4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

4.1: Definição e conceitos básicos

Definição 1.1: Uma **equação diferencial ordinária** é uma equação da forma $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ ou $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e algumas das suas derivadas em ordem a x.

Exemplos 1.2:

1) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$; 2) $y'' + y' = x$; 3) $\left(x^2 - y^2\right)dx - (x + y)dy = 0$.

Definição 1.3: Chama-se **ordem da equação diferencial** à maior das ordens das derivadas que nela aparecem.

Por exemplo,

- a equação diferencial $y' + x = e^x$ é de primeira ordem;
- a equação diferencial $y^{(9)} - xy'' = x^2$ é de nona ordem;
- a equação diferencial $\frac{d^2 s}{dt^2} - 3\frac{ds}{dt} + 2s = t^2$ é de segunda ordem.

"Resolver" a equação diferencial consiste em encontrar funções $y = y(x)$ que a satisfaçam.

Definição 1.4: Chama-se **solução de uma equação diferencial** de ordem *n* no intervalo *I* a uma função $y = g(x)$ definida nesse intervalo, juntamente com as suas derivadas, até à ordem *n*, que satisfaz a equação diferencial, ou seja,

$$f\left(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n)}(x)\right) = 0, \forall x \in I .$$

Exemplo 1.5: Mostre que $y = Ce^{x}$ é uma solução da equação $y' - y = 0$.

Resolução: De $y = Ce^{x}$ resulta que $y' = Ce^{x}$. Substituindo na equação dada as expressões de y e y', obtém-se $Ce^{x} - Ce^{x} = 0$, pelo que a função $y = Ce^{x}$ satisfaz a equação diferencial dada, qualquer que seja o valor da constante arbitrária C.

Exemplo 1.6: Mostre que a função $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + C_1 e^{-x^2}$ é solução da equação $y' + 2xy = 1$.

Resolução: De $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + C_1 e^{-x^2}$ resulta que

$$y' = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} + C_1 e^{-x^2} (-2x), \text{ isto é,}$$

$$y' = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 - 2xC_1 e^{-x^2} .$$

Substituindo as expressões y e y' no 1º membro da equação diferencial, obteremos 1.

Definição 1.7: Chama-se **solução geral** ou **integral geral de uma equação diferencial ordinária** a toda a solução que envolva uma ou mais constantes arbitrárias.

Definição 1.8: Chama-se **solução particular** ou **integral particular de uma equação diferencial ordinária** a toda a solução obtida atribuindo valores às constantes arbitrárias da solução geral.

Exemplo 1.9: A taxa de desintegração (perda de massa) de uma substância radioactiva é proporcional à massa que fica. Isto é, se $x(t)$ representa a massa existente num instante *t*, tem-se $\frac{dx}{dt} = -kx$, sendo *k* uma constante positiva, característica da substância.
Determine a massa existente num instante *t*.

Resolução: Vamos resolver a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -kx$, isto é $x' = -kx$.
Sendo $x > 0$, vem

$$\frac{x'}{x} = -k \Leftrightarrow \int \frac{x'}{x} dt = \int -k dt \Leftrightarrow \ln x = -kt + C \Leftrightarrow x = e^{-kt} e^{C} \Leftrightarrow x = e^{-kt} C_1.$$

Esta solução $x(t)$, vem afectada duma constante arbitrária C_1, representando assim uma família de funções (soluções), ou seja, $x(t) = e^{-kt} C_1$ é a solução geral da equação diferencial.

Se $x(0)=2$ tem-se: $x(0)=e^{-0k}C_1 \Leftrightarrow C_1=2$. Logo, $x(t)=2e^{-kt}$ é uma solução particular, pois já não envolve nenhuma constante arbitrária.

Definição 1.10: Chamam-se **condições iniciais** as condições relativas à função incógnita e suas derivadas dadas para o mesmo valor da variável independente.

Definição 1.11: Chamam-se **condições de fronteira** as condições relativas à função incógnita e suas derivadas dadas para valores distintos da variável independente.

Nota: A constante C deve-se à primitivação que foi necessário fazer. É evidente que se a equação envolvesse derivadas até uma certa ordem *n*, seria necessário primitivar *n* vezes, logo a solução geral envolveria *n* constantes arbitrárias. Neste caso, para obter uma solução particular seria necessário conhecer *n* condições.

Exemplo 1.12: Resolva a equação diferencial: $y''-2=0$ e indique a solução da equação que satisfaz as condições $y(1)=0$ e $y'(0)=2$.

Resolução:

$$y''-2=0 \Leftrightarrow y''=2 \Leftrightarrow y'=2x+C_1 \Leftrightarrow y=x^2+C_1x+C_2.$$

y, vem afectada de duas constantes arbitrárias representando por isso uma família de funções (soluções). Diz-se, por isso que $y(x) = x^2 + C_1 x + C_2$ é a solução geral da equação diferencial.

$y(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + C_1 + C_2 = 0$. Como $y'(x) = 2x + C_1$, $y'(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2$. Logo $y(x) = x^2 + 2x - 3$ é a solução particular desejada.

4.2: Equações diferenciais de variáveis separadas e separáveis

Definição 2.1: Uma **equação diferencial de variáveis separadas** é uma equação do tipo $g(y)dy = f(x)dx.$

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

A solução geral da equação diferencial de variáveis separadas obtém-se por primitivação de ambos os membros da equação, ou seja,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C .$$

Definição 2.2: Chama-se **equação de variáveis separáveis** a uma equação do tipo $f_1(x)h_1(y)dx = f_2(x)h_2(y)dy$ na qual o coeficiente associado a cada diferencial se pode factorizar em funções, dependentes só de *x* ou só de *y*.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Dividindo ambos os membros pelo produto $f_2(x)h_1(y)$ a equação fica com as variáveis separadas $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy$.

O integral geral desta equação tem a forma

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy + C$$

Exercícios 2.3: Determine a solução geral das equações:

(i) $2(y-1)y' = 3x^2 + 4x + 2$; (ii) $(1+x)\frac{dy}{dx} - y = 0$.

Exercício 2.4: Calcule a solução particular da equação $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisfaz a condição inicial $y(0)=1$.

4.3: Equações diferenciais totais exactas: factor integrante

Definição 3.1: A equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diz-se **total exacta** se existir uma função g com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

Teorema 3.2: Se M e N são funções contínuas com derivadas parciais contínuas numa bola aberta do plano xOy então a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é total exacta se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Nota: O teorema anterior permite concluir que, se $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$, então a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ não é total exacta.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Para resolver a equação diferencial total exacta $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ devemos determinar a função g que satisfaça as equações $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$. A solução da equação diferencial é dada por $g(x,y) = C$.

Nota: Em geral a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ não é total exacta. Mas, por vezes, é possível transformá-la numa equação diferencial total exacta mediante a multiplicação por um factor adequado.

Definição 3.3: Uma função $I(x,y)$ é um **factor integrante** da equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se a equação diferencial $I(x,y)\left(M(x,y)dx + N(x,y)dy\right) = 0$ for total exacta.

4.4: Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Definição 4.1: Chama-se **equação diferencial linear de 1ª ordem** a uma equação da forma $y'+P(x)y=Q(x)$ onde P e Q são funções contínuas de x num certo domínio $D\subset IR$.

É usual designar por equação completa aquela em que $Q(x)\neq 0$ enquanto que a equação se chama homogénea, se $Q(x)=0$

A resolução destas equações pode enquadrar-se em casos já estudados.

- Se $Q(x)=0$, a equação é de variáveis separáveis.
- Se $Q(x)\neq 0$ a equação admite um factor integrante função só de x, $I(x,y)=e^{\int P(x)dx}$.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

1º - Determinar o factor integrante $I(x,y)=e^{\int P(x)dx}$;

2º - Multiplicar a equação diferencial por este factor integrante, isto é

$$e^{\int P(x)dx}\left(y'+P(x)y\right)=e^{\int P(x)dx}Q(x); \qquad (1)$$

3º - Notar que o 1º membro da equação *(1)* é igual a $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)$;

4º - Integrar ambos os membros em ordem a x, ou seja,

$$ye^{\int P(x)dx}=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx.$$

Exercício 4.2: Determine a solução geral das equações:

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3x^2 y = x^2$;

(2) $\left(1 + x^2\right)dy + \left(xy + x^3 + x\right)dx = 0$

4.5: Transformadas de Laplace. Definição e propriedades.

Definição 5.1: Seja f uma função real de variável real tal que $f(t) = 0$ se $t < 0$. Se existir o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$, onde s é um número real, a este integral chamamos **transformada de Laplace de *f*** e representa-se por $L\{f(t)\}$.

Exemplo 5.2: Use a definição para calcule $L\{1\}$ e $L\{e^t\}$.

Nota: (1) A transformada de Laplace $L\{f(t)\}$ de f é uma função de s, ou seja, $L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$.

(2) A transformada de Laplace $L\{f(t)\}$ existe se o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ for convergente.

Definição 5.3: Uma função *f*, real de variável real, diz-se **seccionalmente contínua no intervalo** $[a,b]$, se for definida em $[a,b]$ excepto possivelmente num número finito de pontos x_i, $i = 1,\cdots,n$ com $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b$, f é contínua em cada sub-intervalo da forma $]a, x_1[,]x_1, x_2[, \cdots,]x_n, b[$, e se são finitos os limites laterais em cada ponto x_i, $i = 1,\cdots,n$.

Definição 5.4: Uma função *f*, real de variável real, diz-se **seccionalmente contínua em** $[0,+\infty[$, se for seccionalmente contínua em $[0,b]$, para todo $b > 0$.

O teorema seguinte estabelece condições suficientes para a existência da transformada de Laplace.

Teorema 5.5: Seja *f* uma função real seccionalmente contínua em $[0,+\infty[$. Se existirem números reais *c*, *M* e t_0 tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > t_0$, então $L\{f(t)\}$ existe, para $s > c$.

Daqui para a frente, consideraremos sempre funções que verificam as condições do teorema anterior.

Teorema 5.6: Propriedade de linearidade. Sejam $a, b \in IR$. Se $L\{f(t)\}$ e $L\{g(t)\}$ existirem então $L\{af(t) + bg(t)\}$ também existe e tem-se $L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$.

Exemplo 5.7: Calcule $L\left\{2e^{t}+5\right\}$.

Definição 5.8: Seja $a \in IR$. Chama-se **<u>função de Heaviside</u>** ou **<u>função degrau unitário</u>** a função $U_a(t)=\begin{cases}0 & se \quad t<a\\ 1 & se \quad t\geq a\end{cases}$.

Teorema 5.9: Sejam $a,b \in IR$. Se $f(t)=\begin{cases}g_1(t) & se \quad 0\leq t<a\\ g_2(t) & se \quad a\leq t<b\\ g_3(t) & se \quad t\geq b\end{cases}$,

então $f(t)=g_1(t)[1-U_a(t)]+g_2(t)[U_a(t)-U_b(t)]+g_3(t)U_b(t)$.

Exemplo 5.10: Calcule, usando a tabela à seguir, as seguintes transformadas de Laplace:

(1) $L\left\{\frac{1}{2}\right\}$**;**

(2) $L\left\{2t^3\right\}$**;**

(3) $L\left\{sen(2t)\right\}$**;**

(4) $L\left\{\frac{\cos(4t)}{2}+1\right\}$**;**

(5) $L\left\{e^t t\right\}$**;**

(6) $L\left\{t^2 e^t\right\}$**.**

Exemplo 5.11: Considere a função $f(t)=\begin{cases}t & se \quad 0\leq t<1\\ e^t & se \quad t\geq 1\end{cases}$.

Calcule $L\{f(t)\}$.

TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$, s>0
t^n, $n=1,2,3\cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s>0
$sen(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$, s>0
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$, s>0
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)U_a(t)$, a>0	$e^{-as}F(s)$
$t^n f(t)$, $n=1,2,3\cdots$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$f^{(n)}(t)$, $n=1,2,3\cdots$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Dada uma função f de domínio IR^+, a sua transformada de Laplace é, como vimos, uma função F de variável s. Pode agora colocar-se o problema inverso. Dada $F(s)$, existirá uma função $f(t)$ tal que $F(s)=L\{f(t)\}$?

A função *f*, se existir é chamada **transformada de Laplace inversa de *F*** e escreve-se $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

Nota: (1) A transformada de Laplace inversa nem sempre existe, e caso exista, ela pode não ser única.

(2) Do teorema 5.6 decorre, de imediato, que $L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\}$, com $a, b \in IR$.

(3) A tabela de transformadas de Laplace, também pode servir para calcular $L^{-1}\{F(s)\}$.

Exemplo 5.12: (1) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$;

(2) $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2}\right\} = 2L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = 2t$;

(3) $L^{-1}\left\{e^{-s}\dfrac{1}{(s-1)^2}\right\} = tU_1(t)$.

A transformada de Laplace é muito útil na resolução de equações diferenciais lineares sujeitas a condições iniciais.

4.6: Resolução de equações diferenciais lineares de ordem *n* usando transformadas de Laplace

Sejam $a_0,\ a_{1,} \ldots, a_n$ parâmetros reais. Consideremos a seguinte **equação diferencial linear de ordem *n*, com coeficientes constantes**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t),\ t \in I \subset IR \qquad \textbf{(1)}$$

sujeita às condições iniciais, em $t = 0 \in I$,

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

O nosso objectivo é obter a solução $y(t)$ da equação diferencial.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros de **(1)**, e usando a propriedade de linearidade obtemos

$$a_n L\left\{y^{(n)}\right\} + a_{n-1} L\left\{y^{(n-1)}\right\} + \ldots + a_1 L\{y'\} + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\} \qquad \textbf{(2)}$$

Pelo formulário, **(2)** equivale a

$$a_n\left(s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)\right) +$$

$$+ a_{n-1}\left(s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right) + \ldots + a_0 Y(s) = G(s) \qquad \textbf{(3)}$$

sendo $Y(s) = L\{y(t)\}$ e $G(s) = L\{g(t)\}$.

Mas **(3)** pode escrever-se na forma

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) =$$

$$= a_n\left(s^{n-1} y_0 + \cdots + y_{n-1}\right) + a_{n-1}\left(s^{n-2} y_0 + \cdots + y_{n-2}\right) + \ldots + G(s), \qquad \textbf{(4)}$$

que é uma equação algébrica em $Y(s)$.

A transformada de Laplace inverse aplicada à solução $Y(s)$ da equação **(4)**, dá-nos a solução $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ da equação diferencial **(1)** sujeita às condições iniciais dadas.

Exemplo 6.1: Recorrendo ao método da transformada de Laplace, determine a solução da seguinte equação diferencial sujeitas às condições iniciais dadas:

$$2y'' - 2y' = (t+1)e^{t}, \; y(0) = \frac{1}{2} \text{ e } y'(0) = \frac{1}{2}.$$