
La teoría de Grafos

en el análisis económico regional.

El agua como factor productivo en Andalucía

Antonio MORILLAS RAYA

1. Introducción.

En este trabajo se presenta, de forma elemental, algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, especialmente útiles para el análisis regional. El concepto de grafo y el de estructura son fácilmente asimilables, tanto en imagen como en formalización. Existen múltiples ocasiones en que un analista de la realidad social se encuentra con relaciones estructuradas que, de alguna forma, se pueden idealizar en un grafo, como una especie de entramado semejante a una tela de araña. Relaciones entre núcleos urbanos, movimientos migratorios, redes de transporte, etc., forman estructuras de relaciones generalmente aptas para ser tratadas mediante la teoría de grafos.

Especial mención merece la aplicación de esta teoría al análisis de una tabla de relaciones intersectoriales. A ello ya hemos hecho referencia en otros trabajos, aunque, en las aplicaciones llevadas a cabo hemos insistido más en los aspectos cualitativos del análisis que en los cuantitativos. En esta ocasión, haciendo uso del concepto de grafo de influencia, se lleva a cabo una aplicación para obtener la sensibilidad del agua, como factor productivo,

ante variaciones en la demanda de otros tipos de bienes. Se muestra, también, como es posible analizar los senderos de transmisión de esa influencia y evaluar el papel que los circuitos juegan en su potenciación.

2. Conceptos básicos de la teoría de grafos ¹.

Nuestro interés, en este epígrafe, se va a centrar en los llamados grafos orientados, y es en este contexto en el que definiremos, en la forma más sencilla e intuitiva posible, los conceptos mínimos que han sido necesarios para desarrollar la aplicación que se presenta en este trabajo.

Un grafo, $G=(X,U)$, está definido por dos conjuntos:

- un conjunto X , finito, formado por n elementos que se suelen llamar vértices, nodos o polos.
- un conjunto U , cuyos elementos son los arcos que pueden definirse entre los elementos de X , que para el caso de los grafos orientados que vamos a tratar, será

1. Algunas obras clásicas, de interés para el estudio de la teoría de grafos son: Berge (1962), Harary, Norman y Cartwright (1968), Roy (1970), Kaufmann (1976) y Ore (1962) y Ore (1962 y 1970). Un resumen de los aspectos más relevantes de esta teoría, útiles para el análisis de modelos económicos, especialmente el de Leontief, puede verse en Morillas (1983, cap. 1). La introducción teórica que se presenta aquí está tomada, básicamente, de la desarrollada en Morillas (1995).

una parte del producto cartesiano $X \times X$; es decir, $U \in X^2$. La orientación del arco indica el sentido de las relaciones existentes entre los elementos de X .

Si dos vértices, x_i y x_j , están relacionados de tal forma que podemos escribir que $x_j \in f(x_i)$, siendo f una aplicación de X en X , existirá una línea orientada que unirá ambos vértices a la que llamaremos arco. Un arco, por tanto, se puede definir como el par (x_i, x_j) , con $x_j \in f(x_i)$. Hay que decir que un vértice puede estar relacionado consigo mismo (propiedad reflexiva). En tal caso, al arco se le suele llamar bucle.

Para el arco (x_1, x_2) , se dice que x_1 es su extremidad inicial y x_2 su extremidad final. Los vértices 1 y 2 se dice que son adyacentes porque existe un arco que los une. Llamaremos semigrado exterior de un vértice al número de arcos que tienen como extremidad inicial a dicho vértice. Normalmente, se le designa en la forma $d^+(x_i)$. Cuando $d^+(x_i) = 0$, se dice que x_i es un vértice pozo. El semigrado interior del vértice x_i es el número de arcos cuya extremidad final es x_i . Le llamaremos $d^-(x_i)$. Si su valor es cero, pero no lo es su semigrado exterior, diremos que el vértice correspondiente es un vértice fuente.

La suma de los dos semigrados, número de arcos que tienen como extremidad final o inicial el vértice en cuestión, será su grado [$d(x) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$]. Si éste es cero, el vértice será aislado. Por otro lado, si el producto de los semigrados es uno, $d^+(x_i) \cdot d^-(x_i) = 1$, el vértice x_i será un transmisor.

Otro concepto interesante es el de camino. Se trata, simplemente, de una secuencia de arcos tal que la extremidad final de cada arco coincida con la inicial del arco siguiente. La longitud de un camino es el número de arcos que lo forman. Un camino se dice que es elemental, cuando no pasa dos veces por el mismo vértice. Hay otras clasificaciones del concepto camino que no vamos a tratar aquí. Digamos solamente que una pista de x_i a x_j es un camino de longitud mínima entre esos vértices. A esta longitud mínima, generalmente denominada como $e(x_i, x_j)$, se le llama distancia de x_i a x_j . Ambos conceptos, el de camino y el de distancia, son fundamentales en muchas aplicaciones.

3. Matrices asociadas a un grafo orientado.

Para el caso de los grafos orientados o digrafos, hay un conjunto de matrices asociadas que son de gran interés. En primer lugar, la matriz de incidencia, o matriz booleana asociada al grafo, $A(D)$, que es una matriz cuadrada de orden n (número de vértices del grafo) cuyos elementos son tales que, para el grafo $D=(X,U)$,

$$a_{ij} = 1, \text{ si } (x_i, x_j) \in U \quad \text{y} \quad a_{ij} = 0, \text{ si } (x_i, x_j) \notin U$$

A partir de esta sencilla matriz, pueden obtenerse otras de enorme interés para el análisis de las relaciones subyacentes en la estructura representada por el grafo. El cálculo de los semigrados y el grado total es inmediato a partir de esta matriz, ya que

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \text{y} \quad d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

La primera matriz importante derivada de la de incidencia es la matriz de caminos. Esta matriz da información acerca de la existencia, en su caso, de, al menos, un camino entre dos vértices cualesquiera. Si este camino existe entre los vértices x_i y x_j , se dirá que x_j es accesible a x_i . De ahí, el empleo en terminología anglosajona del término matriz de accesibilidad para definir dicha matriz. Como se sabe, el concepto de accesibilidad, ya sea técnica o geográfica, tiene gran interés en ciencia regional².

Si definimos el conjunto de todos los vértices descendientes de x_i , es decir, lo que se llama su cierre transitivo y le denominamos $f^+(x_i)$, tendríamos que

$$f^+(x_i) = \{x_i, Uf(x_i), U^2f(x_i), U^3f(x_i), \dots\}$$

La matriz de caminos, $R(D)$, es una matriz de elementos r_{ij} tal que,

$$r_{ij} = 1, \text{ si } x_j \in f^+(x_i) \quad \text{y} \quad r_{ij} = 0, \text{ si } x_j \notin f^+(x_i)$$

2. Pueden verse, por ejemplo, algunas aplicaciones al respecto en *Cahiers du Centre: Economie, Espace, Environnement* (1977).

Se supone que cada vértice es su propio descendiente, por lo que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1 ($r_{ii}=1$, para todo valor de i). Un algoritmo para el cálculo de la matriz de caminos puede verse, por ejemplo, en Harary, Norman y Cartwright (1968; pp. 126-127).

Otra matriz de importancia es la matriz de conectividad. Su objetivo es mostrar qué tipo de conexión existe entre dos vértices del grafo. Si existe algún camino sólo en una dirección, si los hay en ambas direcciones, formando, por tanto, un circuito al que pertenecen ambos vértices o, finalmente, si no están ligados en absoluto. Por tanto, se trata de una matriz cuadrada, de tamaño n , como es obvio, cuyos elementos c_{ij} se obtienen a partir de los de la matriz de caminos en la forma que sigue.

Si $r_{ij}=r_{ji}=1$, el grafo contiene un camino que va de x_i a x_j y otro que va de x_j a x_i . El conjunto de vértices del grafo que cumplen esta condición forman lo que se llama una componente fuertemente conexa. Están, por tanto, integrados en un circuito del grafo. Si todos los vértices del grafo presentan esta condición, de tal forma que todos ellos son mutuamente accesibles, se dice del grafo que es fuertemente conexo. Por convención, los vértices fuertemente conexos se identifican con un 3, haciendo $c_{ij}=r_{ij}+r_{ji}+1$, mientras que los llamados simplemente conexos, para los cuáles existe algún camino que los une, pero sólo en una dirección, lo hacen con un 2. En este caso, $r_{ij}+r_{ji}=1$, y $c_{ij}=2$. Por último, si no existe relación entre los vértices, se dice que son 0-conexos y se considera que $c_{ij}=0$.

Por último, veremos el concepto de matriz de distancias, que es fundamental para estudiar las propiedades de la estructura de relaciones de un grafo. Por medio de la misma, obtendremos información acerca de la distancia que separa a dos vértices cualesquiera del grafo. Se trata de una matriz cuadrada de orden n (vértices del grafo), cuyos elementos, e_{ij} representan las distancias entre los vértices x_i y x_j . Las propiedades de esta matriz, que llamaremos $E(D)$, son las siguientes:

1. Cualquiera que sea x_i , $e_{ii}=e(x_i, x_i)=0$. Es decir, los elementos de la diagonal principal de la matriz $E(D)$ son todos nulos.
2. Si $r_{ij}=0$, $e_{ij}=\infty$. Por tanto, si no existe el camino (x_i, \dots, x_j) , la distancia entre esos dos vértices se considera como infinito.

3. e_{ij} es, precisamente, la potencia mínima n a la que debe elevarse la matriz de incidencia, $A(D)$, para que $a^{(n)}_{ij}>0$; dicho de otra forma, dado el empleo del álgebra booleana (existencia o ausencia de una relación), para que el elemento (i, j) de la n -ésima potencia de la matriz de incidencia sea igual a 1.

El concepto de distancia es importante para localizar la situación de un vértice dentro del entramado de relaciones de una estructura compleja; para determinar, por ejemplo, su centralidad o detectar si se trata de una localización periférica. Cuanto más céntrica sea la posición, menor será el número de arcos que hay que tomar para acceder a los demás vértices. En este contexto, se define el diámetro de un grafo fuertemente conexo como la longitud de la pista más larga:

$$d = \text{Max}_{x_i, x_j} e(x_i, x_j) = \text{Max}_{x_i, x_j} e_{ij}$$

A partir de esta matriz, pueden realizarse, entre otros, análisis de gran interés para el estudio de una estructura interdependiente. En estructuras completamente interdependientes no es posible encontrar relaciones de causalidad y la importancia de un vértice viene dada en función de la posición que ocupa en el entramado de relaciones.

4. Grafo asociado a un modelo lineal.

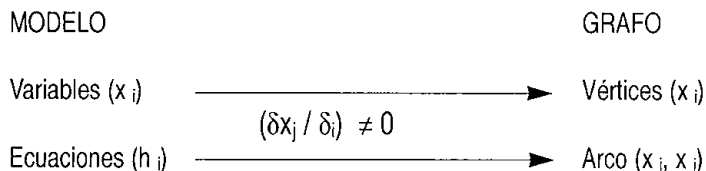
Las posibilidades de aplicación de la teoría de grafos no se limitan a aspectos cualitativos, que con ser fundamentales en el ámbito de las nociones estructurales de causalidad, dependencia e interdependencia, ciertamente no contemplan la intensidad de la influencia que circula por los arcos del grafo. Los grafos valuados y, en concreto, los de influencia, por el contrario, sí que posibilitan el estudio de la transmisión cuantitativa de la influencia en una estructura. Veremos, a continuación, el grafo valuado que puede asociarse a un modelo lineal y, por consiguiente, al modelo de Leontief (input-output), del que surgen una gran cantidad de aplicaciones en el análisis regional.

En forma muy simplificada, la relación entre un grafo valuado y un modelo lineal es la recogida en el esquema de la Ilustración 1. En resumen, puede identificar-

se las variables del modelo con los vértices del grafo y la existencia de una relación lineal entre variables con

la del arco que une los vértices representativos de las mismas.

Ilustración 1. Relación entre grafo valuado y modelo lineal



En base a esta relación entre grafo y modelo, pueden desarrollarse un conjunto de aplicaciones de indudable interés³. La valoración de los arcos con los coeficientes del sistema de ecuaciones, da lugar a un grafo valuado que refleja la estructura de las relaciones entre las variables del modelo estructural correspondiente. Pero, en general, los arcos de un grafo pueden valorarse de forma muy diversa. Desde la asignación de atributos o características no cuantitativas (Harary, Norman y Cartwright, 1969; pp.382-386), hasta probabilidades basadas en una matriz de transición de una cadena de Markov⁴, pasando por las numéricas basadas en un rango (Fontela y Gabus, 1974), las cualitativas (0 y 1), para los digrafos o grafos orientados, vistos anteriormente, o las de los llamados grafos signados (+ y -), de gran importancia para el análisis económico cualitativo (Rossier, 1980).

Un modelo lineal de características algo especiales, como se ya se ha mencionado, es el modelo abierto de Leontief. La hipótesis básica de este modelo, del que se ha hecho tanto uso y abuso, es la de funciones de producción lineales y homogéneas, lo que supone que los inputs necesarios para la producción de un sector (x_{ij}) son estrictamente proporcionales (a_{ij}) al nivel de producción del mismo (x_j). Como el modelo es suficientemente conocido, nos limitaremos a la siguiente presentación esquemática:

- Hipótesis básica: $a_{ij} = x_{ij} / x_j \Rightarrow x_{ij} = a_{ij} x_j$

- Ecuaciones de distribución (asignación) de la producción:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

⇓

$$x = Ax + y$$

⇓

$$x = (I - A)^{-1} y, \quad x \geq 0, \quad \forall y \geq 0$$

en donde,

- x = vector de producciones en valor.
- A = matriz de coeficientes técnicos de producción; $a_{ij} \in A$.
- y = vector de demanda final en valor.

Este modelo (lineal) puede ser representado mediante un grafo de influencia, cuyo esquema puede contemplarse en la ilustración 2. La estructura de impulsión viene dada por las demandas finales de los distintos sectores, variables exógenas del modelo, que son, necesariamente, vértices fuente del grafo. Las variables endógenas del modelo (producciones sectoriales) configuran la estructura de respuesta (ante los estímulos de la demanda final) y está compuesta por los restantes vértices del grafo, junto con las relaciones de interdependencia productiva (arcos del grafo) definidas por los coeficientes técnicos de producción.

3. Un resumen puede verse en Morillas (1983).

4. Véase, por ejemplo, Kreweras (1972, cap. 7). Una aplicación de este caso a una modelización del circuito keynesiano puede verse en Poulon (1980, pp. 371-409).

Los impulsos que circulan por los arcos del grafo, derivados de variaciones en la demanda final, se transmiten por los arcos y caminos de la estructura de respuesta, determinando las necesidades de producción sectoriales inducidas por dichas variaciones. En el estudio de estos impulsos o transmisión de la influencia en el grafo, se puede contemplar la influencia por los precios (modelo de oferta) o por las cantidades (modelo de demanda), tanto en términos absolutos como relativos. En el apartado siguiente nos vamos a centrar en la interpretación de la influencia por las cantidades.

5. El concepto de influencia en el grafo asociado.

Como acabamos de decir, en el modelo abierto de Leontief puede hablarse de dos tipos de influencia: la influencia por las cantidades y la influencia por los precios. En realidad, la segunda es el problema dual de la primera. Nos limitaremos a exponer el concepto de

influencia por las cantidades, que está en el origen del grafo de influencia de Lantner (1974; pp.68-75).

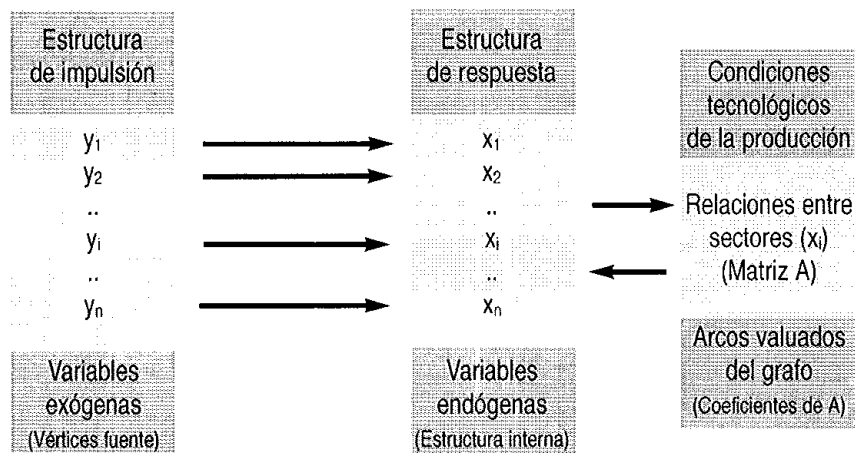
Suponiendo la constancia de los precios y bajo la hipótesis de demanda dominante, existirá la influencia del vértice-sector (i) sobre el vértice-sector j, siempre que una variación en la demanda final del sector i provoque una variación en la producción del sector j. La expresión general que expresa tal concepto será, por tanto,

$$\Delta x = A\Delta x + \Delta y \quad (4)$$

Existe la posibilidad de estudiar esta influencia en términos absolutos o en términos relativos. La influencia absoluta, $I_{(i) \rightarrow k}^c$, del vértice demandante (i) sobre el vértice productivo k, es la relación entre la variación absoluta inducida, Δx_k , en la producción del vértice k y la variación absoluta inicial, Δy_i , de la demanda del vértice fuente (j):

$$I_{(i) \rightarrow k}^c = \frac{\Delta x_k}{\Delta y_i}$$

Ilustración 2. Grafo de influencia asociado al modelo de Leontief



5. Véase, Lantner (1974; p.68). Este autor opina que el grafo de influencia en sentido estricto es el de influencia relativa.

Por otro lado, la influencia relativa, $i_{(j) \rightarrow k}^c$, del vértice demandante (j) sobre el vértice productivo k, será la relación entre la variación relativa inducida, $\Delta x_k/x_k$, en la producción del vértice k y la variación relativa inicial, (y_j/y_j) , de la demanda del vértice fuente (j):

$$i_{(j) \rightarrow k}^c = \frac{\Delta x_k/x_k}{\Delta y_j/y_j}$$

Obsérvese, por tanto, que el concepto de influencia relativa puede interpretarse como la elasticidad demanda-producción entre dos sectores productivos (Mougeot, Duru y Auray, 1977; pp.35-36).

La interpretación del concepto de influencia absoluta, se deduce cómodamente a partir de la ecuación básica del modelo abierto de Leontief, en términos de incrementos:

$$\Delta x = (I-A)^{-1} \Delta y$$

y, por tanto,

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \Delta y_j, A_{ij} \in (I-A)^{-1}$$

Si suponemos $\Delta y_i=0$, para todo $i \neq j$, tendremos

$$\Delta x_i = A_{ij} \Delta y_j$$

y, en definitiva, se deduce que,

$$i_{(j) \rightarrow k}^c = \frac{\Delta x_k}{\Delta y_j} = A_{kj}$$

Por tanto, el vértice demandante (j) ejerce una influencia absoluta sobre el polo productivo i siempre que $A_{ij} \neq 0$. Se trata de la más común de las interpretaciones, del modelo de demanda que tiene como soporte una tabla de relaciones intersectoriales.

La interpretación del concepto de influencia relativa, se obtiene, también, a partir de la misma igualdad, previa definición de la matriz D, de coeficientes de distribución o de asignación de la producción. Su elemento genérico se define como $d_{ij} = x_{ij} / x_i$. Por tanto, tendremos que $a_{ij} = d_{ij} \cdot (x_i / x_j)$.

A partir de la ecuación de asignación, en términos de incrementos, podemos escribir,

$$\Delta x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta x_i + \Delta y_j = \sum d_{ij} \frac{\Delta x_i}{x_i} x_j + \Delta y_j$$

y, por tanto,

$$\frac{\Delta x_j}{x_j} = \sum_{i=1}^n d_{ij} \frac{\Delta x_i}{x_i} + \frac{\Delta y_j}{y_j} \cdot \frac{y_j}{x_j}$$

Si llamamos $e = x^s \cdot y$, a la denominada tasa de exportación fuera de la estructura (vector de coeficientes de distribución correspondiente a la demanda final), la expresión anterior quedaría como,

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{j=1}^n d_{ji} \frac{\Delta x_j}{x_j} + e_i \frac{\Delta y_j}{y_j}$$

Esta es la expresión final que da Lantner (1974; p.72) para el grafo de influencia relativa y, generalmente, no suele ser muy utilizada. Si generalizamos a los n vértices (sectores), tendríamos que,

$$x^s \cdot \Delta x = (I - D)^{-1} e^s \cdot \Delta y \quad (1)$$

En forma ampliada, esta igualdad puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1/x_1 \\ \dots \\ \Delta x_i/x_i \\ \dots \\ \Delta x_n/x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}e_1 \dots D_{1j}e_j \dots D_{1n}e_n \\ \dots \\ D_{i1}e_1 \dots D_{ij}e_j \dots D_{in}e_n \\ \dots \\ D_{n1}e_n \dots D_{nj}e_j \dots D_{nn}e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1/y_1 \\ \dots \\ \Delta y_j/y_j \\ \dots \\ \Delta y_n/y_n \end{bmatrix}$$

por lo que, para el elemento i-ésimo, se puede obtener las variaciones relativas en su producción ante cambios relativos en la demanda final de los distintos sectores como sigue:

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij} e_j \frac{\Delta y_j}{y_j}$$

Si suponemos que $\Delta y_j/y_j$ es igual a 1 para todos los casos, la expresión $\sum_{j=1}^n D_{ij} e_j$ dará las variaciones relativas de la producción del sector i-ésimo ante un cambio relativo general unitario en todas y cada una de las demandas finales de los sectores. Bajo esta condición, de variación unitaria igual para todos ellos, se puede interpretar, por tanto, como la elasticidad de la producción del sector i-ésimo respecto a la demanda final global.

Mediante esta expresión, es posible calcular, también, las variaciones relativas en la producción de un sector i , inducidas por variaciones relativas en la demanda final del sector j , ya que si suponemos $\Delta y_k = 0$, para todo $k \neq j$, tendremos:

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = D_{ij} e_j \frac{\Delta y_j}{y_j}$$

De aquí, es inmediato deducir que la influencia relativa total del vértice (j) sobre el vértice i , o elasticidad de la producción del sector i respecto a la demanda del sector (j), viene dada por:

$$i^{(j) \rightarrow i} = \frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta y_j / y_j} = D_{ij} e_j = \epsilon_{y_i}^x$$

Es decir, existirá una influencia relativa global del vértice demandante (j) sobre el polo productivo i , siempre que, siendo $e_j > 0$, $D_{ij} \neq 0$. Y esta influencia relativa podría ser considerada, y así la llamaremos en adelante, como una elasticidad.

En definitiva, la representación de una tabla input-output mediante cualquiera de estos grafos de influencia (absoluta o relativa), permite aplicar la teoría de grafos, tanto orientados como valuados, al análisis input-output. El paso de un tipo de influencia a otra es inmediato. Si se desea estudiar la influencia por la oferta, bastará con invertir la orientación de los arcos (principio de dualidad

direccional) y si se quiere pasar de la absoluta a la relativa, por ejemplo, basta con recordar que $D = X^{-1} A X^s$.

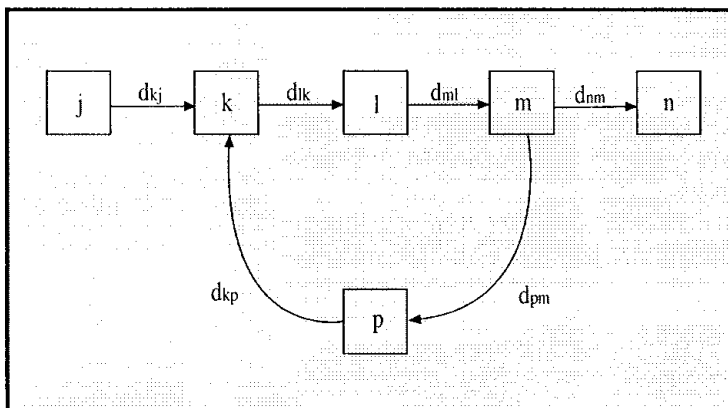
Una de las más interesantes posibilidades en este sentido es la investigación de la influencia transmitida a lo largo de un camino cualquiera del grafo. De esta forma, se puede obtener una descomposición arborescente de los multiplicadores clásicos del análisis input-output y obtener una visión cuantitativa y detallada, además de gráfica, de los senderos de la influencia dentro de una estructura productiva. Evidentemente, la importancia de este tipo de análisis para el apoyo de una política industrial adecuada es manifiesta.

Para el grafo de influencia relativa, puede demostrarse que la influencia directa que ejerce el sector j sobre el sector p , a lo largo de un camino λ , es igual al producto de las valoraciones de sus arcos (coeficientes de distribución):

$$i^{D \lambda}_{j \rightarrow p} = d_{kj} d_{lk} \dots d_{pn}$$

Pero, obviamente, los circuitos (componentes fuertemente conexas) juegan un papel importante, ya que generan efectos inducidos a tener en cuenta. Supongamos que tenemos el subgrafo de la Figura 1 y que deseamos conocer la influencia total entre los vértices (sectores) j y n .

Figura 1. Subgrafo con componente fuertemente conexas



La influencia directa de j sobre n , a través del camino $\lambda = \{j, k, l, m, n\}$, vendrá dada por:

$$i_{j \rightarrow n}^{D, \lambda} = d_{kj} d_{lk} d_{ml} d_{nm}$$

Pero, para obtener la influencia total, hay que tener en cuenta el papel del circuito o componente fuertemente conexa $s = \{k, l, m, p\}$. La influencia que llega a m se transmite a p , que, a su vez, la devuelve al camino λ , por medio del vértice k . Este proceso de retroalimentación, se sucede hasta que desaparece la perturbación inicial⁶. La influencia total del vértice j sobre el vértice n , en definitiva, puede calcularse en la forma:

$$i_{j \rightarrow n}^{T, \lambda} = d_{kj} d_{lk} d_{ml} (1 + d_{pm} d_{kp} d_{lk} d_{ml} + (d_{pm} d_{kp} d_{lk} d_{ml})^2 + \dots) + d_{nm}$$

Si al producto de las valoraciones de los arcos del circuito, generalmente llamado ganancia, le llamamos g , tendríamos que:

$$i_{j \rightarrow n}^{T, \lambda} = i_{j \rightarrow n} (1 + g + g^2 + g^3 + \dots) = \frac{1}{1-g} i_{j \rightarrow n}^{D, \lambda}$$

puesto que $g < 1$ (como se sabe, toda subestructura es estable en el modelo de Leontief).

Por tanto, podemos decir que $M_\lambda = 1/(1-g)$, es el multiplicador del camino λ , por lo que podemos escribir, finalmente,

$$i_{j \rightarrow n}^{T, \lambda} = i_{j \rightarrow n}^{D, \lambda} M_\lambda$$

Se puede demostrar, con razonamientos propios de la teoría de grafos, que este multiplicador es igual al cociente entre el determinante, Δ_λ , de la subestructura particular que resulta de eliminar los sectores que componen el camino y el llamado determinante estructural, Δ . O sea,

$$M_\lambda = \Delta_\lambda / \Delta$$

siendo $\Delta = |I-A| = |I-D|^{-1}$.

Lógicamente, puede haber más de un camino por donde circule la influencia de un vértice j sobre otro vértice i . En tal caso, se define la influencia global de j sobre i como la suma de las influencias totales que transitan por los c caminos elementales existentes:

$$I_{j \rightarrow i}^G = \sum_{k=1}^c I_{j \rightarrow i}^{T, \lambda_k}, \text{ para la influencia absoluta}$$

$$i_{j \rightarrow i}^G = \sum_{k=1}^c i_{j \rightarrow i}^{T, \lambda_k}, \text{ para la influencia relativa}$$

Como es fácil de comprender, el valor de la influencia relativa global entre dos vértices de la estructura de respuesta del grafo debe ser igual al correspondiente elemento de la inversa de $(I-D)$. Por tanto, podemos escribir lo que sigue:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{x_i} = D_{ij} e_j &= i_{j \rightarrow i}^G e_j = \left(\sum_{k=1}^c i_{j \rightarrow i}^{T, \lambda_k} \right) e_j = i_{j \rightarrow i}^{T, \lambda_1} e_j + i_{j \rightarrow i}^{T, \lambda_2} e_j + \dots + i_{j \rightarrow i}^{T, \lambda_c} e_j = \\ &= \sum_{k=1}^c \epsilon_{ij}^{x_i, \lambda_k} \end{aligned}$$

Es decir, es posible descomponer lo que venimos llamando elasticidad demanda-producto entre el vértice (sector) de demanda j y la producción del vértice (sector) i , en la suma de las influencias relativas que transitan por todos y cada uno de los caminos que unen a j con i . Esto permitiría estudiar los senderos más importantes de la influencia y los posibles efectos multiplicadores procedentes de la existencia de relaciones circulares a lo largo de los caminos. Con una tabla interindustrial suficientemente detallada y de alta fiabilidad, por tanto, podrían extraerse interesantes resultados para el desarrollo de políticas específicas. Veamos a continuación una aplicación, lógicamente limitada por el contexto en que se desarrolla este trabajo, a la economía andaluza.

6. Como es obvio, dadas las propiedades de la matriz estructural del modelo de Leontief, este proceso es convergente.

7. Véase, para lo que acabamos de exponer, a Lantner (1974) y Gazon (1976).

6. El agua como factor productivo en Andalucía: un estudio de sensibilidad.

Sin duda, tal y como refleja la Tabla Input Output de Andalucía para 1990, el agua es un factor que interviene en la función de producción de gran parte de los sectores productivos. De hecho, si bien de forma directa hay bastantes que no la utilizan como consumo intermedio,

todos la incorporan indirectamente, tal y como puede comprobarse con la matriz de caminos: el sector 14 (Agua) es accesible desde cualquier otro, a través de algún camino. Vamos, seguidamente, a obtener su sensibilidad ante variaciones porcentuales unitarias en la demanda de los demás sectores, lo que venimos llamando elasticidad demanda-producto. Los resultados obtenidos para la tabla de Andalucía de 1.990 son los de la Tabla 1.

Tabla 1.

Rama	Elasticidad	Rama	Elasticidad	Rama	Elasticidad
14	0,467906366	43	0,006109858	19	0,001596771
60	0,068092704	64	0,005801888	5	0,001532676
32	0,066112532	37	0,005675807	16	0,001531065
39	0,037151715	69	0,005384685	13	0,001489568
56	0,033153917	15	0,004835161	23	0,001473273
2	0,032662782	71	0,004766	24	0,001288736
61	0,028988062	74	0,004233941	29	0,00121975
59	0,028121	50	0,004220703	52	0,000971714
46	0,020514915	77	0,004167885	45	0,000908
75	0,020486589	35	0,004162667	36	0,000883812
25	0,020278214	40	0,003796247	18	0,000806704
78	0,01778	12	0,00355763	22	0,00078334
4	0,01445949	28	0,003263795	26	0,000636286
57	0,011804565	6	0,003230741	54	0,000591
48	0,011740534	10	0,003161943	66	0,000589005
73	0,011557	51	0,002823795	63	0,000507437
7	0,011390043	62	0,002790255	47	0,000474425
38	0,010272666	11	0,002524035	53	0,000462723
21	0,010034749	9	0,002283541	17	0,000452001
33	0,009490942	41	0,00216849	20	0,000451853
76	0,009126527	72	0,002144775	68	0,000415316
34	0,008599211	65	0,002100542	55	0,000243722
1	0,008329601	44	0,002070409	67	0,000212953
42	0,007918125	58	0,002002154	8	0,000182448
3	0,007421241	30	0,00197638	49	0,000181898
70	0,006404654	27	0,001845009	31	0,000114579

Puede observarse que, haciendo abstracción de la propia rama, la mayor sensibilidad se produce ante cambios en Restaurantes y Cafés (60) y Aceites y Grasas (32), seguidos, ya con menos importancia, de Azúcar (39), Edificación (56) y Hortalizas y frutas (2). Las elasticida-

des más bajas se dan para Instrumentos de Precisión y Medida (31) y Aserrado de Madera (49).

Si se supone un variación relativa igual, unitaria, para todos las ramas, la elasticidad de la producción de la

rama Agua respecto a la demanda total resulta ser igual a 1,091. Es este un valor muy similar al 1,122 que se ha obtenido mediante un modelo de dinámica de sistemas, elaborado para la economía y el medio ambiente en Andalucía (Morillas, Melchor y Castro, 1996).

Como aplicación de la difusión arborescente de esta elasticidad, a través de los diversos caminos de la estructura productiva andaluza, sólo veremos aquí, a título de ejemplo, los caminos que transitan entre la rama Hortalizas y Frutas (2) y la de Agua (14). Hay que hacer una advertencia: ha sido imposible abordar el cálculo de los miles de caminos que transitan entre las ramas, tomando en consideración todos los coeficientes de la tabla⁸. El criterio seguido para abordar esta aplicación ha sido, en primer lugar, evitar los caminos de retorno de la rama Agua (imponiendo el correspondiente umbral de relevancia en la valoración de los arcos), convirtiéndola en un vértice pozo del grafo, y, posteriormente, tras obtener la jerarquía sectorial de las relaciones a ese umbral (0,022), calcular los caminos entre las dos ramas anteriormente citadas, la influencia que circula por ellos y sus correspondientes multiplica-

dores. Se han obtenido, también, los caminos y elasticidades para los caminos para la rama con mayor peso en la elasticidad de la rama Agua, Restaurantes y Cafés (60), pero la presentación de los resultados son inabordable en el contexto de este artículo (son 384 los caminos resultantes).

La jerarquía sectorial resultante es la recogida en el Cuadro 1. Este cuadro representa la estructura causal de las relaciones entre ramas productivas; lo que se llamó la estructura de respuesta del grafo de influencia. Los vértices de un nivel dado pueden tener acceso a los de cualquier nivel inferior, pero nunca a otros del mismo o superior nivel. Podemos decir, por tanto, que el subgrafo formado por estos vértices y arcos, con el umbral señalado, representa la posición básica de oferta (dual de la jerarquía presentada) de la rama agua al conjunto del sistema productivo andaluz. Como siempre, en la economía andaluza, las ramas Edificación (56) y Obras Públicas (57) están a la cabeza de la jerarquía, junto con el sector público, Sanidad (73) y Administración Pública y Defensa (78).

Cuadro 1. Jerarquización de los vértices.

NIVEL 1: 27 29 30 32 48 56 57 59 67 73 75 78
 NIVEL 2: 15 16 18 19 31 47 60 74
 NIVEL 3: 2 3 13 17 26 34 35 36 38 42 43 44 76
 NIVEL 4: 5 20 64 C1={7 33 58 61}
 NIVEL 5: 9 41 68 69 70
 NIVEL 6: 24 40 46 50 52 55 63 66 72
 NIVEL 7: 37 39 49 51
 NIVEL 8: 1 4 8
 NIVEL 9: 6 53
 NIVEL 10: 22
 NIVEL 11: C2= {10 11 12 21 23 62}
 NIVEL 12: 28 65
 NIVEL 13: 25
 NIVEL 14: 14

8. La versión actual, para DOS, del programa ANAGRAF, elaborado por A. Morillas Raya y C. Romero Más ha llegado a obtener, exactamente, hasta 1989 caminos entre dos vértices de una matriz de 78x78. Por las limitaciones de memoria, se está adaptando el programa al entorno Windows.

La rama de Restaurantes y Cafés (60), la de mayor influencia, está en el segundo nivel de la jerarquía, por estar dominada, precisamente por Edificación y Obras Públicas. Como último comentario a esta jerarquía, digamos que aparecen dos bloques de ramas, circuitos del grafo, que hemos llamado C1 y C2. El primero de ellos, en el nivel 4, está formado por Ganadería (7), Industria Cárnica (33), Comercio al mayor (58) y Hostelería (61). El segundo, compuesto por ramas relacionadas con la energía y la química, es todo lo que aparece en el nivel 11 (Extractivas, Refino de Petróleo, Energía Eléctrica, Química básica, Productos Químicos para Industria y Reparaciones). Se trata, por tanto, de un circuito importante por su carácter de industria básica, que, además, hará de transmisor y multiplicador de un buen número

de relaciones de influencia procedentes de los diez niveles superiores, con destino a los niveles 12 (Construcción de Vehículos y Otros Transportes), 13 (Fabricación de Productos Metálicos, también un transmisor clave de la influencia que llega a la rama Agua) o el 14 (Agua).

Los resultados alcanzados para el estudio de la difusión de la influencia relativa entre las ramas Hortalizas y Frutas (2) y Agua (14), son los del Cuadro 2. Puede observarse que el umbral aplicado apenas cambia los resultados finales, en este caso. La causa fundamental para que este hecho ocurra es que, generalmente, la relación directa suele ser decisiva para valorar la influencia.

Cuadro 2.

INFLUENCIA TRASMITIDA POR LOS 7 CAMINOS DEL VERTICE 2 (Hortalizas y Frutas) AL 14 (Agua)				ELASTICIDAD PARCIAL DE CADA CAMINO
CAMINO: 2 14				
InflDirecta:	0.033031	Multiplicador:	1	0.0304030
DeltaCamino:	0.388023	InfluencTotal:	0.033031	
CAMINO: 2 22 21 10 62 28 25 14				
InflDirecta:	2.14947e-09	Multiplicador:	1.15569	2.2865(10) ⁻⁹
DeltaCamino:	0.448434	InfluencTotal:	2.48412e-09	
CAMINO: 2 22 21 11 10 62 28 25 14				
InflDirecta:	6.22853e-11	Multiplicador:	1.18766	6.8088(10) ⁻¹¹
DeltaCamino:	0.460837	InfluencTotal:	7.39735e-11	
CAMINO: 2 22 21 12 10 62 28 25 14				
InflDirecta:	7.39204e-11	Multiplicador:	1.49734	1.0188(10) ⁻¹⁰
DeltaCamino:	0.581001	InfluencTotal:	1.10684e-10	
CAMINO: 2 6 22 21 10 62 28 25 14				
InflDirecta:	1.14792e-11	Multiplicador:	1.15569	1.2211(10) ⁻¹¹
DeltaCamino:	0.448434	InfluencTotal:	1.32664e-11	
CAMINO: 2 6 22 21 11 10 62 28 25 14				
InflDirecta:	3.32634e-13	Multiplicador:	1.18766	3.6362(10) ⁻¹³
DeltaCamino:	0.460837	InfluencTotal:	3.95054e-13	
CAMINO: 2 6 22 21 12 10 62 28 25 14				
InflDirecta:	3.94771e-13	Multiplicador:	1.49734	5.4408(10) ⁻¹³
DeltaCamino:	0.581001	InfluencTotal:	5.91105e-13	
Influencia total global: 0.033031 (Sin umbral: 0.035486)				Elasticidad global: 0.0304031

La elasticidad global, suma de los valores observados en cada camino, coincide, como puede comprobarse, con el producto de la influencia total global por $e_2=0.92044135$.

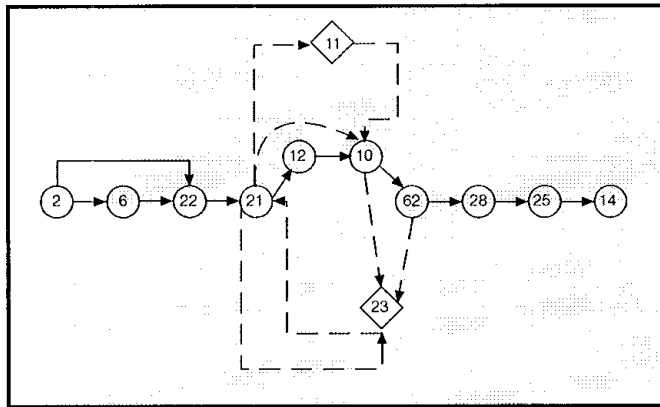
De esta forma, se muestra como no sólo es posible obtener las respuestas relativas de la producción de una rama ante cambios relativos unitarios de otra (u otras), sino que, también, gracias a la teoría de grafos, se puede obtener la descomposición de su valor global a través de los caminos

que conforman la estructura de relaciones intersectoriales. Si observamos, los caminos con mayor multiplicador (1.49734), aunque, como se ha comentado con muy poco significación absoluta en la estructura regional, son los siguientes:

CAMINO: 2 22 21 12 10 62 28 25 14

CAMINO: 2 6 22 21 12 10 62 28 25 14

Figura 2.



El primero es de longitud 9 y el segundo de longitud 10. La representación de estos caminos puede verse en la Figura 2. Para los dos caminos se han dibujado las ramas en círculos y los arcos con línea continua. Las ramas en rombos (11 y 23) y los arcos en línea discontinua, no pertenecen a ninguno de los dos caminos sino al circuito C2 (nivel 11), que es el causante del

efecto multiplicador en ambos (junto con los bucles, reempleos, si los hubiere).

Es posible obtener el efecto multiplicador de este circuito, obteniendo la influencia, en el subgrafo de la Figura 2, entre los sectores 22 y 28, incidente y adyacente, respectivamente, al mismo. Los resultados son los del Cuadro 3.

Cuadro 3. Influencia transmitida por los 3 caminos del vertice 22 al 28.

CAMINO: 22 21 10 62 28			
InflDirecta:	1.38515e-05	Multiplicador:	1.15569
DeltaCamino:	0.448434	InfluencTotal:	1.60081e-05
CAMINO: 22 21 11 10 62 28			
InflDirecta:	4.01377e-07	Multiplicador:	1.18766
DeltaCamino:	0.460837	InfluencTotal:	4.76698e-07
CAMINO: 22 21 12 10 62 28			
InflDirecta:	4.76356e-07	Multiplicador:	1.49734
DeltaCamino:	0.581001	InfluencTotal:	7.13266e-07

Influencia directa global: 1.47293e-05

Influencia total global: 1.71981e-05

Multiplicador global: 1.16761

Luego, el efecto multiplicador de las relaciones circulares existentes entre las dos ramas señaladas es del 16%. Otra cosa distinta es el volumen real de la influencia, prácticamente despreciable, en este caso. En la observación y comparación entre volumen y multiplicador

podrían estar las bases de una política regional de promoción de actividades, para conseguir los mejores efectos posibles desde el punto de vista del crecimiento y el empleo, y de una mejor gestión de recursos económicos y medio ambientales.

Bibliografía

- BERGE, C.(1962): *Teoría de las Redes y sus Aplicaciones*. Cía. Editorial Continental, S.A., 1962.
- CAHIERS DU CENTRE, ESPACE, ENVIRONNEMENT(1977): *Le digraphe*, Económica, París, 1977.
- FONTELA, E. y GABUS, A.(1974): *Structural Analysis of the World Problematique*, Dematel Report, Battelle Institut, Genève, 1974.
- GAZON, J.(1976): *Transmisión de la Influencia Economique*. Une Approche Structurale, Sirey, París, 1976.
- HARARY, NORMAN Y CARTWRIGHT(1968): *Introduction à la Theorie des Graphes Orientés. Modèles Structuraux*. París, Dunod, 1968.
- KAUFMANN, A.(1976): *Puntos y flechas: Teoría de los Grafos*. Boiserat, 1976.
- KREWERAS, G.(1972): *Graphes. Chaînes de Markov et Quelques Applications Economiques*, París, Dolloz, 1972.
- LANTNER, R.(1974): *Théorie de la Dominance Economique*, París, Dunod, 1974.
- MORILLAS, A.(1983): *La Teoría de Grafos en el Análisis Input-Output. La Estructura Productiva Andaluza*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Málaga, 1983.
- MORILLAS, A.(1995): Aplicación de la Teoría de Grafos al Estudio de los Cambios en las Relaciones Intersectoriales de la Economía Andaluza en la Década de los 80. *Contabilidad Regional y Tablas Input Output de Andalucía, 1990. Análisis de Resultados*. Volumen 1, pp. 91-141.
- MORILLAS, A.: MELCHOR, E.; CASTRO, J.M.(1996): *An Environmental and Socioeconomic Integrated System Analysis. The Case of Andalusia*. IIST International Conference of the Applied Econometrics Association, Lisbon, Portugal, April 10-12, 1996.
- MOUGEOT, D., DURU, G. y AURAY, J.P.(1977): *La Structure Productive Francaise*, París, Económica, 1977.
- ORE, O.(1962): *Theory of Graphs*, American Mathematical Society, 1962.
- ORE, O.(1970): *Les Graphes et leurs Applications*, Dunod, París, 1970.
- POULON, F.(1980): Graphe, Crise et Circuit Keynesien, *Revue d'Economie Politique*, no 4, 1980, pp. 371-409.
- ROSSIER, E.(1980): *Economie Structurale*, Económica, París, 1980.
- ROY, B.(1970): *Algèbre Moderne et Theorie des Graphes*, Dunod, París, 1970, 2 vol.