

Capítulo 1

CINEMÁTICA DA PARTÍCULA

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O objectivo principal da disciplina de Mecânica II é instruir e desenvolver nos alunos a capacidade para resolver problemas de dinâmica dos sistemas de partículas (ou sistemas de pontos materiais) e dos corpos rígidos.

A dinâmica pode ser interpretada através de dois tipos de problemas:

- Cinemática: é uma descrição matemática do movimento dos corpos independentemente das causas que o originam e da inércia que tem.
- Cinética: estuda as leis do movimento de corpos quando submetidos à acção de forças.

Por movimento entende-se o deslocamento de um corpo no espaço e no tempo. Esse movimento é cinematicamente conhecido quando em qualquer instante for possível caracterizar:

- a posição;
- a velocidade; e,
- a aceleração.

em todos os seus pontos ou partes constituintes.

Estando a noção de movimento associada à noção das variações das posições dos corpos de instante para instante relativamente a pontos considerados fixo, o

conceito de movimento é essencialmente relativo, pois depende do referencial considerado.

Exemplo: O condutor de um automóvel em movimento permanece sempre na mesma posição se o referencial considerado for o assento, mas muda de posição de instante para instante se o referencial for a Terra.

Em Mecânica utiliza-se essencialmente o espaço euclidiano tridimensional, podendo, no entanto, em alguns casos, recorrer à geometria não euclidiana, como é o caso das coordenadas cilíndricas e esféricas (não cartesianas).

Na Mecânica II consideram-se válidas as hipóteses fundamentais da mecânica racional de Newton:

- o espaço tem três dimensões e é absoluto e imutável;
- o tempo também é absoluto e imutável.

Esta hipótese é válida para os problemas de Engenharia Civil, mas não serve para a Engenharia Aeroespacial Intergaláctica, onde será necessário utilizar os conceitos da Mecânica Einsteineana relativista.

Portanto, nos problemas que irão ser abordados, o tempo é a variável independente, sendo todas as outras variáveis e características expressas à custa dele.

Nos problemas que serão estudados, existirá sempre uma origem espacial euclidiana e uma origem temporal cronológica.

Numa primeira parte irá ser abordada a cinemática da partícula (ou do ponto material). O termo partícula não significa que o estudo está limitado a corpúsculos; indica sim, que, os corpos em movimento – que podem ser tão grandes como automóveis, foguetes, aviões ou planetas – são considerados sem olhar à sua dimensão. Isto é, a sua dimensão é desprezável em comparação com a amplitude do seu movimento. Neste caso, o corpo é entendido como um todo, não se considerando qualquer rotação em torno do seu centro de massa. Nos casos em que não se pode alhear dessa rotação, os corpos não podem ser considerados como partículas e terão de ser considerados como corpos rígidos.

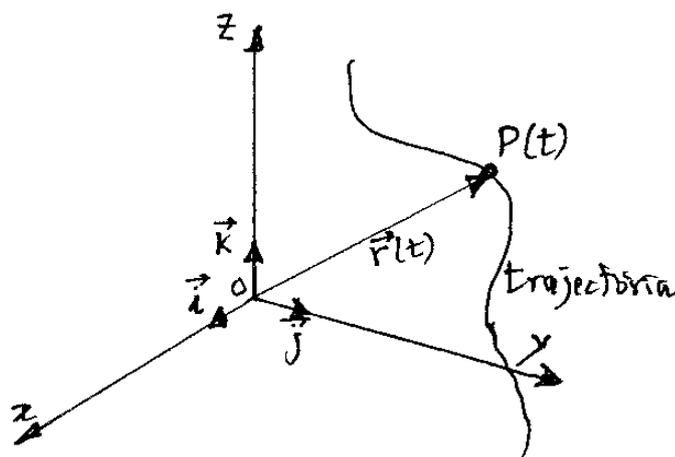
Exemplo: Os planetas do sistema solar podem ser considerados como partículas quando se estuda o seu movimento em torno do Sol, mas não podem ser assim considerados quando se estuda o seu movimento em torno do seu eixo de rotação.

1.2 DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

O movimento da partícula pode ser descrito de duas maneiras (embora equivalentes):

- através do vector posição, $\vec{r}(t)$;
- através das equações cartesianas obtidas da trajectória $\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ e da lei horária do movimento sobre a trajectória, $s = s(t)$.

1.2.1 Descrição do movimento através do vector posição, $\vec{r}(t)$



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rightarrow$ versores (vectors unitários) do referencial cartesiano $Oxyz$.

- Vector posição, $\vec{r}(t)$:

É o vector que une o ponto O (considerado fixo) com o ponto P no instante t .

- Trajectória:

É o lugar geométrico das sucessivas posições do ponto P ao descrever o seu movimento.

Figura 1.1 - Definição de vector posição, $\vec{r}(t)$.

O vector posição, $\vec{r}(t)$, é escrito em função das três direcções coordenada, respectivamente, Ox , Oy e Oz :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{P - O} = \overrightarrow{OP} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} \quad (1.1)$$

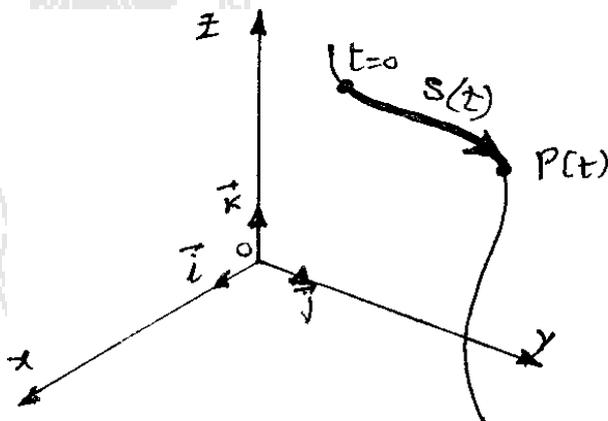
Portanto, as componentes cartesianas do vector posição (ou seja, as equações paramétricas da trajectória) são:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2.2 Descrição do movimento através da trajectória e da lei horária

Para se caracterizar completamente o movimento de uma partícula é necessário conhecer não só a sua trajectória, mas também o modo como essa partícula se desloca ao longo da trajectória, isto é, a **lei horária do movimento**.

Sendo s a abscissa curvilínea (medida sobre a trajectória) a posição do ponto P, no instante t , será dada pela:



– Equação cartesiana da trajectória

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

e pela;

– Lei horária do movimento

$$s = s(t) \quad (1.4)$$

Figura 1.2 - Lei horária do movimento, $s(t)$.

1.2.3 Equivalência ou dualidade das duas descrições de movimento

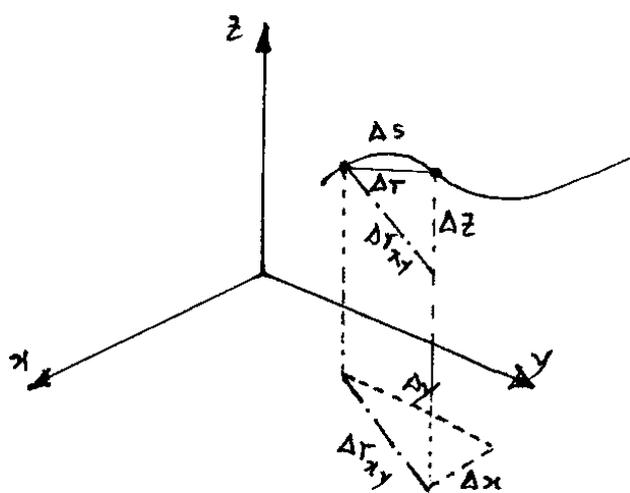
1.2.3.1.1 Dado o vector posição, $\vec{r}(t)$, determinar a trajectória e a lei horária

Dado o vector posição $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$, obtém-se as equações paramétricas da trajectória:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Por eliminação do parâmetro t nestas equações, obtém-se a equação cartesiana da trajectória:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$



Para obter a lei horária considere-se dois instantes sucessivos separados por um intervalo de tempo Δt .

Seja Δs o arco entretanto percorrido e Δr a corda correspondente. Então:

$$\Delta r^2 = \Delta r_{xy}^2 + \Delta z^2 \quad (1.5a)$$

e
$$\Delta r_{xy}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad (1.5b)$$

ou seja,

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (1.5c)$$

Figura 1.3 - Equivalência entre as duas descrições.

Quando o intervalo de tempo infinitesimal, Δt , tende para zero ($\Delta t \rightarrow 0$) a corda tende para o arco, isto é:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dr} = 1 \quad (1.6)$$

Donde, no limite:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (1.7) \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} \\ z'(t) = \frac{dz}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t) \cdot dt \\ dy = y'(t) \cdot dt \\ dz = z'(t) \cdot dt \end{cases} \quad (1.8)$$

Então,

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt \quad (1.9)$$

Integrando, obtém-se a lei horária:

$$s = s(t) = \int_t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt = \int_t v(t) \cdot dt \quad (1.10)$$

Onde, como se irá ver, a expressão:

$$v(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \quad (1.11)$$

é a velocidade escalar instantânea, e $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, são as componentes do vector velocidade.

1.2.3.1.2 Dada a trajectória e a lei horária, determinar o vector posição

Viu-se que $ds^2 = dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, por outro lado,

$$ds = s'(t) \cdot dt \Rightarrow [s'(t) \cdot dt]^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.12)$$

ou seja,

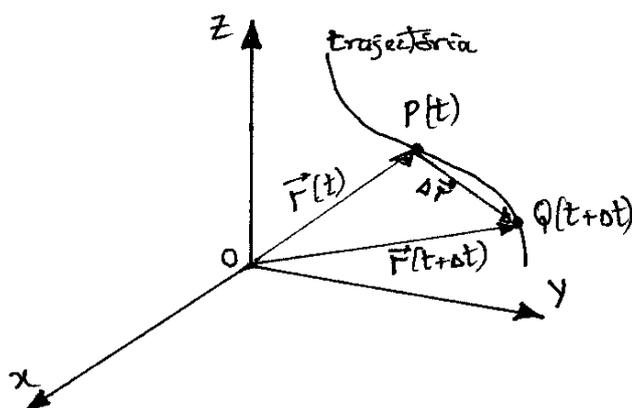
$$\begin{aligned} s'(t) \cdot dt &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt \Rightarrow \\ \Rightarrow s'(t) &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Como já se viu, a velocidade escalar instantânea é: $s'(t) = ds/dt = v(t)$. Então o problema consiste em resolver o seguinte sistema de três equações:

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

1.3 DEFINIÇÃO DE VELOCIDADE

1.3.1 Expressão vectorial da velocidade



Considere-se o movimento de uma partícula definido pelo vector de posição $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Supondo que no instante t a partícula está em P e, no instante $t + \Delta t$ está em Q .

O vector posição em Q é $\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t)$.

Figura 1.4 - Definição de velocidade vectorial.

Designa-se **velocidade vectorial média** no intervalo de tempo Δt ao vector definido pela seguinte expressão:

$$\vec{v}_m|_{[t,t+\Delta t]} = \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_P}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.15)$$

Designa-se por **velocidade vectorial instantânea** (ou **vector velocidade instantânea**) no instante t (ou no ponto P) ao vector definido pela seguinte expressão:

$$\vec{v}_P = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (1.16)$$

Como no limite o arco se confunde com a corda e com a tangente, a **direcção** do vector velocidade instantânea é a da **tangente à trajectória** no ponto considerado; o **sentido** deste vector é **o do movimento**.

As componentes cartesianas do vector velocidade instantânea são as seguintes:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(t) \cdot \vec{i} + v_y(t) \cdot \vec{j} + v_z(t) \cdot \vec{k} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{k} \quad (1.17a)$$

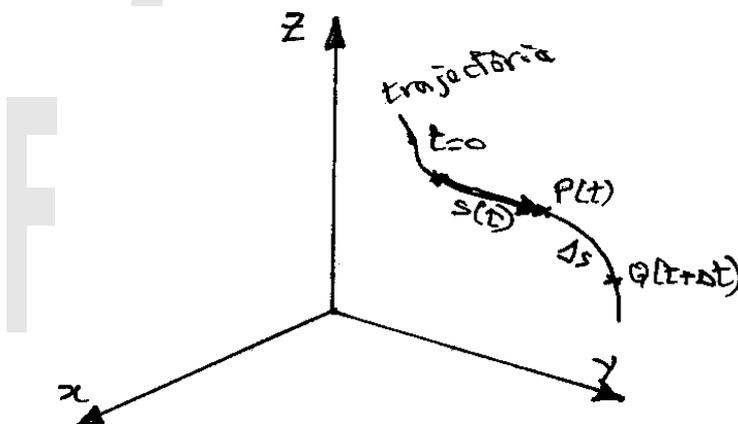
ou, escrevendo de outra forma,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \dot{x}(t) \\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = \dot{y}(t) \\ v_z(t) &= \frac{dz(t)}{dt} = z'(t) = \dot{z}(t) \end{aligned} \quad (1.17b)$$

A grandeza do vector velocidade é:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \quad (1.18)$$

1.3.2 Expressão escalar da velocidade



Considere-se o movimento de uma partícula definido pela sua trajectória e pela sua equação horária.

Supondo que no instante t a partícula está em P , tendo percorrido, desde o início da contagem do tempo, o arco s .

No instante $t + \Delta t$ a partícula encontra-se em Q sendo $s + \Delta s$ o arco percorrido.

Figura 1.5 - Velocidade escalar.

Define-se velocidade escalar média no intervalo de tempo Δt o seguinte quociente:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.19)$$

e por velocidade escalar instantânea:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.20)$$

(NOTA: Conhecida a velocidade escalar instantânea, poderá obter-se a lei horária pelo seguinte integral:

$$s = s(t) = \int_t v(t) \cdot dt$$

1.3.3 Relação entre as duas expressões

(i) Se $v = \frac{ds}{dt}$ e $s = \int_t [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \cdot dt$

então:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = |\vec{v}| \quad (1.21)$$

ou seja, a velocidade escalar é a grandeza do vector velocidade instantânea.

(ii) O vector posição, \vec{r} , pode ser escrito em função da abcissa curvilínea s – comprimento de arco – e esta, por sua vez, é função do parâmetro t . Então:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(s) \\ s = s(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

Como por definição $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, então:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (1.23)$$



No limite, quando Δt tende para zero, a corda tende para o arco, donde a grandeza de $d\vec{r}$ é igual a ds , isto é:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \frac{|d\vec{r}|}{ds} = 1 \Rightarrow |d\vec{r}| = ds \quad (1.24)$$

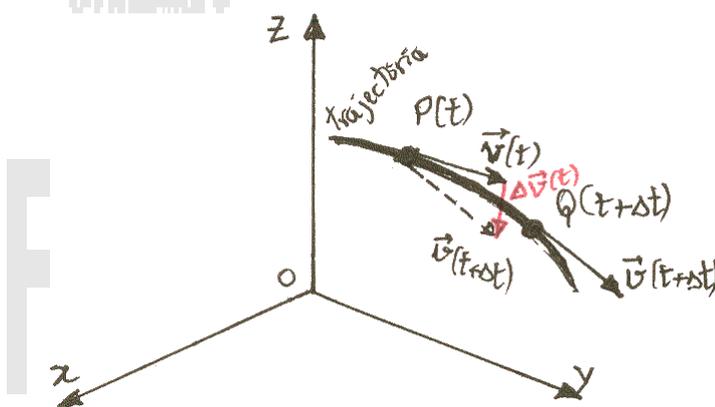
Então,

$$\vec{v} = v \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = v \cdot \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = v \cdot \vec{u} \quad (1.25)$$

Sendo $\vec{u} = d\vec{r}/|d\vec{r}|$ o vector unitário com a direcção do vector velocidade instantânea.

1.4 ACELERAÇÃO

1.4.1 Definição de aceleração



Considere-se o movimento de uma partícula, que no instante t se encontra em P , com uma velocidade $\vec{v}(t)$ e que no instante $t+\Delta t$ está em Q com velocidade $\vec{v}(t+\Delta t)$.

Figura 1.7 - Definição de aceleração.

Define-se aceleração vectorial média (ou vector aceleração média) no intervalo $[t, t+\Delta t]$ ao seguinte quociente:

$$\vec{a}_m|_{[t,t+\Delta t]} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{(t+\Delta t)-t} = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.26)$$

Designa-se **aceleração vectorial instantânea** (ou **vector aceleração instantânea**) no instante t (ou no ponto P) ao seguinte vector:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (1.27)$$

Então, a aceleração vectorial instantânea é a primeira derivada temporal da velocidade vectorial instantânea e, conseqüentemente, a segunda derivada temporal do vector posição.

O **sentido** do vector aceleração instantânea é sempre para o **interior** de uma trajectória curvilínea.

As componentes cartesianas do vector aceleração instantânea são as seguintes:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right| = \\ &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \\ &= \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \vec{k} = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (1.28a)$$

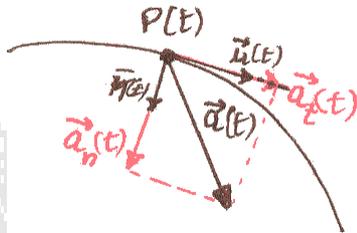
ou,

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x'(t) = \ddot{x}(t) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'(t) = \ddot{y}(t) \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = z'(t) = \ddot{z}(t) \end{cases} \quad (1.28b)$$

A aceleração escalar instantânea (ou seja, a grandeza do vector aceleração instantânea) é:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{[x''(t)]^2 + [y''(t)]^2 + [z''(t)]^2} \quad (1.29)$$

1.4.2 Componentes normal e tangencial da aceleração: componentes intrínsecas



$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t)$$

$$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Figura 1.8 - Componentes normal e tangencial da aceleração.

A determinação analítica das componentes normal e tangencial da aceleração pode ser efectuada considerando que os vectores velocidade instantânea e aceleração instantânea podem ser escritos, respectivamente, da seguinte forma:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u} \quad (1.30)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.31)$$

sendo \vec{u} o versor da direcção tangente à trajectória, então,

$$\vec{a} = \frac{d(v \cdot \vec{u})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u} + v \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (1.32)$$

onde a primeira parcela tem a direcção do versor \vec{u} , ou seja, tangente à trajectória, e a segunda parcela tem a direcção do vector $d\vec{u}/dt$, ou seja, perpendicular ao versor \vec{u} e, consequentemente, normal à trajectória. Portanto, a **componente tangencial da aceleração** é definida por:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{u} \quad (1.33)$$

e a componente normal da aceleração é definida por:

$$\bar{a}_n = v \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} = v \cdot \underbrace{\frac{d\bar{u}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}}_v = v^2 \cdot \frac{d\bar{u}}{ds} \quad (1.34)$$

Por definição, o raio de curvatura é o inverso da grandeza do vector $d\bar{u}/ds$, isto é,

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\bar{u}}{ds} \right| \quad (1.35)$$

portanto,

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \bar{n} \quad (1.36)$$

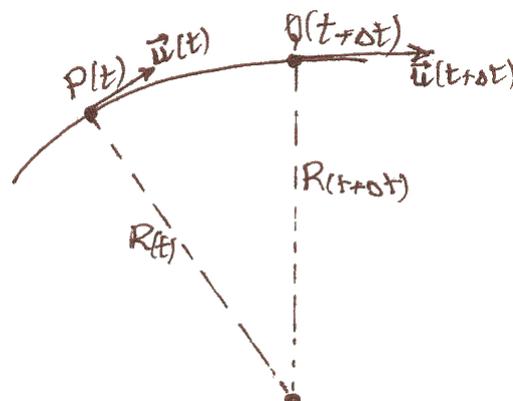


Figura 1.9 - Raio de curvatura.

Resumindo, a aceleração vectorial instantânea pode ser definida através das suas componentes intrínsecas, tangencial e normal, da seguinte forma:

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n, \text{ com } \begin{cases} \bar{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \bar{u} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \bar{u} \\ \bar{a}_n = v \cdot \left| \frac{d\bar{u}}{ds} \right| \cdot \bar{n} = \frac{v^2}{R} \cdot \bar{n} \end{cases} \quad (1.37)$$

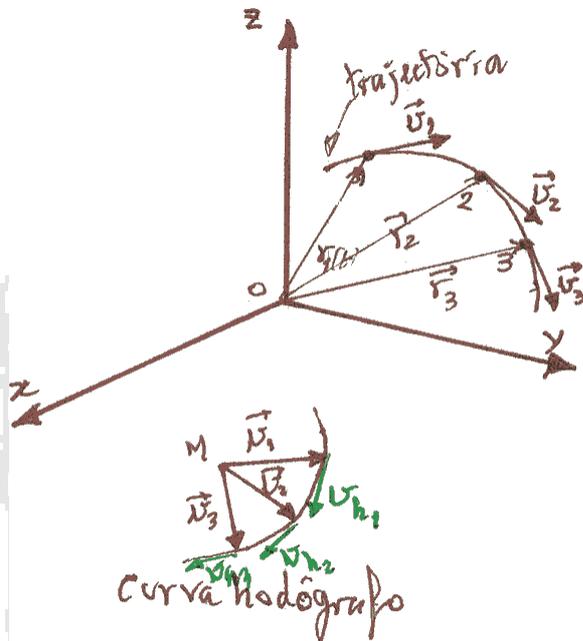
1.5 DIMENSÕES E UNIDADES

As dimensões e as unidades mais utilizadas são:

$$\begin{aligned} [s] = L &\rightarrow \begin{cases} \text{S.I. - m} \\ \text{C.G.S. - cm} \end{cases} \\ [v] = L T^{-1} &\rightarrow \begin{cases} \text{S.I. - m/s} \\ \text{C.G.S. - cm/s} \end{cases} \\ [a] = L T^{-2} &\rightarrow \begin{cases} \text{S.I. - m/s}^2 \\ \text{C.G.S. - cm/s}^2 \end{cases} \end{aligned}$$



1.6 HODÓGRAFO DAS VELOCIDADES



Considere-se o movimento de uma partícula relativamente a um sistema de eixos $Oxyz$. Nos diferentes pontos da trajetória, a partícula tem velocidades determinadas, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Se tirar, por um ponto M , vectores equipolentes aos vectores velocidade, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, pode-se definir uma curva que passe pelas extremidades desses vectores. A essa curva dá-se o nome de hodógrafo das velocidades.

Figura 1.10 - Hodógrafo das velocidades.

Definição de hodógrafo das velocidades:

É o lugar geométrico das extremidades dos sucessivos vectores velocidade de uma trajetória, tirados por um ponto comum, M , do espaço.

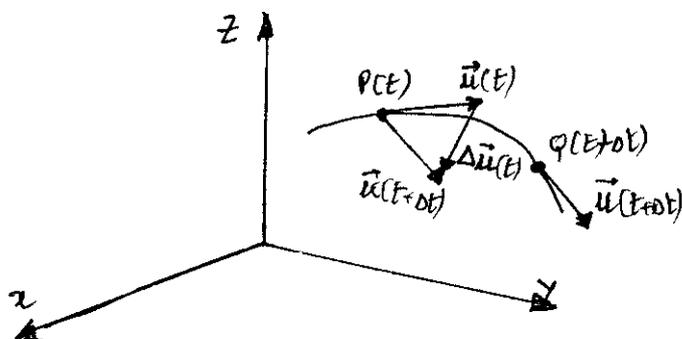
A curva hodógrafo está para as velocidades assim como a trajetória está para os vectores posição.

Calculando as velocidades dos pontos da curva hodógrafo:

$$\vec{v}_h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_h}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t) \quad (1.38)$$

ou seja, as velocidades dos pontos na curva hodógrafo correspondem à aceleração da partícula na trajetória. Portanto, o hodógrafo das velocidades permite conhecer a direcção da aceleração.

1.7 PLANO OSCULADOR



Supondo que uma partícula, que descreve um movimento, se encontra em P no instante t , sendo $\vec{u}(t)$ o versor da velocidade no instante t ; e em Q no instante $t + \Delta t$, sendo $\vec{u}(t + \Delta t)$ o versor da velocidade nesse instante.

Figura 1.11 - Plano osculador.

Sendo $\vec{u}(t + \Delta t) = \vec{u}(t) + \Delta\vec{u}(t)$ e tendo em conta que tanto $\vec{u}(t)$ e $\vec{u}(t + \Delta t)$ são versores (isto é, vectores de norma unitária), então:

$$|\vec{u}(t)| = |\vec{u}(t) + \Delta\vec{u}(t)| = 1 \quad (1.39)$$

Portanto, a diferença entre $\vec{u}(t)$ e $\vec{u}(t + \Delta t)$ está na direcção.

Por definição de derivada vectorial tem-se, quando Q tende para P ($Q \rightarrow P$):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (1.40)$$

como \vec{u} é um vector de grandeza constante (igual à unidade) então $d\vec{u}/dt$ é perpendicular a \vec{u} , como se demonstra a seguir:

$$|\vec{u}| = 1 \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \quad (1.41a)$$

derivando vem:

$$\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.41b)$$

Uma vez que os vectores \vec{u} e $d\vec{u}/dt$ são não nulos ($\vec{u} \neq 0 \wedge d\vec{u}/dt \neq 0$) então:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{u} \quad (1.41c)$$

isto é, os vectores \vec{u} e $d\vec{u}/dt$ são perpendiculares.

O plano osculador no ponto P é o plano definido pelos vectores \vec{u} e $d\vec{u}/dt$, sendo a sua equação vectorial definida pela seguinte expressão:

$$\pi(t) = \vec{r}(t) + A \cdot \vec{u}(t) + B \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \quad (1.42)$$

Por eliminação dos parâmetros A e B obtém-se a equação cartesiana do plano osculador em cada instante:

$$F(x,y,z,t) = 0 \quad (1.43)$$

O plano osculador é o plano que melhor se ajusta à curva (trajectória) em cada um dos seus pontos. Nele estão contidos os vectores velocidade e aceleração em cada instante.

Se a trajectória é plana, o plano osculador coincide com o plano que contém a trajectória. No entanto, em geral, o plano osculador varia com o tempo.

Exercícios de aplicação

- 1) O movimento de uma partícula é definido pelas equações $x = 4t^4 - 6t$ e $y = 6t^3 - 2t^2$, nas quais x e y são expressos em milímetros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração em
- $t = 1s$
 - $t = 2s$
 - $t = 4s$

Resolução:

sendo o movimento definido por:
$$\begin{cases} x = 4t^4 - 6t \\ y = 6t^3 - 2t^2 \end{cases}$$

então o vector de posição é:

$$\vec{r}(t) = (4t^4 - 6t)\vec{i} + (6t^3 - 2t^2)\vec{j}$$

e derivando consecutivamente obtêm-se os vectores velocidade e aceleração instantâneas:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2 - 6t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(6t^3 - 2t^2)\vec{j} \\ &= (16t^2 - 6)\vec{i} + (18t^2 - 4t)\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(16t^2 - 6)\vec{i} + \frac{d}{dt}(18t^2 - 4t)\vec{j} \\ &= (48t^2)\vec{i} + (36t - 4)\vec{j}\end{aligned}$$

a) $\underline{t=1s} \rightarrow \vec{v} = 10\vec{i} + 14\vec{j} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{10^2 + 14^2} = 17,20 \text{ mm/s}$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{14}{10}\right) = 54,5^\circ \quad \swarrow$$

$$\vec{a} = 48\vec{i} + 32\vec{j} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{48^2 + 32^2} = 57,7 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$\beta = \text{arctg}\left(\frac{32}{48}\right) = 33,7^\circ \quad \swarrow$$

$\underline{t=2s} \rightarrow \vec{v} = 122\vec{i} + 64\vec{j} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{122^2 + 64^2} = 137,8 \text{ mm/s}$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{64}{122}\right) = 27,7^\circ \quad \swarrow$$

$$\vec{a} = 192\vec{i} + 68\vec{j} \rightarrow |\vec{a}| = 204 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$\beta = 19,5^\circ \quad \swarrow$$

$\underline{t=4s} \rightarrow \vec{v} = 1018\vec{i} + 272\vec{j} \rightarrow |\vec{v}| = 1054 \text{ mm/s}$

$$\alpha = 15,0^\circ \quad \swarrow$$

$$\vec{a} = 768\vec{i} + 140\vec{j} \rightarrow |\vec{a}| = 781 \text{ mm}^2/\text{s}$$

$$\beta = 10,3^\circ \quad \swarrow$$

- 2) - O movimento de uma partícula é definido pelo vector de posição $\vec{r} = A(\cos t + t \sin t)\vec{i} + A(\sin t - t \cos t)\vec{j}$, no qual t é expresso em segundos. Determine os valores de t para os quais os vectores de posição e de aceleração são:
- perpendiculares
 - paralelos

Resolução

$$\vec{r} = A(\cos t + t \sin t)\vec{i} + A(\sin t - t \cos t)\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A(-\sin t + \sin t + t \cos t)\vec{i} + A(\cos t - \cos t + t \sin t)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = A(\cos t - t \sin t)\vec{i} + A(\sin t + t \cdot \cos t)\vec{j}$$

- (a) Para que os vectores \vec{r} e \vec{a} sejam perpendiculares, terá que ser nulo o ~~o~~ produto interno destes dois vectores:

$$\vec{r} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [A^2(\cos t + t \sin t)(\cos t - t \sin t)] + [A^2(\sin t - t \cos t)(\sin t + t \cos t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2[(\cos^2 t - t^2 \sin^2 t) + (\sin^2 t - t^2 \cos^2 t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 \left(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} - \underbrace{t^2 \sin^2 t - t^2 \cos^2 t}_{=-t^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2(1 - t^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 \neq 0 \vee 1 - t^2 = 0 \wedge t > 0 \Rightarrow$$

(sem interesse)

$$\Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

- (b) Para que os vectores \vec{r} e \vec{a} sejam paralelos, terá que ser nulo o produto vectorial destes dois vectores:

(geral): $\vec{r} \times \vec{a} = (r_y \cdot a_z - r_z \cdot a_y)\vec{i} + (r_z \cdot a_x - r_x \cdot a_z)\vec{j} + (r_x \cdot a_y - r_y \cdot a_x)\vec{k}$

como não há componentes em $z \Rightarrow \vec{r} \times \vec{a} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (r_x a_y - r_y a_x)\vec{k}$

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow A(\cos t + t \sin t) \cdot A(\sin t + t \cos t) - A(\sin t - t \cos t) \cdot A(\cos t - t \sin t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 [\cos t \sin t + \underbrace{t \cos^2 t}_{=t} + \underbrace{t \sin^2 t}_{=t} + t^2 \sin t \cos t -$$

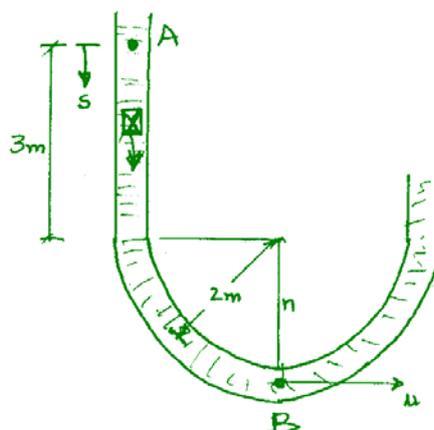
$$- (\sin t \cos t - \underbrace{t \sin^2 t}_{=-t} - \underbrace{t \cos^2 t}_{=-t} + t^2 \sin t \cos t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 (\cancel{\cos t \sin t} + t + t^2 \sin t \cos t - \cancel{\sin t \cos t} + t - t \cancel{\sin t \cos t}) = 0$$

$$\Rightarrow A^2 \cdot 2t = 0 \Rightarrow \textcircled{A=0} \vee \underline{t=0 \text{ s}}$$

(sem interesse)

- 3) - A caixa representada na figura inicia o seu movimento no ponto A do parábola horizontal. Durante esse movimento, a velocidade aumenta de $a_t = (0.2t) \text{ m/s}^2$, onde t se expressa em segundos. Determine a grandeza da aceleração quando atinge o ponto B.



Resolução:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t) = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}$$

Para determinar a aceleração no ponto B é preciso conhecer o vector velocidade no instante em que a caixa atinge esse ponto.

No ponto A, ou seja quando $t=0$, a velocidade é nula (i.e., a velocidade inicial é zero):

$$t=0 \rightarrow v_A=0$$

Sabendo que $a_t(t) = 0.2t$ e que $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{u}$ então

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0.2t \quad \wedge \quad v(0)=0$$

$$\Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t 0.2t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 0.1t^2$$

Como $R = 2 \text{ m}$, então

$$\vec{a}(t) = 0.2t \vec{u} + \frac{(0.1t^2)^2}{2} \cdot \vec{n}$$

É necessário agora determinar qual o tempo decorrido no percurso entre A e B:

$$\text{conhecendo a distância } s_{AB} = 3 + \frac{2\pi \cdot 2}{4} = 6.14 \text{ m}$$

e sabendo que a velocidade escalar no instante t é: $v = \frac{ds}{dt}$

ou seja

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1 t^2$$

então $\int_0^{6.14} ds = \int_0^{t_B} 0.1 t^2 dt$

$$6.14 = \frac{0.1}{3} t_B^3 \Rightarrow t_B = 5.69 \text{ s}$$

Substituindo na expressão da aceleração:

$$\vec{a}(t_B) = 0.2 \times 5.69 \vec{u} + \frac{(0.1 \times 5.69^2)^2}{2} \vec{n}$$

$$= 1.14 \vec{u} + 5.25 \vec{n}$$

ou seja:

$$a_t = 1.14 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = 5.25 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}(t_B)| = \sqrt{1.14^2 + 5.25^2} = 5.37 \text{ m/s}^2$$

1.8 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE GRANDEZAS CINEMÁTICAS

Viu-se até aqui como definir algebricamente a cinemática da partícula, através da sua posição, velocidade e aceleração em qualquer instante.

As representações gráficas dessas grandezas cinemáticas permitem obter de forma prática informações quantitativas. Nos pontos seguintes irão ser referidas algumas das representações gráficas mais correntemente utilizadas, nomeadamente:

- o diagrama espaço - tempo;
- o diagrama velocidade - tempo;
- o diagrama aceleração tangencial - tempo; e,
- o diagrama velocidade - deslocamento.

1.8.1 Diagrama espaço-tempo

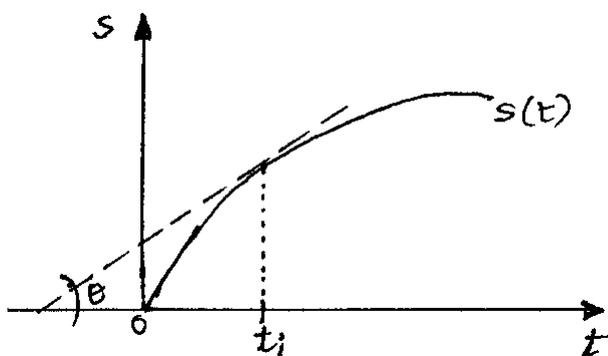
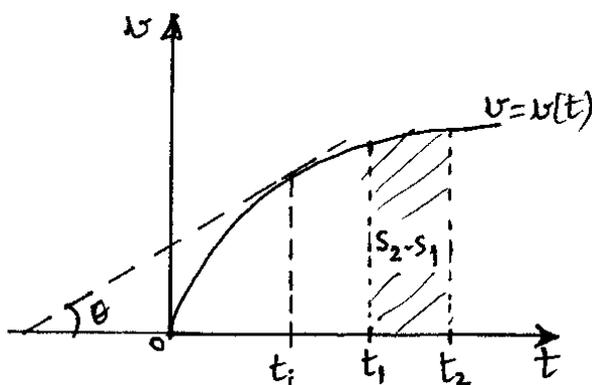


Figura 1.12 - Diagrama espaço-tempo.

A representação gráfica da lei horária no sistema de eixos Ost permite determinar a velocidade em qualquer instante t . Como $v = ds/dt$, então a velocidade será igual à inclinação da tangente à curva representativa da função $s = s(t)$ no ponto considerado. Ou seja:

$$v = tg \theta \quad (1.44)$$

1.8.2 Diagrama velocidade-tempo



A representação gráfica da função $v = v(t)$ no sistema de eixos Ovt permite obter duas grandezas:

- a aceleração tangencial; e,
- o arco, $s_2 - s_1$, percorrido pela partícula entre dois instantes t_1 e t_2 .

1.8.2.1.1.1.1

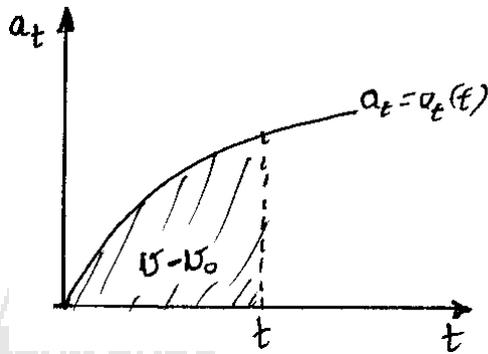
Figura 1.13 - Diagrama velocidade-tempo.

Como $a_t = dv/dt$, então a_t é igual à tangente à curva $v = v(t)$, no ponto considerado. Por sua vez,

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{s_1}^{s_2} ds \Rightarrow s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt \quad (1.45)$$

isto é, o arco percorrido pela partícula entre dois instantes quaisquer, t_1 e t_2 , é igual à área do diagrama velocidade-tempo limitada por aqueles dois instantes.

1.8.3 Diagrama aceleração tangencial-tempo



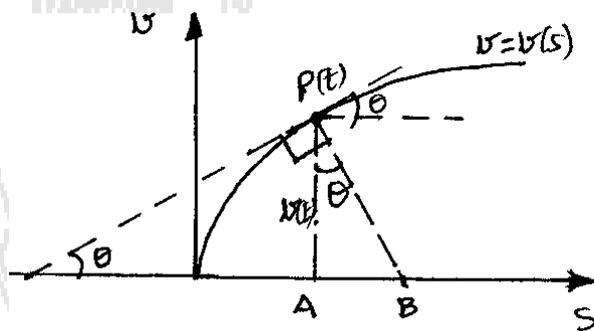
Este diagrama permite obter a variação de velocidade entre dois instantes de tempo quaisquer.

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t a_t dt = \int_{v_0}^v dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - v_0 = \int_0^t a_t dt \quad (1.46)$$

Figura 1.14 - Diagrama aceleração tangencial-tempo.

1.8.4 Diagrama velocidade-deslocamento



A aceleração tangencial de uma partícula no instante t (ponto P) no diagrama velocidade-deslocamento é dada pelo módulo do segmento \overline{AB} .

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = v \cdot \frac{dv}{ds} \quad (1.47)$$

Figura 1.15 - Diagrama velocidade-deslocamento.

como neste gráfico,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dv}{ds} \quad (1.48)$$

então:

$$a_t = v \cdot \operatorname{tg} \theta = \left| \overline{AB} \right| \quad (1.49)$$

1.9 CLASSIFICAÇÃO DO MOVIMENTO DA PARTÍCULA

Irá ser feito de seguida a aplicação dos conceitos abordados anteriormente; posição, velocidade e aceleração, em qualquer instante; ao estudo de tipos de movimentos que uma partícula pode efectuar. Serão introduzidos ainda, dado o seu grande interesse para o estudo do movimento circular, os conceitos de velocidade e aceleração angulares.

A classificação do movimento da partícula pode ser feita quanto à **trajectória** e quanto à **aceleração**.

Quadro 1.1 – Classificação dos tipos de movimento da partícula.

| | Tipo de movimento | Trajectória |
|--------------------------|--|--|
| – Atendendo à trajetória | <ul style="list-style-type: none"> – movimento rectilíneo – movimento circular – movimento parabólico – movimento helicoidal – ... | <ul style="list-style-type: none"> – recta - circunferência – parábola – hélice – ... |
| – Atendendo à aceleração | <ul style="list-style-type: none"> – movimento <u>uniformemente</u> variado ($\vec{a} = \text{constante}$) – movimento <u>não</u> uniformemente variado ($\vec{a} \neq \text{constante}$, ou seja $\vec{a} = \vec{a}(t)$) | <ul style="list-style-type: none"> – movimento rectilíneo e uniforme ($\vec{a} = \vec{0}$) – movimento uniformemente acelerado ($\vec{a} > 0$) – movimento uniformemente retardado ($\vec{a} < 0$) |

1.10 MOVIMENTO RECTILÍNEO E UNIFORME ($\vec{a} = \vec{0}$)

Considere-se o movimento de uma partícula que, no instante inicial ($t=0$), possui um vector posição \vec{r}_0 e uma velocidade \vec{v}_0 e, no instante genérico t , um vector posição $\vec{r}(t)$ e uma velocidade $\vec{v}(t)$.

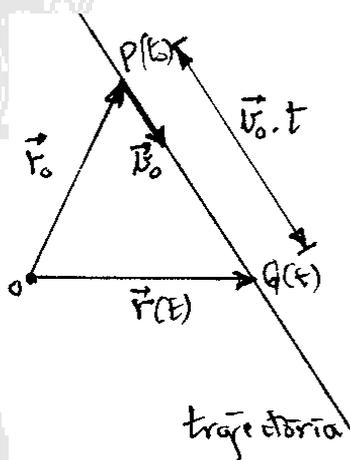
Se a aceleração é nula ($\vec{a} = \vec{0}$) o movimento é rectilíneo e uniforme, como se demonstra a seguir:

1º) O movimento é uniforme: $v(t) = v_0$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{0} &\Rightarrow \int_0^t \vec{a}(t) dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) = \vec{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot (t - 0) \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t \end{aligned} \quad (1.50)$$

2º) O movimento é rectilíneo (a trajectória é uma recta)

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}_0 &\Rightarrow \int_0^t \vec{v}_0 dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot (t - 0) \Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t} \end{aligned} \quad (1.51)$$



Esta é a equação vectorial de uma recta cujo ponto genérico $Q(t)$ é referenciado pelo vector posição instantâneo $\vec{r}(t)$. A direcção desta recta é a direcção do vector \vec{v}_0 o qual é instantaneamente escalado (multiplicado) pelo instante considerado t .

Figura 1.16 – Movimento rectilíneo.

1.11 MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO ($\vec{a} = \overline{\text{constante}} \neq \vec{0}$)

Considere-se o movimento de uma partícula possuindo, no instante $t=0$, um vector posição \vec{r}_0 e uma velocidade \vec{v}_0 e, no instante genérico t , um vector posição $\vec{r}(t)$ e uma velocidade $\vec{v}(t)$.

Se este movimento é realizado com uma aceleração vectorial instantânea constante não nula, as características deste movimento são:

- a trajectória é plana;
- o movimento é parabólico (a trajectória é uma parábola).

1.11.1 Lei das velocidades e das posições instantâneas

$$i) \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{a} \quad (1.52)$$

$$ii) \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \vec{a} \quad (1.53)$$

Demonstração:

$$i) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow d\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot dt \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a} \cdot (t-0) \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{a}$$

$$ii) \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow d\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \cdot dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t) dt \Rightarrow \\ \text{como } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t (\vec{v}_0 + t \cdot \vec{a}) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot (t-0) + \frac{\vec{a}}{2} \cdot (t^2 - 0^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \vec{a}$$

Portanto, a equação vectorial das posições instantâneas representa uma equação vectorial do segundo grau em ordem a t , cujas equações cartesianas e as equações paramétricas serão determinadas de seguida.

1.11.2 A trajectória é plana

Recorrendo ao conceito de plano osculador e à sua equação vectorial instantânea;

$$\pi(t) = \vec{r}(t) + A \cdot \vec{v}(t) + B \cdot \vec{a}(t) \quad (1.54)$$

Considerando as equações, (1.52) e (1.53), do movimento em questão, vem:

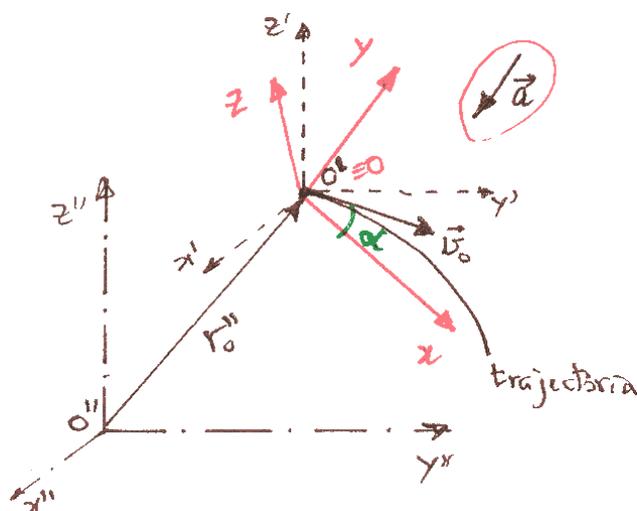
$$\begin{aligned} \pi(t) &= \left(\vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \vec{a} \right) + A \cdot (\vec{v}_0 + t \cdot \vec{a}) + B \cdot \vec{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi(t) &= \vec{r}_0 + \underbrace{(A+t)}_{k_1} \cdot \vec{v}_0 + \underbrace{\left(B + A \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 \right)}_{K_2} \cdot \vec{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi(t) &= \vec{r}_0 + k_1 \cdot \vec{v}_0 + k_2 \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde k_1 e k_2 são multiplicadores e \vec{r}_0 , \vec{v}_0 e \vec{a} são vectores constantes no tempo. Logo, o plano osculador será sempre o mesmo em qualquer instante, sendo definido, no ponto caracterizado por \vec{r}_0 , a partir dos dois vectores constantes \vec{v}_0 e \vec{a} .

Logo, como o plano é constante no tempo, a trajectória é plana, e o plano do movimento coincide com o plano osculador.

1.11.3 A trajectória plana é parabólica

Como a trajectória é plana, para facilidade de dedução considera-se que o sistema de eixos de referência é escolhido de forma que o plano osculador (ou o plano da trajectória) coincide com o plano Oxy . Deste modo, as componentes segundo o eixo Ox são nulas. Considera-se ainda que o eixo Oy é paralelo ao vector \vec{a} .



Na figura ao lado, $O''x''y''z''$ é o referencial global, $O'x'y'z'$ é um referencial paralelo ao geral e cuja origem coincide com o ponto representativo da posição inicial. O referencial $Oxyz$ é o referencial referido no parágrafo anterior, onde o plano Oxy coincide com o plano da trajectória e o eixo Oy é paralelo ao vector aceleração \vec{a} .

1.11.3.1.1.1.1.1

Figura 1.17 – Movimento uniformemente variado.

Escrevendo os vectores constantes \vec{r}_0 , \vec{v}_0 e \vec{a} , em relação ao referencial $Oxyz$, fica:

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{0} = (0, 0, 0) \\ \vec{v}_0 = v_0 \cdot (\cos \alpha, \text{sen} \alpha, 0) \\ \vec{a} = (0, -a, 0) \end{cases} \quad (1.56)$$

ou seja, como $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + 1/2 \cdot t^2 \cdot \vec{a}$ então:

$$(x, y, z) = \vec{0} + v_0 \cdot (\cos \alpha, \text{sen} \alpha, 0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot (0, -a, 0) \quad (1.57)$$

As equações paramétricas da trajectória são então:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \cdot \text{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot a \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (1.58)$$

As equações cartesianas obtêm-se eliminando o parâmetro t , vindo:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \\ y = v_0 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 \end{cases} \quad (1.59a)$$

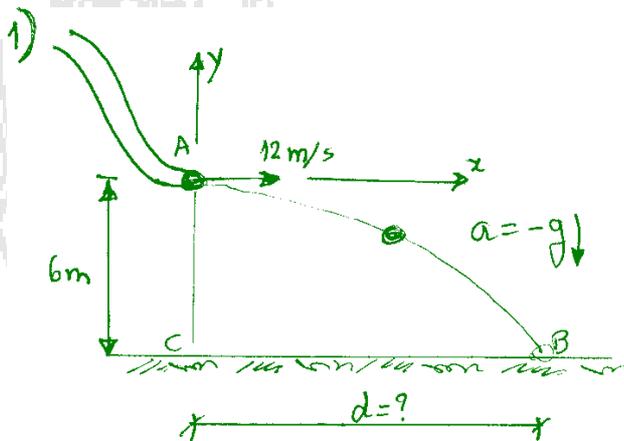
A equação cartesiana, no plano Oxy , é:

$$y(x) = \underbrace{x \cdot \operatorname{tg} \alpha}_A - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}}_B \cdot x^2 = A \cdot x + B \cdot x^2 \quad (1.59b)$$

Ou seja, a equação cartesiana da trajectória é um polinómio de segundo grau, isto é, uma parábola. Logo, a trajectória de um movimento uniformemente variado de aceleração constante não nula é parabólica.

Este é o tipo de movimento de qualquer projectil lançado no espaço num campo gravítico em que se despreza qualquer tipo de resistência aerodinâmica e atrito.

Exercícios de aplicação



Uma bola é lançada da rampa, como mostra a figura ao lado, com uma velocidade de 12 m/s. Estando essa rampa situada a uma altura de 6 m do chão, determinar o tempo que a bola demora a atingir o chão e a que distância, d , da rampa.

Resolução:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + \frac{1}{2} t^2 \vec{a}$$

com: $\vec{r}_0 = (0, 0)$, considerando o sist. de eixos c/ origem em A

$$\vec{v}_0 = (12, 0)$$

$$\vec{a} = (0, -9.81), \quad g = -9.81 \text{ m/s}^2$$

$$(x, y) = (0, 0) + t(12, 0) + \frac{1}{2} t^2 (0, -9.81)$$

Equações paramétricas:
$$\begin{cases} x = 12 \cdot t \\ y = -\frac{9.81}{2} t^2 \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t :

$$\begin{cases} t = x/12 \\ y = -\frac{9,81}{2} \cdot \frac{x^2}{144} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{9,81}{288} x^2 = -0,0341 x^2$$

$$y = -6 \Rightarrow x = d \Rightarrow x = \sqrt{\frac{6 \times 288}{9,81}} = 13,3 \text{ m}$$

$$x = 13,3 \text{ m} \rightarrow t = \frac{13,3}{12} = 1,1 \text{ s}$$

- 2) Mostre que o movimento de qualquer projectil lançado no espaço num campo gravítico com aceleração $\vec{a} = (0, -g)$ apresenta um valor constante para a componente horizontal da velocidade, desde que se despreze qualquer tipo de resistência aerodinâmica e atritos.

Resolução:

Como se verificou, a ^{vector} velocidade instantânea de um projectil que apresenta um movimento uniformemente variado ($\vec{a} = \text{constante}$) é dado por:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{a}$$

Neste caso tem-se: $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$

$$\vec{a} = (0, -g)$$

Logo $\vec{v}(t) = (v_{0x}, v_{0y}) + t(0, -g)$

ou seja

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + 0 \\ v_y = v_{0y} + t(-g) = v_{0y} - t \cdot g \end{cases}$$

Portanto $v_x(t) = v_{0x}$, $\forall t \geq 0$.

1.12 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULARES

1.12.1 Definições

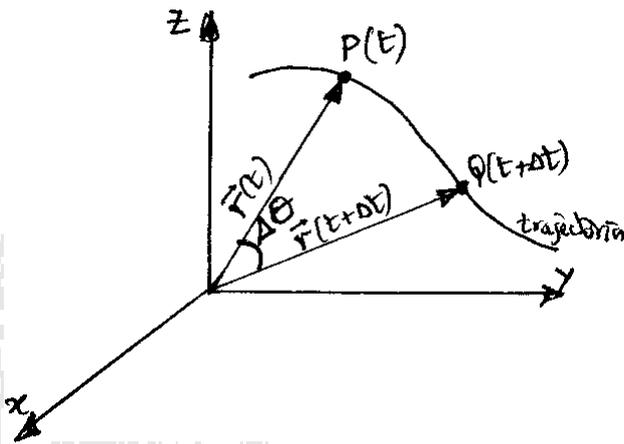


Figura 1.18 – Variação angular do movimento.

No intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$ há uma variação angular espacial $\Delta\theta$ entre os vectores posição referidos aos limites dos intervalos.

Designa-se **velocidade angular média** no intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$ ao escalar:

$$\omega_m|_{[t, t+\Delta t]} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1.60)$$

Designa-se **velocidade angular instantânea** no instante t , ao limite da velocidade angular média quando Δt tende para zero ($\Delta t \rightarrow 0$), isto é:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \theta'(t) = \dot{\theta}(t) \quad (1.61)$$

De forma idêntica se define **aceleração angular média** como sendo o escalar, no intervalo de tempo $[t, t+\Delta t]$, dado por:

$$\alpha_m|_{[t, t+\Delta t]} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (1.62)$$

e, aceleração angular instantânea no instante t como sendo o escalar dado por:

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t) = \dot{\omega}(t) \quad (1.63)$$

Considerando ainda a expressão (1.61), de definição de velocidade angular instantânea, a aceleração angular instantânea pode também ser expressa por:

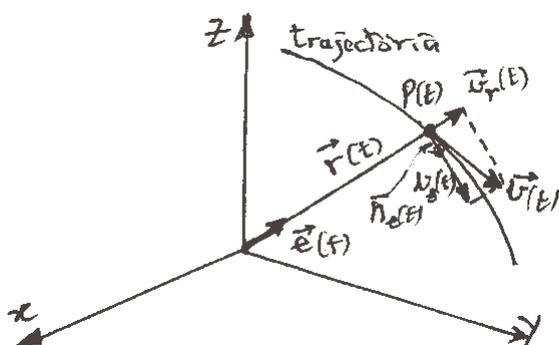
$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta''(t) = \ddot{\theta}(t) \quad (1.63)$$

1.12.2 Dimensões e unidades

As dimensões e as unidades mais usuais destas duas grandezas cinemáticas são:

$$\begin{array}{l}
 [\omega]=T^{-1} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{S.I. e C.G.S.} - \text{rad/s} \\ \text{outros} \quad - n^{\circ} \text{ revoluções/s} \\ \quad \quad \quad - n^{\circ} \text{ revoluções/min (r.p.m.)} \end{array} \right. \\
 \\
 [\alpha]=T^{-2} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{S.I. e C.G.S.} - \text{rad/s}^2 \\ \text{outros} \quad - n^{\circ} \text{ revoluções/s}^2 \end{array} \right.
 \end{array}$$

1.12.3 Componente radial e transversal da velocidade: componentes intrínsecas ou polares



A velocidade e a aceleração angulares são conceitos bastante úteis para definir movimentos gerais curvilíneos, através de coordenadas não (necessariamente) cartesianas.

Considerando a figura 1.19, representando uma partícula a descrever um movimento qualquer, o vector velocidade instantânea, $\vec{v}(t)$, pode ser decomposto em duas componentes:

Figura 1.19 – Componente radial e transversal da velocidade.

- velocidade radial, $\vec{v}_r(t)$, na direcção do vector posição $\vec{r}(t)$;
- velocidade transversal, \vec{v}_θ , na direcção normal ao vector posição e pertencente ao plano definido pelos vectores posição, $\vec{r}(t)$, e velocidade, $\vec{v}(t)$.

Então,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_r(t) + \vec{v}_\theta(t) \quad \text{e} \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \quad (1.64)$$

como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{r} = r \cdot \vec{e} \quad (1.65)$$

sendo \vec{e} o versor da direcção do vector posição, logo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{e}) = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e} + r \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \quad (1.66)$$

Ora, $dr/dt \cdot \vec{e}$ tem a direcção do vector posição porque \vec{e} é o versor dessa direcção; e, $r \cdot d\vec{e}/dt$ tem a direcção normal porque o vector $d\vec{e}/dt$ é perpendicular ao versor \vec{e} (de facto, se \vec{e} é versor então:

$$\frac{d}{dt}(\vec{e} \cdot \vec{e}) = \frac{d}{dt}(1) = 0 \quad (1.67a)$$

aplicando a propriedade da derivada do produto de duas variáveis, vem:

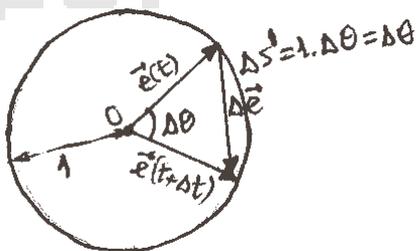
$$\frac{d}{dt}(\vec{e} \cdot \vec{e}) = 2 \frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \vec{e} \quad (1.67b)$$

tendo em conta a equação (1.67a), a derivada deste produto é igual a zero, então,

$$\frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \vec{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}}{dt} \perp \vec{e} \quad (1.67c)$$

como se pretendia mostrar).

Calcule-se $\left| \frac{d\vec{e}}{dt} \right|$:



Os versores dos sucessivos vectores posição em diferentes instantes são unitários, por isso, a linha que une os extremos desses vectores é uma circunferência de raio unitário. De acordo com a figura 1.20,

$$\Delta s' = |\vec{e}| \cdot \Delta\theta = 1 \cdot \Delta\theta = \Delta\theta \quad (1.68)$$

Figura 1.20 – Versores em diferentes instantes.

Quando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$ds' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\vec{e}| \cdot \Delta \theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \theta = d\theta = |d\vec{e}| \quad (1.69)$$

ou seja, quando $\Delta t \rightarrow 0$ a corda tende para o arco, donde:

$$\left| \frac{d\vec{e}}{dt} \right| = \frac{|d\vec{e}|}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (1.70)$$

como

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \left| \frac{d\vec{e}}{dt} \right| \cdot \vec{n}_e \quad (1.71)$$

então:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \omega \cdot \vec{n}_e \quad (1.72)$$

e ainda como,

$$\left. \begin{aligned} & \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \\ \text{e} & \vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e} + r \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \\ \text{e} & \frac{d\vec{e}}{dt} = \omega \cdot \vec{n}_e \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

então, as componentes radial e transversal podem ser obtidas por:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{v}_r &= \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e} \\ \vec{v}_\theta &= r \cdot \omega \cdot \vec{n}_e \end{aligned} \right. \quad (1.74)$$

De igual forma, pode-se obter as componentes intrínsecas da aceleração (isto é, a aceleração radial e a aceleração transversal):

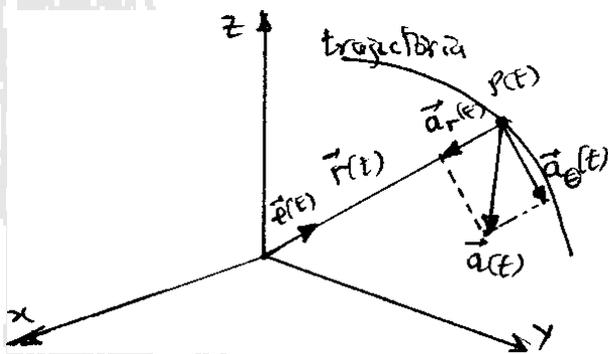
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (1.75)$$

em que,

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u} \\ \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} \end{cases} \quad (1.76)$$

Sendo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.77)$$



e

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{e} + r \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{e} + r \cdot \omega \cdot \vec{n}_e \end{aligned} \quad (1.78)$$

Figura 1.21 – Componentes intrínsecas da aceleração.

Então,

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \cdot \vec{e} + r \cdot \omega \cdot \vec{n}_e \right) \quad (1.79a)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \vec{e} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \omega \cdot \vec{n}_e + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{n}_e + r \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{n}_e}{dt} \quad (1.79b)$$

como,

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \omega \cdot \vec{n}_e \quad (1.80)$$

e como,

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= |d\vec{e}| & \text{e} & \quad \frac{d\vec{n}_e}{dt} \perp \vec{e} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\vec{n}_e}{dt} = -\omega \cdot \vec{e} \quad (1.81)$$

\vec{a} tem sentido contrário a \vec{r}

então,

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \omega^2 \right) \cdot \vec{e} + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \omega + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) \cdot \vec{n}_e \quad (1.82)$$

como

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \quad (1.83)$$

e

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta \quad (1.84)$$

então as componentes de aceleração radial, \vec{a}_r , e transversal, \vec{a}_θ , definem-se como:

$$\begin{cases} \vec{a}_r = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \omega^2 \right) \cdot \vec{e} \\ \vec{a}_\theta = \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \omega + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) \cdot \vec{n}_e \end{cases} \quad (1.85)$$

Note-se que:

- 1) No caso do movimento retilíneo, se for considerado o centro do referencial sobre o eixo do movimento, não haverá variação angular ($\omega=0$) e, então:

$$\vec{v} = \vec{v}_r \quad (1.86)$$

ou seja, a velocidade tem a direcção do eixo do movimento e,

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (1.87)$$

- 2) No caso do movimento circular, se for considerado o centro do referencial no centro do círculo, a grandeza de \vec{r} é constante e $dr/dt = 0$ e, então,

$$\vec{v} = \vec{v}_\theta \quad (1.88)$$

ou seja, a velocidade é sempre perpendicular ao raio definido pelo vector posição e tem a grandeza $v = \omega \cdot r$.

1.13 MOVIMENTO CIRCULAR

Viu-se anteriormente que o movimento de uma partícula pode ser descrito a partir da lei horária e da equação cartesiana da trajectória ou a partir do vector posição da partícula em qualquer instante.

Partindo das duas abordagens anteriores, irá ser definida uma terceira forma de definir cinematicamente o movimento circular de uma partícula em qualquer instante através do conceito de vector velocidade angular.

1.13.1 Descrição através da trajectória e da lei horária

- Posição: Uma vez que o movimento é circular, está implícito o conhecimento da trajectória. A posição em qualquer instante é conhecida porque também é conhecida a lei horária, $s = s(t)$.
- Vector velocidade:
 - sentido: é o da progressão do movimento associado à evolução crescente dos arcos;
 - direcção: tangente à trajectória (portanto, à circunferência) no ponto considerado;
 - grandeza: o valor da velocidade escalar instantânea é:

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[R \cdot \theta(t)] = \\ &= R \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = R \cdot \omega(t) \quad (1.89)\end{aligned}$$

sendo R o raio da trajectória que, neste caso, é constante dado que o movimento é circular.

- **Vector aceleração:** Na definição do vector aceleração, há dois casos a considerar:

1º) O movimento é circular uniforme: $\omega = \text{constante}$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2 \end{cases} \quad (1.90)$$

ou seja, a aceleração é puramente radial (ou normal) com:

- sentido: para o interior da trajectória;
- direcção: do vector posição (que é o raio do círculo formado pela trajectória), isto é, perpendicular ao vector velocidade;
- grandeza: $a = a_n = \omega^2 \cdot R$.

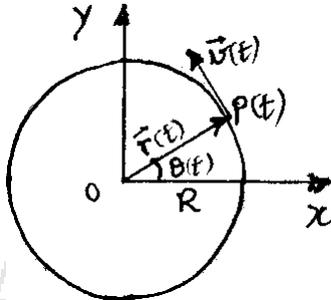
2º) O movimento é circular variado: $\omega \neq \text{constante}$

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[R \cdot \omega(t)] = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha \\ a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2 \end{cases} \quad (1.91)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = R \cdot \alpha \cdot \vec{u} \\ \vec{a}_n = R \cdot \omega^2 \cdot \vec{n} \end{cases}$$

- sentido: para o interior da trajectória;
- direcção: é a que resulta da soma dos vectores \vec{a}_t (com direcção do vector posição) e \vec{a}_n (com direcção transversal ou normal à anterior);
- grandeza: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$.

1.13.2 Descrição através do vector posição



Considerando uma partícula que descreve um movimento circular no plano Oxy e supondo que essa partícula inicia o movimento no ponto $(R, 0)$, o que não constitui perda de generalidade uma vez que o sistema de eixos pode ser escolhido de forma a que isso aconteça.

Nestas condições, o vector posição pode ser definido por:

Figura 1.22 – Movimento circular de uma partícula.

Nestas condições, o vector posição pode ser definido por:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} ; \quad \text{com} \quad \begin{cases} x(t) = R \cdot \cos \theta(t) \\ y(t) = R \cdot \sin \theta(t) \end{cases} \quad (1.92)$$

portanto,

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \sin \theta(t) \cdot \vec{j} \quad (1.93)$$

com $|\vec{r}| = R = \text{raio da circunferência}$.

Considere-se agora os dois casos já referidos anteriormente, conforme a velocidade angular é constante ou variada:

1º) O movimento é circular uniforme: $\omega = \text{constante}$

Dado que:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega \cdot dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \theta = \omega \cdot (t - 0) \Rightarrow \theta = \omega \cdot t \end{aligned} \quad (1.94)$$

– posição: a posição da partícula fica definida em cada instante por:

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + R \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{j} \quad (1.95)$$

– vector velocidade:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{j} \quad (1.96)$$

a grandeza do vector velocidade é:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 [\text{sen}^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)]} = R \cdot \omega \quad (1.97)$$

como já se tinha constatado; e,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{r} &= [-R \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t), R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)] \cdot [R \cdot \cos(\omega \cdot t), R \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] \\ &= -R^2 \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) + R^2 \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r} \end{aligned} \quad (1.98)$$

– vector aceleração:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [-R \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}] = \\ &= -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} - R \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{j} = \\ &= -\omega^2 [R \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{i} + R \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}] = \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) \end{aligned} \quad (1.99)$$

donde se conclui que o vector aceleração tem a direcção do vector posição e sentido contrário desse vector, isto é, a aceleração coincide com a aceleração normal:

$$\vec{a} = \vec{a}_n, \text{ com grandeza } |\vec{a}| = a = a_n = \omega^2 \cdot R \quad (1.100)$$

Conclusão: Quando o movimento é circular e uniforme, a aceleração total coincide com a aceleração normal, que também se chama aceleração centrípeta.

Note-se que a designação movimento circular uniforme é imprópria já que existe aceleração. A designação refere-se ao facto da grandeza da velocidade ser constante, $v = \omega \cdot R = \text{constante}$, donde resulta que a partícula percorre espaços iguais em tempos iguais.

2º) O movimento é circular variado: $\omega \neq \text{constante}$

Como ω não é constante, não é possível explicitar θ como função de t sem conhecer a função $\omega = \omega(t)$. Assim:

– posição:
$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos\theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \sin\theta(t) \cdot \vec{j} \quad (1.101)$$

– vector velocidade:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -R \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \sin\theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \cos\theta(t) \cdot \vec{j} \quad (1.102a)$$

como $\omega = d\theta/dt$, então:

$$\vec{v}(t) = -R \cdot \omega(t) \cdot \sin\theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \omega(t) \cdot \cos\theta(t) \cdot \vec{j} \quad (1.102b)$$

A grandeza deste vector é:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 [\sin^2\theta + \cos^2\theta]} = R \cdot \omega \quad (1.103)$$

como já se tinha visto anteriormente. Este vector tem a direcção perpendicular ao vector posição (como também já se viu):

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{r} &= [-R \cdot \omega \cdot \sin\theta, R \cdot \omega \cdot \cos\theta] \cdot [R \cdot \cos\theta, R \cdot \sin\theta] \\ &= -R^2 \cdot \omega \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + R^2 \cdot \omega \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r} \end{aligned} \quad (1.104)$$

– vector aceleração:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-R \cdot \omega(t) \cdot \sin\theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \omega(t) \cdot \cos\theta(t) \cdot \vec{j}] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-R \cdot \omega^2(t) \cdot \cos \theta(t) - R \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} \cdot \text{sen} \theta(t) \right] \cdot \vec{i} + \\
 &\quad + \left[-R \cdot \omega^2(t) \cdot \text{sen} \theta(t) + R \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} \cdot \cos \theta(t) \right] \cdot \vec{j} = \\
 &= -\omega^2(t) \cdot [R \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \text{sen} \theta(t) \cdot \vec{j}] + \\
 &\quad + \frac{d\omega(t)}{dt} \cdot [-R \cdot \text{sen} \theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{j}] \tag{1.105}
 \end{aligned}$$

como:

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \text{sen} \theta(t) \cdot \vec{j} \tag{1.106a}$$

$$\frac{\vec{v}(t)}{\omega} = -R \cdot \text{sen} \theta(t) \cdot \vec{i} + R \cdot \cos \theta(t) \cdot \vec{j} \tag{1.106b}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{1.106c}$$

então,

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r} + \frac{\alpha}{\omega} \cdot \vec{v} \tag{1.107}$$

1.14 VECTOR ROTAÇÃO OU VECTOR VELOCIDADE ANGULAR, $\vec{\omega}$

1.14.1 Definição

O vector rotação, ou vector velocidade angular $\vec{\omega}$, é um vector sem existência físico-matemática, sendo um operador matemático que foi definido com o objectivo de permitir uma descrição geral, e simultaneamente prática, dos movimentos circulares.

O vector rotação é definido por:

- direcção: normal ao plano da trajectória;

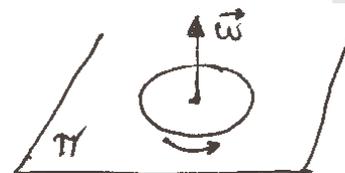


Figura 1.23 – Sentido do vector rotação

- sentido: o da progressão de um saca-rolhas que gire no sentido do movimento;
- grandeza: igual à velocidade angular, $\omega(t)$.

De igual modo, poderá ser definido o vector fictício de aceleração angular como sendo:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega(t) \cdot \vec{k}] = \frac{d\omega(t)}{dt} \cdot \vec{k} = \alpha(t) \cdot \vec{k} \quad (1.118)$$

1.14.2 Descrição do movimento circular através do vector rotação

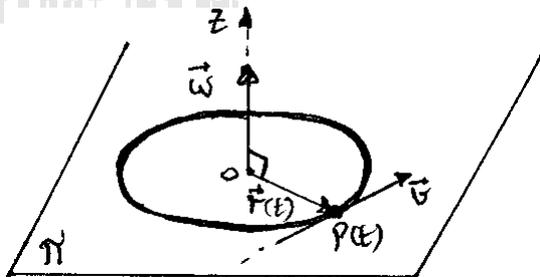


Figura 1.24 – Vector rotação, $\vec{\omega}$.

Considere-se uma partícula em movimento circular, sendo P o ponto em que a partícula se encontra no instante t e \vec{r} o vector posição em relação a um referencial com origem no centro da circunferência.

- posição: uma vez que é conhecida a trajetória (circular) e a velocidade angular, ω , a posição pode ser definida obtendo primeiro o ângulo de rotação θ :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_0^t \omega dt = \int_0^\theta d\theta \Rightarrow \theta = \omega \cdot t \quad (1.119)$$

uma vez conhecido o ângulo de rotação, é possível definir a lei horária:

$$s = s(t) = R \cdot \theta(t) \quad (1.120)$$

- vector velocidade: o vector velocidade é dado por:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.121)$$

Veja-se que assim é:

- a direcção do vector $\vec{\omega} \times \vec{r}$ é perpendicular ao plano definido pelos vectores $\vec{\omega}$ e \vec{r} e, portanto, com direcção perpendicular à trajectória.
- o sentido é dado pela progressão de um saca-rolhas quando ele roda (de acordo com a definição de produto vectorial) do primeiro vector, $\vec{\omega}$, para o segundo vector, \vec{r} .
- a grandeza do vector $\vec{\omega} \times \vec{r}$ é:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{sen}\beta \quad (1.122)$$

como $\vec{\omega} \perp \vec{r} \Rightarrow \beta = 90^\circ \Rightarrow \text{sen}\beta = 1$, portanto:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| = \omega \cdot r \quad (1.123)$$

ou seja, tem a mesma grandeza que a da velocidade escalar instantânea de uma partícula em movimento circular.

– vector aceleração:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (1.124)$$

Ora, como $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$, então fica provado que:

$$\begin{cases} \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} \\ \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \end{cases} \quad (1.125)$$

Vai-se ver agora como se pode redefinir a componente normal, \vec{a}_n , e a componente transversal, \vec{a}_t , da aceleração:

- $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{r} = -\omega^2 \cdot \vec{r} \quad (1.126)$$

Já atrás se tinha visto que $\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$.

$$\bullet \quad \underline{\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \vec{k}) = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{k} + \omega \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (1.127a)$$

como $d\vec{k}/dt = \vec{0}$, vem:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{k} \quad (1.127b)$$

ou seja, os vectores $d\vec{\omega}/dt$ e $\vec{\omega}$ são paralelos. Viu-se ainda que $\vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$, donde:

$$\vec{r} = -\frac{1}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1.128)$$

então:

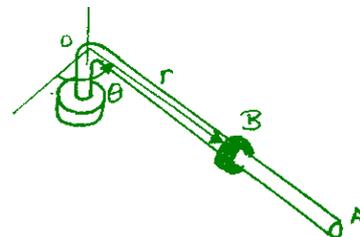
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \left(-\frac{1}{\omega^2} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} \right) = \\ &= -\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \\ &= -\frac{1}{\omega^2} \cdot \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \cdot \vec{\omega} - \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\omega} \right) \cdot \vec{v} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega \cdot \vec{v} = \frac{\alpha}{\omega} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (1.129)$$

tal como se tinha visto anteriormente, a componente tangencial da aceleração é dada por:

$$\vec{a}_t = \frac{\alpha}{\omega} \cdot \vec{v} \quad (1.130)$$

Exercícios de aplicação

- 1- A vara metálica \overline{OA} ilustrada na figura roda segundo um plano horizontal de forma que $\theta = (t^3)$ rad. Simultaneamente, a anilha B escorrega ao longo da vara \overline{OA} de forma que $r_{OB} = (100t^2)$ mm. Considerando t em segundos, determine a velocidade e a aceleração da anilha quando $t = 1$ s.



Resolução:

Num movimento curvilíneo, os vectores velocidade e aceleração podem ser obtidos pelas suas componentes intrínsecas (ou polares) através das seguintes expressões:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e} + r \cdot \omega \cdot \vec{n}_e$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \vec{e} + \left(2 \frac{dr}{dt} \omega + r\alpha \right) \vec{n}_e$$

onde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ e $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Neste problema tem-se:

$$r = 100t^2 \text{ (mm)} \quad \text{e} \quad \theta = t^3 \text{ (rad)}$$

$$\frac{dr}{dt} = 200t \text{ (mm/s)} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = 3t^2 \text{ (rad/s)}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 200 \text{ (mm/s}^2\text{)} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 6t \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

então a velocidade é igual a:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 200t \rightarrow v_r(t=1) = 200 \text{ mm/s}$$

$$v_\theta = r\omega = 100t^2 \cdot 3t^2 = 300t^4 \rightarrow v_\theta(t=1) = 300 \text{ mm/s}$$

$$\vec{v} = 200 \vec{e}_r + 300 \vec{e}_\theta \quad \text{mm/s}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{200^2 + 300^2} = 361 \text{ mm/s}$$

e a aceleração é igual a:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega^2 = 200 - 100(3t^2)^2 = 200 - 900t^4$$

$$\hookrightarrow a_r(t=1) = -700 \text{ mm/s}^2$$

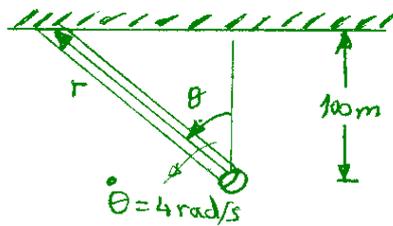
$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \omega + r \alpha = 2 \cdot 200t \cdot 3t^2 + 100t^2 \cdot 6t = 1800t^3$$

$$\hookrightarrow a_\theta(t=1) = 1800 \text{ mm/s}^2$$

$$\vec{a} = -700 \vec{e}_r + 1800 \vec{e}_\theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{700^2 + 1800^2} = 1931 \text{ mm/s}^2$$

2 - O foco de luz ilustrado na figura envia um feixe de luz que se projecta numa parede situada a 100 m. Determine a velocidade e a aceleração que o feixe de luz ~~percorre~~ percorre a parede no instante $\theta = 45^\circ$, sabendo que o foco luminoso tem uma velocidade angular constante de $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$.



Resolução:

Usando o sistema de eixos polar (r, θ) conforme está indicado na figura,

As coordenadas polares estão relacionadas entre si, por:

$$r = \frac{100}{\cos \theta}$$

$$\dot{\theta} = \text{constante} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

Logo: $\rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$ $\frac{d^2r}{dt^2} = a$

$$\left(\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{100}{\cos\theta} \right) = \frac{-100(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \right)$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \omega}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \omega \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \right) \omega + \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \right) \cdot \omega + \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \alpha \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \right) \cdot \omega^2 + \left(\frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \right) \alpha \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \right) &= \frac{100 \cos\theta + 100 \tan\theta \sin\theta}{\cos^2\theta} = \\ &= \frac{100}{\cos^3\theta} + \frac{100 \tan^2\theta}{\cos\theta} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{100 \omega^2}{\cos^3\theta} + \frac{100 \tan^2\theta}{\cos\theta} \cdot \omega^2 + \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \alpha$$

como $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, então

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{100 \omega^2}{\cos^3\theta} + \frac{100 \tan^2\theta}{\cos\theta} \omega^2}$$

A velocidade é então igual a:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \omega \rightarrow v_r(\theta=45^\circ) = \frac{100 \tan 45^\circ \cdot 4}{\cos 45^\circ} = 565,7 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r \cdot \omega = \frac{100}{\cos\theta} \cdot \omega \rightarrow v_\theta(\theta=45^\circ) = \frac{100 \cdot 4}{\cos 45^\circ} = 565,7 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = 565,7 \vec{e}_r + 565,7 \vec{e}_\theta \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(565,7)^2 + (565,7)^2} = 800 \text{ m/s}$$

A aceleração é igual a:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \omega^2 = \frac{100 \omega^2}{\cos^3\theta} + \frac{100 \tan^2\theta}{\cos\theta} \omega^2 - \frac{100}{\cos\theta} \omega^2 = 4525,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \omega + r \cdot \alpha = 2 \cdot \frac{100 \tan\theta}{\cos\theta} \cdot \omega^2 + 0 = 4525,5 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = 4525,5 \vec{e}_r + 4525,5 \vec{e}_\theta \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{4525,5^2 + 4525,5^2} = 6400 \text{ m/s}^2$$