Capítulo 3

Aplicaciones del cálculo diferencial

[1]

3.1. Regla de L'Hôpital

Para resolver las indeterminaciones 0/0 (cociente de dos infinitésimos), se comparan las velocidades respectivas de convergencia, es decir se calcula el límite del cociente de las derivadas. La demostración de esta regla se obtiene del teorema del valor intermedio (en una forma especial que se debe a Cauchy). El enunciado exacto es:

. *Si queremos calcular*

$$L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y encontramos que existe el límite

$$L^* = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces L también existe y vale lo mismo que L^*.

[1] v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Las fechas son orientativas. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive:* `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`.

Para poder aplicar esta regla es necesario que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean diferenciables en algún intervalo $(a, a+\varepsilon)$, en el que además $g'(x) \neq 0$.

Este resultado es igualmente válido para:

- Límites ordinarios $\lim_{x\to a}$ (combinando ambos límites laterales);
- Indeterminaciones de la forma $\pm\infty/\infty$;
- Límites del tipo $x \to \pm\infty$;
- Cuando $L^* = \pm\infty$.

Ejemplo

$$L = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x/x = 1$$

porque

$$L^* = \lim_{x\to 0} \cos x/1 = 1.$$

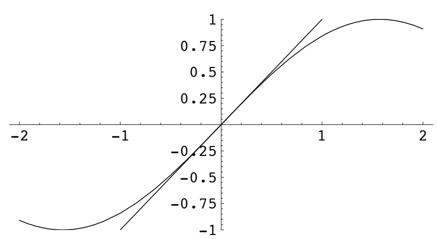

Figura 3.1: $\operatorname{sen} x$ y x son infinitésimos equivalentes

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-3}{x^2-1} = 3.$$

Ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Las exponenciales $b^x, b > 1$, crecen más rápido que cualquier polinomio.

Ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Los logaritmos $\log_b x$ crecen más lentamente que cualquier polinomio.

Observación No es correcto escribir directamente $L = L^*$, como podemos deducir del siguiente ejemplo. Si $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$, entonces existe

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}) = 1,$$

aunque no exista

$$L^* = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} (1 + \cos x).$$

(ver figura 3.2).

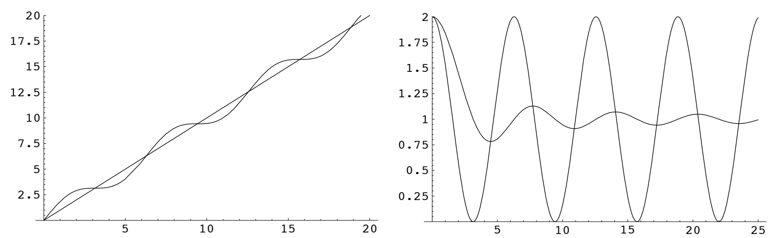

Figura 3.2: Asintóticamente $x + \operatorname{sen} x$ es como x (figura de la izquierda). Por tanto $L = 1$. La figura de la derecha muestra el cociente de las funciones y el de sus derivadas. Se ve que L^* no existe.

Otras indeterminaciones La regla de L'Hôpital sirve también para resolver otro tipo de indeterminaciones.

- $0 \cdot \infty$:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}; \\ L^* &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0. \end{aligned}$$

- 0^0:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0^+} x^x; \\ \ln L &= \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \end{aligned}$$

  luego $L = 1$.

- 1^∞:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x}; \\ \ln L &= \lim_{x\to 0} (1/x)\ln(x+e^x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \frac{0}{0} \\ (\ln L)^* &= \lim_{x\to 0} \frac{1+e^x}{x+e^x} = 2 \end{aligned}$$

luego $L = e^2$.

- $\infty - \infty$:

$$L = \lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}) = 1/2.$$

Es

$$L = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)} = \frac{0}{0}$$

y

$$L^* = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-1/x}{(1/x)(x-1)+\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1+x\ln x} = \frac{0}{0}$$

luego

$$L^{**} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+\ln x+1} = \frac{1}{2}$$

por tanto

$$L = L^* = L^{**} = \frac{1}{2}.$$

- ∞^0:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}; \\ \ln L &= \lim_{x\to\infty} \ln(x^{1/x}) = \lim_{x\to\infty} (1/x)\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}; \\ (\ln L)^* &= \lim_{x\to\infty} (1/x) = 0 \end{aligned}$$

luego $L = e^0 = 1$.

- 0^∞:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0^+} x^{1/x}; \\ \ln L &= \lim_{x\to 0^+} (1/x)\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{aligned}$$

luego $L = 0$.

PROBLEMA Probar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Esta fórmula sirve para calcular el número e tomando $x = 1, 2, 3, \ldots$.

3.2. Cinemática.*

Para Newton, la idea de derivada («fluxión») estaba íntimamente ligada a la de velocidad instantánea.

Movimiento rectilíneo Velocidad: ritmo al que cambia una distancia a medida que pasa el tiempo. Posición de un móvil. Desplazamiento $e = e(t)$. Velocidad instantánea $v = de'(t)$. Unidades: 1 m/s = 3,6 km/h .

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado Movimiento de caída de los cuerpos bajo los efectos de la gravedad. Ecuación de Galileo $e''(t) = g$. En la Tierra $g = 9,8$ m/s/s.

Puedes entrar en esta página web para ver una demostración animada: `http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/graves/graves.htm`

PROBLEMAS

1. Una escalera de mano está apoyada en un muro vertical. Si el extremo que se apoya en el suelo comienza a deslizarse a una velocidad de 2 m/s, ¿a qué velocidad está cayendo el extremo apoyado en la pared cuando éste se encuentra a una altura de 1 metro?

2. Si dejamos caer un objeto (sin velocidad inicial) desde un tercer piso (altura de 9 metros) ¿cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? (se prescinde de la resistencia del aire)

3. En unas fiestas del pueblo lanzan una bomba de palenque que sube hasta estallar en el punto más alto de su trayectoria. Si ha tardado 4 segundos ¿a qué velocidad fué lanzada?

Galileo Galilei (1564 – 1642) Profesor de matemáticas en Florencia, Siena, Pisa y Padua, enseñó geometría y astronomía. Estudió los métodos de Arquímedes para determinar la densidad de los cuerpos e introdujo la idea de que se puede poner a prueba una teoría realizando experimentos.

Descubrió las leyes de la caída de los cuerpos y del movimiento de los proyectiles estudiando planos inclinados y péndulos. Construyó los primeros telescopios de cuatro/ocho aumentos y con ellos realizó sensacionales descubrimientos: los mares y montes de la Luna, las estrellas de la Via Láctea, los satélites de Júpiter, los anillos de Saturno.

En 1633 fué condenado como hereje por la Inquisición, a arresto domiciliario perpetuo, por defender la teoría de Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol. El proceso fué revisado en 1992.

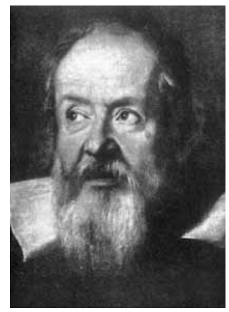

Figura 3.3: Galileo

Derivación implícita Si tenemos dos funciones $e = e(t)$ y $h = h(t)$ ligadas por una relación, por ejemplo, $e^2 + h^2 = 1$, no hace falta despejar explícitamente $h = \sqrt{1 - e^2}$ para derivar

$$\frac{dh}{de} = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \cdot (-2e).$$

Es más cómodo derivar implícitamente, es decir, escoger la variable que vamos a usar (en este caso e) y hacer

$$2e\frac{de}{de} + 2h\frac{dh}{de} = 0.$$

Por supuesto $de/de = 1$, lo que nos da

$$\frac{dh}{de} = \frac{-2e}{2h} = \frac{-e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

que es el resultado deseado.

3.3. Representación de funciones

Consideraremos funciones $y = y(x)$ definidas en un intervalo abierto (a, b) que se puedan derivar en todos los puntos todas las veces que queramos.

En consecuencia supondremos que ni las funciones ni sus derivadas presentan saltos ni discontinuidades.

Crecimiento y decrecimiento La función *crece* si $x_1 < x_2$ implica que $y(x_1) \leq y(x_2)$. Puede ser *estrictamente creciente* o no. La función *decrece* si $x_1 < x_2$ implica $y(x_1) \geq y(x_2)$. En algunos casos será *estrictamente decreciente.*

. *La función $y = y(x)$ crece si (y solamente en ese caso) su derivada en cualquier punto es no negativa, $y'(x) \geq 0$.*

Es una consecuencia del teorema del valor intermedio, ya que se deduce de la fórmula $y(x+h) = y(x) + y'(c)h$, que podemos escribir $\Delta y = y'(c)\Delta x$. Por tanto, el incremento de y y de x tienen el mismo signo (función creciente) debido al signo positivo de la derivada.

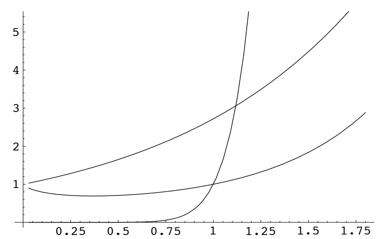

Figura 3.4: Crecimiento comparativo de las funciones x^{10}, e^x y x^x

Análogamente, la función decrece si (y solamente si) $y'(x) \leq 0$ para cualquier x. Esta vez, los incrementos tienen distinto signo (función decreciente) porque el signo de la derivada es negativo.

Máximos y mínimos locales La función tiene un *máximo local* (o máximo relativo) en x si pasa de creciente a decreciente. Y tiene un *mínimo local* o relativo si pasa de decreciente a creciente .

Los máximos y mínimos locales no tienen por qué ser *globales* (absolutos), pues depende del comportamiento de la función al acercarnos a los bordes de su intervalo de definición.

En un máximo o mínimo local, la derivada vale cero (es decir, la recta tangente es horizontal). Se dice que son puntos críticos. Sin embargo hay otras clases de puntos críticos que no son ni máximos ni mínimos.

Derivadas de orden superior La derivada de la función derivada, $(y')'(x)$, se denota $y''(x)$ o también $y^{2)}(x)$ o d^2y/dx^2 (derivada segunda).

Concavidad, convexidad Si $y'' \geq 0$ la función $y = y(x)$ tiene la concavidad hacia arriba. Si $y'' \leq 0$ la función tiene la concavidad hacia abajo.

Una función $y = y(x)$ puede acelerar es decir cambiar cada vez más rápido. En este caso su derivada crece, por tanto $y'' \geq 0$. Esto es independiente de que la función crezca o decrezca.

O puede decelerar (frenar). En este caso su pendiente será cada vez menor (independientemente de que la pendiente sea positiva o negativa).

Ejemplo La función logaritmo $y = \ln x$ crece estrictamente (por tanto $y' > 0$). Sin embargo cada vez crece más lento, es decir decelera (por tanto $y'' < 0$). En consecuencia, la función tiene la concavidad hacia abajo.

Ejemplo La parábola $y = x^2$ pasa de tener pendientes muy negativas (decrece, $y' < 0$) a tener pendientes positivas (crece, $y' > 0$). Por tanto la derivada está creciendo, $y'' \geq 0$, la función tiene la concavidad hacia arriba.

Puntos de inflexión Un punto de inflexión x es donde la concavidad cambia de sentido. Por tanto en un punto de inflexión la derivada segunda cambia de signo, $y''(x) = 0$.

Ojo: hay puntos con $y''(x) = 0$ que no son puntos de inflexión. Por ejemplo $y = x^4$ en $x = 0$ tiene un mínimo .

Puntos críticos Un punto crítico es un valor x en el que se anula la primera derivada, $y'(x) = 0$ (la tangente a la gráfica es horizontal). Un punto crítico puede ser un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión.

Ojo: hay puntos de inflexión que no son puntos críticos, es decir en los que la derivada *primera* no se anula! Por ejemplo $y = \operatorname{sen} x$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, aunque $y'(0) = 1$.

Para determinar qué tipo de punto crítico tenemos se usa una versión extendida del teorema del valor intermedio, la fórmula de Taylor, que hace intervenir derivadas de orden superior. El criterio es:

. *Si $y'(x) = 0$, calculemos las derivadas sucesivas $y^{2)}(x), y^{3)}(x), \ldots$ en el mismo punto crítico x, hasta encontrar la primera que no sea nula, $y^{k)}(x) \neq 0$ ($k \geq 2$). Entonces*

	$y^{k)}(x) > 0$	$y^{k)}(x) < 0$
k par	$\smile$ mínimo local	$\frown$ máximo local
k impar	punto de inflexión	punto de inflexión

Ojo: Este criterio suele enunciarse para el caso $k = 2$. Pero es un error creer que $y''(x) = 0$ signifique que es un punto de inflexión, incluso si es un punto crítico: por ejemplo la función $y = x^4$ tiene en $x = 0$ un mínimo, con $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 0$.

PROBLEMAS

1. La función $y = x^{2008}$ tiene en $x = 0$ un punto crítico. ¿De qué tipo es?

2. Determinar los puntos de inflexión de $y = \arccos x$.

3. Determinar los máximos relativos de $y = \operatorname{sen} x$.

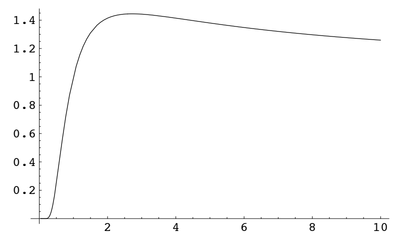

Figura 3.5: La función $y = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$, tiene un máximo local en $x = e$; dos puntos de inflexión; y una asíntota horizontal $y = 1$.

Asíntotas La función $y = y(x)$ tiene una *asíntota vertical* en $x = c$ si algún límite lateral $\lim_{x\to c^+} y(x)$ o $\lim_{x\to c^-} y(x)$vale $\pm\infty$ ($x = c$ es un punto del borde del dominio).

Tiene una *asíntota horizontal* $y = a$ por la derecha si $\lim_{x\to+\infty} y(x) = a$, y por la izquierda si $\lim_{x\to-\infty} y(x) = a$.

Cuando $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\infty$ es posible que la función se aproxime tanto como queramos a una recta $y = bx + a$ (*asíntota oblícua*); para detectarlo hay que calcular

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x},$$

y, si existe, determinar

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - bx).$$

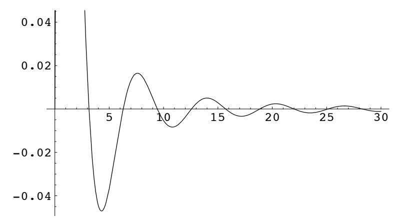

Figura 3.6: Asíntota horizontal $y = 0$ de $y(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$.

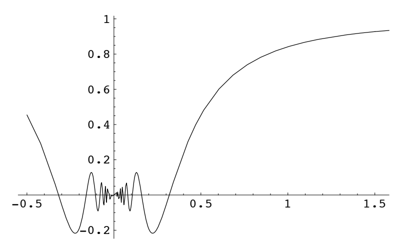

Figura 3.7: El comportamiento a largo plazo de una función puede ser imprevisible... Asíntota horizontal $y = 1$ de $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

Gráfica de una función. Representación de funciones. Seguiremos los siguientes pasos:

1. Dominio
2. Puntos críticos
3. Crecimiento/ decrecimiento
4. Puntos de inflexión
5. Concavidad / convexidad
6. Asíntotas verticales, horizontales, oblicuas
7. Puntos de corte con los ejes
8. Valores en puntos notables

PROBLEMAS Representar el polinomio $y(x) = x(x-15)(x+9)$.

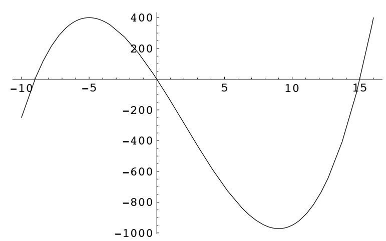

Figura 3.8: El polinomio de tercer grado $y = x(x-15)(x+9)$ tiene puntos críticos en $x = -5$ y $x = 9$, y un punto de inflexión en $x = 2$.

3.4. Problemas de optimización

Planteamiento y Método de resolución Esquema gráfico. Estudio de casos extremos e intermedios. Función a optimizar. Ligaduras entre variables. Reducción a una variable. Dominio de la función. Puntos críticos. Extremos relativos. Discusión. Extremos absolutos. Interpretación.

Ejemplo Entre todos los rectángulos con un perímetro de 100 metros, el cuadrado de 25×25 es el de mayor área.

PROBLEMA Las ganancias G de una inmobiliaria dependen del número x de pisos que alquilan y del precio p del alquiler. La experiencia muestra que cada subida de 10 euros supone una pérdida de 5 inquilinos, es decir $dx/dp = -5/10$. Actualmente $x = 200$ y $p = 500$. ¿Cómo debe alterar el precio para maximizar la ganancia?

PROBLEMA ¿Cuál es el punto de la parábola $y = x^2$ que está más cerca de la recta $y = x - 1$?

Figura 3.9: Libro de texto de Cálculo de Maria Gaetana Agnesi, Milán 1748