
| 2.1 | Definir eixo junta $i$ e alinhar $z_i$ com eixo da junta $i+1$  |
| 2.2 | Definir $O_i$ (origem do sistema de coordenadas) de um dos seguintes modos:   |
| 2.3 | Intersecção de $z_i$ com $z_{i-1}$<br>Intersecção da normal comum entre $z_i$ e $z_{i-1}$ com $z_i$   |
| 2.4 | Definir $x_i = \pm(z_{i-1} \times z_i)$ , ou ao longo da normal comum a $z_{i-1}$ e $z_i$ quando são paralelos  |
| 2.5 | Definir $y_i = z_i \times x_i$  |
|     | Next $i$  |
| 3   | Estabelecer o sistema de coordenadas da mão $O_n$ (o último). Normalmente, a junta $n$ é rotacional:<br>$z_n$ é colinear com $z_{n-1}$ e a apontar para “fora”<br>$x_n$ normal a $z_n$ e $z_{n-1}$<br>$y_n$ de acordo com o sistema directo usual |
|     | Determinar parâmetros de elos e juntas<br><b>For</b> $i = 1$ <b>to</b> $n$  |
| 4.1 | $d_i = \overline{O_{i-1}, (z_{i-1} \cap x_i)}_{z_{i-1}}$ ; é a variável de junta se for prismática  |
| 4.2 | $l_i = \overline{(z_{i-1} \cap x_i), O_i}_{x_i}$  |
| 4.3 | $\theta_i = \angle(x_{i-1}, x_i)_{z_{i-1}}$ ; é a variável de junta se for rotacional   |
| 4.4 | $\alpha_i = \angle(z_{i-1}, z_i)_{x_i}$   |
|     | Next $i$  |

Tabela 4.2 - Algoritmo de Denavit-Hartenberg para um manipulador com  $n$  juntas

### 4.3.3 Representação de Denavit-Hartenberg para um PUMA de 6 DOF

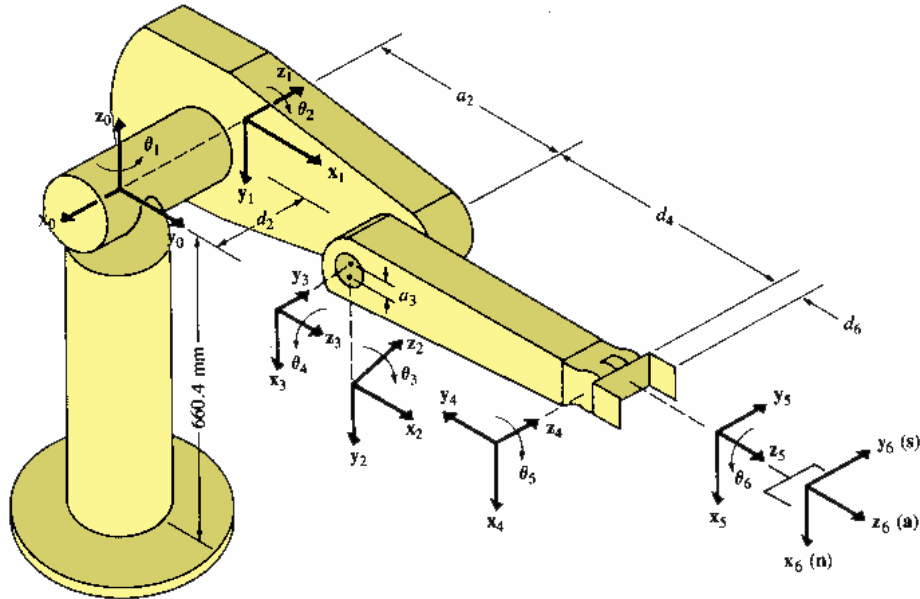
Um exemplo interessante de obtenção de sistemas de coordenadas por ser visto na Figura 4.18. Trata-se de um manipulador do tipo PUMA com 6 graus de liberdade, que é um robot com grande expressão prática a nível industrial. O exemplo pode parecer algo elaborado mas, sendo um exemplo extraído da bibliografia, é relevante que se façam todavia algumas observações em relação ao representado.

- O sistema de eixos  $(x_0, y_0, z_0)$  poderia ter sido colocado na base. Isso alteraria apenas um dos parâmetros cinemáticos do primeiro elo (translação em  $z$ )
- Os eixos  $x_0$  e  $y_0$  poderiam estar rodados  $+90^\circ$  em torno de  $z_0$ . Essa é também uma variante comum.
- Os eixos  $z_1, z_2$  e  $z_4$  poderiam apontar no sentido oposto, que teria como consequência sentidos



opostos para  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_4$ . A principal diferença das duas alternativas seria o sentido de rotação positiva para os ângulos de junta para o observador, mas de resto não haveria alterações que afectassem a resolução do sistema.

- O manipulador **não** está representado na sua posição zero! Para isso os elos deveriam estar orientados de tal forma que todos os eixos  $x_i$  fossem paralelos. Não estando na posição zero deve-se ter algum cuidado na determinação dos diversos ângulos de junta já que alguns terão termos constantes adicionais de  $+90^\circ$ , mormente  $\theta_1$  e  $\theta_3$ .



| Junta $i$ | $\theta_i$ | $\alpha_i$  |
|-----------|------------|-------------|
| 1         | $90^\circ$ | $-90^\circ$ |
| 2         | 0          | 0           |
| 3         | $90^\circ$ | $90^\circ$  |
| 4         | 0          | $90^\circ$  |
| 5         | 0          | $-90^\circ$ |
| 6         | 0          | 0           |

Figura 4.18 - Exemplo de sistemas de coordenadas para um PUMA de 6 DOF e indicação de  $\theta$  e  $\alpha$  na configuração ilustrada

#### 4.4 Exemplos de construção da Cinemática Directa

De seguida apresentam-se dois exemplos de implementação da cinemática directa de dois manipuladores usando o algoritmo de Denavit-Hartenberg: um manipulador antropomórfico de 5 DOF e um SCARA a 4 DOF.

##### 4.4.1 Um manipulador a 5 DOF (Microbot Alpha II)

Aplicando o algoritmo de Denavit-Hartenberg é possível chegar à solução ilustrada na Figura 4.19 para os sistemas de coordenadas de um manipulador do tipo Microbot Alpha II.

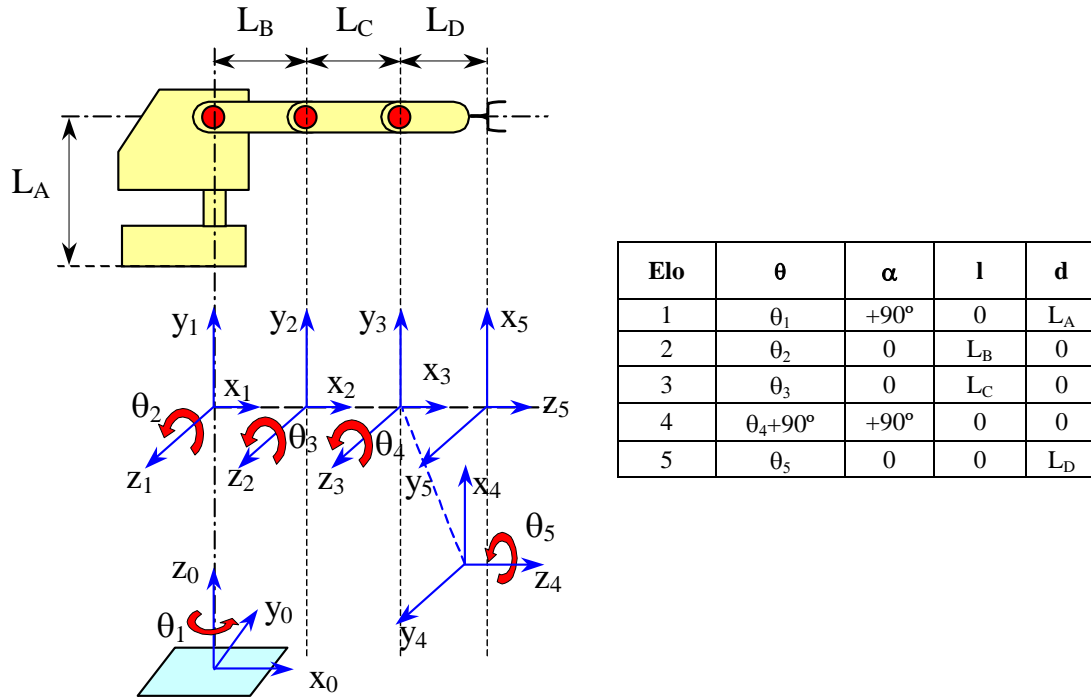


Figura 4.19 - Sistemas de coordenadas para um manipulador antropomórfico a 5 DOF

As origens  $O_3$  e  $O_4$  coincidem, pois que  $O_4$  é dado pela intersecção de  $z_4$  com  $z_3$ . Note-se também que o robot não está na posição zero e, por isso, a junta 4 tem na definição da sua variável o termo correctivo de  $+90^\circ$ , ou seja, nesta posição inicial, na qual os ângulos de junta assumem o valor zero, o eixo  $x_4$  já está "adiantado"  $90^\circ$  em relação a  $x_3$ .

Na sequência do algoritmo da cinemática directa basta obter as matrizes de transformação associadas a cada elo, usando a expressão (4.1), e pós-multiplicá-las em sequência. Para a primeira matriz vem:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 C(90) & S_1 S(90) & 0 \cdot C_1 \\ S_1 & C_1 C(90) & -C_1 S(90) & 0 \cdot S_1 \\ 0 & S(90) & C(90) & L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para as matrizes seguintes, também é imediato chegar às suas expressões:

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_B \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_B \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_C \cdot C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_C \cdot S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C(\theta_4 + 90) & 0 & S(\theta_4 + 90) & 0 \\ S(\theta_4 + 90) & 0 & -C(\theta_4 + 90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A expressão final da transformação geométrica do referencial da base para o referencial da mão obtém-se pela seguinte multiplicação:

$${}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_B \cdot C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_B \cdot S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_C \cdot C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_C \cdot S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Repartindo o produto em dois termos fundamentais,  $(A_1A_2A_3)(A_4A_5)$ , virá:

$${}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - C_1S_2S_3 & -C_1C_2S_3 - C_1S_2C_3 & S_1 & L_C(C_1C_2C_3 - C_1S_2S_3) + L_B C_1C_2 \\ S_1C_2C_3 - S_1S_2S_3 & -S_1C_2S_3 - S_1S_2C_3 & -C_1 & L_C(S_1C_2C_3 - S_1S_2S_3) + L_B S_1C_2 \\ S_2C_3 + C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & L_C(S_2C_3 + C_2S_3) + L_B S_2 + L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_4C_5 & S_4S_5 & C_4 & L_D C_4 \\ C_4C_5 & -C_4S_5 & S_4 & L_D C_4 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou, recorrendo a relações trigonométricas, numa forma mais simplificada:

$${}^R\mathbf{T}_H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{1-2-3} + C_{123} & S_{1-2-3} - S_{123} & 2S_1 & L_C(C_{1-2-3} + C_{123}) + 2L_B C_1C_2 \\ S_{123} + S_{1-2-3} & C_{123} - C_{1-2-3} & -2C_1 & L_C(S_{123} + S_{1-2-3}) + 2L_B S_1C_2 \\ 2S_{23} & 2C_{23} & 0 & 2(L_C S_{23} + L_B S_2 + L_A) \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_4C_5 & S_4S_5 & C_4 & L_D C_4 \\ C_4C_5 & -C_4S_5 & S_4 & L_D C_4 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Recorde-se que  $C_{1-2-3} = \cos(\theta_1 - \theta_2 - \theta_3)$  e  $C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ , etc. O resultado final, por extenso, tem uma representação com uma dimensão gráfica muito grande e praticamente sem interesse neste momento. O recurso a meios numérico-computacionais é, por isso, recomendado para a obtenção de valores concretos.

Para efeitos de verificação admitamos, por exemplo, que todas as juntas tem valor 0, ou seja, a representação ilustrada na Figura 4.19. Assim, por substituição directa na expressão anterior teríamos:

$${}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_C + L_B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_D \\ 1 & 0 & 0 & L_D \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_B + L_C + L_D \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta expressão sai que a origem do sistema de coordenadas da mão está em  $(L_B + L_C + L_D, 0, L_A)$ , que  $x_4$  aponta na direcção de  $z_0$ ,  $y_4$  aponta na direcção simétrica de  $y_0$ , e  $z_4$  aponta na direcção de  $x_0$ , o que se confirma observando a Figura 4.19.

#### 4.4.2 Um manipulador do tipo SCARA (4 DOF)

Um manipulador muito usado na prática é o SCARA de 4 graus de liberdade, de que se ilustra uma representação na Figura 4.20. As 4 juntas foram numeradas obedecendo à sua ordem de aparecimento a partir da base. Podem surgir dúvidas, na junta 3, se, na verdade, a ordem é a representada. Esta representação assume que a junta rotacional do punho está após a junta prismática, e que é de facto o caso mais comum. Porém, também se poderia ter o caso que a junta rotacional estivesse "antes" da prismática, implicando um sistema mecânico diverso que realmente suportasse a junta linear "sobre" um elo que poderia rodar em torno de si próprio. Nesse caso a ordem das juntas seria a inversa da indicada e também os parâmetros cinemáticos seriam outros, mas o resultado final seria o mesmo.

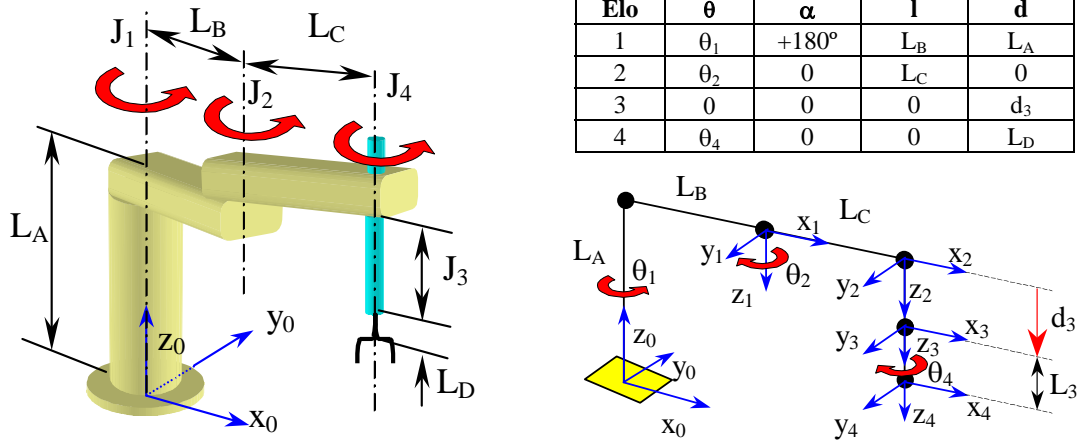


Figura 4.20 - Sistemas de coordenadas e parâmetros cinemáticos para um SCARA de 4 DOF

Note-se que na representação o manipulador não está na posição zero. Em especial é notório a junta prismática que, para melhor visualização, está estendida apresentando, por isso, um valor de junta não nulo.

A metodologia seguida é similar à do manipulador anterior e, assim, a determinação das matrizes de transformação é também muito sistemática. Virá portanto:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 C(180) & S_1 S(180) & L_B C_1 \\ S_1 & C_1 C(180) & -C_1 S(180) & L_B S_1 \\ 0 & S(180) & C(180) & L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & L_B C_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & L_B S_1 \\ 0 & 0 & -1 & L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_C C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_C S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz final, resultante dos quatro produtos, após simplificações de índole trigonométrica, é dada pela expressão seguinte, onde se convencionou ainda que  $C_{1-2} = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ ,  $C_{1-2-4} = \cos(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4)$ , etc.:

$${}^R \mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_{1-2-4} & S_{1-2-4} & 0 & L_B C_1 + L_C C_{1-2} \\ S_{1-2-4} & -C_{1-2-4} & 0 & L_B S_1 + L_C S_{1-2} \\ 0 & 0 & -1 & L_A - d_3 - L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Mais uma vez se pode confirmar a sua validade para o caso das juntas terem todas o valor 0 e, neste caso, até mesmo para outros valores, dada a relativa simplicidade do manipulador quando comparado com o Microbot Alpha II, apresentado anteriormente. Assim, pelo menos no que respeita a componente de translação cartesiana (x, y, z), pode-se constatar a veracidade da expressão anterior observando a Figura 4.21 onde se ilustra esquematicamente uma vista de cima do manipulador; note-se porém que desta figura não se podem tirar conclusões relativamente à coordenada z.

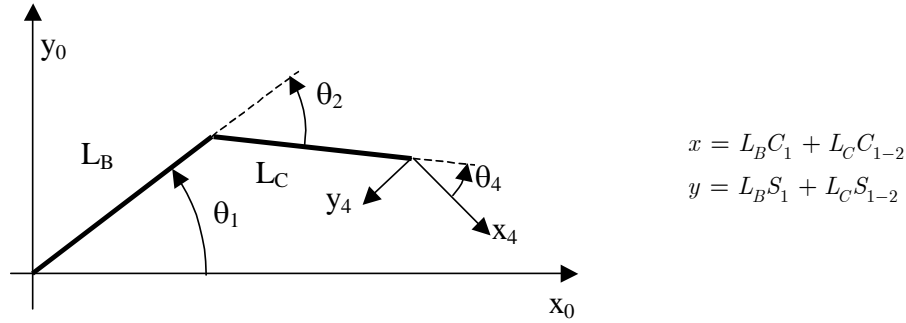


Figura 4.21 - Vista esquemática de cima do manipulador SCARA

## 4.5 Ângulos finais de orientação em função das variáveis de junta

Para completar o algoritmo da cinemática directa delineado na secção 4.1.3 falta ainda o seu último ponto, que é determinar os ângulos de orientação final do sistema de coordenadas na mão, ou, se se preferir, os ângulos de Euler. Como visto num capítulo anterior, existem diversos tipos de ângulos de Euler sendo dois deles mais comuns, dos quais se escolhe o caso RPY para ilustrar esta parte final do algoritmo. Note-se todavia que o procedimento seria estritamente o mesmo para qualquer outro tipo de ângulos de orientação (Euler) porque nos baseamos afinal na matriz de transformação associada. O problema que está aqui em causa é o de determinar os ângulos de Euler a partir dos elementos da matriz de transformação do manipulador.

### 4.5.1 Comparação da matriz RPY( $\phi, \theta, \psi$ ) como parte rotacional da matriz ${}^R\mathbf{T}_H$

A expressão genérica de transformação global no espaço a 6 dimensões, usando ângulos RPY, é dada por:

$$\begin{aligned}
 {}^R\mathbf{T}_H &= \begin{bmatrix} \text{transformação} \\ \text{de translação} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{transformação} \\ \text{de orientação} \end{bmatrix} = \text{Trans}(p_x, p_y, p_z) \text{RPY}(\phi, \theta, \psi) = \\
 &= \text{Trans}(p_x, p_y, p_z) \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi) = \\
 &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -S\phi C\psi + C\phi S\theta S\psi & S\phi S\psi + C\phi S\theta C\psi & p_x \\ S\phi C\theta & C\phi C\psi + S\phi S\theta S\psi & -C\phi S\psi + S\phi S\theta C\psi & p_y \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

A matriz de transformação do manipulador resulta do produto das transformações intermédias dos  $N$  elos e pode ser expressa do seguinte modo:

$${}^R\mathbf{T}_H = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se o vector  $\mathbf{p}$  tem um significado de imediato entendimento (coordenadas da origem do sistema da mão medidas no sistema de origem), o mesmo não se aplica aos três vectores individualizados na expressão anterior,  $\vec{n}$ ,  $\vec{s}$ ,  $\vec{a}$ , e que estão associados à orientação do sistema de eixos da mão em relação ao sistema de referência de base.

Para se entender melhor o significado destes três vectores fazem-se as atribuições ilustradas na

Figura 4.22. O vector  $\vec{a}$  é designado por vector aproximação da mão, e tem uma direcção que é normal à palma da mão; o vector  $\vec{s}$  é designado vector escorregamento ou deslizamento da mão (*sliding*) e tem a direcção do movimento dos “dedos”; o vector  $\vec{n}$ , finalmente, completa o sistema directo de coordenadas, e é designado por vector normal aos “dedos” da mão.

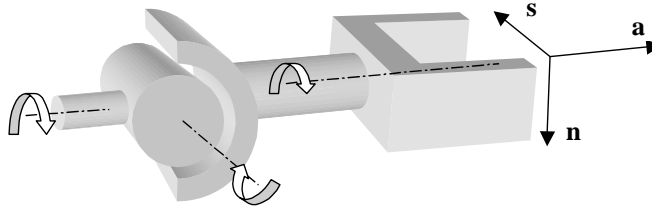


Figura 4.22 - Orientação do sistema de coordenadas da mão

Assim, por simples comparação das expressões indicadas anteriormente, pode-se escrever, por exemplo, o seguinte:

$$\begin{cases} n_z = -\sin \theta \\ s_z = \cos \theta \sin \psi \\ n_y = \sin \phi \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \arcsin(-n_z) \\ \psi = \arcsin(s_z / \cos \theta) \\ \phi = \arcsin(n_y / \cos \theta) \end{cases} \quad (4.7)$$

Ficam assim determinados os ângulos de Euler com base na matriz de transformação do manipulador como se pretendia. Adiante-se desde já que esta não é uma boa solução do ponto de vista numérico, como se explica na próxima secção.

#### 4.5.2 Limitações de precisão e reformulação

Na secção anterior, nomeadamente na última expressão dos ângulos de Euler, nota-se porém que, quando o ângulo  $\theta$  tende para  $90^\circ$ , o co-seno de  $\theta$  tende para 0, e algumas das expressões correm o risco de perder precisão em cálculo numérico. Uma hipótese alternativa é utilizar mais igualdades extraídas das duas matrizes e usá-las aos pares de forma a minimizar esse risco de imprecisão numérica. Poderemos então ter as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} n_z = -\sin \theta \\ s_z = \cos \theta \sin \psi \\ a_z = \cos \theta \cos \psi \end{cases} \text{ e } \begin{cases} n_x = \cos \phi \cos \theta \\ n_y = \sin \phi \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \arcsin(-n_z), \quad \frac{s_z}{a_z} = \tan \psi, \quad \frac{n_y}{n_x} = \tan \phi$$

A função tangente inversa (arco-tangente) afigura-se menos sensível às imprecisões dos termos da matriz de transformação do manipulador, quer porque eventuais erros sistemáticos nos termos se atenuam na divisão ( $s_z/a_z$ , etc.), quer porque o domínio da função arco-tangente é infinito e portanto sem risco de indefinição.

Porém, a obtenção dos ângulos com recuso à função arco-tangente apresenta um outro problema ligado à determinação do quadrante do ângulo em causa. Por exemplo, se  $a_z = s_z = -1$  então o quociente  $s_z/a_z$  resultaria igual a 1 e portanto  $\psi = 45^\circ$ . Ora, ao ponto (-1,-1) corresponde um raio-vector com o ângulo de  $-135^\circ$ . Este erro de  $180^\circ$  representa o próprio período da função tangente e tem de ser levado em conta no cálculo. Assim, uma aplicação “cega” da função arco-tangente poderá ser incorrecta; é por isso que se deve atender ao quadrante do “ponto” antes de calcular a arco-tangente. Muitas aplicações de “software” numérico recorrem à função arco-tangente com dois argumentos em vez de um só; existe a vantagem adicional de poder lidar de antemão com quocientes onde o divisor seria 0. Nomes como  $\text{atan}(y,x)$  ou  $\text{atan2}(y,x)$  são muito comuns para esta função. A Tabela 4.3 define a função  $\text{atan2}(x,y)$ , tal como é

implementada na grande maioria das aplicações de “software”.

| Condição                | Definição  | Quadrantes         |
|-------------------------|--|--------------------|
| $x > 0$                 | $\arctan \frac{y}{x}$                              | 1° e 4°            |
| $x = 0 \wedge y \neq 0$ | $\text{sign}(y) \cdot \frac{\pi}{2}$               | Eixo das ordenadas |
| $x < 0$                 | $\arctan \frac{y}{x} + \text{sign}(y) \cdot \pi$   | 2° e 3°            |
| $x = 0 \wedge y = 0$    | Não se define, mas o valor 0 é por vezes atribuído |                    |

Tabela 4.3 - Definição da função atan2(y,x)

Para alguns manipuladores, ou algumas configurações específicas, as expressões extraídas das matrizes de transformação, pelas variáveis e termos que incluem, não se proporcionam ao uso directo da função arco-tangente. Nesses casos, poderá o problema ser reformulado usando uma técnica relativamente simples: a de reorganizar a equação matricial por pré- ou pós-multiplicação de transformações parciais, ou seja, passar, por exemplo, da fórmula:

$${}^R \mathbf{T}_H = \text{Trans}(p_x, p_y, p_z) \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi)$$

à fórmula:

$$\text{Rot}^{-1}(z, \phi) \text{Trans}^{-1}(p_x, p_y, p_z) {}^R \mathbf{T}_H = \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi)$$

Usando propriedades apresentadas anteriormente, podemos obter as expressões das matrizes inversas de uma forma muito imediata:

$$\text{Rot}^{-1}(z, \phi) = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C\phi & S\phi & 0 & 0 \\ -S\phi & C\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Trans}^{-1}(p_x, p_y, p_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O que resulta em:

$$\begin{bmatrix} C\phi & S\phi & 0 & -p_x \\ -S\phi & C\phi & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ 0 & S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e finalmente:

$$\begin{bmatrix} n_x C\phi + n_y S\phi & s_x C\phi + s_y S\phi & a_x C\phi + a_y S\phi & 0 \\ n_y C\phi - n_x S\phi & s_y C\phi - s_x S\phi & a_x C\phi - a_y S\phi & 0 \\ n_z & s_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta S\psi & S\theta C\psi & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Podemos agora repetir o processo já levado a cabo anteriormente (comparar as matrizes termo a termo) e extrair mais alguns resultados. Assim, poderemos obter sucessivamente os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ .

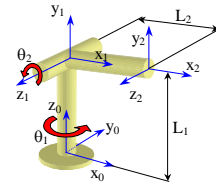
$$\begin{aligned} \text{para } \phi: \quad n_y C\phi - n_x S\phi = 0 &\Rightarrow \phi = \arctan \frac{n_y}{n_x} \\ \text{para } \theta: \quad \begin{cases} n_x C\phi + n_y S\phi = C\theta \\ n_z = -S\theta \end{cases} &\Rightarrow \theta = \arctan \frac{-n_z}{n_x C\phi + n_y S\phi} \\ \text{para } \psi: \quad \begin{cases} s_z = C\theta S\psi \\ a_z = C\theta C\psi \end{cases} &\Rightarrow \psi = \arctan \frac{s_z}{a_z} \end{aligned}$$

Note-se porém que há outras expressões que poderiam ser usadas. O que ficou assim garantido foi o recurso exclusivo da função arco-tangente em detrimento de arco-seno ou arco-co-seno. Nas expressões acima, onde se lê  $\arctan$ , assume-se  $\text{atan2}$ , na definição dada.

### 4.5.3 Exemplo de aplicação a um manipulador com 2 DOF em 3 dimensões.

A matriz de transformação para o manipulador descrito na Figura 4.17, como derivado na ocasião, é dada por:

$${}^R\mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & L_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & L_2 S_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Assim, para esse manipulador, determinem-se os seus ângulos de Euler, isto é, a sua orientação no espaço cartesiano relativamente ao referencial da base. Aplicando os resultados da secção anterior poderemos obter, por simples substituição, o seguinte:

$$\phi = \arctan \frac{n_y}{n_x} \Rightarrow \phi = \arctan \frac{S_1 C_2}{C_1 C_2} = \arctan(\tan \theta_1) = \theta_1$$

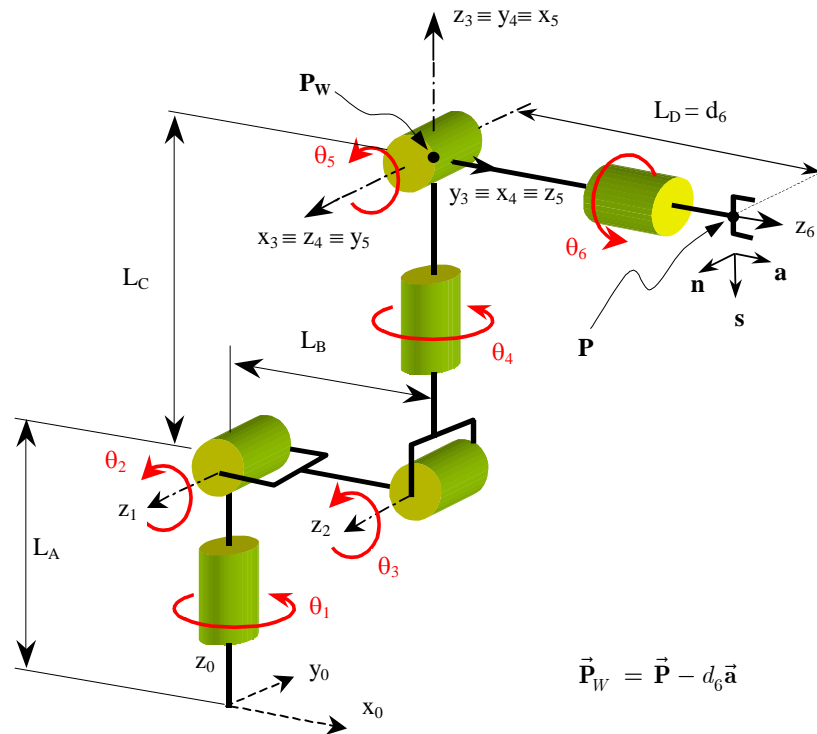
$$\theta = \arctan \frac{-n_z}{n_x C\phi + n_y S\phi} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{-S_2}{C_1 C_2 C_1 + S_1 C_2 S_1} = \arctan \frac{-S_2}{C_2 \times 1} = -\theta_2$$

$$\psi = \arctan \frac{s_z}{a_z} \Rightarrow \psi = \arctan(C_2, 0) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ou } -\pi/2 \text{ se } |\theta| > \pi/2)$$



# Capítulo 5

## Cinemática Inversa de Manipuladores



$$\vec{P}_W = \vec{P} - d_6 \vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_D} \vec{P}_W \xrightarrow{(A_1 A_2 A_3)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_1 A_2 A_3) \rightarrow {}^0R_3^{-1} \\ \left[ \begin{array}{c} \vec{n} \quad \vec{s} \quad \vec{a} \quad \vec{p} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \right] \end{array} \right\} \xrightarrow{{}^0R_3^{-1} \cdot {}^0R_6} {}^3R_6 = \left[ \begin{array}{c} \vec{n}_3 \quad \vec{s}_3 \quad \vec{a}_3 \end{array} \right] \xrightarrow{(A_4 A_5 A_6)} \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix}$$

Equation Section 5

## 5. Cinemática Inversa

### 5.1 O Problema

Enquanto a cinemática directa resulta do desenvolvimento imediato das expressões do manipulador, a cinemática inversa procura determinar o conjunto de valores das juntas que se adequam a uma dada configuração do espaço operacional ou cartesiano. A cinemática inversa pode ser vista conceptualmente como o conjunto de processos para determinar as funções inversas do sistema das expressões da cinemática directa. Ou simbolicamente:  $\vec{r} = \mathbf{F}(\vec{q})$ ,  $\vec{q} = \mathbf{F}^{-1}(\vec{r})$ ,  $\mathbf{F}^{-1} : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^6$ . Graficamente o problema entende-se pela observação da já anteriormente introduzida Figura 5.1.

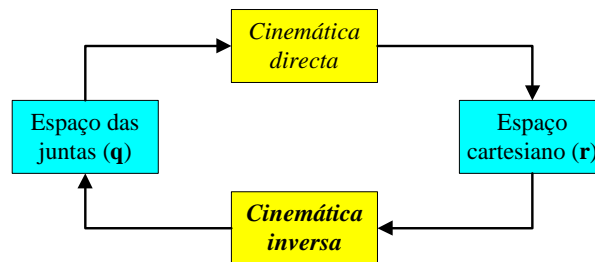


Figura 5.1 – As cinemática directa e inversa e a relação dos espaços

A cinemática inversa nem sempre é um problema com solução analítica, ou por vezes não tem mesmo solução! Mais complexo ainda é o facto de não haver uma metodologia única de aplicação directa. Não será esse um problema grave porque as soluções de interesse prático estão já todas bem estudadas e só em casos especiais será necessário conceber novas soluções.

#### 5.1.1 Resolução para um manipulador RR no plano

Dos manipuladores com interesse prático o caso mais simples é o do manipulador planar a dois graus de liberdade (2-DOF). Ilustra-se de seguida o processo de determinar a sua cinemática inversa, quer dizer, o valor das suas juntas  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em função da posição  $(x,y)$  da sua extremidade.

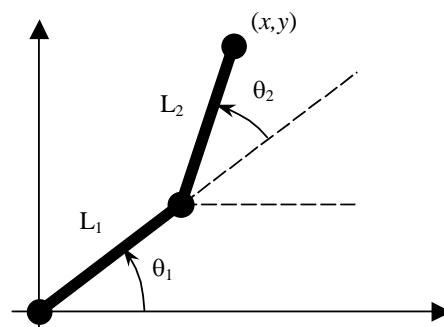


Figura 5.2 - Manipulador planar a dois DOF

Partindo das equações da cinemática directa, que são de fácil formulação, e que foram anteriormente deduzidas, o processo é o seguinte:

$$\begin{cases} x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Elevando ambos os membros das duas expressões ao quadrado, e adicionando-os, ficará:

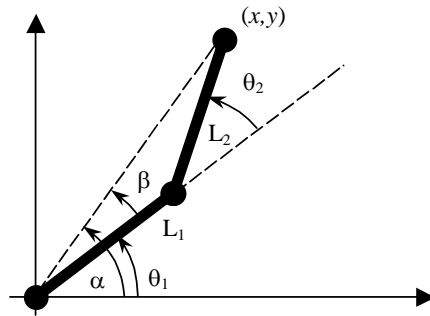
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= L_1^2 \cos^2 \theta_1 + L_1^2 \sin^2 \theta_1 + \\ &+ L_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + L_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \\ &+ 2L_1L_2 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 2L_1L_2 \sin \theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Virá então sucessivamente:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= L_1^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 [\cos \theta_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \sin \theta_1 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ x^2 + y^2 &= L_1^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 (\cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1) \\ x^2 + y^2 &= L_1^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 \cos \theta_2 \\ \theta_2 &= \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_1^2}{2L_1L_2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Podemos verificar-se desde já a existência matemática de duas soluções para  $\theta_2$ , reforçada pelo sinal  $\pm$  na expressão (5.2).

A obtenção de  $\theta_1$  não é tão imediata e uma solução possível passa pelo recurso à tangente trigonométrica de uma diferença angular, como se pode observar de seguida:



$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\tan \beta = \frac{L_2 \sin \theta_2}{L_1 + L_2 \cos \theta_2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Figura 5.3 - Ângulos auxiliares para determinação da cinemática inversa do manipulador RR

Na Figura 5.3, como  $\theta_1 = \alpha - \beta$ , virá, pela relação da tangente da diferença, o seguinte:

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\theta_1) = \frac{\frac{y}{x} - \frac{L_2 \sin \theta_2}{L_1 + L_2 \cos \theta_2}}{1 + \frac{y}{x} \frac{L_2 \sin \theta_2}{L_1 + L_2 \cos \theta_2}} = \frac{y(L_1 + L_2 \cos \theta_2) - xL_2 \sin \theta_2}{x(L_1 + L_2 \cos \theta_2) + yL_2 \sin \theta_2}$$

ou seja

$$\theta_1 = \arctan \left[ \frac{y(L_1 + L_2 \cos \theta_2) - xL_2 \sin \theta_2}{x(L_1 + L_2 \cos \theta_2) + yL_2 \sin \theta_2} \right] \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Resolução para o manipulador RR a 3D

É também possível resolver a cinemática inversa de um outro manipulador já introduzido anteriormente no estudo da cinemática directa. Trata-se do sistema RR no espaço a 3D que se ilustra na Figura 5.4 e onde também se apresenta a expressão da cinemática directa conforme derivado anteriormente,

igualada à matriz de transformação geral que indica a postura no espaço operacional com posição e orientações.

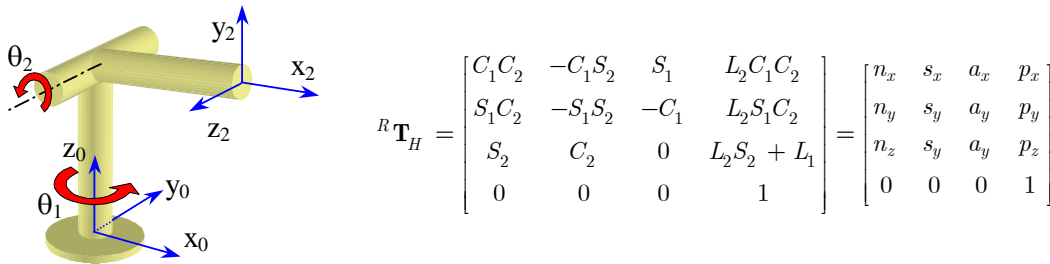


Figura 5.4 - O manipulador RR no espaço 3D

Mesmo restringindo-se ao uso de componentes de posição na matriz de transformação geral (por serem em geral mais fáceis ou explícitas de obter na prática), a resolução é imediata para a variável  $\theta_1$  após a divisão entre dos termos respeitantes à posição  $p_x$  e  $p_y$ :

$$\begin{cases} L_2C_1C_2 = p_x \\ L_2S_1C_2 = p_y \end{cases} \Rightarrow \tan \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \theta_1 = \arctan \frac{p_y}{p_x} \quad (5.4)$$

A obtenção de  $\theta_2$  pode ser imediata se se considerarem as componentes de orientação, bastando atender a  $n_z$  e  $s_z$  e à arco-tangente do seu quociente mas, com base no termo  $p_z$  da posição, viria também:

$$\theta_2 = \arcsin \frac{p_z - L_1}{L_2} \quad (5.5)$$

A expressão (5.5) pode todavia apresentar limitações de precisão numérica quando o valor de  $p_z - L_1$  for muito próximo de  $L_2$  ou mesmo se tiver erros sistemáticos na sua avaliação, isto é, não se está a usar uma função de arco-tangente com os seus benefícios numéricos como descrito anteriormente noutro capítulo. Mais tarde apresenta-se outra solução para este manipulador em que esse problema se resolve.

### 5.1.3 Métodos e condições de existência de soluções.

A resolução analítica apresentada para o caso RR planar ou o RR no espaço nem sempre pode ser facilmente estendida a mais graus de liberdade ou dimensões. Existem vários métodos alternativos na literatura dos quais se destacam os seguintes:

- Transformações inversas (Paul et al., 1981)
- Matrizes duais (Denavit, 1956)
- *Quaternions* duais (Young & Freudenstein, 1964)
- Métodos iterativos (Vicker et al., 1964)
- Abordagens geométricas (Lee & Ziegler, 1984)

Em qualquer dos métodos há porém várias condições e situações para a existência de soluções, e das quais se destacam as seguintes:

- O ponto no espaço operacional deve estar no espaço de trabalho
- Não se deve exceder os limites físicos das juntas
- Para haver solução analítica (num caso de 6 eixos) é suficiente que 3 eixos de juntas sucessivas se intersectem ou sejam paralelos (Solução de Pieper)

### 5.1.4 A redundância cinemática

Quando um manipulador pode atingir uma dada posição no espaço com mais de que uma configuração das juntas, diz-se que há redundância. Diz-se que uma redundância é uma posição alternativa devido a uma

junta, e se for  $N$  o número de redundâncias então o número de soluções é dado por  $2^N$ . Se o número de soluções for maior que o número de juntas então a resolução da cinemática inversa do manipulador pode trazer dificuldades adicionais, como a impossibilidade de obter uma solução. No exemplo anterior do manipulador RR planar as soluções matemáticas são de fácil interpretação graficamente, como ilustra a Figura 5.5.

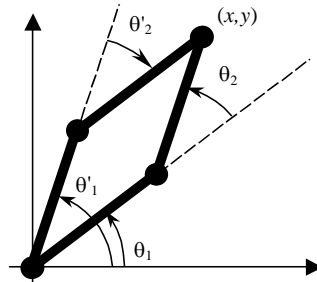


Figura 5.5 - Redundância no robot RR planar

Matematicamente a existência de redundância detecta-se normalmente pelo aparecimento da função  $\arccos(x)$  ou de radiciação  $(\sqrt{x})$ .

A situação de redundância pode ocorrer quando há mais graus de liberdade do que os necessários. Manipuladores com mais de seis graus de liberdade são ditos infinitamente redundantes. Na Figura 5.6 ilustram-se as 4 soluções clássicas de um manipulador antropomórfico (cotovelo-em-cima ou cotovelo-em-baixo, ombro-à-direita ou ombro-à-esquerda)

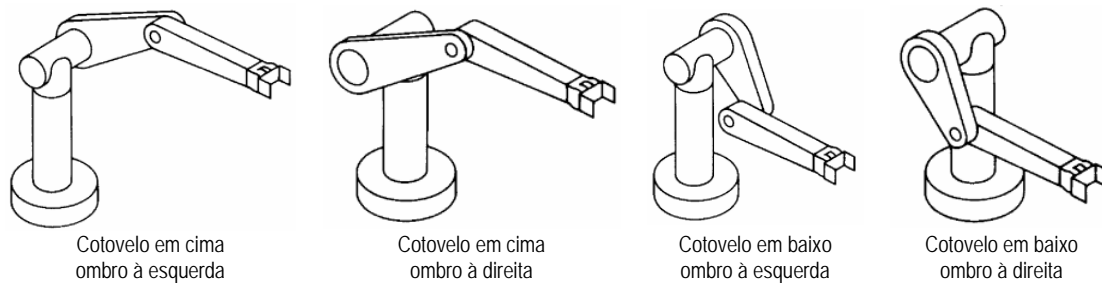


Figura 5.6 - As quatro soluções de um manipulador antropomórfico usando só as juntas primárias

Quando o manipulador tem um número infinito de configurações para uma dada posição da mão diz-se que se atingiu uma situação de degeneração. Casos mais comuns são o do manipulador RR planar de elos iguais para a mão no ponto  $(0,0)$ , ou ainda numa situação em que o punho do robot fique com dois eixos colineares e alinhados (Figura 5.7).

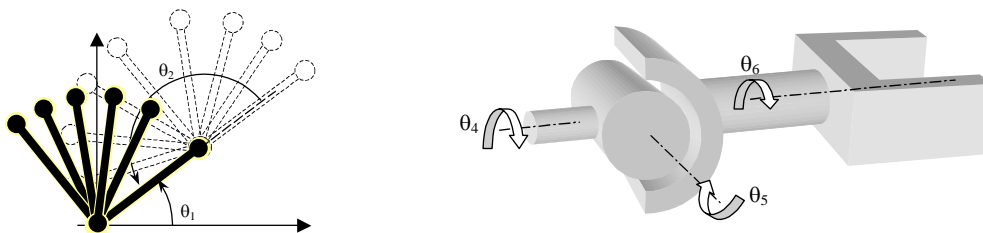


Figura 5.7 - Ilustração de duas situações de degeneração: há um número infinito de combinações de  $(\theta_1, \theta_2)$  ou  $(\theta_4, \theta_6)$ , respectivamente, para o *end-effector* nas configurações indicadas.

## 5.2 Algoritmo para uma Heurística de Cinemática Inversa

Dadas as dificuldades para a obtenção da cinemática inversa para um caso geral, o que se propõe usualmente é o de seguir um conjunto de regras de forma a obter uma dada heurística (descoberta) em que os pontos principais são os seguintes:

- 1- Equacionar a matriz de transformação geral e a matriz de transformação do manipulador
- 2- Procurar em ambas as matrizes:
  - Elementos que envolvam um só variável de junta
  - Pares de elementos que, quando divididos, produzem uma só expressão numa variável de junta (e que se possa usar a função atan2 de preferência)
  - Elementos ou suas combinações simplificáveis trigonometricamente
- 3- Equacionar elementos nas duas expressões
- 4- Repetir o processo para todos os termos identificados em 2

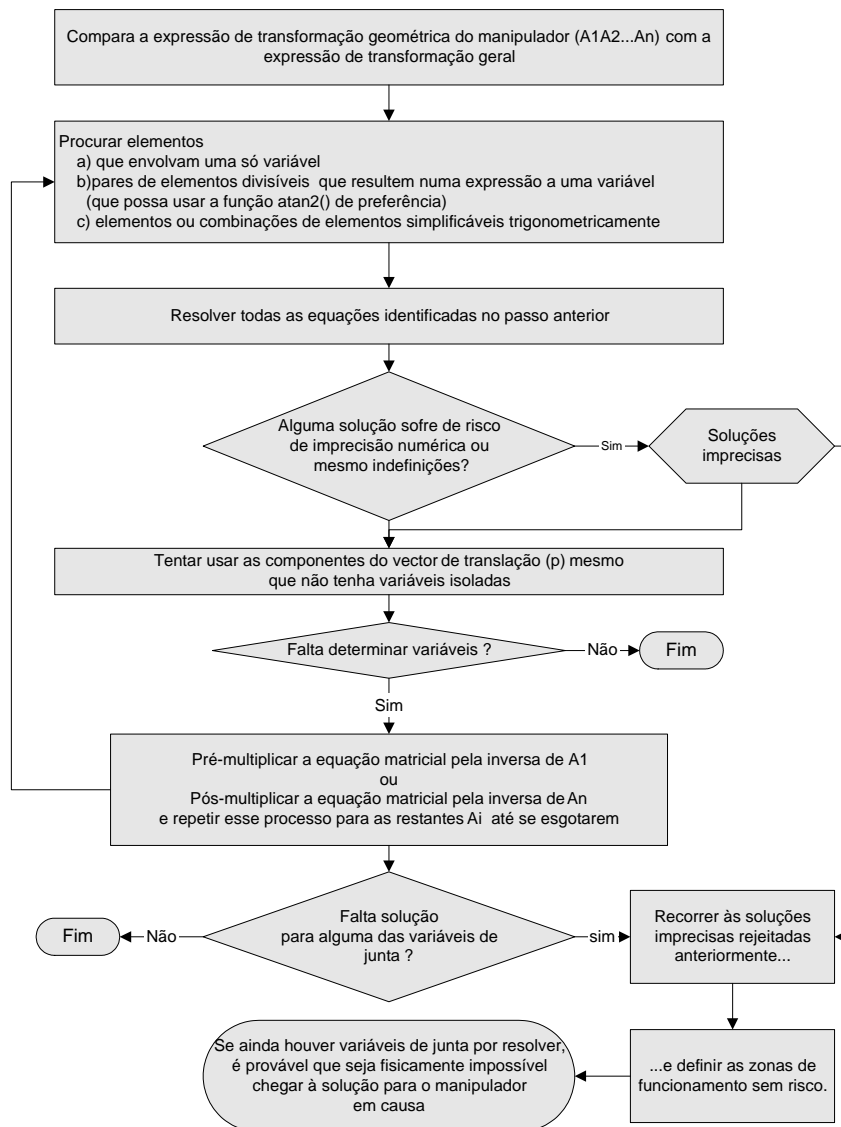


Figura 5.8- Algoritmo para uma heurística de cinemática inversa

Nem sempre os passos apresentados são suficientes ou mesmo os ideais para obter as expressões para todas as variáveis de junta. Nesses casos é necessário recorrer a alguns artifícios de manipulação de expressões como o recurso à pré-multiplicação pela inversa de uma componente do produto  $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_n$ . Na Figura 5.8 apresenta-se um algoritmo com os passos para um procedimento mais completo visando a obtenção das expressões para todas as variáveis de junta de um manipulador.

### 5.3 Recurso a transformações inversas e comparação dos elementos matriciais

Uma das técnicas possíveis para chegar a expressões de cinemática inversa, inclusive no âmbito do algoritmo genérico delineado na Figura 5.8, é o de recorrer às transformações inversas com o objectivo de obter expressões mais facilmente solúveis. Ou seja, partindo da expressão matricial da cinemática do manipulador  ${}^R\mathbf{T}_H = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_n$ , que leva ao conjunto de equações da cinemática nas variáveis e parâmetros de juntas, elos e espaço operacional, reorganizá-la com a expectativa de obter expressões individuais mais interessantes. Isto equivale a dizer que uma primeira reorganização seria  ${}^R\mathbf{T}_H \cdot \mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_{n-1}$ , ou em seguida  ${}^R\mathbf{T}_H \cdot \mathbf{A}_n^{-1} \cdot \mathbf{A}_{n-1}^{-1} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_{n-2}$ , e assim por diante enquanto possível ou favorável, ou respectivamente por pré-multiplicação, isto é, passar para  $\mathbf{A}_1^{-1} \cdot {}^R\mathbf{T}_H = \mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_n$  e sucessivamente.

Exemplifique-se o processo pré-multiplicação pelas inversas com o manipulador RR no espaço a 3D descrito anteriormente (Figura 5.4), lembrando de um capítulo anterior as matrizes dos dois elos:

$${}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -C_1S_2 & S_1 & L_2C_1C_2 \\ S_1C_2 & -S_1S_2 & -C_1 & L_2S_1C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, vai-se recorrer à pré-multiplicação, ou seja, obter-se-á:  $\mathbf{A}_1^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2$ , ou, de forma desenvolvida, virá sucessivamente:

$$\mathbf{A}_1^{-1} \cdot {}^0\mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_xC_1 + n_yS_1 & s_xC_1 + s_yS_1 & a_xC_1 + a_yS_1 & p_xC_1 + p_yS_1 \\ n_z & s_z & a_z & p_z - L_1 \\ n_xS_1 - n_yC_1 & s_xS_1 - s_yC_1 & a_xS_1 - a_yC_1 & p_xS_1 - p_yC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Tentando recorrer apenas a termos de posição (pelas vantagens já referidas), virá o seguinte par de expressões.

$$\begin{cases} p_xC_1 + p_yS_1 = L_2C_2 \\ p_z - L_1 = L_2S_2 \end{cases} \quad (5.8)$$

do qual se obtém imediatamente a expressão para  $\theta_2$  admitindo que já se tinha obtido  $\theta_1$ , por exemplo,

usando (5.4):

$$\theta_2 = \arctan \frac{p_z - L_1}{p_x C_1 + p_y S_1} \quad (5.9)$$

A vantagem imediata da expressão (5.9) em relação à expressão (5.5) é que se usa uma função arco-tangente; realça-se portanto que esta técnica das matrizes inversas pode oferecer a possibilidade de soluções alternativas, e por vezes até as únicas possíveis.

#### 5.4 Solução de uma equação usual no problema da cinemática inversa

Da expressão (5.7), entre outras, verifica-se que existe um tipo de equação trigonométrica que surge com relativa frequência na determinação de cinemática inversa, e que se traduz genericamente da seguinte forma:

$$k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta = k_3 \quad (5.10)$$

É por isso importante que se derive uma solução genérica expedita, o que se faz de seguida. Seja  $k = \tan \frac{\theta}{2}$ ; sabendo que  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$  e que  $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$  e, portanto, que

$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = k^2$ , é imediato provar que  $\cos \theta = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$ , bastando usar mera substituição para o

$$\text{verificar: } \frac{1 - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}{1 + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{2} = \cos \theta.$$

De forma similar se prova que  $\sin \theta = \frac{2k}{1 + k^2}$ , mais uma vez recorrendo a simples substituição:

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}}{1 + \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{2(1 + \cos \theta) \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}}{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta} = (1 + \cos \theta) \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2 (1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta \end{aligned}$$

Assim, após a substituição destes termos em  $k$  na expressão original (5.10) virá sucessivamente:

$$\begin{aligned} k_1 (1 - k^2) + 2k_2 k &= k_3 (1 + k^2) \\ (k_1 + k_3) k^2 - 2k_2 k + (k_3 - k_1) &= 0 \\ k &= \frac{k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_1 + k_3} \\ \theta &= 2 \cdot \arctan \left( \frac{k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_1 + k_3} \right) \quad (5.11) \end{aligned}$$

#### 5.5 Algumas soluções analíticas padrão

A maioria dos manipuladores industriais pertencem a um pequeno número de tipos e configurações cinemáticas, e obedecendo a umas regras tais que é relativamente expedito obter a solução da sua cinemática inversa. De seguida apresentam-se algumas soluções para manipuladores mais simples que podem ser combinadas, ou usadas na determinação de soluções de manipuladores mais complexos com 6



graus de liberdade, por exemplo. Além das apresentadas, outras soluções mais especiais podem ser encontradas na literatura indicada na bibliografia.

### 5.5.1 Robot planar de 3 elos

A cinemática inversa de um robot planar de três eixos determina as expressões de  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$  dado  $[x, y, \phi]$ . Se a orientação  $\phi$  não fosse dada então haveria redundância, e o braço teria um número infinito de soluções. Note-se para já que a orientação  $\phi$  é dada por:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (5.12)$$

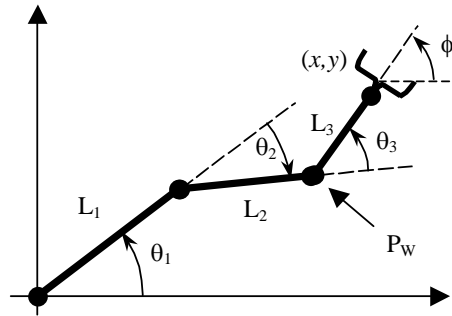


Figura 5.9 - Manipulador RRR planar

A resolução da cinemática inversa deste robot assenta na do robot planar RR uma vez que o ponto  $P_w$  (Figura 5.9) é um ponto conhecido porque se sabe, obviamente, a posição e a orientação do *end-effector* bem como o comprimento de elo  $L_3$ :

$$\begin{cases} P_{Wx} = x - L_3 C \phi \\ P_{Wy} = y - L_3 S \phi \end{cases} \quad (5.13)$$

Mas, tendo em conta as expressões geométricas (5.1) já determinadas para o manipulador planar RR, pode também escrever-se o seguinte:

$$\begin{cases} P_{Wx} = L_1 C_1 + L_2 C_{12} \\ P_{Wy} = L_1 S_1 + L_2 S_{12} \end{cases} \quad (5.14)$$

ou, desenvolvendo,

$$\begin{cases} P_{Wx} = L_1 C_1 + L_2 C_1 C_2 - L_2 S_1 S_2 \\ P_{Wy} = L_1 S_1 + L_2 C_1 S_2 + L_2 S_1 C_2 \end{cases} \quad (5.15)$$

As expressões (5.15) levam à já conhecida solução para  $\theta_2$  como visto em (5.2).

$$P_{Wx}^2 + P_{Wy}^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 C_2 \quad (5.16)$$

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{P_{Wx}^2 + P_{Wy}^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \quad (5.17)$$

Em (5.17) mais uma vez se inscreve o sinal  $\pm$  para recordar a redundância do manipulador de cotovelo-para-baixo ou cotovelo-para-cima.

Dado  $\theta_2$ , a obtenção de  $\theta_1$  poderá ser feita como em (5.3) para o manipulador RR ou então por um outro processo (mais extenso) sem ter de recorrer à tangente da diferença de ângulos, e que se descreve de seguida. Basta tomar as expressões (5.15) e resolvê-las em ordem a  $S_1$  e  $C_1$ , e depois fazer uma substituição recíproca, como se mostra na sequência seguinte:

$$C_1 = \frac{P_{Wx} + L_2 S_1 S_2}{L_1 + L_2 C_2}, \quad S_1 = \frac{P_{Wy} - L_2 C_1 S_2}{L_1 + L_2 C_2}$$

Por substituição de  $S_1$  na expressão de  $C_1$  virá em sequência:

$$C_1 = \frac{P_{Wx} + L_2 S_2 \frac{P_{Wy} - L_2 C_1 S_2}{L_1 + L_2 C_2}}{L_1 + L_2 C_2} = \frac{P_{Wx}(L_1 + L_2 C_2) + P_{Wy} L_2 S_2 - L_2 S_2 L_2 C_1 S_2}{(L_1 + L_2 C_2)^2}$$

$$C_1 (L_1^2 + L_2^2 C_2^2 + 2L_1 L_2 C_2 + L_2^2 S_2^2) = P_{Wx}(L_1 + L_2 C_2) + P_{Wy} L_2 S_2$$

Mas, atendendo à expressão (5.16) virá:

$$C_1 = \frac{P_{Wx}(L_1 + L_2 C_2) + P_{Wy} L_2 S_2}{P_{Wx}^2 + P_{Wy}^2}$$

e, após um procedimento similar, viria para  $S_1$  o seguinte:

$$S_1 = \frac{P_{Wy}(L_1 + L_2 C_2) - P_{Wx} L_2 S_2}{P_{Wx}^2 + P_{Wy}^2}$$

Virá finalmente para  $\theta_1$  a expressão (5.18), que se reconhece ser idêntica a (5.3):

$$\theta_1 = \arctan \frac{P_{Wy}(L_1 + L_2 C_2) - P_{Wx} L_2 S_2}{P_{Wx}(L_1 + L_2 C_2) + P_{Wy} L_2 S_2} \quad (5.18)$$

Por fim é necessário obter  $\theta_3$  que resulta de imediato de:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (5.19)$$

### 5.5.2 Solução do braço antropomórfico a 3 DOF

O braço antropomórfico a 3 graus de liberdade consta de três juntas rotacionais num arranjo similar ao ilustrado na Figura 5.10, onde  $P_w$  é o ponto extremo do manipulador (onde se poderá fixar um punho – *wrist*).

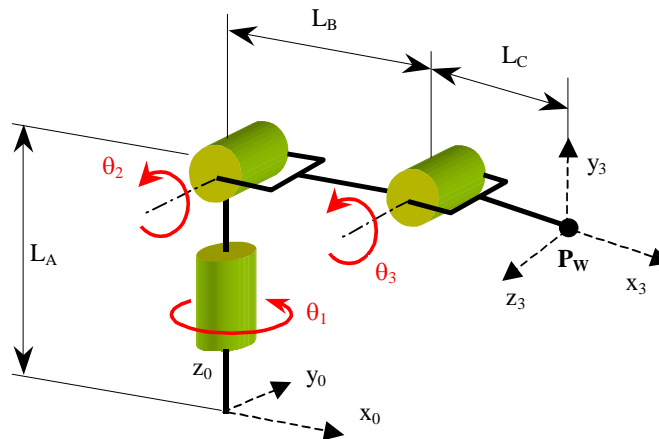


Figura 5.10 - Braço antropomórfico de 3 DOF

A expressão da cinemática directa do manipulador RRR antropomórfico pode ser derivada com base num resultado obtido anteriormente quando se tratou do exemplo similar ao Microbot Alpha II a 5 DOF, bastando considerar as três primeiras juntas (sistemas de coordenadas de 0 a 3). Essa expressão é dada pelo seguinte, onde  $L_A$ ,  $L_B$  e  $L_C$  são os comprimentos dos 3 elos em causa:

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2C_3 - C_1S_2S_3 & -C_1C_2S_3 - C_1S_2C_3 & S_1 & L_C(C_1C_2C_3 - C_1S_2S_3) + L_B C_1C_2 \\ S_1C_2C_3 - S_1S_2S_3 & -S_1C_2S_3 - S_1S_2C_3 & -C_1 & L_C(S_1C_2C_3 - S_1S_2S_3) + L_B S_1C_2 \\ S_2C_3 + C_2S_3 & -S_2S_3 + C_2C_3 & 0 & L_C(S_2C_3 + C_2S_3) + L_B S_2 + L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & C_1(L_C C_{23} + L_B C_2) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & S_1(L_C C_{23} + L_B C_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & L_C S_{23} + L_B S_2 + L_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As coordenadas de  $P_W$  são precisamente as componentes de posição na matriz anterior, ou seja:

$$P_W = \begin{bmatrix} p_{Wx} \\ p_{Wy} \\ p_{Wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(L_C C_{23} + L_B C_2) \\ S_1(L_C C_{23} + L_B C_2) \\ L_C S_{23} + L_B S_2 + L_A \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Daqui sai uma expressão para  $\theta_1$ :

$$\frac{S_1(L_C C_{23} + L_B C_2)}{C_1(L_C C_{23} + L_B C_2)} = \frac{p_{Wy}}{p_{Wx}} \Rightarrow \theta_1 = \arctan\left(\frac{p_{Wx}}{p_{Wy}}\right)$$

Verifica-se porém que na expressão anterior, os termos  $(L_C C_{23} + L_B C_2)$  podem ser positivos ou negativos o que resulta no segundo caso que  $\theta_1 = \arctan\left(\frac{-p_{Wx}}{-p_{Wy}}\right) = \arctan\left(\frac{p_{Wx}}{p_{Wy}}\right) + \pi$ ; geometricamente também é fácil verificar esta situação. Implica isto que nesse caso  $\theta_2$  passa a ter o valor  $(\pi - \theta_2)$  e que  $\theta_3$  passe a ter o valor  $(-\theta_3)$ , que se conclui igualmente pela observação geométrica. Esta redundância (que se tem de admitir também matematicamente pelas diversas soluções da arco-tangente) não implica alterações nas componentes  $p_{wx}$  e  $p_{wy}$ , como é óbvio e, como se mostra de seguida, também assegura que  $p_{wz}$  seja constante. Basta notar que  $p_{Wz} = L_C S_{23} + L_B S_2 + L_A$  e que os valores correspondentes das juntas 2 e 3 para esta redundância não afectam o valor de  $S_2$  nem de  $S_{23}$ , e tornam simétricos os valores  $C_{23}$  e  $C_2$ , bastando atender ao seguinte:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \theta_2) &= S_2 \\ \sin(\pi - \theta_2 - \theta_3) &= \sin(\pi - (\theta_2 + \theta_3)) = \sin(\theta_2 + \theta_3) = S_{23} \\ \cos(\pi - \theta_2) &= -C_2 \\ \cos(\pi - \theta_2 - \theta_3) &= \cos(\pi - (\theta_2 + \theta_3)) = -C_{23} \end{aligned}$$

Falta agora determinar a expressão para as variáveis  $\theta_2$  e  $\theta_3$ . Para isso, tomam-se os elementos da matriz (5.20) (não sem antes ter re-arranjado  $p_{wz}$  e migrar o termo  $L_A$  para o outro membro da equação), e elevam-se ao quadrado e adicionam-se conforme a sequência seguinte:

$$\begin{aligned} p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2 &= (L_B C_2 + L_C C_{23})^2 (C_1^2 + S_1^2) + (L_B S_2 + L_C S_{23})^2 \\ p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2 &= L_B^2 C_2^2 + L_C^2 C_{23}^2 + 2L_B L_C C_2 C_{23} + L_B^2 S_2^2 + L_C^2 S_{23}^2 + 2L_B L_C S_2 S_{23} \\ p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2 &= L_B^2 + L_C^2 + 2L_B L_C (C_2 C_{23} + S_2 S_{23}) \\ p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2 &= L_B^2 + L_C^2 + 2L_B L_C [C_2 (C_2 C_3 - S_2 S_3) + S_2 (S_2 C_3 + S_3 C_2)] \\ p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2 &= L_B^2 + L_C^2 + 2L_B L_C (C_2^2 C_3 + S_2^2 C_3) \end{aligned}$$

$$\theta_3 = \pm \arccos \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2 - L_B^2 - L_C^2}{2L_B L_C}$$

Para obter a expressão de  $\theta_2$  basta pegar nas expressões de  $p_{Wx}$ ,  $p_{Wy}$  e  $p_{Wz}$  e resolver uma delas em ordem a  $S_2$  ou  $C_2$ , num procedimento semelhante ao do manipulador planar RRR abordado na secção 5.5.1.

Partindo de (5.20) obtém-se sucessivamente o seguinte:

$$\begin{cases} \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} = L_B C_2 + L_C C_2 C_3 = L_B C_2 + L_C C_2 C_3 - L_C S_2 S_3 \\ p_{Wz} - L_A = p_{Wz}' = L_B S_2 + L_C C_2 S_3 + L_C C_3 S_2 \end{cases}$$

$$\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + L_C S_2 S_3 = C_2 (L_B + L_C C_3)$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + L_C S_2 S_3}{L_B + L_C C_3}$$

$$p_{Wz}' = L_B S_2 + L_C C_3 S_2 + L_C S_3 \frac{\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + L_C S_2 S_3}{L_B + L_C C_3}$$

$$(L_B + L_C C_3) p_{Wz}' = S_2 (L_B + L_C C_3)^2 + \left[ \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + L_C S_2 S_3 \right] L_C S_3$$

Recordando que  $\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} = r$  virá:

$$(L_B + L_C C_3) p_{Wz}' - r L_C S_3 = S_2 [L_C^2 S_3^2 + (L_B + L_C C_3)^2]$$

$$S_2 = \frac{(L_B + L_C C_3) p_{Wz}' - r L_C S_3}{L_C^2 S_3^2 + (L_B + L_C C_3)^2} = \frac{(L_B + L_C C_3) p_{Wz}' - \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} L_C S_3}{L_C^2 + L_B^2 + 2L_B L_C C_3}$$

Para o termo  $C_2$  virá por substituição:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{r}{L_B + L_C C_3} + \frac{L_C S_3}{L_B + L_C C_3} \frac{(L_B + L_C C_3) p_{Wz}' - r L_C S_3}{L_C^2 + L_B^2 + 2L_B L_C C_3} \\ C_2 &= \frac{r}{L_B + L_C C_3} + \frac{L_C S_3 p_{Wz}' - \frac{r L_C S_3}{(L_B + L_C C_3)}}{L_C^2 + L_B^2 + 2L_B L_C C_3} = \\ &= \frac{r (L_C^2 + L_B^2 + 2L_B L_C C_3) + L_C S_3 p_{Wz}' (L_B + L_C C_3) - r L_C S_3}{(L_B + L_C C_3) (L_C^2 + L_B^2 + 2L_B L_C C_3)} \end{aligned}$$

Os resultados que se obtém após a resto da manipulação são os seguintes:

$$S_2 = \frac{(L_B + L_C C_3) (p_{Wz} - L_A) - L_C S_3 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2}$$

$$C_2 = \frac{(L_B + L_C C_3) \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + L_C S_3 (p_{Wz} - L_A)}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + (p_{Wz} - L_A)^2}$$

Daqui sai naturalmente  $\theta_2 = \arctan \frac{S_2}{C_2}$ .

Tendo havido uma redundância em  $\theta_1$  e outra em  $\theta_3$  o número total de soluções é de  $2^2=4$ .

### 5.5.3 Solução do punho esférico

O punho esférico (3 DOF) tem os 3 eixos a intersectarem-se num ponto, e pode ser encarado como um subsistema de um manipulador a 6 DOF em que a matriz de transformação resulta do produto das matrizes associadas aos últimos 3 elos  ${}^3\mathbf{T}_6 = \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6$ .

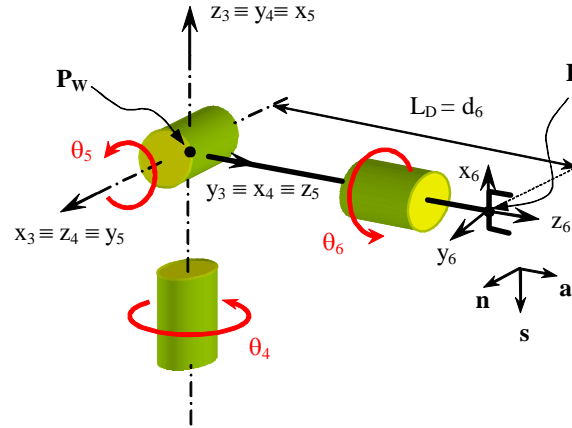


Figura 5.11 - Os três elos e juntas do punho esférico

A representação na Figura 5.11 mostra os três eixos do punho esférico onde, apesar da junta  $\theta_4$  parecer ter associado um elo com dado comprimento, é mais interessante considerar que a origem do sistema de eixos do punho se faz no ponto  $P_w$  ilustrado. Dessa forma poder-se-á posteriormente "concatenar" o manipulador antropomórfico a 3DOF com o punho esférico e assim obter um manipulador a 6 DOF. Após estas considerações, a cinemática directa do punho esférico obtém-se com base nos parâmetros cinemáticos de Denavit-Hartenberg que se ilustram na tabela seguinte:

| Elo | $\theta$      | $\alpha$ | $l$ | $D$   |
|-----|---------------|----------|-----|-------|
| 4   | $\theta_4+90$ | $+90$    | 0   | 0     |
| 5   | $\theta_5+90$ | $+90$    | 0   | 0     |
| 6   | $\theta_6$    | 0        | 0   | $L_D$ |

Relembrando e usando a matriz de transformação de um elo, resultam daqui as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -S_5 & 0 & C_5 & 0 \\ C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a expressão final:  $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} S_4S_5 & C_4 & -S_4C_5 & 0 \\ -C_4S_5 & S_4 & C_4C_5 & 0 \\ -C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} S_4S_5C_6 + C_4S_6 & -S_4S_5S_6 + C_4C_6 & -S_4C_5 & -S_4C_5L_D \\ -C_4S_5C_6 + S_4S_6 & S_6C_4S_5 + S_4C_6 & C_4C_5 & C_4C_5L_D \\ -C_5C_6 & C_5S_6 & S_5 & S_5L_D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Comparando os termos respectivos com a matriz de transformação geral para a orientação:

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} n_{3x} & s_{3x} & a_{3x} \\ n_{3y} & s_{3y} & a_{3y} \\ n_{3z} & s_{3z} & a_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n}_3 & \vec{s}_3 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

obtém-se as expressões para as diversas variáveis de junta:

$$\begin{cases} -S_4 C_5 = a_{3x} \\ C_4 C_5 = a_{3y} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \arctan \frac{-a_{3x}}{a_{3y}} \quad (5.23)$$

observando que  $a_{3z} = S_5$  e que  $a_{3x}^2 + a_{3y}^2 = C_5^2$ , e portanto que

$$C_5 = \pm \sqrt{a_{3x}^2 + a_{3y}^2} \quad (5.24)$$

de imediato se pode escrever o seguinte, fazendo notar que há, por isso, duas soluções para  $\theta_5$ .

$$\theta_5 = \arctan \frac{a_{3z}}{\pm \sqrt{a_{3x}^2 + a_{3y}^2}} \quad (5.25)$$

Ainda observando e comparando (5.21) e (5.22) se deduz que:

$$\theta_6 = \arctan \frac{s_{3z}}{-n_{3z}} \quad (5.26)$$

Finalmente deve notar-se que, dado o termo  $C_5$  ter duas soluções, além de  $\theta_5$ , também  $\theta_4$  e  $\theta_6$  as terão porque também eles foram obtidos com base em  $C_5$ . Assim, teremos as soluções alternativas quando  $C_5 = -\sqrt{a_{3x}^2 + a_{3y}^2}$ , que recorde-se, tal com se tem vindo assumir, desde a sua introdução, faz-se uso da função **atan2()** em vez da mera **arctan()**.

$$\theta'_4 = \arctan \frac{a_{3x}}{-a_{3y}}$$

$$\theta'_6 = \arctan \frac{-s_{3z}}{n_{3z}}$$

#### 5.5.4 Manipuladores com um punho esférico

Foi já referido que a solução geral da cinemática inversa de um manipulador pode tornar-se complexa e até mesmo impossível de resolver analiticamente. Todavia, uma parte considerável dos manipuladores usados na prática têm aquilo a que se chama um punho esférico, isto é, os eixos das três juntas terminais (associadas fundamentalmente à orientação) intersectam-se num ponto. Com base nos resultados observados no manipulador planar RRR, admite-se ser possível definir um ponto ao longo de um manipulador cuja posição pode ser expressa em função da orientação e posição do *end-effector* e também função de um número limitado de variáveis de junta! Isto é equivalente a dizer que o problema da cinemática inversa nesses manipuladores é decomposto em duas partes desacopladas entre si: **posição** e **orientação**.

Para o manipulador com punho esférico, a escolha natural recai sobre o ponto de intersecção dos três eixos das juntas terminais, ou seja, o ponto  $P_W$  na Figura 5.12. Como previsto anteriormente, foi a "concatenação" de dois sub-componentes que deu origem a este robot; note-se todavia que o processo carece de um passo adicional. O sistema de eixos número 3 é diferente no manipulador antropomórfico a 3 DOF (onde é sistema de eixos terminal) e no punho esférico (onde é sistema de eixos inicial). A caixa na Figura 5.12 ilustra essa diferença, mas observe-se contudo que a origem do sistema é a mesma. Assim, não bastará multiplicar os termos  $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$  do braço por  $\mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6$  do punho, é necessário corrigir a discrepância do sistema de eixos número 3, por exemplo, através de uma pós-multiplicação de  $\mathbf{A}_3$  por uma matriz que consta simplesmente de duas rotações:  $90^\circ$  em torno de  $y_3$  seguido de  $180^\circ$  em torno de  $x_3$  (original), ou seja:

$$Rot(x, 180) Rot(y, 90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainda relativamente à Figura 5.12 observe-se que os sistemas de eixos não obedecem todos à



componentes de orientação nunca são afectados pelos elementos da 4ª coluna ou linha. Esta afirmação justifica-se pela natureza da matriz de transformação geométrica homogénea, e confirma-se no diagrama seguinte:

$$T_1 T_2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangle \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Desta forma, pode também escrever-se que a componente de orientação da matriz de transformação do manipulador é dada por  $\mathbf{R} = {}^0\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\mathbf{R}_6$  e portanto:  ${}^3\mathbf{R}_6 = {}^0\mathbf{R}_3^{-1} \cdot \mathbf{R}$ . Recorde-se que se conhece  $\mathbf{R}$  da cinemática directa do manipulador completo, e  ${}^0\mathbf{R}_3$  da cinemática directa após as primeiras 3 juntas através da expressão (5.28). Tendo este valor concreto para  ${}^3\mathbf{R}_6$  bastará resolver a cinemática inversa do punho esférico e assim obter  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  e  $\theta_6$ .

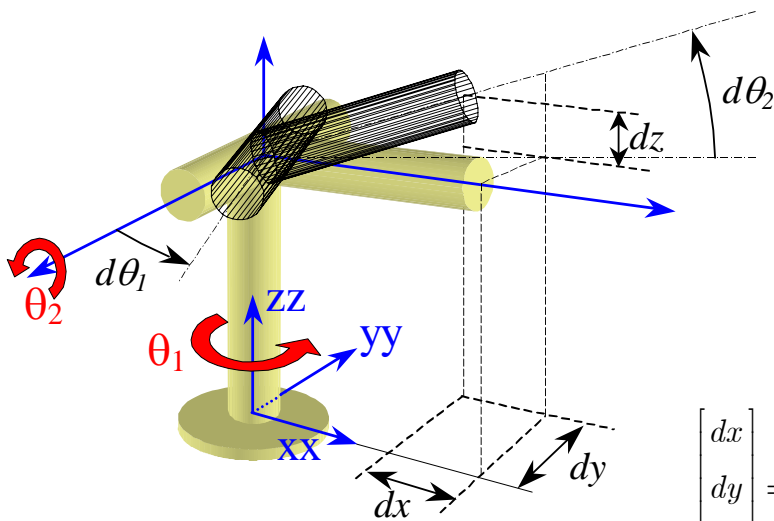
O processo de cinemática inversa de um manipulador antropomórfico (com até 6 DOF) pode então ser decomposto em duas fases: posicionamento do punho e sua orientação e que, em resumo, podemos esquematizar simbolicamente nos seguintes dois passos principais, onde inclusivamente se assinalam, em cada caso com um bordo circundante, quais as partes da matriz de transformação geral que se utilizam nas operações:

$$\begin{array}{l} \text{Passo 1: } \left[ \begin{array}{ccc|c} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_D} \mathbf{P}_W \xrightarrow{(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \\ \\ \text{Passo 2: } \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3) \rightarrow {}^0\mathbf{R}_3^{-1} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right\} \xrightarrow{{}^0\mathbf{R}_3^{-1} \cdot {}^0\mathbf{R}_6} {}^3\mathbf{R}_6 = \left[ \begin{array}{ccc} \vec{n}_3 & \vec{s}_3 & \vec{a}_3 \end{array} \right] \xrightarrow{(\mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_6)} \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} \end{array}$$



# Capítulo 6

## *Cinemática Diferencial de Manipuladores*



$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 S_1 C_2 & -L_2 C_1 S_2 \\ L_2 C_1 C_2 & -L_2 S_1 S_2 \\ 0 & L_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_2 C_2} \begin{bmatrix} -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

## 6. Cinemática diferencial

### 6.1 A problemática

Nas cinemáticas inversa e directa abordam-se as relações entre coordenadas no espaço operacional e no espaço das juntas de um dado sistema robótico. Todavia, essas relações não dão qualquer informação sobre as características do movimento entre duas quaisquer configurações, ou seja, quais são as relações entre as evoluções temporais das coordenadas nos dois espaços. Dito de outra forma, se, por exemplo, a extremidade da mão deve descrever um certo deslocamento (incremento) no espaço a seis coordenadas durante um dado intervalo de tempo, que deslocamentos (incrementos) devem ter as diversas juntas ou vice-versa? Estes incrementos ou diferenças na posição e o seu estudo designam a chamada cinemática diferencial. Vai mostrar-se mais adiante que a relação entre deslocamentos infinitesimais nos espaços operacional e das juntas é dada pelo Jacobiano do manipulador.

Toda esta conjuntura leva ao estabelecimento de duas definições importantes: **caminho** e **trajectória**. Por caminho entende-se um conjunto de pontos no espaço (operacional ou das juntas) que deve ser percorrido numa dada ordem; trajectória define um caminho levando em conta constrangimentos temporais, ou seja, são definidos intervalos de tempo para a evolução entre duas configurações sucessivas ou, no caso limite, a trajectória define a evolução ao longo de um caminho em função do tempo.

### 6.2 Transformações diferenciais

#### 6.2.1 Conceitos

Para expressar a noção de incrementos nas coordenadas (no espaço operacional ou das juntas) introduz-se o conceito de movimento diferencial geral ou transformação geométrica diferencial, ou simplesmente **transformação diferencial**. A transformação diferencial representa um acréscimo infinitesimal e, como tal, é vista como uma matriz de transformação usual que resulta da multiplicação de uma **transformação diferencial de rotação** seguida de um **transformação diferencial de translação**, ou seja, num dado referencial R, tem-se:

$$d^R \mathbf{T}_N = d^R \mathbf{Trans} \cdot d^R \mathbf{Rot} \quad (6.1)$$

onde a translação diferencial e rotação diferencial se expressam respectivamente por:

$$d^R \mathbf{Trans} = \mathbf{Trans}(dx, dy, dz) \quad (6.2)$$

$$d^R \mathbf{Rot} = \mathbf{Rot}(x, \delta_x) \cdot \mathbf{Rot}(y, \delta_y) \cdot \mathbf{Rot}(z, \delta_z) \quad (6.3)$$

Na rotação diferencial, a ordem das três operações é arbitrária, como se pode verificar mais adiante em (6.4). De facto, quando se mencionam incrementos infinitesimais, no caso das rotações, está-se a assumir rotações de um ângulo infinitesimalmente pequeno  $d\theta$  ou, formalmente, os limites das funções que traduzem as rotações quando  $\theta \rightarrow d\theta \rightarrow 0$ . Se se recordar que  $\lim_{\theta \rightarrow d\theta} (\sin \theta) = d\theta$  e  $\lim_{\theta \rightarrow d\theta} (\cos \theta) = 1$ , é possível

concluir para a rotação diferencial o seguinte:

$$\begin{aligned}
 d^R \mathbf{Rot} &= \mathbf{Rot}(x, \delta_x) \cdot \mathbf{Rot}(y, \delta_y) \cdot \mathbf{Rot}(z, \delta_z) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & 0 & 0 \\ \delta_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & 0 \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Usando a expressão matricial da translação diferencial, pode expressar-se uma transformação diferencial partindo de (6.1), substituindo o resultado obtido em (6.4) e finalmente obtendo-se o seguinte:

$$d^R \mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & 0 \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Assim, uma transformação diferencial é caracterizada por seis componentes que formam o chamado **vector de deslocamento (movimento) diferencial** e é representado por:

$$\vec{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{d}} \\ \vec{\delta} \end{bmatrix} = [dx \quad dy \quad dz \quad \delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z]^t \quad (6.6)$$

## 6.2.2 Metodologia de utilização

Dadas estas definições, é agora pertinente questionar a sua utilidade e aplicabilidade prática. Em verdade, se um dado sistema de coordenadas  ${}^R \mathbf{T}_N$  sofre uma transformação diferencial, o que se quer dizer é o seguinte relativamente à sua nova localização:

$$\text{Nova Localização} = d^R \mathbf{T}_N \cdot {}^R \mathbf{T}_N = d^R \mathbf{Trans} \cdot d^R \mathbf{Rot} \cdot {}^R \mathbf{T}_N \quad (6.7)$$

Mas, por sua vez, a transformação diferencial foi introduzida para ser um acréscimo infinitesimal (diferencial) concebida para ser simplesmente tida como um termo aditivo de transformação geométrica, ou seja, deve ser tal que basta adicioná-la a uma qualquer matriz de transformação geométrica para obter uma nova matriz (de transformação), devendo verificar-se o seguinte:

$$\text{Nova Localização} = {}^R \mathbf{T}_N + d^R \mathbf{T}_N \quad (6.8)$$

Igualando as expressões (6.7) e (6.8) virá em sequência:

$$\begin{aligned}
 {}^R \mathbf{T}_N + d^R \mathbf{T}_N &= d^R \mathbf{Trans} \cdot d^R \mathbf{Rot} \cdot {}^R \mathbf{T}_N \\
 d^R \mathbf{T}_N &= d^R \mathbf{Trans} \cdot d^R \mathbf{Rot} \cdot {}^R \mathbf{T}_N - {}^R \mathbf{T}_N = (d^R \mathbf{Trans} \cdot d^R \mathbf{Rot} - \mathbf{I}) {}^R \mathbf{T}_N = {}^R \Delta \cdot {}^R \mathbf{T}_N \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Ao factor  ${}^R \Delta = d^R \mathbf{Trans} \cdot d^R \mathbf{Rot} - \mathbf{I}$  chama-se **transformação de deslocamento diferencial** (não confundir com a transformação geométrica diferencial) e permite determinar, em função de uma qualquer matriz representando um referencial em causa, qual o valor do incremento de transformação diferencial para se poder obter a nova localização. A transformação de deslocamento diferencial, face ao exposto, pode escrever-se na forma matricial, chamando-se a atenção para a diagonal e linha de zeros:

$${}^R \Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

A transformação diferencial de um certo sistema de coordenadas (que o é no fundo  ${}^R \mathbf{T}_N$ ) foi abordada implicitamente como sendo vista de um referencial base original, o referencial R. Porém, a transformação a

aplicar poderia ser vista, não do referencial base R, mas do próprio referencial N que irá sofrer a transformação diferencial. Isto reporta-nos às questões de pré- e pós-multiplicação de transformações abordadas em capítulos anteriores. Assim, se uma transformação diferencial for vista no próprio referencial (N), expressando por isso as transformações diferenciais elementares por  $d^N \mathbf{Trans}$  e  $d^N \mathbf{Rot}$ , virá:

$${}^R \mathbf{T}_N + d^R \mathbf{T}_N = {}^R \mathbf{T}_N \cdot d^N \mathbf{Trans} \cdot d^N \mathbf{Rot} = {}^R \mathbf{T}_N (\mathbf{I} - d^N \mathbf{Trans} \cdot d^N \mathbf{Rot}) = {}^R \mathbf{T}_N \cdot {}^N \Delta \quad (6.11)$$

### 6.2.3 Exemplo numérico

O conceito de transformação diferencial é naturalmente uma abordagem teórica que, quando implementado numericamente, terá alguns erros que poderão ser mais ou menos relevantes. Seja de seguida um exemplo para ilustrar esta questão.

Dado um referencial  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , qual é a matriz de erros na nova localização se se aplicar o

processo das transformações diferenciais com seguintes os movimentos diferenciais:  $\vec{d} = [1 \ 0 \ 0.5]^t$  e  $\vec{\delta} = [0 \ 0.1 \ 0]^t$ ? Recordando à metodologia exposta, o procedimento é o seguinte:

$$\text{Nova localização} = \mathbf{A} + d\mathbf{A} = d\mathbf{Trans} \cdot d\mathbf{Rot} \cdot \mathbf{A}$$

onde  $d\mathbf{A} = {}^R \Delta \cdot \mathbf{A}$ . Usando numericamente os vectores fornecidos como os vectores  $\vec{d}$  e  $\vec{\delta}$  (e é aqui que se introduz o erro numérico), virá:  $d\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Assim, a nova posição (aproximada) obtém-se como sendo:  $\mathbf{A} + d\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

O valor exacto da transformação corresponde, além da translação indicada, a uma rotação em torno do eixo dos yy com valor 0.1, o que resulta em:

$$\text{Nova localização exacta} = \mathbf{A}_{novo} = \begin{bmatrix} \cos(0.1) & 0 & \sin(0.1) & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(0.1) & 0 & \cos(0.1) & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuados os cálculos, virá explicitamente:  $\mathbf{A}_{novo} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0998 & 0.995 & 10.95 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0.995 & -0.0998 & -0.498 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Finalmente, a matriz dos erros pode ser dada pelo seguinte:  $|\mathbf{A}_{novo} - (\mathbf{A} + d\mathbf{A})| = \begin{bmatrix} 0 & 0.002 & 0.005 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0.002 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , que corresponde, em termos relativos, a que qualquer

termo tenha um erro inferior a 0.5%.

Em resumo, o uso prático da transformação diferencial tem essencialmente vantagens do ponto de vista computacional dado que elimina o recurso a funções trigonométricas. Todavia, esta utilização deve ser praticada dentro de limites comportáveis de erros acumulados.

### 6.3 O Jacobiano de um manipulador

Aquando do estudo das cinemáticas directa e inversa afirmou-se que se tratava formalmente de uma relação vectorial entre dois grupos de variáveis, no espaço das juntas e no espaço operacional e que simbolicamente se poderia escrever  $\vec{r} = \vec{F}(\vec{q})$ , para a cinemática directa e, com as devidas restrições de interpretação e condições de existência matemática,  $\vec{q} = \vec{F}^{-1}(\vec{r})$  para a cinemática inversa. Se se levar em conta que a variação temporal de uma variável espacial (distância ou amplitude angular) traduz uma velocidade (linear ou angular) é imperativo pensar no que surge se se derivarem as expressões acima citadas em ordem ao tempo. Claramente, se  $\vec{r} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^t$  então,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{dx}{dt} \ \frac{dy}{dt} \ \frac{dz}{dt} \ \frac{d\phi}{dt} \ \frac{d\theta}{dt} \ \frac{d\psi}{dt} \right]^t$  onde se identificam 3 velocidades lineares e 3 velocidades angulares. Se se pensar que o vector  $\vec{r}$  indica a postura da extremidade de um manipulador,  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  indicará as componentes cinéticas dessa mesma extremidade. É assim imediato questionar também como se relacionam com elas as velocidades das diversas juntas do manipulador. A resposta está num resultado da análise vectorial referente à diferenciação de funções vectoriais, e que, usando a nomenclatura adoptada até agora, se traduz no seguinte:

$$d\vec{r} = \mathbf{J} \cdot d\vec{q} \quad (6.12)$$

onde  $\mathbf{J}$  é designado o Jacobiano da função vectorial  $\vec{F}$ . Se  $\vec{F}$  for expressa por  $(r_1, r_2, \dots, r_m) = \mathbf{F}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , ou de modo equivalente  $r_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , o que, na linguagem dos manipuladores corresponde a assumir  $m$  variáveis cartesianas e  $n$  juntas, o Jacobiano tem a seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r_2}{\partial q_1} & \frac{\partial r_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \frac{\partial r_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Para melhor entender esta formulação basta recordar o conceito de diferencial total de uma função de várias variáveis como, por exemplo, a duas:  $x = f(\theta_1, \theta_2)$ , donde se tem  $dx = \frac{\partial f}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial f}{\partial \theta_2} d\theta_2$ .

Assim, fica claro como se pode obter analiticamente a relação entre as diferenciais das variáveis no espaço cartesiano em função das diferenciais no espaço das juntas. Bastará pensar na sua dependência com o tempo e pode-se escrever sem grandes dificuldades de intuição o seguinte:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{J} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} \text{ ou em notação compacta } \dot{\vec{r}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\vec{q}}$$

ou ainda, com os devidos cuidados para evitar o abuso de notação, também o seguinte  $\vec{v} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$ , onde o vector  $\vec{v}$  representa as componentes de velocidade cartesiana e  $\vec{\omega}$  é o vector com as velocidades das juntas (podendo elas também ser lineares no caso de juntas prismáticas).

### 6.3.1 Determinação do Jacobiano

O Jacobiano de um manipulador mostra-se assim com um elemento fundamental para relacionar as velocidades no espaço operacional em função das velocidades das juntas. O seu cálculo analítico pode ser obviamente feito pela diferenciação das expressões da cinemática directa como se apresentou. Na Figura 6.1 ilustra-se um manipulador RR planar com indicação dos incrementos envolvidos e as equações da sua cinemática directa.

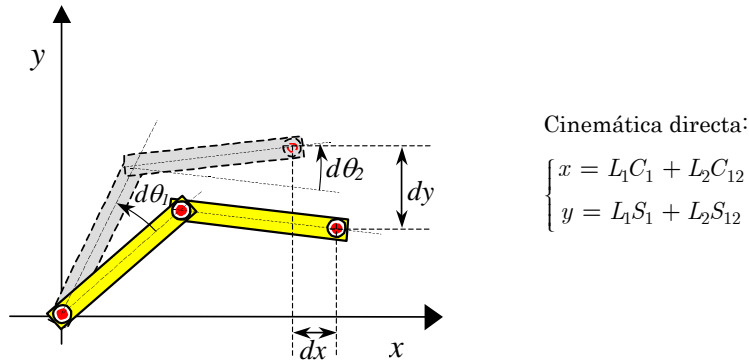


Figura 6.1 – Incrementos cartesianos e nas juntas de um manipulador RR planar.

A obtenção das expressões diferenciais do manipulador na situação da Figura 6.1 faz-se pelo já referido conceito da diferencial total que utiliza as diversas derivadas parciais:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial(L_1C_1 + L_2C_{12})}{\partial\theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial(L_1C_1 + L_2C_{12})}{\partial\theta_2}d\theta_2 = -(L_1S_1 + L_2S_{12})d\theta_1 - L_2S_{12}d\theta_2 \\ dy = \frac{\partial(L_1S_1 + L_2S_{12})}{\partial\theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial(L_1S_1 + L_2S_{12})}{\partial\theta_2}d\theta_2 = (L_1C_1 + L_2C_{12})d\theta_1 + L_2C_{12}d\theta_2 \end{cases} \quad (6.14)$$

As equações obtidas em (6.14) podem naturalmente reorganizar-se e a expressão da cinemática diferencial de um manipulador RR planar resulta de forma compacta em:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1S_1 - L_2S_{12} & -L_2S_{12} \\ L_1C_1 + L_2C_{12} & L_2C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

A matriz do Jacobiano surge explícita e, naturalmente, o seu valor concreto depende em cada instante dos valores dos ângulos de junta  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

Um outro exemplo aqui apresentado diz respeito ao manipulador RR no espaço a 3D que se relembra na Figura 6.2, e onde se indica também a expressão da cinemática directa, agora com as três variáveis no espaço cartesiano, mesmo sabendo-se que há uma certa dependência entre elas.

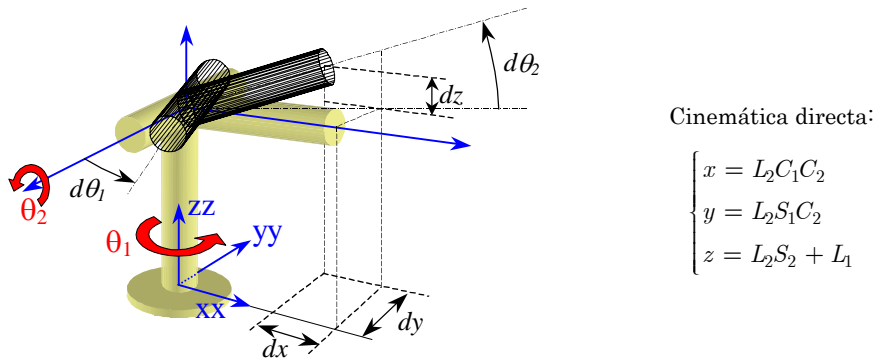


Figura 6.2 - Manipulador RR a 3D e os acréscimos diferenciais cartesianos e nas juntas

Pela metodologia descrita anteriormente pode chegar-se sem grandes dificuldades à seguinte expressão de cinemática diferencial:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 S_1 C_2 & -L_2 C_1 S_2 \\ L_2 C_1 C_2 & -L_2 S_1 S_2 \\ 0 & L_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

É de observar que o Jacobiano em (6.16) não é quadrado, o que resulta de se terem considerado três variáveis cartesianas e duas variáveis de junta. Não foram levadas em conta variáveis de orientação cartesiana (que reforçariam a disparidade de variáveis) dado que também elas não são independentes das variáveis de posição (x, y, z). Todavia, teria sido possível integrá-las sem dificuldades dado que se relacionam de forma muito directa com as variáveis de junta como se mostrou no capítulo da cinemática directa.

A obtenção analítica por diferenciação da cinemática directa é o processo mais natural para obter o Jacobiano, mas outros processos existem na literatura como, por exemplo, por cálculo vectorial ou por coordenadas homogéneas segundo o Algoritmo de Paul.

### 6.3.2 Jacobiano inverso

Até agora abordou-se a questão de expressar os diferenciais das variáveis do espaço cartesiano em função das variáveis de junta, mas e o problema inverso? Ou seja, como se pode expressar o andamento das variáveis de junta dados os andamentos das variáveis cartesianas? Por exemplo, se se quiser que a evolução das coordenadas (x,y,z) do *end-effector* seja linear (isto é, incrementos dx, dy e dz constantes), o que corresponde à descrição de uma linha recta no espaço a 3D, como deverão evoluir as juntas do manipulador? Este problema é com certeza de grande importância prática, e pode ser designado pelo problema da cinemática diferencial inversa. Há visivelmente uma relação com a cinemática inversa de manipuladores, onde também aí eram as variáveis do espaço operacional as entidades independentes à custa das quais se determinavam as variáveis de junta. Se existir a função de cinemática inversa  $\vec{\mathbf{F}}^{-1}$  tal que  $(q_1, q_2, \dots, q_n) = \vec{\mathbf{F}}^{-1}(r_1, r_2, \dots, r_m)$  então também aqui é possível obter o Jacobiano dessa função inversa que se designa por  $\mathbf{J}^{-1}$ , ou Jacobiano inverso, e ter-se-á  $d\vec{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ . Todavia, esta designação de Jacobiano inverso pode levar à conclusão arriscadamente apressada, como correspondendo à matriz inversa do Jacobiano do manipulador (6.13), o que nem sempre é verdade porque esse Jacobiano pode não ser quadrado, como é o caso em (6.16), e logo nem sequer se poder definir a sua inversa. É por isso comum usar as designações  $\mathbf{J}_F$  e  $\mathbf{J}_I$  para o Jacobiano directo (Forward) e para o Jacobiano inverso.

Feitas estas considerações, surge assim a questão de como se pode obter o Jacobiano inverso, dado ele ser fundamental para a determinação das velocidades das juntas. A definição leva a que a primeira tentativa seja a de diferenciar as expressões da cinemática inversa, o que é sempre válido se essas expressões existirem. Por outro lado, se o Jacobiano (directo) for quadrado então pode tentar-se a sua inversão quer analítica, quer numérica, e nesse caso será feita em cada instante, mas deste assunto voltar-se-á mais adiante.

Procure-se obter o Jacobiano inverso para o manipulador RR planar por inversão do Jacobiano directo. Simbolicamente pode escrever-se a expressão (6.15) do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Pela definição de inversa de uma matriz ter-se-á:  $\mathbf{J}^{-1} = \frac{Adj(\mathbf{J})}{|\mathbf{J}|}$ , onde a adjunta de uma matriz é a

matriz transposta dos co-factores, ou seja:  $Adj(\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$ . Por seu lado, o

determinante de  $\mathbf{J}$  pode ser já obtido substituindo a sua real expressão dada em (6.15) e virá:

$$\det(\mathbf{J}) = -(L_1 S_1 + L_2 S_{12}) L_2 C_{12} + L_2 S_{12} (L_1 C_1 + L_2 C_{12}) \quad (6.18)$$

Esta expressão pode ser sucessivamente desenvolvida e ter-se-á:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}) &= -(L_1 L_2 S_1 C_{12} + L_2^2 S_{12} C_{12}) + (L_1 L_2 C_1 S_{12} + L_2^2 C_{12} S_{12}) = \\ &= L_1 L_2 (C_1 S_{12} - S_1 C_{12}) = L_1 L_2 \sin((\theta_1 + \theta_2) - \theta_1) = \\ &= L_1 L_2 S_2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Prosseguindo com o desenvolvimento do Jacobiano inverso pode-se finalmente constatar:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} L_2 C_{12} & -(L_1 C_1 + L_2 C_{12}) \\ L_2 S_{12} & -(L_1 S_1 + L_2 S_{12}) \end{bmatrix}^t}{L_1 L_2 S_2} = \frac{1}{L_1 S_2} \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} \\ -\frac{L_1 C_1 + L_2 C_{12}}{L_2} & -\frac{L_1 S_1 + L_2 S_{12}}{L_2} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Apesar do resultado obtido de forma aparentemente fácil em (6.20), nem sempre é possível obter o Jacobiano inverso de forma analítica; na verdade, este caso é dos poucos onde o método resulta com facilidade. A via alternativa da diferenciação das expressões da cinemática inversa, por seu lado, oferece mais uma possibilidade, em particular quando o Jacobiano directo não é rectangular. É precisamente esse o caso do manipulador RR no espaço a 3D cuja cinemática directa está indicada na Figura 6.2 e a cinemática inversa, tal como indicado em capítulos anteriores, é dada por:

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan \frac{y}{x} \\ \theta_2 = \arctan \frac{z - L_1}{x \cdot C_1 + y \cdot S_1} \end{cases} \quad (6.21)$$

Rescrevendo a primeira parte da expressão anterior, virá:

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{y}{x} \Rightarrow x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = 0$$

$$dx \cdot \sin \theta_1 + x \cos \theta_1 \cdot d\theta_1 + y \cdot \sin \theta_1 \cdot d\theta_1 - dy \cdot \cos \theta_1 = 0$$

$$d\theta_1 = \frac{-dx \cdot \sin \theta_1 + dy \cdot \cos \theta_1}{x \cdot \cos \theta_1 + y \cdot \sin \theta_1} \quad (6.22)$$

Substituindo os termos de  $x$  e  $y$  pelos valores respectivos conhecidos da cinemática directa (Figura 6.2), mais concretamente  $x = L_2 C_1 C_2$  e  $y = L_2 S_1 C_2$ , virá:

$$d\theta_1 = \frac{-dx \cdot S_1 + dy \cdot C_1}{L_2 C_1 C_2 \cdot C_1 + L_2 S_1 C_2 \cdot S_1} = \frac{-dx \cdot S_1 + dy \cdot C_1}{L_2 C_2} = \frac{-S_1}{L_2 C_2} dx + \frac{C_1}{L_2 C_2} dy \quad (6.23)$$

Note-se que semelhante resultado poderia ser obtido pela diferenciação directa da expressão da arco-tangente em (6.21) bastando desde logo recordar que  $d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} dy$ :

$$d\theta_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) dx + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} dy = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \quad (6.24)$$

recorrendo também aqui a termos da cinemática directa, após substituição, virá:

$$d\theta_1 = \frac{-y}{L_2^2 C_2^2} dx + \frac{x}{L_2^2 C_2^2} dy = \frac{-S_1}{L_2 C_2} dx + \frac{C_1}{L_2 C_2} dy \quad (6.25)$$

A obtenção do diferencial da variável  $\theta_2$  podia-se fazer pela derivação da segunda expressão em (6.21)



tal como se fez para a variável anterior, mas o processo é muito mais expedito se se atender na cinemática directa que  $z = L_1 + L_2 S_2$  o que, por diferenciação directa, dá de imediato  $dz = L_2 C_2 d\theta_2$ , ou seja:

$$d\theta_2 = \frac{1}{L_2 C_2} dz \quad (6.26)$$

Podem então escrever-se a expressão final englobando o Jacobiano inverso:

$$\begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S_1}{L_2 C_2} & \frac{C_1}{L_2 C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \frac{1}{L_2 C_2} \begin{bmatrix} -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Quando nenhuma das soluções analíticas for viável só restará a possibilidade da inversão numérica do Jacobiano directo. O princípio é o de que em cada instante (para os valores correntes das juntas) se pode calcular o Jacobiano directo e inverter numericamente a matriz. Se, mesmo assim, o processo for computacionalmente incomportável, uma solução é o de calcular *a priori* (*off-line*) um conjunto de Jacobianos inversos em pontos considerados fundamentais ou relevantes, e fazer algum tipo de interpolação nas diversas variáveis para os pontos onde essas inversas não tenham sido calculadas *a priori*. Este procedimento requer menos poder de cálculo mas em contrapartida exige grande capacidade de armazenamento (memória).

### 6.3.3 Recurso à pseudo-inversa

Mesmo com toda a metodologia apresentada, podem restar os casos em que o Jacobiano directo não é quadrado, logo sem possibilidade de definir a matriz inversa. Para esses casos pode-se tentar recorrer ao conceito de pseudo-inversa de uma matriz que se define do modo seguinte.

Pseudo-inversa de uma matriz ( $m \times n$ ) de característica máxima (isto é com  $\text{rank}(A) = \min(m,n)$ , ou ainda que o número de linhas ou colunas linearmente independentes seja igual à menor das suas dimensões)

$$\text{é a matriz designada por } \mathbf{A}^+ \text{ tal que: } \mathbf{A}^+ = \begin{cases} \mathbf{A}^t (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} & \leftarrow m \leq n \\ \mathbf{A}^{-1} & \leftarrow m = n \\ (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t & \leftarrow m \geq n \end{cases}$$

Se a matriz for quadrada fica-se na situação tradicional da inversa. A pseudo-inversa de uma matriz possui algumas propriedades interessantes, entre as quais se referem as seguintes:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^+$$

$\mathbf{J}^+$  tem as mesmas dimensões de  $\mathbf{J}^t$

Na equação  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , a solução  $\mathbf{x} = \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{b}$  minimiza o valor de  $\|\mathbf{J} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|$  (i.e.,  $\|\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\|$ ), ou seja,

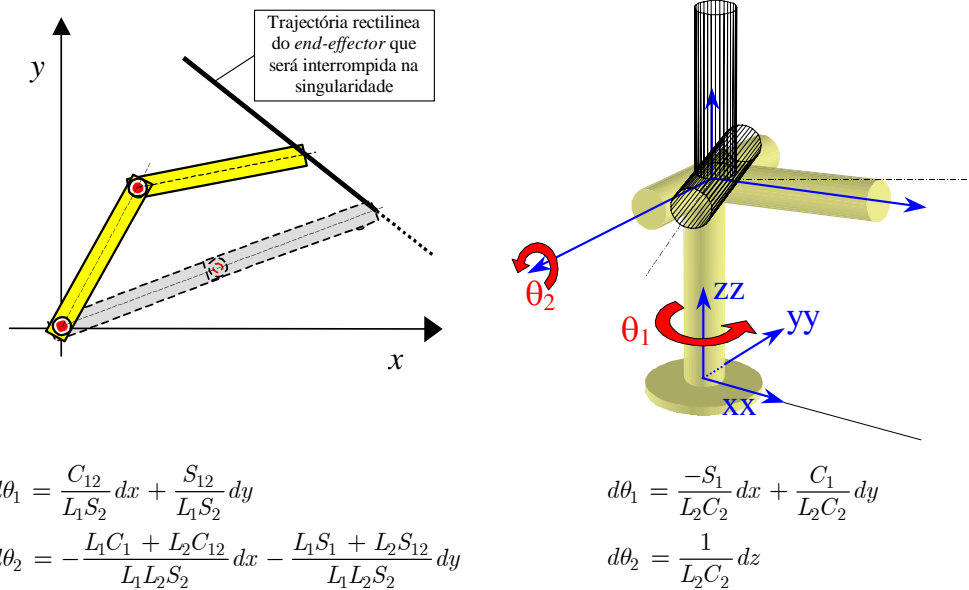
$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^+$  representa o valor mais próximo possível da matriz identidade  $\mathbf{I}$ .

## 6.4 Singularidades

Como visto, por exemplo nas expressões dos Jacobianos em (6.15) ou (6.16), e pela própria definição do Jacobiano, se as relações da cinemática directa forem diferenciáveis (como o são praticamente todos os modelos contínuos), então o Jacobiano é sempre definido. Por outro lado, o Jacobiano inverso mesmo quando identificado por uma expressão analítica, pode nem sempre ficar definido para todos os valores das variáveis de junta, ou seja, para todas as configurações do manipulador. Para entender este facto, basta atentar na expressão (6.20) para o manipulador RR planar onde, se  $\theta_2$  for  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , o Jacobiano inverso não tem definição, ou ainda na expressão (6.27) para o manipulador RR no espaço a 3D onde se  $\theta_2$  for  $\pm 90^\circ$  também

esse Jacobiano inverso não tem definição numérica! De facto, nestes casos, o Jacobiano (directo) é singular (terá determinante nulo) e o Jacobiano inverso é não definido, e diz-se que a respectiva configuração do manipulador é uma **singularidade**.

Fisicamente, o que significa uma singularidade? Em resumo, é uma situação (configuração do robot) na qual seria necessário impor velocidades infinitamente altas numa ou mais juntas para manter determinadas velocidades no espaço operacional. Dito doutro modo, haverá um actuador (ou mais) cujo controlo será sempre insuficiente para cumprir as velocidades desejadas no espaço operacional. Também se diz, por isso, que numa situação de singularidade há a perda de um ou mais graus de mobilidade que, quando o número de graus de liberdade no manipulador for menor ou igual a 6, se diz perda de um grau de liberdade.



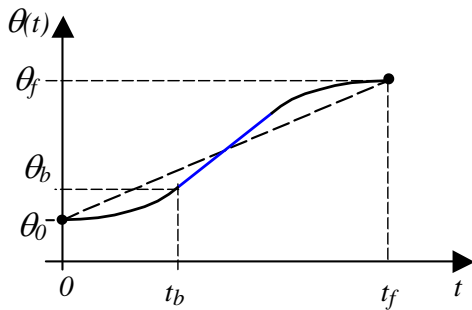
**Figura 6.3 – Situações de singularidade para dois manipuladores nos limites do espaço de trabalho.**

A Figura 6.3 ilustra duas situações de singularidades de manipuladores simples; à esquerda, no manipulador RR planar, quando o segundo ângulo de junta atinge os  $0^\circ$  não mais é possível ao robot continuar o movimento, por exemplo, na execução de uma recta a velocidade constante do *end-effector*., dado que nenhum movimento da junta 2, independentemente do comportamento da junta 1, satisfaria essa necessidade. Matematicamente a velocidade da junta 2 crescerá desmesuradamente ao aproximar-se do valor 0. Na mesma figura, à direita, está um outro exemplo onde as expressões diferenciais têm uma interpretação física muito clara e intuitiva: na situação ilustrada,  $\theta_2 = 90^\circ$ , nenhuma variação de  $\theta_2$  será suficiente por si só para alterar a cota z do *end-effector* e, por outro lado, nenhuma variação de  $\theta_1$  será suficiente para alterar a coordenada x ou y; isso é de facto assim porque os termos da direita das expressões tendem para infinito quando  $\theta_2$  tende para  $90^\circ$ .

As singularidades mencionadas dizem respeito a situações nos limites do espaço de trabalho. Em manipuladores com mais graus de liberdade é possível encontrar singularidades no interior do espaço de trabalho. Essas dizem respeito normalmente a alinhamento de elos interiores, como cotovelos, por exemplo. Estas singularidades representam problemas sérios no controlo dos manipuladores e não devem ser descuradas nas fases de planeamento e execução de trajectórias, por exemplo.

Equation Chapter 7 Section 1 *Capítulo 7*

*Introdução ao  
planeamento de  
trajectórias*



$$t_b = \frac{t_f}{2} \pm \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{(\theta_f - \theta_0)}{\ddot{\theta}}}$$

## 7. Introdução ao Planeamento de Trajectórias

### 7.1 Tipos de movimento

Num manipulador, depois de se saber como relacionar o espaço das juntas com o espaço operacional, quer em termos geométricos (cinemática directa e inversa), quer em termos cinéticos (cinemática diferencial), é necessário proceder ao que se chama planeamento de trajectória. Assim, o planeamento de trajectória engloba o conjunto de estudos e métodos que permitem definir os regimes de velocidade dos diversos actuadores de forma a fazer o manipulador cumprir os objectivos de movimentação ou deslocamento esperado (planeado). À partida, num robot industrial, estes objectivos podem ser simplesmente o deslocamento do *end-effector* entre dois pontos em repouso no espaço de trabalho, durante um determinado intervalo de tempo, como é o caso típico de manipulação (como a paletização ou transferência) ou, no outro extremo de complexidade e exigência, a execução de uma trajectória bem definida do *end-effector* no espaço operacional e obedecendo a critérios temporais precisos, como são casos de algumas operações contínuas (pinturas, polimento, cordões de soldadura, etc.). O primeiro tipo de movimento é designado o movimento **ponto-a-ponto** e o segundo movimento de **trajectória contínua**.

No movimento ponto-a-ponto o percurso efectivo da garra não é conhecido à partida dado que as configurações intermédias entre os pontos extremos não são levadas em conta para cumprir este movimento. No movimento de trajectória contínua é o caso oposto, todos os pontos de passagem da garra estão definidos à partida, seja de uma forma analítica seja de forma numérica, e aí com grande precisão. Numa solução intermédia, é possível fazer planeamento de trajectória entre dois pontos, mas com especificação de um conjunto de pontos intermédios nos quais a configuração da garra é mandatória e, por isso, cumprida. Esta abordagem é a mais versátil em termos de implementação prática. Na verdade, uma sequência de movimentos ponto-a-ponto com espaçamentos físicos muito pequenos entre os pontos quase se assemelha, em termos práticos, a uma trajectória contínua no espaço operacional!

### 7.2 Abordagens para planeamento de trajectórias

Antes de proceder ao planeamento de trajectória e subsequente execução do movimento deve atender-se a duas naturezas de constrangimentos:

1- Dar prioridade ao caminho a executar pelo *end-effector* no espaço operacional, que pode ser ditado pelo conhecimento prévio de obstáculos no espaço de trabalho, ou pela necessidade de percursos obrigatórios pela natureza do processo subjacente, ou então...

2- ...Dar mais importância à dinâmica do movimento do manipulador, em particular na continuidade e suavidade nas velocidades e acelerações nas diversas juntas para não provocar solicitações desmesuradas e irregulares nos respectivos actuadores. Isto implica definir o planeamento de trajectória das juntas do manipulador.

Neste segundo caso podem desde já adiantar-se algumas vantagens, como mais adiante melhor se perceberá:

- A trajectória é planeada nas variáveis directamente controladas (variáveis associadas às juntas)

- O planeamento é feito com menores custos computacionais
- As trajectórias de juntas são normalmente simples de planificar.

Por outro lado, há uma desvantagem óbvia:

- As posições das extremidades dos elos não são controladas e, por isso, podem descrever um percurso muito irregular, com consequências também no *end-effector* (pense-se por exemplo na manipulação de um recipiente contendo líquidos e não completamente fechado!)

### 7.3 Planeamento nas juntas

Planear uma trajectória no espaço das juntas significa determinar a evolução de cada junta ao longo do tempo de tal forma que são verificadas determinadas condições cinemáticas da junta: posição, velocidade, e até aceleração, no ponto inicial e no ponto final. Ou seja, um movimento deve decorrer desde o instante  $t_0$  até ao instante  $t_f$  partindo do valor inicial de junta  $\theta_0$  até ao valor final de junta  $\theta_f$ , com uma velocidade inicial  $\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$  e uma velocidade final  $\dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f$ ; mais ainda, pode desejar-se uma aceleração inicial  $\ddot{\theta}(t_0) = \ddot{\theta}_0$  e também uma aceleração final  $\ddot{\theta}(t_f) = \ddot{\theta}_f$ .

#### 7.3.1 Função para a continuidade da velocidade

No caso mais simples tem-se uma posição de partida e uma outra chegada, e as velocidades inicial e final iguais a **zero**. Pretende-se obviamente que a velocidade angular seja contínua para evitar acelerações teoricamente infinitas e portanto esforços gravosos para os equipamentos físicos.

Dito de outra forma, quer-se portanto que a equação  $\dot{\theta}(t) = 0$  tenha duas raízes para  $t=t_0$  e  $t=t_f$  e seja uma função contínua. Muitas classes de funções serviriam o propósito destas condições, mas talvez a mais simples seja a de considerar que é uma polinomial em  $t$ . Assim, pelo facto de ter duas raízes, a expressão da velocidade da junta será uma polinomial de 2ª ordem, ou seja,  $\theta(t)$  deverá ser de 3ª ordem, donde saem as seguintes expressões genéricas:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (7.1)$$

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \quad (7.2)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t \quad (7.3)$$

Sem perda de generalidade pode assumir-se que o instante  $t_0$  igual a 0, ou seja, é o início da contagem do tempo, e assim as expressões anteriores têm uma tradução gráfica como ilustrado na Figura 7.1.

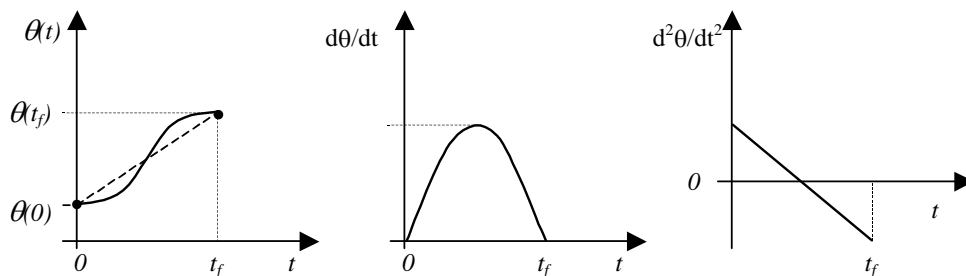


Figura 7.1- Curvas de posição, velocidade e aceleração

Feito este raciocínio, torna-se agora necessário determinar os termos  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  na expressão (7.1) e seguintes. O processo é directo e na simplificação assumida pode escrever-se o conjunto de condições a verificar como sendo:

$$\theta(0) = 0; \theta(t_f) = \theta_f; \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0; \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \quad (7.4)$$

Combinando as expressões (7.1) e (7.2) com as condições em (7.4) pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \theta_0 = a_0 \quad \theta(t_f) = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_f \\ \dot{\theta}_0 = a_1 = 0 \quad \dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{aligned}$$

o que resulta sucessivamente em:

$$\begin{cases} \theta_t = \theta_0 + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 = 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_f - \theta_0 = a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 2a_2 = -3a_3 t_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_f - \theta_0 = -\frac{3}{2} a_3 t_f^3 + a_3 t_f^3 \\ a_2 = -\frac{3}{2} a_3 t_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) \\ a_2 = -\frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) \end{cases}$$

Pode-se portanto fazer as substituições todas em (7.1) e obter o seguinte polinómio para a evolução das juntas:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) t^2 - \frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) t^3 \tag{7.5}$$

A expressão obtida em (7.5) serve, como visto, para a situação onde as velocidades inicial e final são nulas. Caso não o sejam, tendo-se portanto valores genéricos  $\dot{\theta}_0$  e  $\dot{\theta}_f$ , a expressão mais geral poderia ser derivada por um processo idêntico ao de (7.5) e resultaria no seguinte:

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \left[ \frac{3}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f} \dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f} \dot{\theta}_f \right] t^2 + \left[ -\frac{2}{t_f^3} (\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2} (\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0) \right] t^3 \tag{7.6}$$

### 7.3.2 Planeamento nas juntas com pontos intermédios de passagem

Por vezes, pode ser conveniente ou necessário especificar uma trajectória onde haja pontos intermédios de passagem da junta (*via points*) onde a sua velocidade não tem necessariamente de ser zero. Um troço completo entre um ponto de partida e um ponto de chegada constituir-se-á, pois, pela concatenação de sucessivas funções individuais, mas agora a velocidade final e inicial nesses diversos troços não é necessariamente nula. Em termos práticos, as posições no espaço das juntas obtêm-se por cinemática inversa sobre as configurações dos pontos de passagem no espaço operacional, como esboça a Figura 7.2.

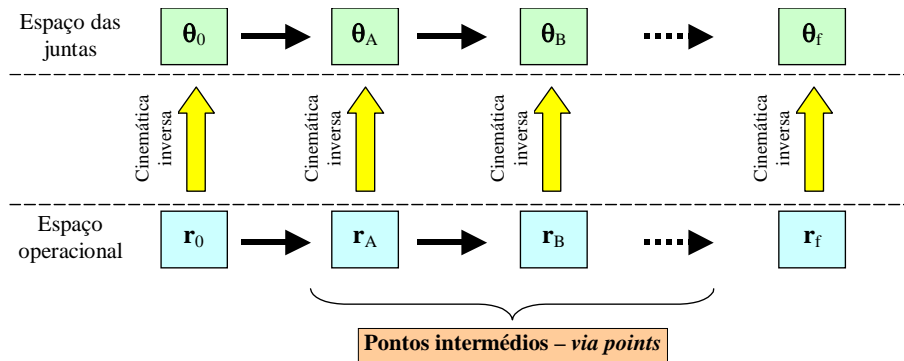


Figura 7.2 - Planeamento com *via points*

Todavia, levanta-se agora a questão: se a velocidade das juntas no ponto de partida e de chegada é nula, qual será a velocidade da junta nos pontos intermédios de passagem? O utilizador (humano ou *software*) pode não conhecer essas velocidades, ou mesmo não ter informações para as impor de forma eficiente (como, por exemplo, tendo a certeza que não imporá esforços mecânicos devido a grandes acelerações no manipulador); três alternativas se apresentam para resolver o problema:

1) As velocidades nos pontos de passagem são conhecidas no espaço operacional e ter-se-á de aplicar o Jacobiano inverso do manipulador para as conhecer no espaço das juntas.

2) O sistema (planeador) escolhe as velocidades aplicando uma qualquer heurística no espaço das juntas ou no espaço operacional. Adiante explica-se um exemplo de uma heurística apropriada.

3) O sistema escolhe as velocidades nos “*via points*” de forma a impor curvas de aceleração contínuas. Este caso implica mais definições no polinómio  $\theta(t)$ : terá agora de ser de 5ª ordem e não apenas de 3ª como definido em (7.1).

Das três possibilidades, a mais comum, e talvez mais fácil de aplicar com resultados práticos quase sempre aceitáveis, é a segunda abordagem ligada à questão da heurística. O princípio é o de fazer uma espécie de interpolação das velocidades médias entre dois troços adjacentes. Por exemplo, se as velocidades médias em dois troços consecutivos (separados pelo *via point*) tiverem sinais (sentidos) diferentes, então o ponto de passagem é tido como o ponto de viragem isto é, com velocidade nula. Caso contrário, a velocidade no ponto de passagem é dada pela média das velocidades médias em cada troço de cada lado do *via point*.

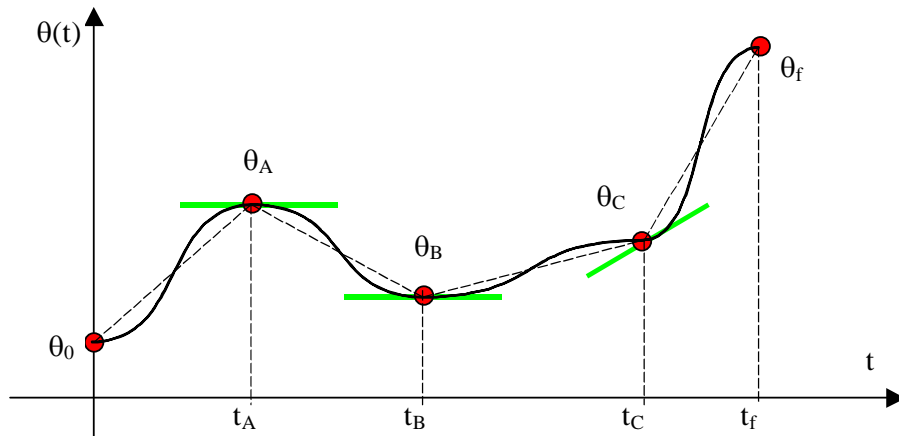


Figura 7.3 – Processo heurístico de determinação da velocidade de junta nos *via points*.

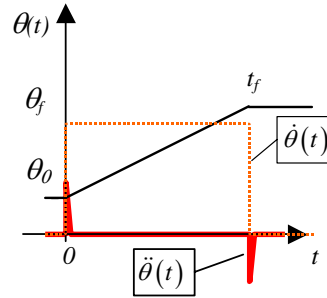
No exemplo ilustrado na Figura 7.3 a velocidade de passagem quando a junta chega a  $\theta_A$  é nula porque a velocidade média entre  $\theta_0$  e  $\theta_A$ , isto é,  $\frac{\theta_A - \theta_0}{t_A}$ , e a velocidade média entre  $\theta_A$  e  $\theta_B$ , isto é,  $\frac{\theta_B - \theta_A}{t_B - t_A}$  têm valores algébricos distintos (ou seja, sinais opostos). Graficamente, isso observa-se pelo valor da derivada associada aos segmentos de recta respectivos; assim  $\dot{\theta}_A = 0$ . Para  $\theta_B$  essa situação repete-se mas para  $\theta_C$  já não! De facto a velocidade  $\dot{\theta}_C$ , por este processo, seria determinada pela seguinte expressão:

$$\dot{\theta}_C = \frac{1}{2} \left( \frac{\theta_f - \theta_C}{t_f - t_C} + \frac{\theta_C - \theta_B}{t_C - t_B} \right)$$

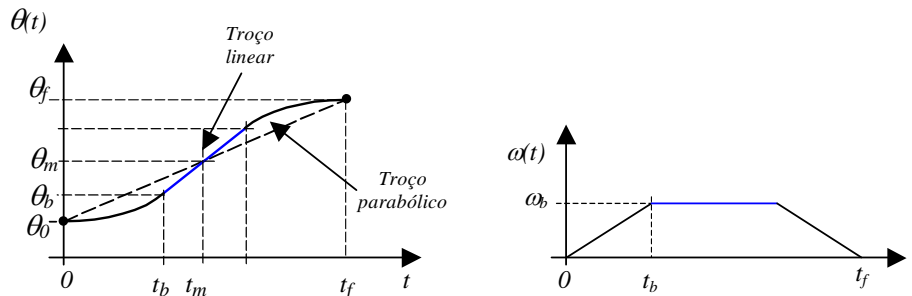
Naturalmente, é possível fazer um planeamento sem ter de recorrer a uma sequência de polinómios de 3º grau. Tendo o poder computacional adequado, pode recorrer-se a polinómios de grau arbitrariamente elevado ou mesmo a outras funções que proporcionem “suavidade” como as *splines* ou mesmo funções transcendentais. Todavia, em aplicações práticas o polinómios de 3ª ordem é muitas vezes suficiente, e por vezes até excessivo para as exigências dos problemas.

### 7.3.3 Alternativa a polinómios de ordem superior

Em alternativa a um planeamento com polinómio de 3ª (ou maior) ordem há obviamente a possibilidade de evolução linear do valor da junta mas, consequentemente, há descontinuidades na velocidades e logo acelerações desmesuradamente grandes com consequências na estrutura física. A Figura 7.4 esboça as curvas de posição, velocidade e aceleração da junta.


**Figura 7.4 - Evolução linear e a descontinuidade na velocidade**

Para evitar as limitações da evolução linear (com severas limitações de implementação prática, aliás) pode procurar-se ter uma evolução linear mas com períodos de aceleração limitada no fase de arranque e na fase de paragem. Isto corresponde a um andamento com aceleração inicial, uma velocidade constante e um período de desaceleração constante. Graficamente, a posição é descrita por uma curva linear com extremidades parabólicas (*parabolic blends*) como se pode ver na Figura 7.5.


**Figura 7.5 - Troço linear com extremos parabólicos, ou o clássico movimento com rampas de aceleração**

No troço parabólico entre 0 e  $t_b$ , com aceleração constante ( $\ddot{\theta}$ ) e velocidade inicial nula, e com base na equação tradicional de um parábola e nas relações físicas entre espaço, velocidade e aceleração, tem-se:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 \quad (7.7)$$

Por outro lado, a velocidade atingida no fim desse troço parabólico é necessariamente igual à velocidade no troço linear para haver continuidade de velocidades, o que permite escrever:

$$\dot{\theta}(t_b) = \dot{\theta}_b = \ddot{\theta}t_b = \frac{\theta_m - \theta_b}{t_m - t_b} \quad (7.8)$$

Ainda da Figura 7.5 é claro que:

$$t_m = \frac{t_f}{2} \quad \text{e} \quad \theta_m = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{2} \quad (7.9)$$

Por outro lado, com base em (7.7), também é óbvio que:

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2 \quad (7.10)$$

Substituindo (7.9) e (7.10) em (7.8), virá uma equação do segundo grau em  $t_b$ :

$$-\ddot{\theta}t_b^2 + \ddot{\theta}t_b \frac{t_f}{2} = \theta_0 + \frac{\theta_f - \theta_0}{2} - \theta_0 - \frac{1}{2}\ddot{\theta}t_b^2 \quad (7.11)$$

ou ainda

$$\ddot{\theta}t_b^2 - \ddot{\theta}t_b t_f + (\theta_f - \theta_0) = 0$$

cuja solução é dada por:



$$t_b = \frac{t_f}{2} \pm \sqrt{\frac{\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}{2\ddot{\theta}}} \quad (7.12)$$

que indica qual o instante em que termina um troço parabólico e o instante em que começa o outro quando a aceleração desejada é  $\ddot{\theta}$ , o ângulo inicial é  $\theta_0$ , o ângulo final é  $\theta_f$  e o tempo de execução da trajectória é  $t_f$ .

Naturalmente, para que (7.12) tenha significado físico o radical tem de ser não negativo, o que leva a impor a condição  $\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0) \geq 0$ , que se reduz à condição principal:

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2} \quad (7.13)$$

A expressão (7.12) poderia ainda apresentar-se numa forma com interpretação mais intuitiva como a seguinte:

$$t_b = \frac{t_f}{2} \pm \sqrt{\frac{t_f^2}{4} - \frac{(\theta_f - \theta_0)}{\ddot{\theta}}} \quad (7.14)$$

De facto a expressão (7.14) permite relacionar directamente a obtenção dos instantes de actividade dos troços parabólicos com base na aceleração desejada nessas fases. Da mesma expressão ainda se extrai o interessante resultado sobre a menor duração possível do troço linear (que é zero) e que ocorre quando o radical é zero, ou seja, quando a aceleração é dada por:  $\ddot{\theta} = \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$ .

Finalmente, é digno notar-se que também é possível (e não invulgar) fazer planeamento de trajectória com troços parabólicos em casos com pontos de passagem intermédia (*via points*). O raciocínio da abordagem é similar aos já discutidos e na literatura há autores que detalham o processo que não se assume prioritário no âmbito do presente texto.

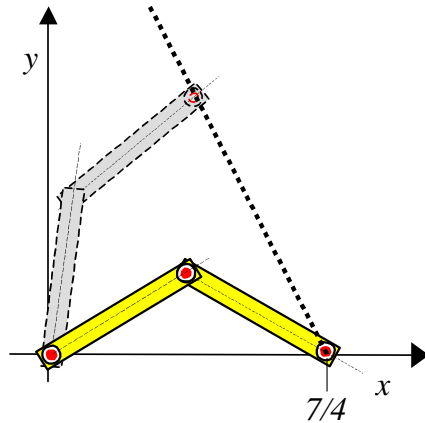
## 7.4 Planeamento no espaço operacional

### 7.4.1 Princípios

Se a tarefa do manipulador exigir um dado percurso no espaço operacional (cordões de soldadura, linhas de polimento, processos de pintura, etc...) o problema passa agora a ser o de garantir que as juntas se movam de tal forma que o percurso do end-effector se faça conforme o requerido e de forma contínua, ou seja, melhor do que ter uma sequência, por maior que seja, de pontos intermédios de passagem. A questão nessa alternativa de inúmeros pontos de passagem é a necessidade de computacionalmente ter-se de recorrer à resolução em tempo extremamente curto (igual ao do período de actualização do sistema de controlo do robot) das equações da cinemática inversa.

Em casos muito simples (quer de manipuladores quer de trajectórias no espaço operacional) pode resolver-se *a priori* a questão da cinemática inversa de forma analítica. Por exemplo, pode pensar-se num manipulador RR planar onde se quer que o end-effector descreva um segmento de recta parametrizado da

seguinte forma:  $\begin{cases} x(t) = \frac{7}{4} - t \\ y(t) = 2t \end{cases}$ ,  $t \in \left[0, \frac{7}{8}\right]$ , como se ilustra na Figura 7.6.



Cinemática inversa do manipulador RR

$$\theta_2 = \pm \arccos \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$

$$\theta_1 = \arctan \left[ \frac{y(L_1 + L_2 \cos \theta_2) - xL_2 \sin \theta_2}{x(L_1 + L_2 \cos \theta_2) + yL_2 \sin \theta_2} \right]$$

Figura 7.6- Execução de um segmento no espaço operacional

Admitindo braços iguais e de comprimento unitário, as equações da cinemática inversa do manipulador RR, indicadas na Figura 7.6 podem ser reescritas de forma simplificada:

$$\theta_1(t) = \arctan \left[ \frac{2t(1 + \cos \theta_2) - \left(\frac{7}{4} - t\right) \sin \theta_2}{\left(\frac{7}{4} - t\right)(1 + \cos \theta_2) + 2t \sin \theta_2} \right]$$

$$\theta_2(t) = \pm \arccos \frac{\left(\frac{7}{4} - t\right)^2 + 4t^2 - 2}{2}$$

Na redundância de  $\theta_2$  pode optar-se pela solução com sinal negativo que corresponde ao representado na Figura 7.6. Assim sendo, obtêm-se umas curvas para  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sensivelmente como as indicadas na Figura 7.7.

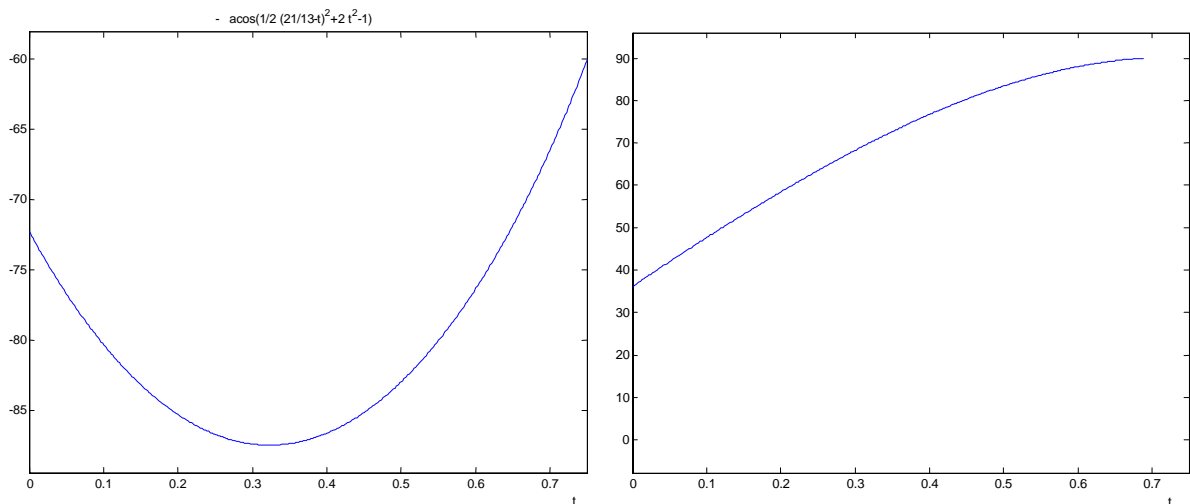


Figura 7.7 - Evolução das juntas  $\theta_2$  (esq.) e  $\theta_1$  (dir.) para o manipulador RR executar uma linha recta

Este exemplo da resolução analítica é pouco mais do que um exercício académico porque, na verdade, não resolve o problema apresentado logo de início, ou seja, na prática, a cinemática inversa tem de ser calculada para todos os pontos necessários ao controlador para levar a cabo o movimento desejado.

Há muitos trabalhos nesta área e diversas metodologias de abordar o problema sem ter de recorrer tão exaustivamente à cinemática inversa; da literatura é merecedor destacar, por exemplo, o processo dos quaterniões duais.

### 7.4.2 Problemas no planeamento do espaço operacional

Quando se faz planeamento no espaço operacional podem ocorrer alguns problemas dos quais se destacam os seguintes:

- Pontos intermédios da trajectória cartesiana inatingíveis

Apesar de os pontos de partida e chegada estarem no espaço de trabalho, há alguns pontos intermédios que não são atingíveis (Figura 7.8)

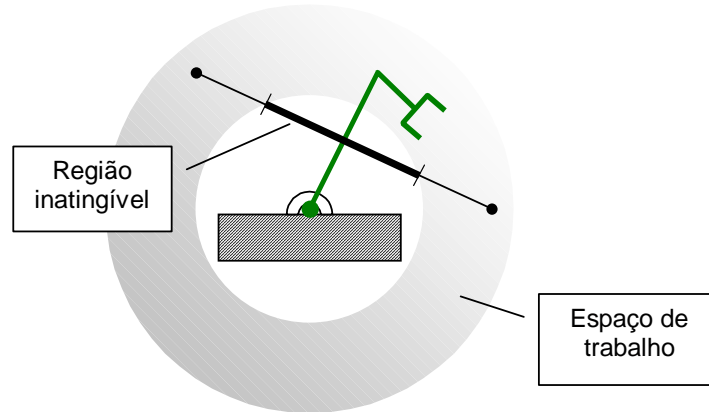
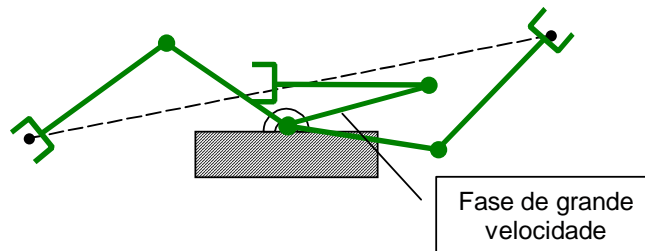


Figura 7.8 - Região inatingível para um manipulador RR

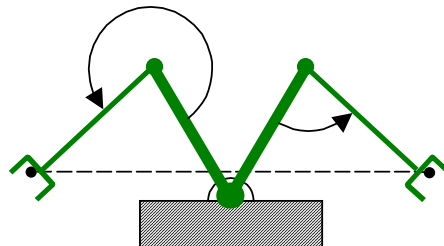
- Grandes velocidades das juntas próximas das singularidades

Este problema não é novo dado que já se abordou a questão das singularidades antes. Porém, não será nunca demais alertar para os riscos práticos da execução de trajectórias arbitrárias no espaço operacional.



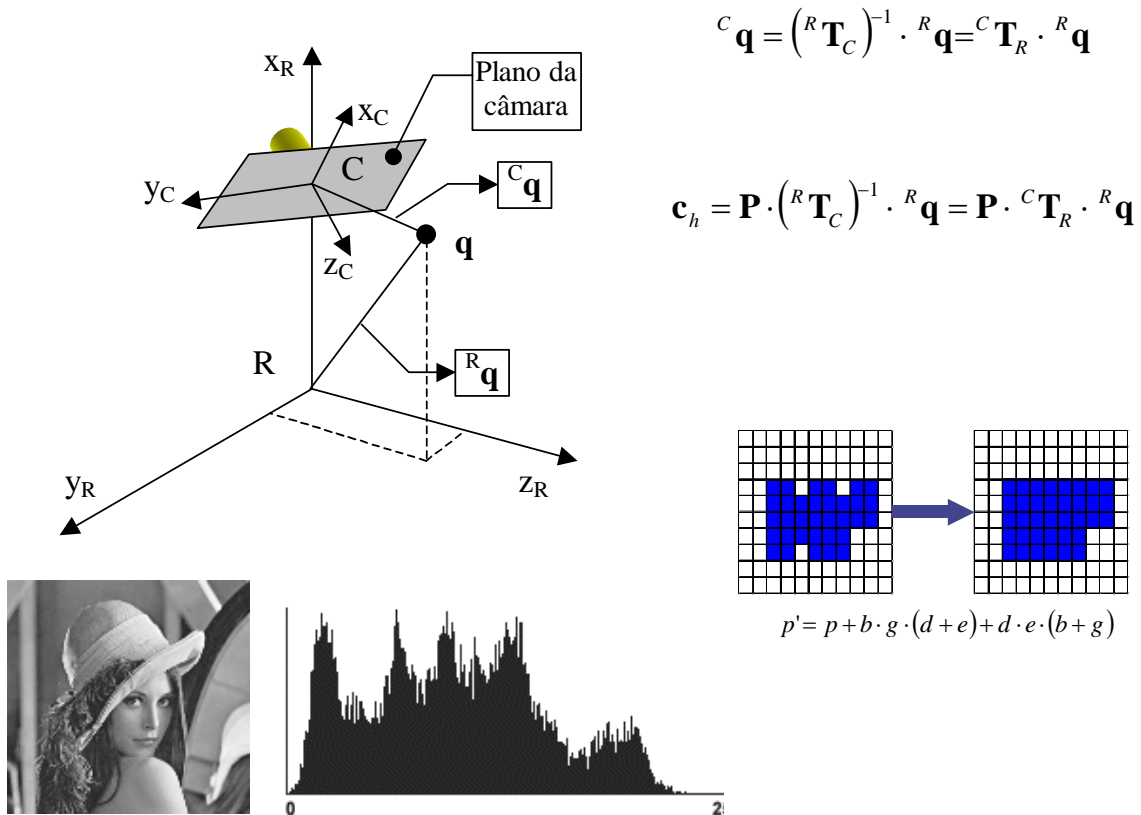
- Pontos de partida e chegada atingíveis com configurações diferentes

Neste caso destacam-se as situações em que as configurações de partida e chegada, por razões construtivas ou de ordem física, não têm uma relação de continuidade na evolução de uma para outra. A estas situações estão frequentemente associados os limites físicos das juntas.



# Capítulo 8

## Introdução à visão por computador



## 8. Introdução à Visão por Computador

---

---

### NOTA: Slides apresentados

NB: Nas páginas seguintes incluem-se os slides apresentados na aula. Notar que é um mero resumo da matéria e não constitui elemento de estudo suficiente. Os apontamentos tirados das aulas e os livros e restante bibliografia recomendados são as referências fundamentais.

### Resumo dos tópicos abordados

Parte I – Introdução e generalidades

Definição e áreas da visão por computador

A imagem digital

Técnicas de iluminação

Parte II – Geometria da Formação de Imagem

Transformação geométrica

Calibração da câmara

Parte III – Processamento a baixo nível

Relações entre os elementos de imagem (pixels)

Ferramentas para processamento espacial de imagem: filtros e técnicas.

Parte IV – Abordagem a médio nível e morfologia

Operadores e operações morfológicas

Segmentação



# Robótica Industrial

Introdução à Visão por Computador

Dezembro 2003

Vítor M. F. Santos

# Sumário

## ◆ Parte I

- Definição e áreas da visão por computador
- A imagem digital
- Técnicas de iluminação

## ◆ Parte II

- Geometria da formação de imagem

## ◆ Parte III

- Relações entre os elementos de imagem (*pixels*)
- Ferramentas para processamento espacial de imagem: filtros e técnicas.

## ◆ Parte IV

- Princípios de segmentação e morfologia

## Algumas Referências

- ◆ Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence – *K. S. Fu, R. C. Gonzalez, C. D. G. Lee*, McGrawHill, 1987
- ◆ Digital Image Processing – *R.C. Gonzalez, P. Wintz*, Addison-Wesley, 1987
- ◆ <http://www.ph.tn.tudelft.nl/Courses/FIP/frames/fip.html>





# Visão por Computador – Parte I

## Introdução e Generalidades

# Definição e importância

- ◆ Visão por computador é o processo de ...  
Extracção,  
caracterização  
e interpretação  
... de informação a partir de imagens do mundo tridimensional
- ◆ A visão, como método sensorial, assume um papel cada vez mais importante a vários níveis:
  - Navegação em robótica autónoma (móvel)
  - Processos industriais envolvendo montagem e/ou identificação de componentes
  - Vigilância e sistemas de segurança

# Áreas e níveis da visão por computador

Baixo

nível

## 1-Percepção

Aquisição ou obtenção de imagem

## 2-Pré-processamento

Redução de ruído ou realce de detalhes

Médio

nível

## 3-Segmentação

Partição da imagem em zonas de interesse (objectos)

## 4-Descrição

Determinação de propriedades de objectos (tamanho, forma,...)

Alto

nível

## 5-Reconhecimento

Identificação de objectos descritos a partir de uma base de dados.

## 6-Interpretação

Atribuir significados a um conjunto de objectos reconhecidos

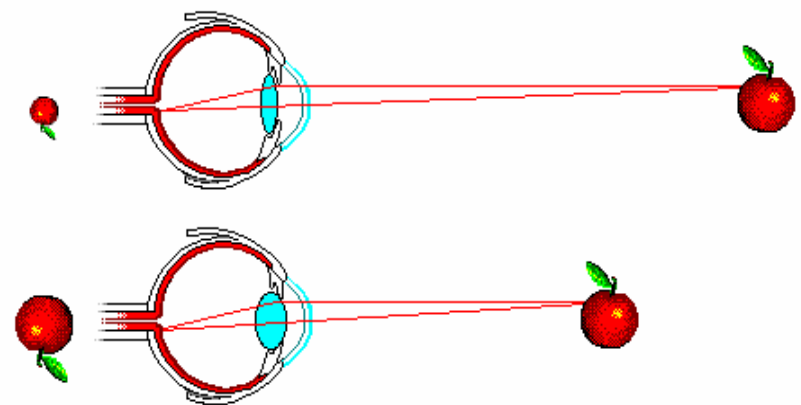
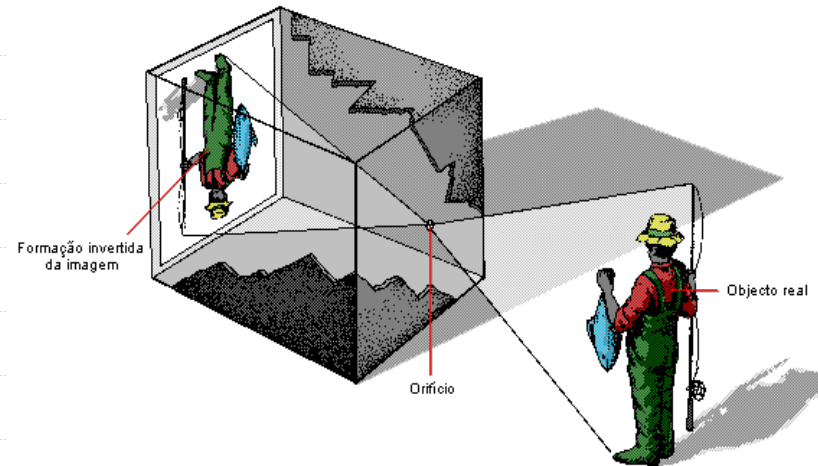
# Formação da imagem

## ◆ ...na câmara escura

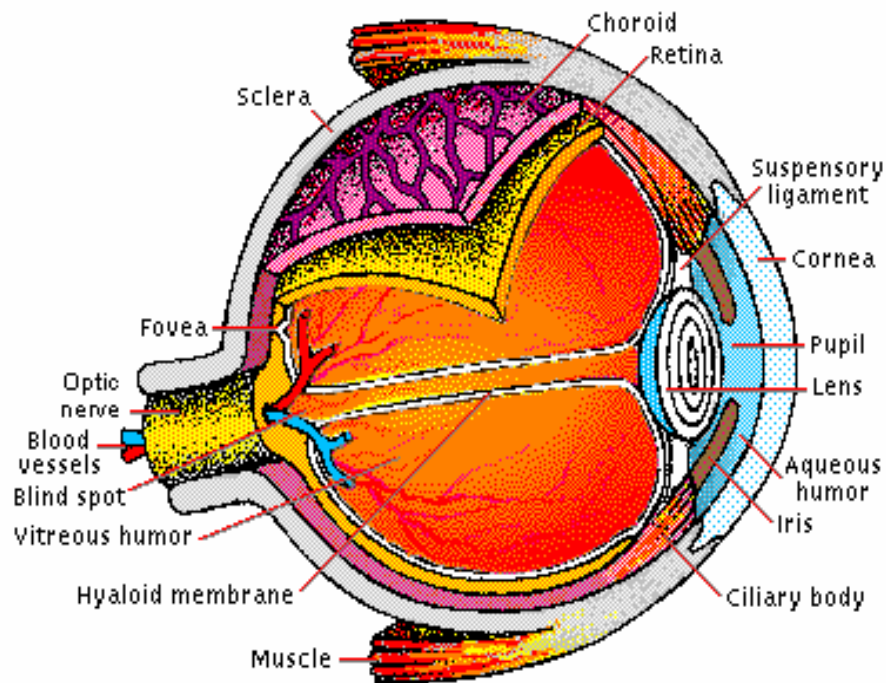
- As dimensões e definição do orifício definem a nitidez e o plano focal

## ◆ ...no olho humano

- A imagem forma-se no plano da retina por projecção da luz vinda do mundo 3D através de uma lente (cristalino) que muda de dimensões para ajustar a distância focal

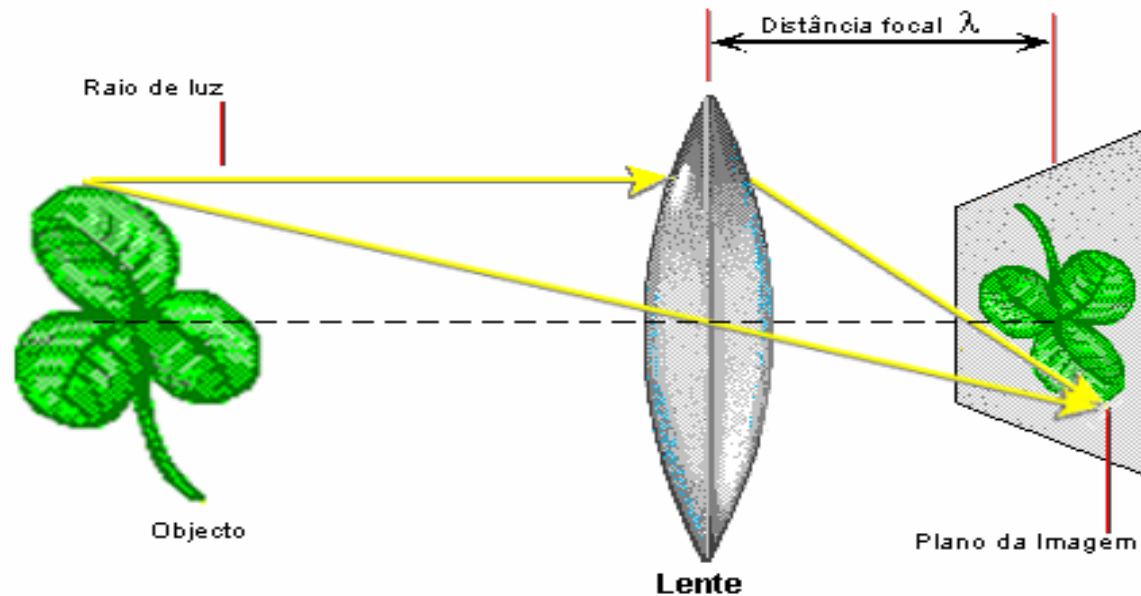


# Elementos do Olho Humano



- ◆ A retina é a superfície sensível à luz
- ◆ Os músculos deformam a lente (cristalino) para mudar o plano focal e assim ajustar-se à distância dos objectos
- ◆ A íris controla a quantidade de luz que entra, mudando o diâmetro da pupila

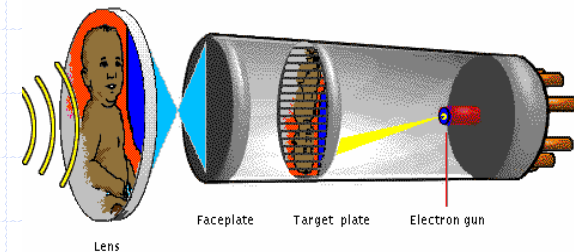
# Imagem através de uma Lente



- ◆ Todos os raios de luz que saem de um dado ponto de um objecto na direcção de uma lente convergente vão confluír, do outro lado, num outro ponto a uma certa distância  $\lambda$  do centro dessa lente: trata-se da distância focal.
- ◆ O conjunto de todos os pontos para os quais se verifica esse facto constitui o plano focal.
- ◆ Assim, a imagem observada nesse plano diz-se focada.

# Sensação e obtenção da Imagem

- ◆ A imagem foi inicialmente obtida por emulsões químicas foto-sensíveis depositadas numa chapa ou película colocada no plano focal
  - fotografia e cinema clássicos
- ◆ A imagem de televisão foi a primeira a decompor directamente uma imagem em linhas horizontais suficientemente próximas para criar a ilusão de continuidade vertical
  - Os “tubos” das câmaras de filmar e os cinescópios dos televisores. As 405 e 625 linhas foram “standards” que ainda hoje vigoram
- ◆ Os sensores modernos de imagem baseiam-se nos *Charge Coupled Devices (CCD)*
  - Baixo custo e consumo de energia
  - Reduzidas dimensões (diagonal: 3.5 a 8 mm, ...)
  - Altas sensibilidades (0.5 lux, ...)
  - Percepção discretizada em linhas e em colunas (500×582, 752×582, ...)



# Imagem digital

- ◆ Constituída por elementos discretos ou pixels
  - o pixel (= **P**icture **E**lement)
- ◆ Processo de amostragem da imagem
  - Amostragem espacial
    - ◆ Número limitado (finito) de pontos (pixels) nas duas dimensões
  - Amostragem de amplitude ou intensidade
    - ◆ Cada ponto é representado por um número que traduz os níveis de cinzento (intensidade luminosa global)
    - ◆ Nas imagens a cores, cada ponto é representado por mais do que um número (normalmente 3)
    - ◆ Fenómeno de quantização (número limitado de níveis)



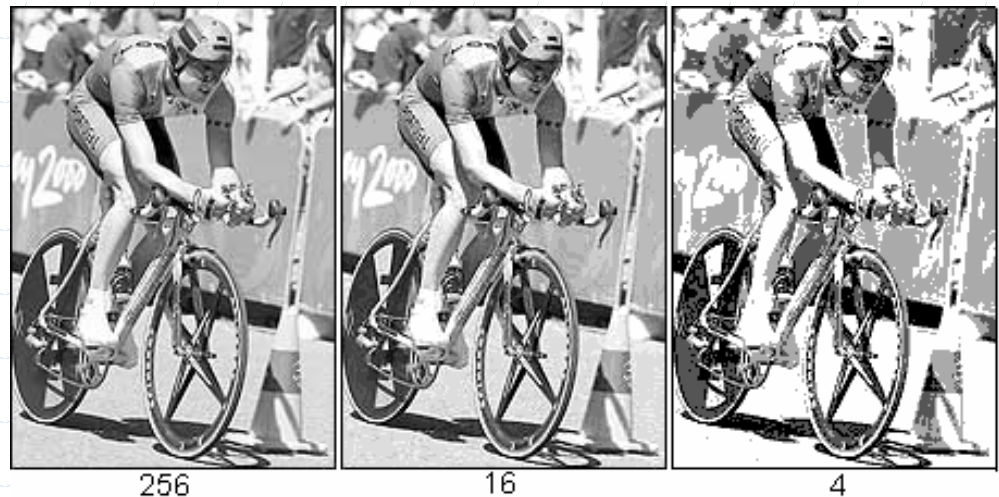
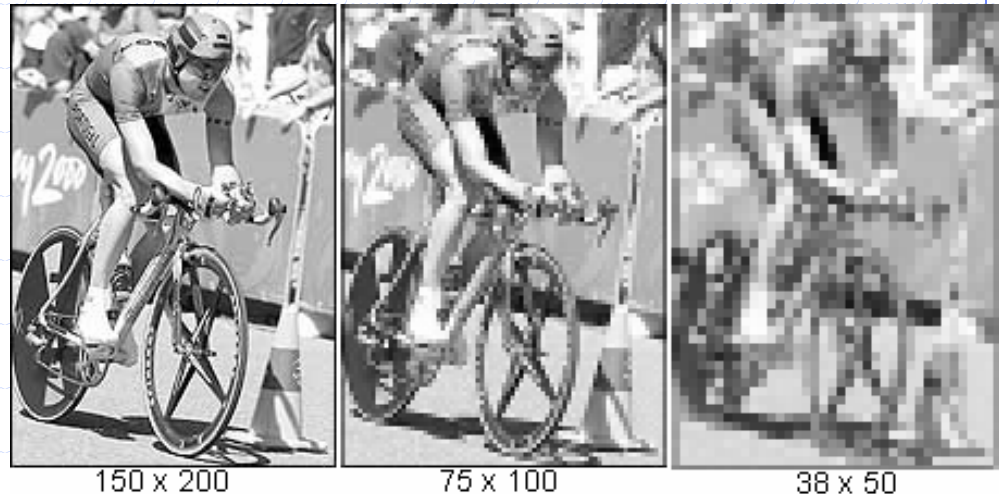
## Imagem digital (Cont.)

- ◆ Uma imagem como uma função  $z=f(x,y)$ 
  - $z$  - intensidade da luz no ponto  $(x,y)$
  - $x, y$  - linha e coluna na imagem respectivamente
- ◆ Uma imagem amostrada é representável por uma matriz de dimensão  $(N \times M)$

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,M-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,M-1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \cdots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

# Resolução numa Imagem

- ◆ Resolução espacial
  - Número de linhas e colunas – *pixels* verticais e horizontais
  - Efeito mosaico
- ◆ Resolução de amplitude ou profundidade
  - Número de níveis de cinzento ou cores por *pixel* – nas imagens a cores há mais que um valor por *pixel* (é usual três)
  - O número de bits e efeito de “solarização”
  - Nas imagens binárias, os *pixels* são representados por um só bit



# Sobre imagens digitais...

- ◆ Para que uma imagem digital tenha a mesma qualidade subjectiva que uma imagem de televisão (P/B), deve ter cerca de:
  - 512 x 512 *pixels*
  - 128 níveis de cinzento
- ◆ Problema da quantização
  - Os falsos contornos (32 níveis é demasiado pouco para o olho humano)
- ◆ Para satisfazer ao mínimo o olho humano dever-se-á ter:
  - 256 x 256 *pixels* e 64 níveis de cinzento

# Técnicas de Iluminação

## ◆ Importância:

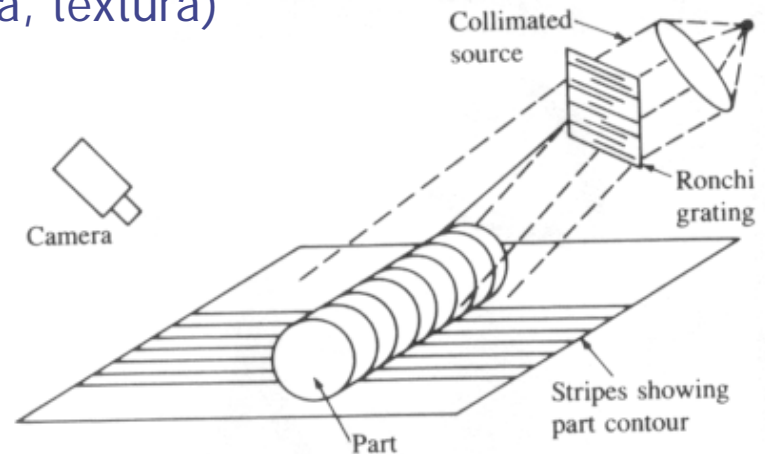
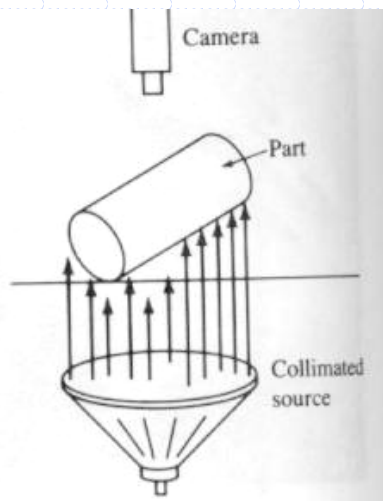
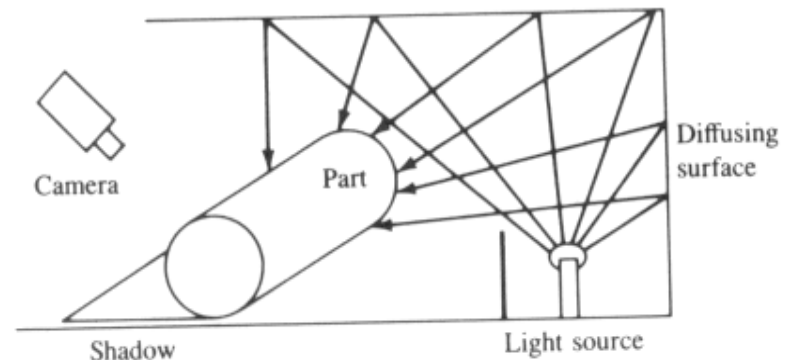
- Podem simplificar os algoritmos a usar eliminando sombras, reflexões especulares, etc.

## ◆ Técnicas principais:

- Iluminação difusa (não directa)
  - ◆ Para objectos de superfícies suaves e regulares
- Retro-iluminação (contraluz)
  - ◆ Para imagens a dois níveis onde só a geometria dos objectos tenha interesse
- Luz estruturada: projecção de pontos, linhas ou grelhas na superfície de trabalho
  - ◆ Útil para a percepção tridimensional de objectos.

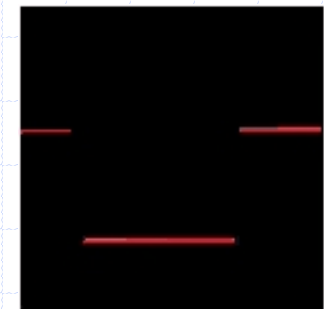
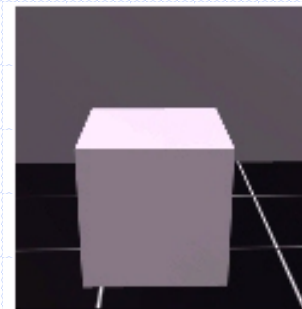
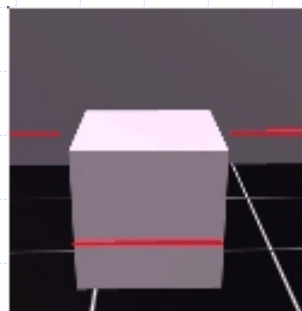
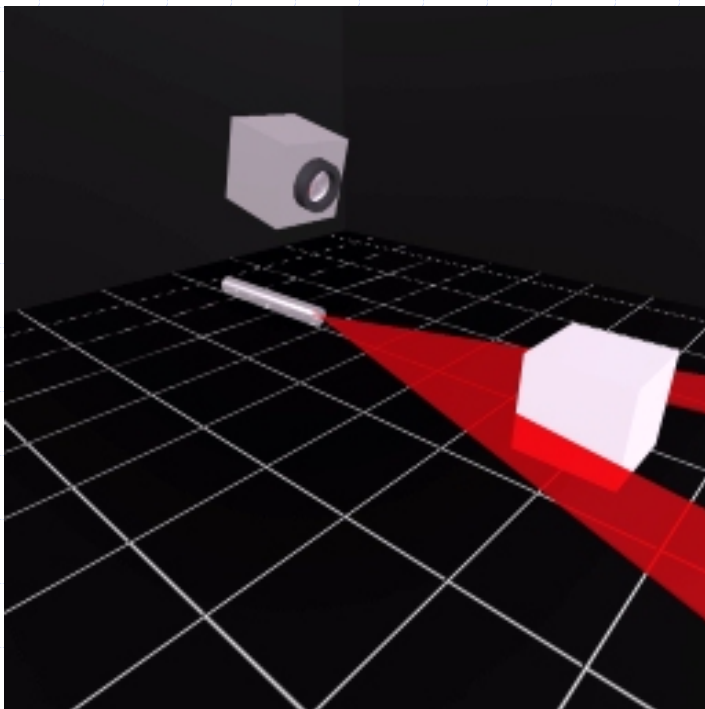
# Técnicas de Iluminação-Ilustração

- ◆ Iluminação difusa
  - Eliminar sombras
- ◆ Luz estruturada
  - Análise geométrica
- ◆ Retro-iluminação
  - Alto contraste-imagens binárias
- ◆ Iluminação direccionada
  - Realce de propriedades (geometria, textura)



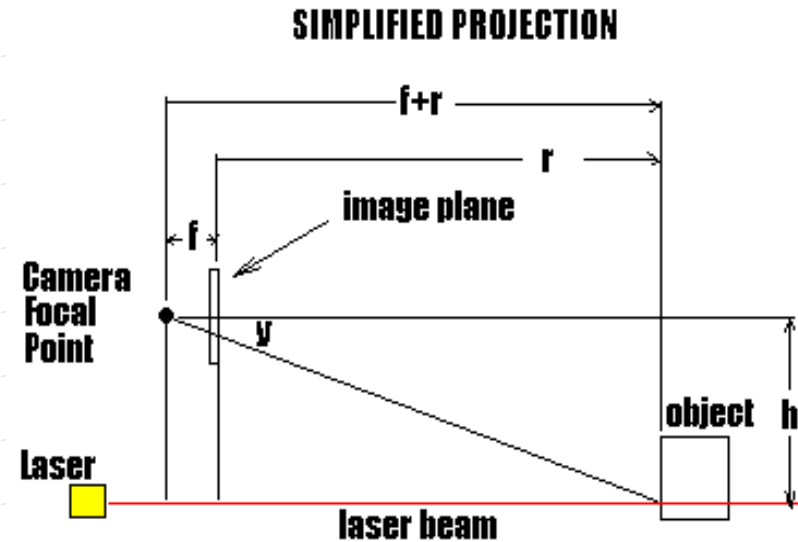
# Luz Estruturada: Princípios - I

- ◆ Projecção de padrões visíveis numa superfície
  - Projecção com feixes laser ou outras fontes coerentes
  - Percepção dos padrões da imagem visível e extracção das propriedades



# Luz Estruturada: Princípios - II

- ◆ Câmara posicionada à distância  $r$  (desconhecida) do objecto e à altura  $h$  (conhecida) do feixe laser
- ◆  $y$  – coordenada do ponto do padrão luminoso na imagem obtida
- ◆ Por simples relação de triângulos, sabendo a distância focal  $f$  da câmara, determina-se a distância  $r$  do objecto

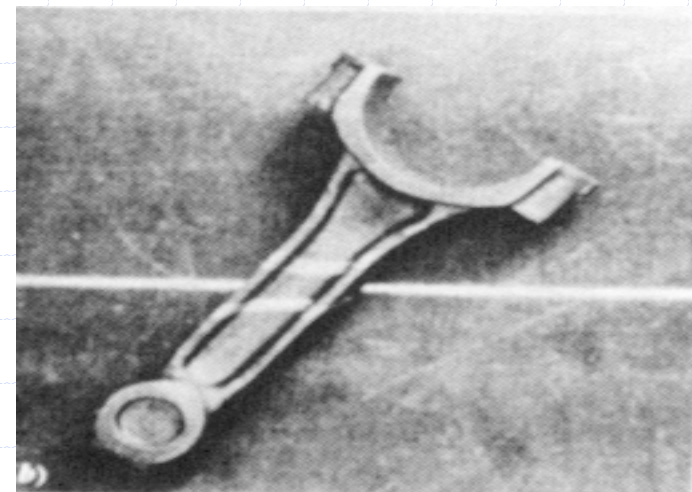
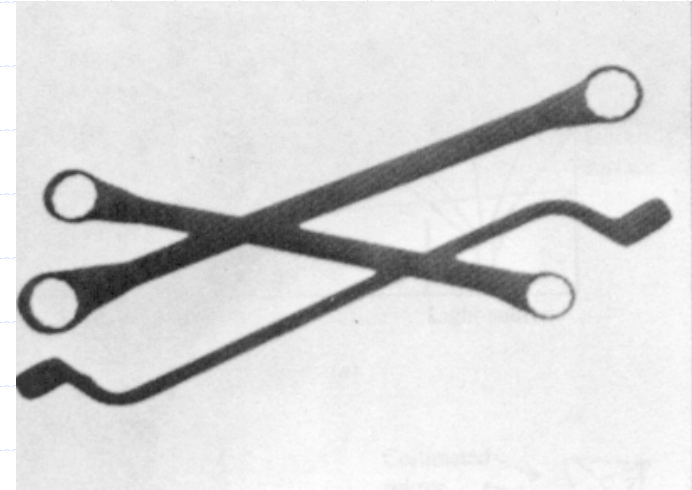


$$\frac{y}{f} = \frac{h}{r+f} \quad r = \frac{f \cdot h}{y} - f$$



# Exemplos de Retro-Illuminação e de Luz Estruturada

- ◆ Conjunto de chaves sobre superfície translúcida iluminada por “baixo”. Grande contraste na imagem obtida.
- ◆ Dois feixes de luz coincidentes num plano perdem essa coincidência quando projectados sobre uma superfície a uma cota diferente do plano de apoio.







# Visão por Computador – Parte II

## Geometria da Formação da Imagem

# Geometria da formação de imagem-resumo

- ◆ A transformação (geométrica) de perspectiva
  - Transforma pontos do espaço 3D em pontos no plano 2D
  - Coordenadas do mundo real
  - Coordenadas da imagem (Câmara)
  - Distância focal
  - Obtenção das coordenadas da imagem a partir das coordenadas do mundo real
  - Coordenadas cartesianas e coordenadas homogêneas
- ◆ A transformação de perspectiva inversa e o seu uso inconclusivo

# Geometria da Imagem - I

## ◆ Ponto real e ponto na imagem

- Ponto real:  $\mathbf{w} \rightarrow (X, Y, Z)$
- Ponto na imagem:  $\mathbf{c} \rightarrow (x, y)$

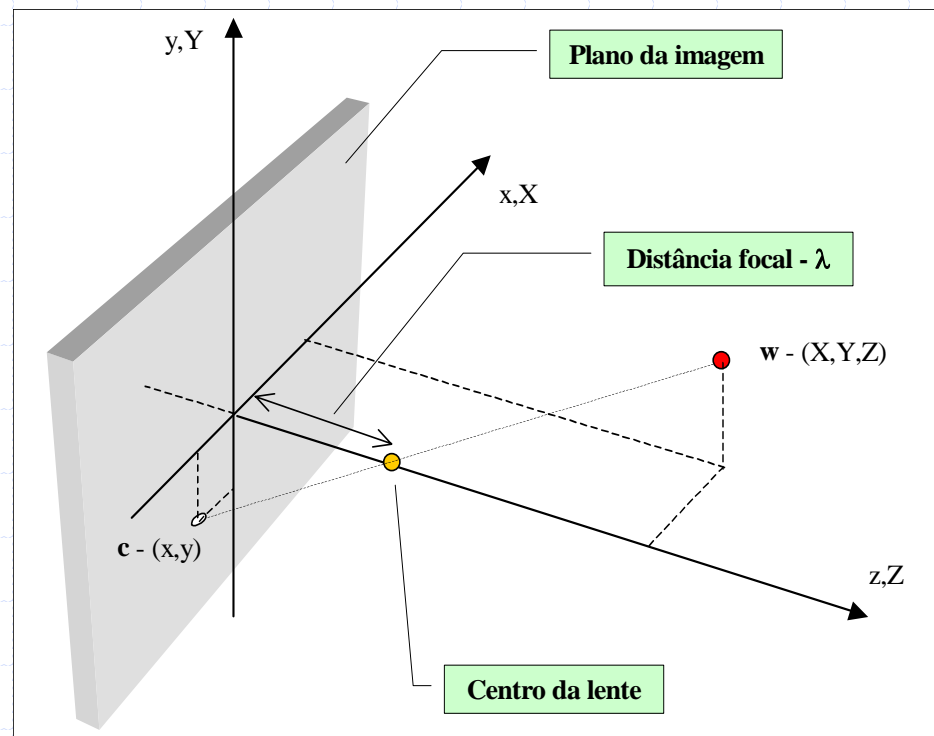
## ◆ Relações de distâncias:

- Se  $Z > \lambda$  virá:

$$\frac{x}{\lambda} = -\frac{X}{Z - \lambda} = \frac{X}{\lambda - Z}$$

$$\frac{y}{\lambda} = -\frac{Y}{Z - \lambda} = \frac{Y}{\lambda - Z}$$

$$x = \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \quad y = \frac{\lambda Y}{\lambda - Z}$$



# Geometria da Imagem - II

- ◆ Abordagem integrada das coordenadas
- ◆ Coordenadas homogêneas de um ponto
  - Ponto real:  $\mathbf{w}_h \rightarrow (kX, kY, kZ, k), k \neq 0$
  - Ponto imagem:  $\mathbf{c}_h \rightarrow ?$  (resulta da transformação)
- ◆ Transformação de perspectiva  $\mathbf{P}$ 
  - $\mathbf{c}_h = \mathbf{P} \mathbf{w}_h$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kX \\ kY \\ kZ \\ k \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_h = \begin{bmatrix} kX \\ kY \\ kZ \\ \frac{-kZ}{\lambda} + k \end{bmatrix}$$

# Geometria de Imagem - III

◆ Coordenadas calculadas na imagem (ponto  $c$ ) do ponto real ( $w$ )

- A coordenada  $z$  não tem aqui sentido
- As coordenadas  $x$  e  $y$  obtêm-se em função das coordenadas reais ( $X, Y, Z$ ) e de  $\lambda$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kX}{k - \frac{kZ}{\lambda}} \\ \frac{kY}{k - \frac{kZ}{\lambda}} \\ \frac{kZ}{k - \frac{kZ}{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda X}{\lambda - Z} \\ \frac{\lambda Y}{\lambda - Z} \\ \frac{\lambda Z}{\lambda - Z} \end{bmatrix}$$

◆ A determinação inversa (coordenadas reais a partir das coordenadas de imagem) seria obtida pela transformação inversa e expressa pelo seguinte  $\mathbf{w}_h = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{c}_h$  onde  $\mathbf{P}^{-1}$  seria como indicado. Porém, a transformação não produz pontos no espaço 3D...!

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{bmatrix}$$

# Calibração da Câmara

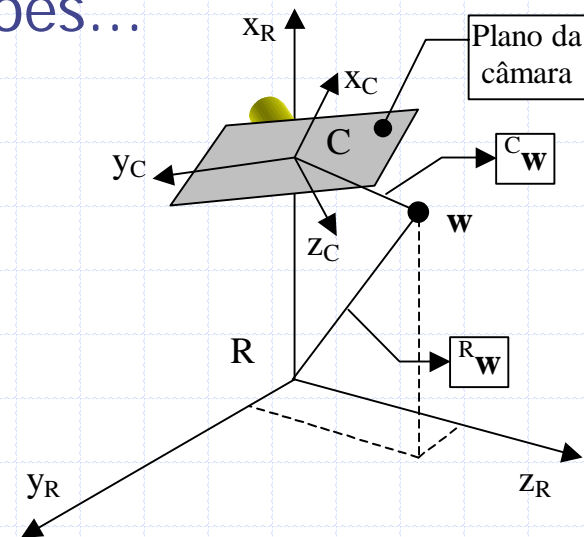
- ◆ Quando os sistemas de coordenadas da câmara e do mundo real são diferentes
- ◆ Necessidade de adequada transformação geométrica da câmara antes da perspectiva
  - Simples relação de transformações...

$${}^R \mathbf{w} = {}^R \mathbf{T}_C \cdot {}^C \mathbf{w}$$

$${}^C \mathbf{w} = ({}^R \mathbf{T}_C)^{-1} \cdot {}^R \mathbf{w} = {}^C \mathbf{T}_R \cdot {}^R \mathbf{w}$$

- ... e transformação perspectiva:

$$\mathbf{c} = \mathbf{P} \cdot {}^C \mathbf{w} = \mathbf{P} \cdot ({}^R \mathbf{T}_C)^{-1} \cdot {}^R \mathbf{w} = \mathbf{P} \cdot {}^C \mathbf{T}_R \cdot {}^R \mathbf{w}$$





# Visão por Computador – Parte III

## Processamento a Baixo Nível

# Imagem em baixo nível – sumário

## ◆ Relações básicas entre pixels

- Vizinhanças
- Critérios de distância

## ◆ Pré-processamento

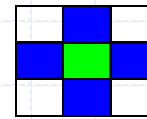
- Os filtros de convolução
- Detecção de *pixels* isolados
- Técnicas de suavização
- Técnicas de Realce
- Detecção de arestas
- Limitação e binarização
- Suavização de imagens binárias



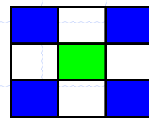
# Relações entre *pixels*

## ◆ Vizinhança de um *pixel* (nº de *pixels* vizinhos)

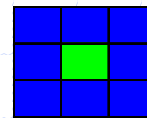
- $N_4$  (horizontal e vertical)



- $N_D$  (diagonal)



- $N_8 = N_4 \cup N_D$



## ◆ Medidas de distância entre *pixels*

- Euclidiana

$$D_E(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

- D4 (ou *city-block*)

$$D_4(p, q) = |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$$

- D8 (ou *chessboard*)

$$D_8(p, q) = \max(|p_x - q_x|, |p_y - q_y|)$$

# Pré-processamento de imagem

## ◆ Abordagens

- Espacial - sobre os *pixels* da imagem
- Na frequência - Transformadas de Fourier (não se abordam aqui!)

## ◆ Na abordagem espacial

- Criação de uma nova imagem  $g(x,y) = h[ f(x,y) ]$ 
  - ◆  $h()$  : operador de pré-processamento que opera numa vizinhança de cada *pixel*
- Uso de máscaras de convolução (ou janelas ou filtros)
  - ◆ Matriz de coeficientes apropriados a determinado tipo de tratamento ou detecção de propriedades

# Princípio da utilização de um filtro

◆ Novo *pixel* é função do *pixel* original e do filtro:

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot p_i$$

onde  $p_i$  pertence à vizinhança do ponto em causa

- ◆ Note-se que  $g(x, y)$  pode ser o valor directo do novo pixel, ou ser usado de forma indirecta para o definir.
- Os coeficientes de um filtro de 3x3:

|    |    |    |
|----|----|----|
| w1 | w2 | w3 |
| w4 | w5 | w6 |
| w7 | w8 | w9 |

# Filtro para detectar pontos isolados

- ◆ Numa imagem binária (*pixels* com valores 0 ou 1), o seguinte filtro pode ser usado para detectar se um *pixel* é um ponto isolado no meio de outros.

|    |    |    |
|----|----|----|
| -1 | -1 | -1 |
| -1 | 8  | -1 |
| -1 | -1 | -1 |

- Se  $g(x,y) = 8$  ou  $-8 \Rightarrow$  o ponto  $(x,y)$  é isolado!
- Note que os valores de  $-7, -6, -5, \dots, 6, 7$  correspondem a todas as outras possibilidades

# Técnicas de suavização (smoothing)

- ◆ As técnicas de suavização dizem respeito essencialmente à redução de ruído
  - Média de imagens (série de N imagens da mesma cena)

$$g(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x, y)$$

- Filtro de média
  - ◆ Todos os pesos de um filtro de 3x3 com valor 1/9.
- Filtro de mediana
  - ◆ Substituir cada *pixel* pela mediana da distribuição dos níveis de todos os *pixels* da sua vizinhança (incluindo o próprio). Filtros de 3x3 ou 5x5 são comuns.

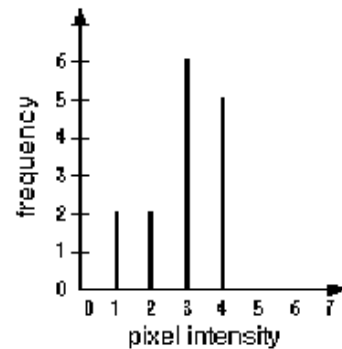
# Técnicas de realce (*Enhancement*)

- ◆ Para adaptação ou compensação face a alterações de iluminação da cena
- ◆ O Histograma de uma imagem

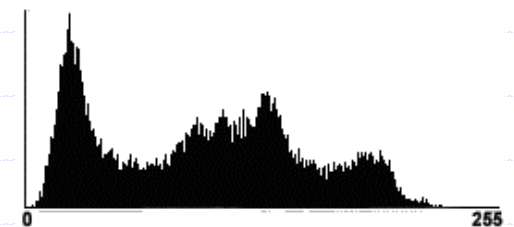
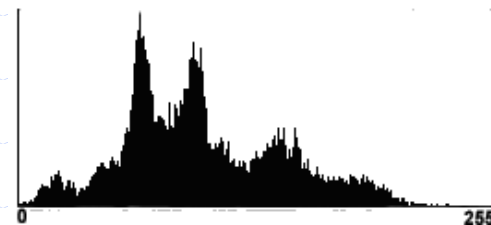
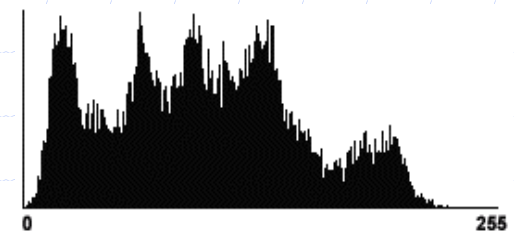
- Conceito

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 |

image



- Exemplos



# Operações no histograma

## ◆ Equalização

- alteração do valor de cada *pixel* para uniformizar a distribuição de níveis de cinzento na imagem

## ◆ Histogramas locais em vez de global

- Para afectar a imagem parcialmente sem levar em conta todo o resto da imagem

## ◆ Aplicação de um histograma pré-definido

- Por exemplo, para realçar as partes mais escuras tornando-as mais claras, e escurecendo as partes mais intensas

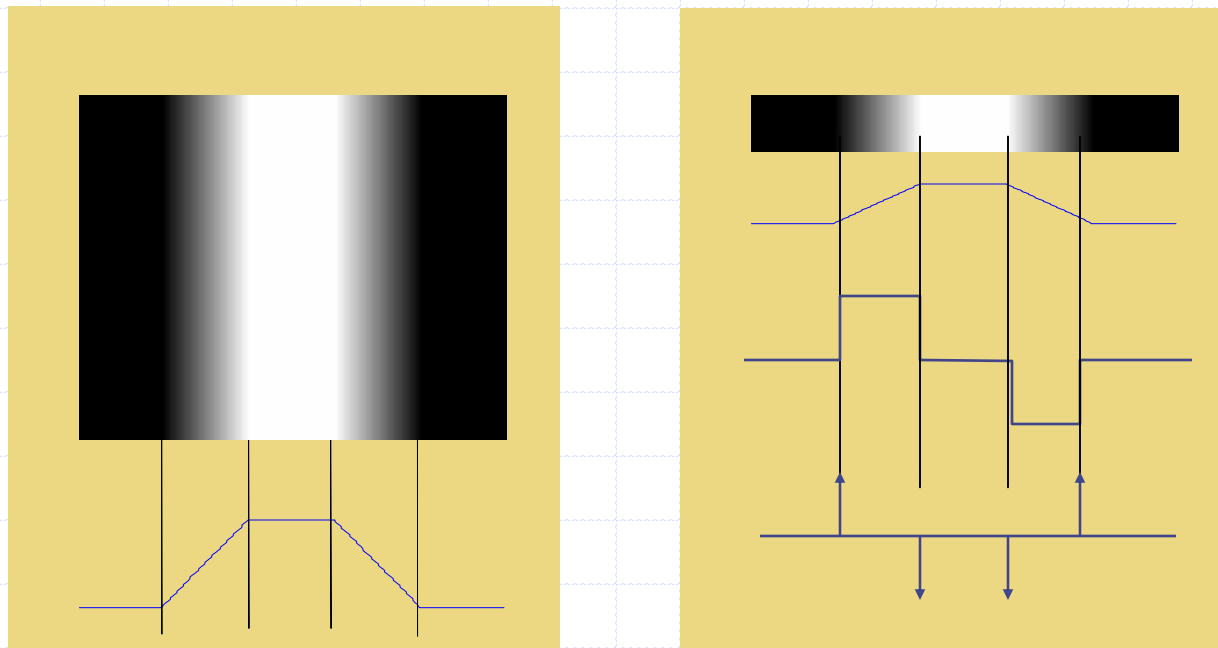
## ◆ Expansão do contraste

- Alteração da imagem para varrer toda a gama dinâmica de cinzentos com B bits:

$$g(x, y) = (2^B - 1) \frac{f(x, y) - \min[f(x, y)]}{\max[f(x, y)] - \min[f(x, y)]}$$

# Detecção de arestas (*Edge detection*)

- Importante para a detecção de objectos numa cena.
- A técnica principal é a de detectar variações de intensidade usando um operador derivativo local
- Exemplo de perfil de intensidades e suas derivadas:





# Operador de gradiente

## ◆ Definição

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^T$$

- Norma do gradiente e aproximação usada

$$\|\vec{G}\| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \approx |G_x| + |G_y|$$

## ◆ Variante discreta...

$$G_x = f(x, y) - f(x-1, y) \quad G_y = f(x, y) - f(x, y-1)$$

## ◆ ... e filtros correspondentes

|    |   |   |
|----|---|---|
| 0  | 0 | 0 |
| -1 | 1 | 0 |
| 0  | 0 | 0 |

|   |    |   |
|---|----|---|
| 0 | -1 | 0 |
| 0 | 1  | 0 |
| 0 | 0  | 0 |

# Outros filtros de gradiente

## ◆ Filtros de Sobel

- Alternativa mais eficiente para detectar arestas

$$G_x = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$G_y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

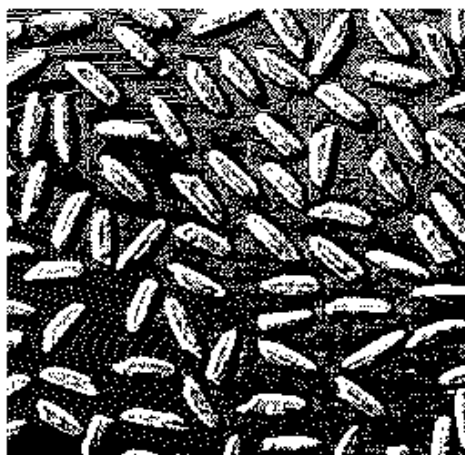
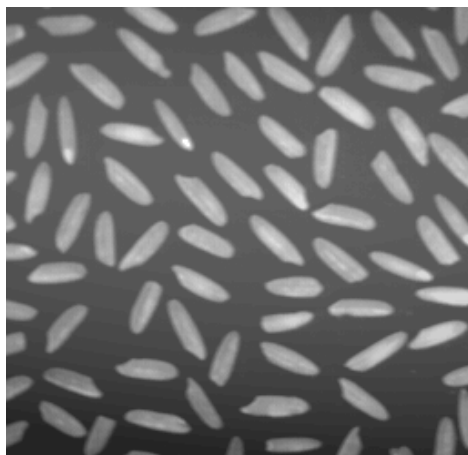
## ◆ Laplaciano

- Muito sensível ao ruído. Pouco usado para detecção de arestas.

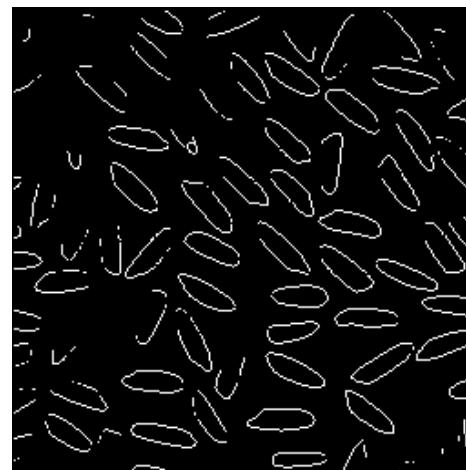
$$L[f(x, y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$L = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

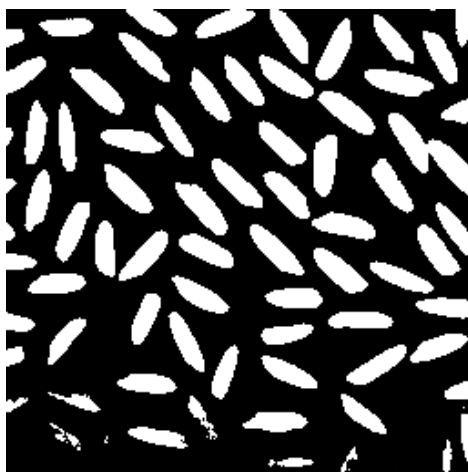
# Exemplos do uso de filtros para arestas



Gradiente simples:  $G_x + G_y$



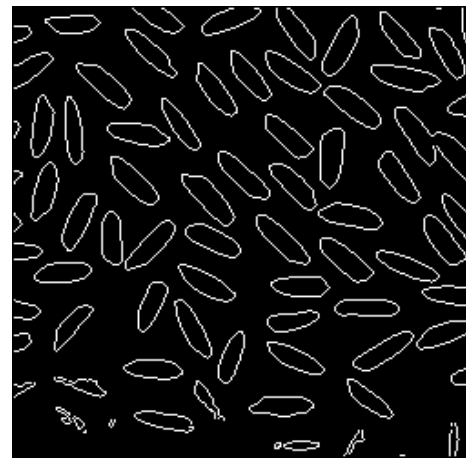
Filtro de Sobel com normalização



Limitação a meio da gama



Gradiente simples:  $G_x + G_y$



Filtro de Sobel com normalização

## Limitação (*Thresholding*)

◆ Processo de redução dos níveis de cinzento de uma imagem:

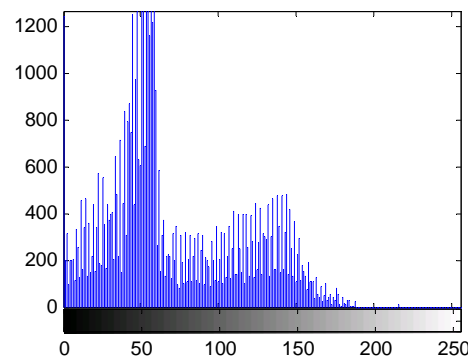
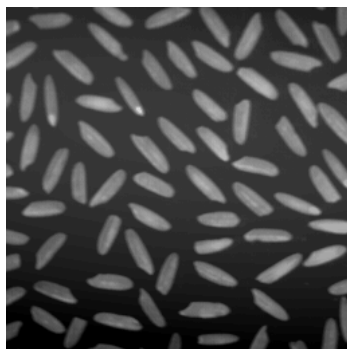
- Em geral para 2 níveis, ou seja, imagem binária.

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow f(x, y) > T \\ 0 & \Leftarrow f(x, y) \leq T \end{cases}$$

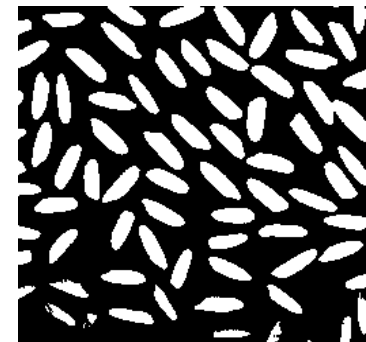
- ◆ A limitação é provavelmente a técnica mais utilizada em visão aplicada à robótica industrial e não só.
- ◆ É uma primeira operação para “separar” o objecto do fundo.

# Limitação dinâmica

- ◆ Qual o *threshold* que mais informação preserva no processo de limitação? O valor central...? Nem sempre!
- ◆ Exemplo de limitação numa imagem com 256 níveis
  - $T=128$  (pior) e  $T=80$  (melhor)



$T = 128$



$T = 80$

- ◆ A melhor solução é obtida após análise do histograma
  - Procura das regiões de separação de picos (vales)

# Suavização de imagens binárias

## ◆ Situações de “suavização” em imagem binária

- Pontos isolados ou “buracos” em imagens
- Cavidades/protuberâncias em troços rectos
- Vértices de objectos (cantos) ausentes

## ◆ Uso de operações lógicas (binárias) com os *pixels*.

- Vizinhança de 3X3 onde os pixels são designados assim:

|   |   |   |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | p | e |
| f | g | h |

0 - luz  
 1 - escuro

$$p' = p + b \cdot g \cdot (d + e) + d \cdot e \cdot (b + g)$$

$$p' = p \cdot [(a + b + d) \cdot (e + g + h) + (b + c + e) \cdot (d + f + g)]$$

$$p'_{TD} = \bar{p} \cdot (d \cdot f \cdot g) \cdot (a + b + c + e + h) + p$$

$$p'_{BD} = \bar{p} \cdot (a \cdot b \cdot d) \cdot (c + e + f + g + h) + p$$

$$p'_{TE} = \bar{p} \cdot (e \cdot g \cdot h) \cdot (a + b + c + d + f) + p$$

$$p'_{BE} = \bar{p} \cdot (b \cdot c \cdot e) \cdot (a + d + f + g + h) + p$$



# Visão por Computador – Parte IV

## Abordagem a Médio Nível e Morfologia

# Visão por computador – O médio nível

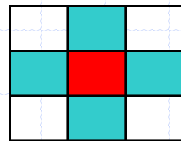
## ◆ Operadores morfológicos (binários)

- Operadores para lidar com as partes da imagem divididas em “objectos” e “fundo” (*background*)
- Um objecto é um conjunto de *pixels* que partilha uma mesma propriedade – como o estarem ligados entre si (4- ou 8-*conexão* indicando estar ligado a 4 ou a 8 vizinhos)

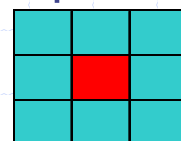
## ◆ O elemento estruturante de um operador morfológico

- Vizinhança de efectividade do operador:

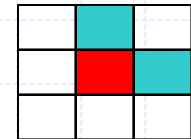
◆  $N_4$



$N_8$



- ◆ Poderão ser definidos outros elementos estruturantes, ex.:



## ◆ A segmentação

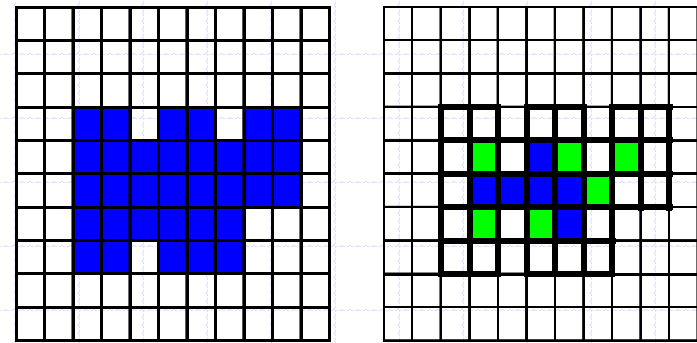
- Separação de objectos “de interesse” do fundo da imagem
- Algumas técnicas (sequências de operações morfológicas) para problemas de manipulação de objectos em imagens.



# Operadores Morfológicos - I

## ◆ Erosão

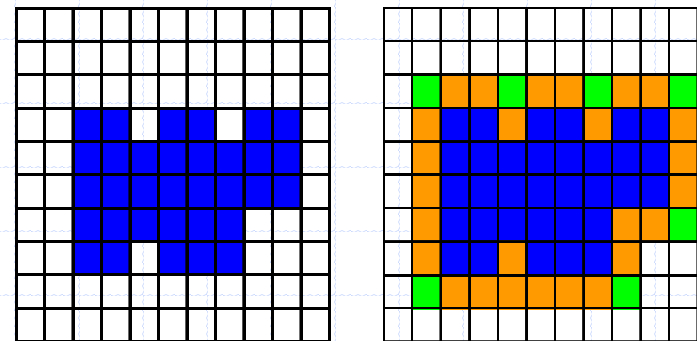
- Tomar cada *pixel* de objecto (valor 1) que esteja N—ligado ( $N_4$ ,  $N_8$ , ...) a um *pixel* de fundo (valor 0) e colocar esse *pixel* do objecto a 0.
  - ◆ Em geral, reduz as dimensões do objecto



Erosão com  $N_4$  e  $N_8$

## ◆ Dilatação

- Tomar cada *pixel* de objecto (valor 1) e pôr todos os *pixels* de fundo (valor 0) que estão N-ligados ( $N_4$ ,  $N_8$ , ...) a esse *pixel* como objecto (para o valor 1).
  - ◆ Em geral, aumenta as dimensões do objecto



Dilatação com  $N_4$  e  $N_8$

# Operadores Morfológicos - II

## ◆ Fecho

- Operação de dilatação seguida de erosão
  - ◆ O resultado comum mais interessante é o de fundir objectos que inicialmente só estariam ligados por um único *pixel*.
  - ◆ “Suaviza” o objecto pelo exterior do seu contorno

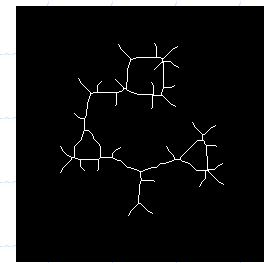
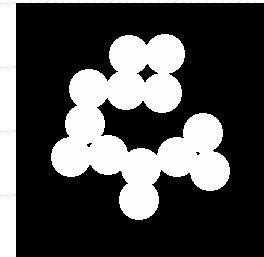
## ◆ Abertura

- Operação de erosão seguida de dilatação
  - ◆ O resultado comum mais interessante é o de separar objectos que inicialmente só estariam ligados por poucos *pixels*, nomeadamente, linhas de um só *pixel* de “largura”.
  - ◆ “Suaviza” o objecto pelo interior do seu contorno

# Operadores Morfológicos - III

## ◆ Esqueletização

- Operação de determinação do esqueleto
- Definição de esqueleto:
  - ◆ Objecto filiforme (1 *pixel* de largura) ...
  - ◆ .. que passa pelo "meio" do objecto
  - ◆ ... e que preserva a topologia do objecto original



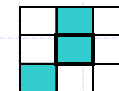
## ◆ Uma variante ("*thinning*") baseada na erosão condicionada (menos exigente computacionalmente)

- Um *pixel* não é erodido nas seguintes condições:

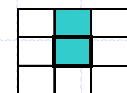
- ◆ Se for isolado - condição  $C_1$ :



- ◆ Se removê-lo afectar a conectividade – condição  $C_2$



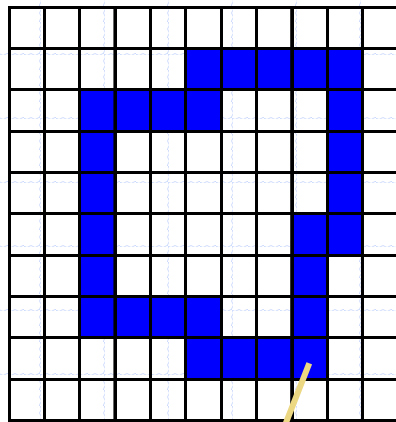
- ◆ Se removê-lo afectar o comprimento da linha – Condição  $C_3$



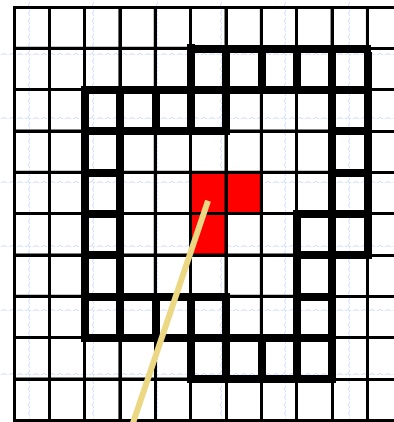
# Operadores Morfológicos – IV

## ◆ Propagação

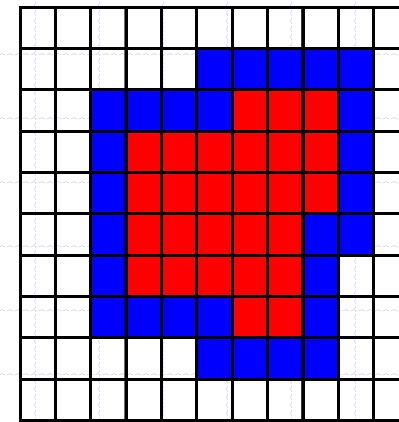
- Operação de dilatação sucessiva de um objecto “semente” (por exemplo um esqueleto) até aos limites dados por uma imagem “máscara”, com base num dado elemento estruturante.



Máscara



Semente



Em geral, o processo resulta numa máscara “cheia”

# Variantes de Esqueletização

- ◆ No algoritmo de "*thinning*" há diversas combinações das condições  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .
  - Só condição  $C_1$ 
    - ◆ Esqueleto reduzido a um *pixel*
  - Só condição  $C_2$ 
    - ◆ Esqueleto reduzido a linhas fechadas se houver objectos com buracos. Objectos sem buracos desaparecem.
  - $C_1 + C_2$ 
    - ◆ O esqueleto é constituído por *pixels* isolados para objectos sem "buracos" e por contornos fechados para objectos com "buracos".
  - $C_1 + C_2 + C_3$ 
    - ◆ Ter-se-á o esqueleto completo tradicional

# Segmentação

## ◆ A limitação (*thresholding*) dinâmica

- Limite baseado na média do valor de todos os *pixels* da imagem – método com limitações.
- Limite baseado no histograma
  - ◆ Algoritmo de “isodados”
  - ◆ Algoritmo do “triângulo”
    - Particularmente eficiente quando os objectos não se demarcam claramente no histograma
  - ◆ Algoritmo de “simetria do fundo”
    - Pico demarcado e com simetria no histograma

## ◆ Detecção de Arestas

- Contornos dos objectos (através de filtros de gradiente)

# Binarização- Algoritmo de "isodados"

## ◆ Obtenção do limiar T de forma iterativa.

- Imagem a B bits com um histograma H(i) onde  $i=0,1,\dots,2^B-1$
- Iteração inicial: ponto central da gama dinâmica  $T_0=2^{B-1}$
- Calcular as médias dos *pixels* separados em "objectos" ( $m^f$ ) e "fundo" ( $m^b$ );

$$m_k^b = \frac{\sum_{i=0}^{T_{k-1}-1} i \cdot H(i)}{\sum_{i=0}^{T_{k-1}-1} H(i)}$$

$$m_k^f = \frac{\sum_{i=T_{k-1}}^{2^B-1} i \cdot H(i)}{\sum_{i=T_{k-1}}^{2^B-1} H(i)}$$

- Nova iteração: o novo valor do limiar é obtido como a média aritmética dessas médias.

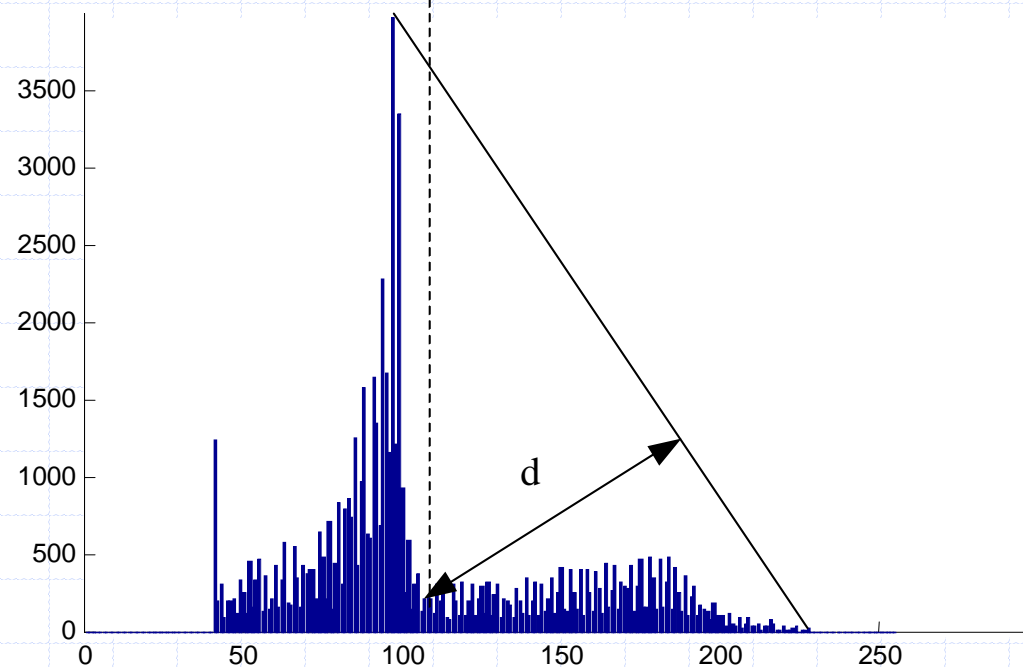
$$T_k = \frac{m_{k-1}^f + m_{k-1}^b}{2}$$

- O processo é repetido até que o limiar deixe de variar.

$$T_k = T_{k-1}$$

# Binarização – algoritmo do “triângulo”

- ◆ Determinar no histograma o ponto de maior frequência
- ◆ Determinar no histograma o ponto de menor frequência
- ◆ Definir uma linha unindo os dois pontos perfazendo um triângulo
- ◆ O ponto do histograma entre os pontos definidos que mais se afastar dessa linha ao longo de uma perpendicular é o limiar...





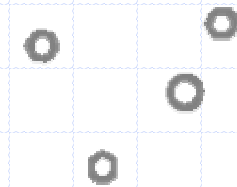
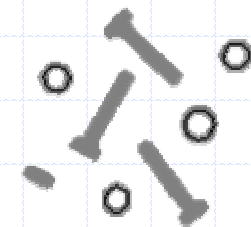
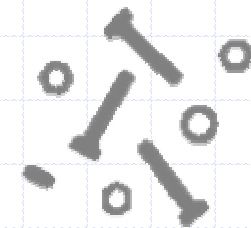
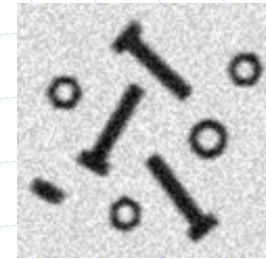
# Operações de morfologia binária

- ◆ Isolar objectos com buracos
- ◆ Preencher os buracos em objectos
- ◆ Remover objectos nos bordos da imagem
- ◆ Cálculo do Exo-esqueleto
- ◆ Separar objectos que se tocam
- ◆ Etc.

# Operações Morfológicas – I

## ◆ Isolar objectos com buracos

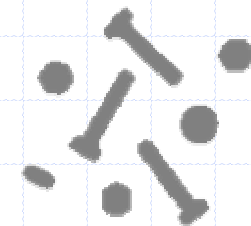
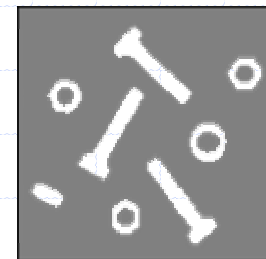
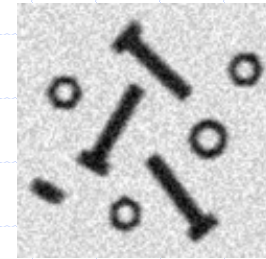
1. Binarizar imagem e guardar para usar como máscara
2. Determinar o esqueleto não preservando os *pixels* terminais
3. Eliminar pontos isolados do esqueleto
4. Propagar o restante esqueleto até à máscara obtida no ponto 1.



# Operações Morfológicas - II

## ◆ Preencher buracos em objectos

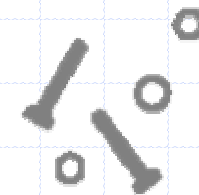
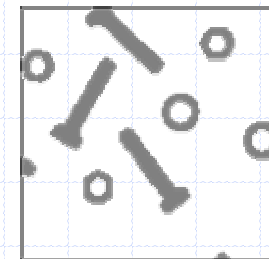
1. Binarizar
2. Complementar a imagem (negar)
3. Definir o bordo (caixilho) da imagem como semente
4. Propagar do bordo para os limites da imagem negada
5. Inverter a imagem propagada



# Operações Morfológicas - III

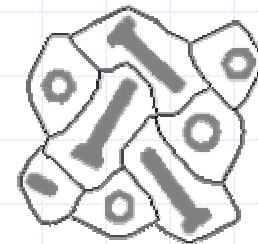
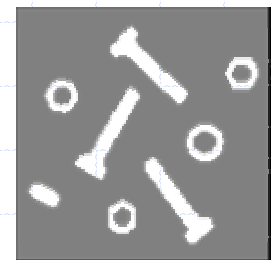
## ◆ Remover objectos que tocam no bordo da imagem

1. Binarizar (obter máscara)
2. Gerar um objecto semente com o bordo (caixilho) da imagem
3. Propagar a semente até à máscara
4. Fazer a operação de exclusivo (XOR) com a imagem binarizada inicial (máscara)



# Operações Morfológicas - IV

- ◆ Obtenção do Exo-esqueleto
  - Definição de exo-esqueleto: esqueleto do “fundo” que contém os objectos, “criando regiões”
    1. Binarização
    2. Complemento da imagem (negação)
    3. Cálculo do esqueleto pela metodologia que elimina as linhas terminais (condições  $C_1$  e  $C_2$  na definição da operação de *thinning*)



# Função **BWMORPH** em MatLab (v5.3+)

- ◆ **BW2 = BWMORPH(BW1,OPERATION,N)** applies the operation N times. N can be Inf, in which case the operation is repeated until the image no longer changes.
  - OPERATION is a string that can have one of these values:
    - **'bothat'** Subtract the input image from its closing
    - **'bridge'** Bridge previously unconnected pixels
    - **'clean'** Remove isolated pixels (1's surrounded by 0's)
    - **'close'** Perform binary closure (dilation followed by erosion)
    - **'diag'** Diagonal fill to eliminate 8-connectivity of background
    - **'dilate'** Perform dilation using the structuring element ones(3)
    - **'erode'** Perform erosion using the structuring element ones(3)
    - **'fill'** Fill isolated interior pixels (0's surrounded by 1's)
    - **'hbreak'** Remove H-connected pixels
    - **'majority'** Set a pixel to 1 if five or more pixels in its 3-by-3 neighborhood are 1's
    - **'open'** Perform binary opening (erosion followed by dilation)
    - **'remove'** Set a pixel to 0 if its 4-connected neighbors are all 1's, thus leaving only boundary pixels
    - **'shrink'** With N = Inf, shrink objects to points; shrink objects with holes to connected rings
    - **'skel'** With N = Inf, remove pixels on the boundaries of objects without allowing objects to break apart
    - **'spur'** Remove end points of lines without removing small objects completely.
    - **'thicken'** With N = Inf, thicken objects by adding pixels to the exterior of objects without connected previously unconnected objects
    - **'thin'** With N = Inf, remove pixels so that an object without holes shrinks to a minimally connected stroke, and an object with holes shrinks to a ring halfway between the holdand outer boundary
    - **'tophat'** Subtract the opening from the input image