Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral II.

El nacimiento del Cálculo:

Newton y Leibniz.

Historia del Análisis Matemático

Sir Isaac Newton

- Nació el 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Lincolnshire (Reino Unido).
- Murió el 31 de marzo de 1727 en Londres (Reino Unido).

Gottfried Wilhelm von Leibniz

- Nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig (ahora Alemania).
- Murió el 14 de noviembre de 1716 en Hannover, (Alemania).

Los inventores del Cálculo

En el último tercio del siglo XVII, Newton (en 1664 - 1666) y Leibniz (en 1675) inventaron el Cálculo (de forma independiente):

- Unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, la gran variedad de técnicas diversas y de problemas que se abordaban con métodos particulares.
- Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de "cálculo" que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independientes de cualquier significado geométrico, que hacía casi automático, el uso de dichos conceptos generales.
- Reconocieron la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

Newton llamó a nuestra derivada una *fluxión* – una razón de cambio o flujo; Leibniz vio la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó el *cociente diferencial*. Newton hizo sus primeros descubrimientos diez años antes que Leibniz quien, sin embargo, fue el primero en publicar sus resultados.

Newton y el cálculo de fluxiones

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del cálculo infinitesimal datan de los llamados *Anni Mirabiles* 1665 y 1666. La Universidad de Cambridge, en la que Newton se había graduado como *bachelor of arts* en 1664, estuvo cerrada por la peste esos dos años. Newton pasó ese tiempo en su casa de Woolsthorpe y, como él mismo reconoció cincuenta años después, ése fue el período más creativo de su vida.

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas. A finales de ese mismo año, el método de fluxiones, es decir, el cálculo de derivadas. En 1666 el método inverso de fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxiones. En esos dos años también inició las teorías de los colores y de la gravitación universal. Newton tenía 24 años.

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow.

Una segunda presentación del Cálculo es la que realiza Newton en el libro *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, escrito hacia 1671 y que se publicó mucho después en 1736. Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama *fluentes*. Después se introducen las razones de cambio instantáneas de las fluentes, a las que llama *fluxiones*, que son las derivadas respecto al tiempo de las fluentes. Newton representaba a las primeras por letras $x, y, z, \ldots$ y a las segundas por letras punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$. Los incrementos de las fluentes $x, y, z, \ldots$, los representa por medio de las correspondientes fluxiones en la forma $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \ldots$, y los llama *momentos*, donde o es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. Newton desarrolló una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad etc., a dos problemas fundamentales que pueden formularse tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

Problema 1 Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación de las fluxiones.

Problema 2 Dada la velocidad de movimiento, determinar el camino recorrido en un tiempo dado. Matemáticamente: determinar la relación entre las fluentes dada la relación entre las fluxiones.

Hay que notar que Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual de ese término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables, o sea, considera relaciones entre las fluentes del tipo $f(x, y, z, \dots) = 0$, donde f para él es una expresión analítica finita o infinita. Por tanto, el primer problema planteado puede verse como un problema de derivación implícita: supuesta conocida la expresión analítica que satisfacen las fluentes $f(x, y, z, \dots) = 0$, obtener la expresión analítica $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$ que satisfacen las fluxiones. Para este problema, Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cálculos necesarios. Por ejemplo, sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituyendo x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}ox + \dot{x}^2o^2) + \\ + a(xy + \dot{x}oy + \dot{y}ox + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}ox^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividiendo por o y despreciando los demás términos que contengan a o, resulta

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Esta es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en cualquier punto (x, y) de la misma, que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Como ya hemos indicado, Newton aplica los resultados sobre fluentes y fluxiones a la resolución de multitud de problemas. Por ejemplo, con respecto a los problemas de máximos y mínimos, escribe:

> Cuando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece: si creciera, eso probaría que era menor y que lo que sigue sería más grande que lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera. Así, calcúlese su fluxión como se ha explicado en el problema 1 e iguálese a cero.

Newton usa el teorema fundamental del cálculo para realizar cuadraturas. Escribe:

> Problema 9: Determinar el área de cualquier curva propuesta.
> La resolución del problema está basada en el establecimiento de la relación entre la cantidad fluente y su fluxión (problema 2).

Newton reduce la integración al proceso inverso del cálculo de fluxiones, esto es, al cálculo de primitivas.

El problema 2, es mucho más difícil que el problema 1, pues se trata de resolver una ecuación diferencial que puede ser muy general. Newton consideró varias posibilidades resolviendo algunos casos particulares. Para ello utilizó técnicas de cálculo de primitivas y de desarrollos en serie.

En *De Quadratura Curvarum*, escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama *razones primera y última de incrementos evanescentes*. De esa forma se refiere Newton a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero ("razón primera") o se anulan ("razón última"). Un ejemplo ayudará a entender el significado de estas ideas. En la introducción de la citada obra, Newton calcula la fluxión de

x^n. Para ello, considera un incremento o de forma que x pasa a $x+o$. Entonces x^n se convierte en

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

Los incrementos de x y x^n, a saber,

$$o \quad \text{y} \quad nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

están entre sí en la misma razón que

$$1 \quad \text{a} \quad nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots$$

Dice Newton "dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a nx^{n-1}: por tanto, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x^n como $1 : nx^{n-1}$".

Hay distintas interpretaciones de las razones que llevaron a Newton a exponer su cálculo de una u otra forma. La más extendida es que su intención era conseguir una fundamentación rigurosa del mismo. La primera exposición, basada en el concepto de cantidad infinitesimal, entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia lógica de los que Newton era muy consciente. En sus propias palabras, su cálculo estaba *"concisamente explicado más que exactamente demostrado"*.

En *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1671), el concepto básico es el de cantidad en movimiento o que fluye continuamente en el tiempo. Las magnitudes están generadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales; la idea básica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. Quizás Newton pretendía de esta forma evitar el uso de "infinitesimales estáticos o geométricos", pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fluentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracción matemática análoga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todas las fluentes. Puede verse aquí un intento de Newton por evitar los problemas matemáticos del continuo (infinitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo físico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantánea de las fluentes, no le pareció preciso definirla.

En *Quadrature of Curves* (1676), Newton expresa su propósito de abandonar por completo el uso de cantidades infinitesimales. Manifiesta en este sentido que *"errores quam minimi in rebus* *mathematicis non sunt contemnendi*", esto es, que en matemáticas ni siquiera los errores más pequeños pueden ser admitidos. Y eso es justamente lo que se hacía cuando se despreciaban en los cálculos cantidades infinitesimales. Seguidamente, enuncia su teoría de las "*razones primera y última de cantidades evanescentes*". Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Pero estamos en el siglo XVII y se necesitarán casi 200 años para precisar matemáticamente el concepto de límite. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento.

> Por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera, ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes, la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen.

Newton tenía su particular idea de "límite".

> Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tiende a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente

> decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan in infinitum.

La teoría de las razones últimas puede verse como una teoría cinemática de límites. Con esta teoría, Newton pretendía recuperar el rigor de la geometría de la Antigüedad.

> [. . .] investigar las razones primera y última de cantidades finitas, nacientes o evanescentes, está en armonía con la geometría de los antiguos; y me he esforzado en probar que, en el método de fluxiones, no es necesario introducir en la geometría cantidades infinitamente pequeñas.

Otros autores opinan que estos tres métodos empleados por Newton responden, más que a fundamentar con rigor su cálculo, a distintos propósitos. Así, la teoría de fluxiones proporciona métodos heurísticos de descubrimiento y algoritmos útiles para el calculo; la teoría de "razones primera y última" serviría al propósito de proporcionar demostraciones convincentes y el uso de los infinitésimos serviría para proporcionar atajos a las pruebas más rigurosas. Newton usó simultáneamente estas tres aproximaciones en la resolución de una gran variedad de problemas.

Newton realizó también contribuciones importantes en la teoría de ecuaciones, donde podemos destacar las "identidades de Newton" para la suma de las potencias de las raíces de una ecuación polinómica, y a la teoría de curvas, siendo notable su clasificación de las curvas de tercer grado.

> *Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.* Leibniz

Las tres obras consideradas, escritas entre 1666 y 1676, se publicaron ya en el siglo XVIII, por eso la primera noticia impresa de la teoría de fluxiones apareció, de forma bastante circunstancial, en la obra magna de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición se hizo en 1687. Los *Principia* consta de tres libros escritos en el estilo tradicional a la manera de los *Elementos* de Euclides, y su lenguaje es principalmente el de la geometría sintética.

Los *Principia* están considerados como la obra científica más importante de todos los tiempos y una hazaña intelectual incomparable por sus logros y sus consecuencias. En dicha obra Newton estable los fundamentos de la mecánica y enuncia las tres célebres leyes del movimiento, así como la ley de la gravitación universal. En los dos primeros libros, se estudia el movimiento de los cuerpos en el vacío y en un medio resistente. Newton deduce matemáticamente las tres leyes que Kepler había obtenido empíricamente. En el libro III, titulado *Sobre el Sistema del Mundo*, Newton desarrolla la mecánica celeste. Hace un detallado estudio de los movimientos de la Luna, explicando las causas de las mareas. Calcula la masa del Sol con respecto a la de la Tierra, estudia la precesión de los equinoccios, predice el achatamiento de la Tierra por los polos . . . .

En los *Principia* el mundo aparece como un sistema ordenado y armonioso en el que todo, los cielos, la tierra y el mar, obedecen unas pocas leyes matemáticas fundamentales. A partir de Newton quedará claro que no hay diferencias entre un mundo sublunar y otro supralunar, ni entre la Tierra y el Cielo; las leyes de la Naturaleza no hacen estas distinciones y en todas partes del Universo los procesos obedecen a las mismas leyes naturales inexorables.

El Universo newtoniano es un Cosmos diáfano y sereno ofrecido a la exploración racional del hombre. La gran obra de Newton proporcionará a la Ilustración, en el siglo XVIII, la base científica necesaria para acabar con una concepción conservadora y absolutista del poder político apoyada en dogmáticas concepciones religiosas.

El prestigio y admiración que gozó Newton en vida queda reflejado en las palabras de Alexander Pope:

Nature, and Nature's Laws lay hid in Night:

> *God said*, Let Newton be – *and All was light.*

Y ¿qué pensaba el propio Newton de sí mismo? Escuchemos sus palabras, ya casi al final de su vida.

> No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero a mí me parece haber sido solamente como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte al encontrar de vez en cuando una piedra más pulida o una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad yace ante mí completamente desconocido.

Newton murió en la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster entre los grandes hombres de Inglaterra.

Leibniz y el cálculo de diferencias

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nació en Leipzig (Alemania) en el seno de una piadosa familia luterana. A los quince años entró en la Universidad de su ciudad natal donde estudió una gran variedad de materias incluyendo derecho, teología, filosofía y matemáticas. Se doctoró a la edad de 21 años en la Universidad de Altdorf, en Nuremberg, donde le fue ofrecido un puesto de profesor que él rechazó.

A lo largo de su vida, Leibniz realizó múltiples actividades. Como abogado y diplomático trabajó para el Príncipe elector arzobispo de Maguncia y, desde 1676 hasta su muerte, para los Duques de Brunswick-Luneburgo (conocidos como príncipes electores de Hanover desde 1692), lo que le llevó a viajar por gran parte de Europa. Inventó una máquina de calcular, la primera máquina de este tipo capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Como ingeniero trabajó en prensas hidráulicas, molinos de viento y desarrolló proyectos para drenar el agua de las minas de plata de las montañas de Harz en la Baja Sajonia. Como historiador escribió la historia de la casa de Brunswick, realizando muchas investigaciones genealógicas. Trabajó también como bibliotecario en la ciudad de Hanover.

Leibniz fue un pensador profundo. Como filósofo se propuso la creación de un álgebra del pensamiento humano, algo así como un lenguaje simbólico universal para escribir los razonamientos con símbolos y fórmulas, cuyas reglas de combinación permitieran reducir todo discurso racional a cálculos rutinarios. Esto explica el gran interés de Leibniz en desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo; de hecho, su notación, muy superior a la de Newton, es la que usamos actualmente. Leibniz fundó la Academia de Ciencias de Berlín en 1700 y fue su primer presidente; también fue uno de los fundadores de la primera revista científica alemana, el *Acta Eruditorum*.

Aunque Leibniz publicó poco, mantuvo correspondencia con más de 600 eruditos y se han conservado sus manuscritos que están en el archivo que lleva su nombre en la ciudad de Hannover. Las contribuciones de Leibniz al álgebra (determinantes, resolución de ecuaciones), la historia natural, la geología y la lingüística son también importantes.

En 1672, estando en París en misión diplomática, Leibniz se dedicó intensamente al estudio de la matemática superior teniendo como guía al matemático y físico Christian Huygens (1629 - 1695). En los años 1673 y 1676 realizó, también en misión diplomática, dos viajes a Londres donde tuvo acceso al manuscrito de Newton *De Analysi*, circunstancia que se usó para acusar, hoy sabemos que sin motivo alguno, a Leibniz de plagio cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del Cálculo. Los progresos matemáticos realizados por Leibniz en estos cuatro años fueron extraordinarios.

En las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, b_4 = a_4 - a_3, \dots, b_n = a_n - a_{n-1}, \dots$$

Leibniz se había dado cuenta de la relación:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n$$

lo que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de "diferencial", el cual tuvo para él diferentes significados en distintas épocas.

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Con una tal curva se asocia una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva y son algo así como los "vértices" de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la *diferencial* de x y se representa por $\mathrm{d}x$, significado análogo tiene $\mathrm{d}y$. El diferencial $\mathrm{d}x$ es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x, de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por $\mathrm{d}s$. Resulta así el *triángulo característico* de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow.

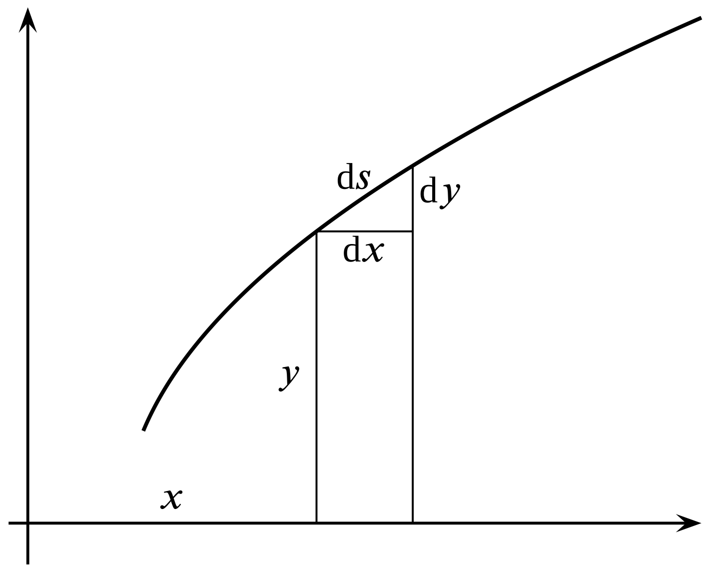

Figura 1. Triángulo característico

Curiosamente, los términos "abscisa", "ordenada" y "coordenadas", tan propios de la geometría analítica, no fueron usados nunca por Descartes sino que son debidos a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de "diferenciales", Leibniz siempre hablaba de "diferencias".

El triángulo característico tiene lados infinitesimales $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}s$ y se verifica la relación $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$. El lado $\mathrm{d}s$ sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó *cociente diferencial*. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

Leibniz investigó durante algún tiempo hasta encontrar las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes. Dichas reglas se expresan fácilmente con su notación diferencial:

$$\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

La manera en que Leibniz llegó a estas fórmulas pudo ser como sigue. Consideremos

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Entonces

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1}\sum_{j=1}^{n} x_j \tag{1}$$

Si interpretamos, al estilo de Leibniz, que x_j e y_j son diferencias de valores consecutivos de las cantidades x e y respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrán dados por las sumas respectivas $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$, mientras que $\mathrm{d}x = x_{n+1}$ y $\mathrm{d}y = y_{n+1}$ por ser diferencias de valores consecutivos. De la misma forma, $z_{n+1} - z_n$ sería la diferencial de $z = xy$. Por tanto, la igualdad 1 es interpretada por Leibniz en la forma $\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$, lo que lleva a la regla para la diferencial de un producto.

A partir de la regla para la diferencial de un producto, Leibniz obtuvo la regla correspondiente para la diferencial de un cociente $z = \frac{x}{y}$. Poniendo $x = zy$ se tiene que $\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}y$, de donde despejando $\mathrm{d}z$, resulta:

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x - z\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y}{y} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$

Consideremos ahora una curva como la de la figura 2 con una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud unidad.

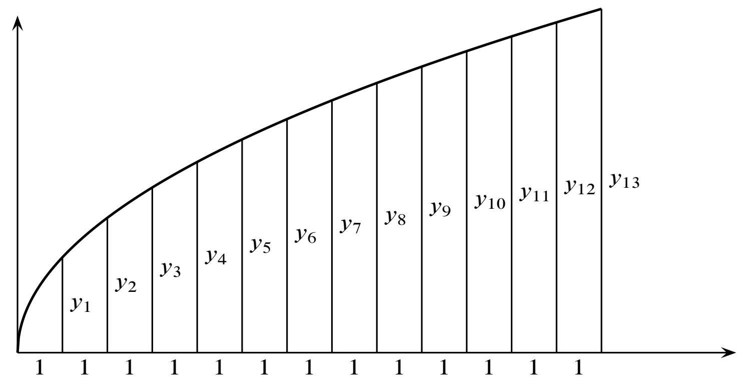

Figura 2. Aproximación de una cuadratura

La suma de las ordenadas es una aproximación de la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas.

Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, dedujo Leibniz que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integración y el origen de sus notaciones para la integral y los diferenciales, pueden seguirse con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. En 1676 Leibniz ya había obtenido prácticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicación sobre cálculo diferencial fue el artículo de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, que fue publicado en *Acta Eruditorum* hace ya más de tres siglos, en 1684. En este trabajo, Leibniz definía el diferencial $\mathrm{d}y$ de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades infinitesimales. Poco después, en 1686, Leibniz publicó un trabajo con sus estudios sobre la integración.

Reconocido hoy día como un genio universal, Leibniz vivió sus últimos años en Hannover en un aislamiento cada vez mayor y murió el 14 de noviembre de 1716. A su entierro solamente asistió su secretario.

El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que Newton entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede considerarse el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow. Este trabajo, además de contener el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series infinitas, contiene también un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. La exposición que hace Newton de esta relación fundamental es como sigue. Supone una curva y llama z al área bajo la curva hasta el punto de abscisa x (ver figura 3). Se supone conocida la relación entre x y z. Aunque Newton explica su método con un ejemplo, queda perfectamente claro su carácter general.

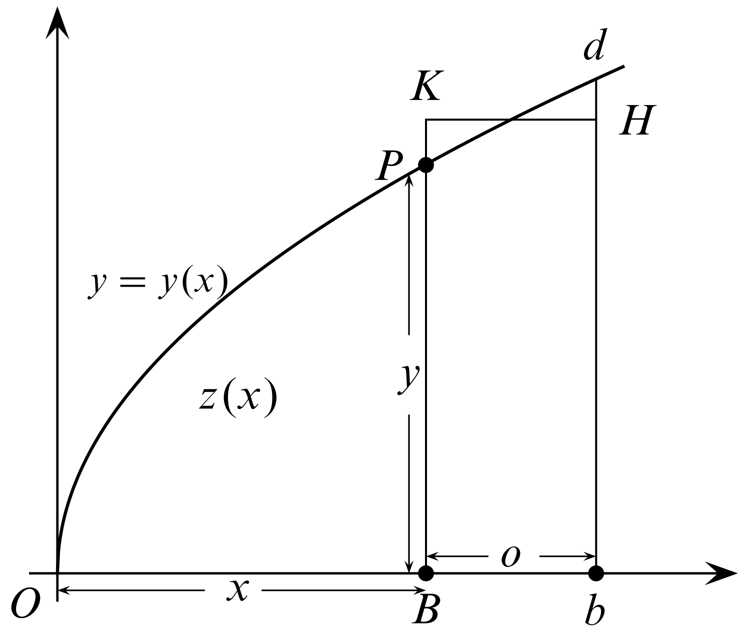

Figura 3. $z = z(x) =$ área OPB

El ejemplo que Newton considera es

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}} \tag{2}$$

Pongamos, por comodidad $r = \frac{m+n}{n}$. Newton se imagina que el punto $P = (x, y)$ se mueve a lo largo de la curva y razona como sigue. Incrementemos la abscisa x a $x + o$ donde o es una cantidad infinitesimal o *momento*. Tomemos $BK = v$ de forma que $ov = \text{área } BbHK = \text{área } BbPd$. El incremento del área viene dado por:

$$ov = z(x+o) - z(x) = \frac{a}{r}(x+o)^r - \frac{a}{r}x^r \tag{3}$$

Desarrollando en potencias

$$\frac{a}{r}(x+o)^r = \frac{a}{r}x^r(1+o/x)^r =$$

$$\frac{a}{r}x^r\left(1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{o^2}{x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{o^3}{x^3} + \cdots\right) \tag{4}$$

De (3) y (4) deducimos, después de dividir por o, que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2}ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}o^2x^{r-3} + \cdots$$

Si en esta igualdad suponemos que o va disminuyendo hasta llegar a ser nada, en cuyo caso v coincidirá con y, después de eliminar los términos que contienen o que desaparecen, resulta que:

$$y = ax^{r-1} = ax^{\frac{m}{n}} \tag{5}$$

Este es, por tanto, el valor de la ordenada de la curva en $P = (x, y)$. El proceso puede invertirse y, de hecho, ya se sabía que la cuadratura de (5) viene dada por (2).

Observemos que Newton no ha usado el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como un límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que ha probado que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta estudiando la variación momentánea de dicha expresión. De hecho, lo que Newton ha probado es que la razón de cambio del área bajo la curva, esto es, el cociente

$$\frac{z(x+o) - z(x)}{o}$$

se hace igual a la ordenada de la curva cuando o "se hace nada". En términos actuales, la derivada de $z(x)$ es la función $y = y(x)$. La relación simétrica entre cuadraturas y derivadas queda así puesta claramente de manifiesto. Para calcular cuadraturas, basta con calcular una antiderivada, lo que llamamos una primitiva de la función $y = y(x)$.

La invención del *calculus summatorius* por Leibniz

Principales ideas que guiaron a Leibniz en la invención del Cálculo:

- La creación de un simbolismo matemático que automatizara los cálculos y permitiera formular fácilmente procesos algorítmicos.
- La apreciación de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra.
- La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitudes infinitesimales y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

Se conservan en el archivo Leibniz en Hannover los manuscritos que contienen las investigaciones de Leibniz sobre los problemas de cuadraturas. En dichos documentos, fechados del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675, Leibniz investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de cuadraturas e introduce los símbolos que actualmente usamos para la integral y la diferencial. Algunos de los resultados de Leibniz en estos manuscritos son casos particulares de la regla de integración por partes, como, por ejemplo, la siguiente igualdad (se supone $f(0)=0$):

$$\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_0^a f'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \tag{6}$$

Por supuesto, Leibniz no la escribe así. La notación que usamos para la derivada se debe a Lagrange y es bastante tardía, de finales del siglo XVIII. Además, la notación que usamos para indicar los límites de integración fue introducida por J. Fourier en el primer tercio del siglo XIX. Incluso el término "integral" no se debe a Newton ni a Leibniz. Leibniz llamó *calculus differentialis*, esto es "cálculo de diferencias", a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea "cálculo de sumas", a la que se ocupa de problemas de cuadraturas. Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, "$\int$" tiene forma de una "s" alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*, o sea, "suma". Fue Johann Bernoulli quien, en 1690, sugirió llamar *calculus integralis* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término "integral" que usamos actualmente.

De hecho, Leibniz obtuvo la fórmula (6) antes de inventar su notación para las integrales y las diferenciales. Es interesante mostrar cómo lo hizo. Para ello vamos a seguir el camino opuesto al seguido por Leibniz, modificando la notación de dicha fórmula hasta llegar a escribirla como lo hizo él.

Podemos interpretar gráficamente la igualdad (6) sin más que observar la figura 4.

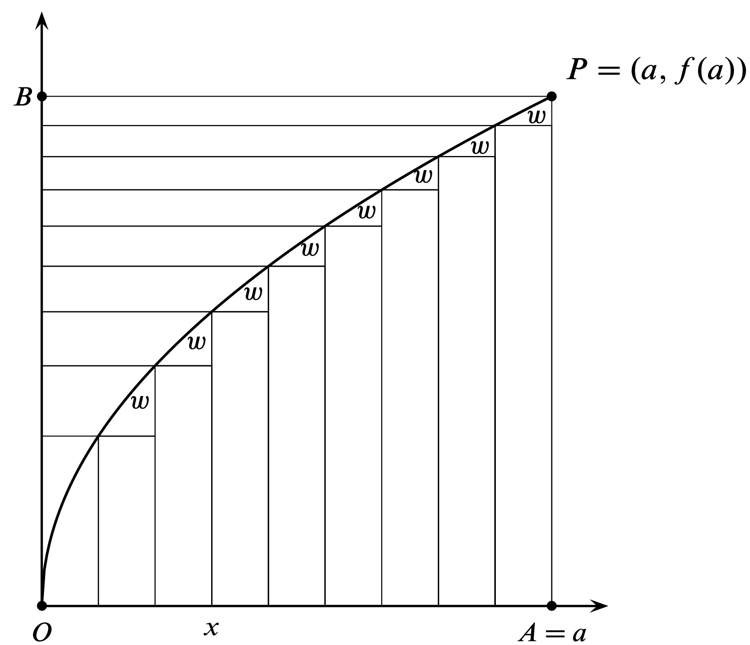

Figura 4. Áreas complementarias

El número $af(a)$ es el área del rectángulo $OAPB$, la integral $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte de dicho rectángulo OAP que queda bajo la curva $y = f(x)$. Deducimos de (6) que la integral $\int_0^a xf(x)\,\mathrm{d}x$ es el área de la parte OBP de dicho rectángulo que queda por encina de la curva $y = f(x)$. Esta área es la suma de las áreas de rectángulos horizontales como los representados en la figura 4. Estos rectángulos horizontales tienen como base el valor de la abscisa correspondiente, x, y como altura la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz representa por w. Esta diferencia es lo que posteriormente se llamará diferencial de y. Podemos, pues, interpretar que $w = \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Por su parte, el área de la región OAP es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas y. Finalmente, podemos eliminar y porque para Leibniz el valor de una variable puede obtenerse sumando sus diferencias consecutivas, por eso, y puede verse como la suma de las w. Esto equivale, en nuestra notación, a sustituir $f(x)$ por $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ (o, al estilo de Leibniz, y por $\int \mathrm{d}y$), lo que también hemos hecho en la igualdad (6). La forma exacta en que Leibniz escribió la igualdad 6 es:

$$\mathrm{omn.}\,\overline{xw} \sqcap \mathrm{ult.}\,x,\ \overline{\mathrm{omn.}\,w,} - \overline{\mathrm{omn.}\,\mathrm{omn.}\,w} \tag{7}$$

Aquí $\sqcap$ es el símbolo para la igualdad, "ult. x" significa el *ultimus* x, el último de los x, es decir, $OA = a$. El símbolo "omn." es la abreviatura de *omnes lineae*, "todas las líneas", símbolo que había sido usado por Cavalieri y que Leibniz usa con el significado de "una suma". Se usan también líneas por encima de los términos y comas donde ahora pondríamos paréntesis.

En un manuscrito posterior en algunos días, Leibniz vuelve a escribir la igualdad 7 en la forma:

$$\mathbf{omn.}\, x\ell \sqcap x\, \mathbf{omn.}\, \ell - \mathbf{omn.}\, \mathbf{omn.}\, \ell, \tag{8}$$

y observa que omn. antepuesto a una magnitud lineal como ℓ da un área; omn. antepuesto a un área como $x\ell$ da un volumen y así sucesivamente.

> ... Estas consideraciones de homogeneidad dimensional parecen haber sido las que sugirieron a Leibniz el usar una única letra en vez del símbolo "omn.", porque escribe a continuación: "Sería conveniente escribir "$\int$" en lugar de "omn.", de tal manera que $\int \ell$ represente omn.ℓ, es decir, la suma de todas las ℓ". Así fue como se introdujo el signo "$\int$" [. . .] E inmediatamente a continuación escribe Leibniz la fórmula (8) utilizando el nuevo formalismo:
>
> $$\int x\ell = x \int \ell - \int \int \ell \tag{9}$$

haciendo notar que:

$$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

y subrayando que estas reglas se aplican a "las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada", es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.

Una líneas más adelante nos encontramos también con la introducción del símbolo "d" para la diferenciación. Aparece en el contexto de un brillante razonamiento que puede resumirse de la forma siguiente: el problema de las cuadraturas es un problema de suma de sucesiones, para lo cual hemos introducido el símbolo "$\int$" y para el que queremos elaborar un *cálculo*, es decir, un conjunto de algoritmos eficaces. Ahora bien, sumar sucesiones, es decir hallar una expresión general para $\int y$ dada la y, no es posible normalmente, pero siempre lo es encontrar una expresión para las diferencias de una sucesión dada. Así pues, el cálculo de diferencias es la operación recíproca del cálculo de sumas, y por lo tanto podemos esperar dominar el cálculo de sumas desarrollando su recíproco, el cálculo de diferencias. Para citar las mismas palabras de Leibniz:

> Dada ℓ y su relación con x, hallar $\int \ell$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int \ell = ya$ y sea $\ell = ya/d$; entonces de la misma

manera que la $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa una suma y d una diferencia, y de la y dada podemos encontrar siempre y/d o ℓ, es decir, la diferencia de las y.

Así se introduce el símbolo "d" (o más bien el símbolo "$1/d$"). [...] De hecho, pronto se da cuenta de que ésta es una desventaja notacional que no viene compensada por la ventaja de la interpretación dimensional de la $\int$ y de d, y pasa a escribir "$d(ya)$" en vez de "ya/d", y de ahí en adelante son interpretadas la d y la $\int$ como símbolos adimensionales [...].

En el resto del manuscrito Leibniz se dedica a explorar este nuevo simbolismo, al que traduce viejos resultados, y a investigar las reglas operacionales que rigen la $\int$ y la d.

Esta larga cita, extraída del trabajo de H.J.M. Bos *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana*, nos da una idea de cómo llegó Leibniz a la invención del cálculo. No fueron los caminos del razonamiento lógico deductivo los seguidos por Leibniz sino los de la intuición, la conjetura, el estudio de casos particulares y su generalización... Los mismos caminos que hoy siguen los matemáticos activos en sus trabajos de investigación. Pese a que los conceptos que maneja Leibniz son oscuros e imprecisos fue capaz de desarrollar algoritmos de cálculo eficaces y de gran poder heurístico.

Newton y las series infinitas

Newton había leído la obra de Wallis *Arithmetica Infinitorum*, y siguiendo las ideas de interpolación allí expuestas, descubrió la serie del binomio que hoy lleva su nombre. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, que era bien conocido para exponentes naturales, y había sido muy usado por Pascal para resolver una gran variedad de problemas.

Newton, en su intento de calcular la cuadratura del círculo, es decir, de calcular la integral $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$, consideró dicha cuadratura como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas $\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ conocidas para exponentes naturales $n \in \mathbb{N}$. Newton tuvo la ocurrencia de sustituir el límite superior de integración por un valor genérico x. De esta forma obtuvo las siguientes cuadraturas (Newton no disponía de símbolo para la integral;

usamos, claro está, la notación actual).

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1-t^2)\,\mathrm{d}t &= x - \frac{1}{3}x^3 \\
\int_0^x (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \\
\int_0^x (1-t^2)^3\,\mathrm{d}t &= x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \\
\int_0^x (1-t^2)^4\,\mathrm{d}t &= x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9
\end{aligned}$$

Newton observó que el primer término de cada expresión es x, que x aumenta en potencias impares, que los signos algebraicos se van alternando, y que los segundos términos $\frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3$, $\frac{4}{3}x^3$ estaban en progresión aritmética. Razonando por analogía, supuso que los dos primeros términos de $\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ deberían ser

$$x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$$

De la misma manera, procediendo por analogía, pudo encontrar algunos términos más:

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{1}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Representando para $n = 0, 1, 2, \ldots$ por $Q_n(x)$ el polinomio $\int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$, se tiene que

$$Q_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}, \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Haciendo ahora en $Q_n(x)$, $n = 1/2$, se obtiene

$$Q_{1/2}(x) = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{1}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Lo que llevó a Newton a concluir que

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t = Q_{1/2}(x)$$

Donde $Q_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ es una suma con infinitos términos. A partir de aquí, Newton dedujo el desarrollo de $(1-x^2)^{1/2}$ por derivación.

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \cdots$$

Newton nunca publicó su teorema binomial, ni dio una demostración general del mismo. La primera vez que apareció en un texto impreso fue en 1685 en un libro de Wallis (que reconoce la autoría de Newton), titulado *Treatise of Algebra*. Newton mismo, en una carta a Henry Oldenburg, el secretario de la Royal Society, conocida como la *Epistola Prior* (junio de 1676), expone el teorema binomial, a requerimiento de Leibniz, con estas oscuras palabras:

Las extracciones de raíces resultan muy abreviadas por el teorema

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc}$$

donde $P+PQ$ representa una cantidad cuya raíz o potencia, o cuya raíz de una potencia se necesita calcular, siendo P el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes divididos por el primero, y $\frac{m}{n}$ el índice numérico de las potencias de $P+PQ$... Por último $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, $C = \frac{m-n}{2n}BQ$ y así sucesivamente.

Newton era consciente de que su forma de razonar por analogía no era rigurosa por lo que comprobó su resultado de varias formas. Aplicó su algoritmo a diversos resultados conocidos, comprobando que las soluciones obtenidas eran siempre correctas, redescubrió la serie de Mercator para el logaritmo y obtuvo las series del arcoseno y del seno.

Newton encontró que el método de desarrollos en serie proporcionaba un algoritmo casi universal para calcular cuadraturas y resolver multitud de problemas. En su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, escrita en 1669 y publicada en 1711, aunque circulaba en forma manuscrita entre los colegas y conocidos de Newton, propuso un método para cuadrar una curva consistente en tres reglas:

1. El área bajo la curva de ecuación $y = ax^{m/n}$ es $\dfrac{na}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$.
2. Si la ecuación $y = y(x)$ de la curva está dada por un número finito de términos $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$, el área bajo la curva y es igual a la suma de las áreas de todos los términos y_1, y_2, y_3,. . .
3. Si la curva tiene una forma más complicada, entonces debe desarrollarse la ecuación de la curva en una serie del tipo $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

Debe notarse que Newton supuso que cualquier cantidad analíticamente expresada podía desarrollarse en una serie de la forma $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, serie que puede ser cuadrada término a término usando la regla 1.

Veamos un ejemplo de esta forma de proceder. Se trata de calcular $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,\mathrm{d}x$. Newton procede como sigue

$$(x - x^2)^{1/2} = x^{1/2}(1 - x)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{1}{128}x^{9/2} - \cdots$$

Por tanto

$$\int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2}\, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{5}x^{5/2} - \tfrac{1}{28}x^{7/2} - \tfrac{1}{72}x^{9/2} - \tfrac{5}{704}x^{11/2} - \cdots\right]_0^{1/4}$$
$$= \tfrac{2}{3\cdot 2^3} - \tfrac{1}{5\cdot 2^5} - \tfrac{1}{28\cdot 2^7} - \tfrac{1}{72\cdot 2^9} - \tfrac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots \qquad (10)$$

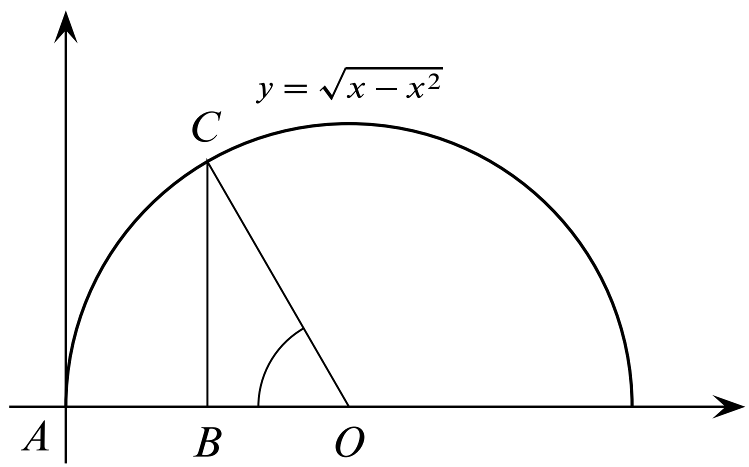

Figura 5. Cuadratura $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\, \mathrm{d}x$

En la figura 5 se ha representado el semicírculo de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$. El sector circular COA tiene amplitud $\pi/3$ por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo, es decir, $\pi/24$. Como $BC = \sqrt{3}/4$, el área del triángulo BOC es $\sqrt{3}/32$. Por otra parte, la integral calculada en (10) es el área de la región ACB. Por tanto:

$$\int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{\pi}{24}$$

Deducimos que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots\right)$$

Y de esta forma, Newton expresa la cuadratura del círculo por medio de una serie infinita que, además, converge rápidamente.

La confianza de Newton en los procesos infinitos queda reflejada en las siguientes palabras de la citada obra *De analysi*:

> Todo lo que el análisis común [es decir, el álgebra] realiza por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas, de

> tal forma que no he tenido ninguna duda en darle asimismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento es éste no es menos cierto que en el otro; ni las ecuaciones menos exactas; aunque nosotros los mortales, cuyo poder de razonamiento está confinado dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni tampoco concebir todos los términos de esas ecuaciones como para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que deseamos. . . Para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente al *Arte Analítica*, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométricamente las áreas, longitudes, etc., de curvas.

Es decir, Newton no sólo descubrió el teorema binomial sino que las series infinitas proporcionaban un método de análisis con la misma consistencia interna que el álgebra de ecuaciones finitas.

Desarrollo del cálculo diferencial

Aunque las publicaciones de Leibniz eran breves y difíciles de leer, su cálculo, más sencillo de entender que el de Newton y provisto de una excelente notación, triunfó pronto en el continente europeo logrando grandes éxitos, mientras que en Inglaterra la fidelidad a la teoría de fluxiones y a la notación newtoniana condujo a un cierto aislamiento, agravado por sentimientos nacionales y la disputa sobre la prioridad, y no consiguió éxitos comparables a los del continente.

Los hermanos Jakob y Johann Bernouilli, matemáticos y profesores de la universidad de Basilea, estudiaron los trabajos de Leibniz con quien iniciaron una productiva correspondencia. A partir de 1690 publicaron una serie de trabajos en el *Acta Eruditorum* y en otras revistas, poniendo de manifiesto que el cálculo de Leibniz era una herramienta poderosa con la que había que contar. Para divulgar dicha herramienta era preciso un buen libro de texto que explicara con detalle los pormenores del nuevo cálculo. Dicho libro apareció bien pronto, en 1696, y su autor fue el matemático y noble francés Guillaume François, marqués de L'Hôpital. El título del libro era *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Hoy sabemos que los resultados originales que aparecen en dicho libro son debidos no a L'Hôpital sino a su profesor Johann Bernouilli.

En su libro, L'Hôpital desarrollaba el cálculo diferencial tal como había sido concebido por Leibniz, es decir, usando cantidades infinitesimales para las que se establecían ciertas reglas de cálculo. La definición de diferencial es como sigue: *"La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad"*. Para trabajar con infinitésimos se establece la siguiente regla: *"Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra"*.

Los escritos de los Bernouilli, Leibniz y L'Hôpital popularizaron el cálculo leibniziano y ya en la primera década del siglo XVIII otros matemáticos se interesaron por él. La potencialidad del concepto de derivada se puso de manifiesto en las aplicaciones del cálculo a la física newtoniana.

Resumimos muy esquemáticamente los puntos clave en el desarrollo del cálculo diferencial.

- El descubrimiento en 1715 por Brook Taylor de las llamadas series de Taylor, que se convirtieron en una herramienta básica para el desarrollo del cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales.

- El extraordinario trabajo, tanto por su asombrosa amplitud como por sus notables descubrimientos, de Leonhard Euler (1707 - 1783) que, sin duda, es la figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. En sus tres grandes tratados, escritos en latín, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentiales* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768), Euler dio al cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables o, más exactamente, de cantidades geométricas variables, y de ecuaciones, se fue transformando, por influencia de Euler, en un cálculo de funciones.
- La propuesta de Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) de fundamentar el cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no era acertada, su propuesta, concretada en su obra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones más tradicionales. De hecho, la terminología "función derivada", así como la notación $f'(x)$ para representar la derivada de una función f, fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de este momento la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa (fluxión o cociente diferencial) y empieza a ser considerada simplemente como una función.
- Los problemas planteados por las series de Fourier. Dichas series hacen sus primeras apariciones a mitad del siglo XVIII en relación con el problema de la cuerda vibrante, y nacen

oficialmente en el trabajo de Joseph Fourier (1768 - 1830) *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Tales series plantean problemas relacionados con las ideas centrales del análisis: el concepto de función, el significado de la integral y los procesos de convergencia.

- El proceso de "algebraización del análisis" que tiene lugar en los dos últimos tercios del siglo XIX y que culmina con la fundamentación del análisis sobre el concepto de límite (Bolzano, Cauchy, Weierstrass) y la teoría de los números reales (Dedekind, Cantor).