

Apostila de Comunicações Digitais

Capítulo 2

Princípios de Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Universidade de Brasília

Rev. 1.0

Abril/2017

1. Princípios de Comunicações Digitais

a. Introdução

O primeiro passo em um sistema de comunicações digitais é a codificação da mensagem a ser enviada, por exemplo um vídeo ou transmissão de voz, em uma sequência de bits. Esta conversão está, porém, fora do escopo deste texto.

Iremos aqui estudar como podemos transmitir esta sequência de bits em um canal de comunicações. Esta transmissão envolve na grande maioria a representação destes bits em um sinal, ou uma forma de onda no tempo contínuo, que pode então ser propagada no tempo e/ou espaço pelo canal. Este sinal pode ser uma onda eletromagnética de rádio, como em transmissões sem fio, sinais de luz, como em fibras ópticas, sinais acústicos em transmissões subaquáticas, ou mesmo em alterações mecânicas em algum material, como em discos ópticos, entre outros tipos menos comuns de transmissão. Veremos aqui quais formas de onda podemos gerar e como estas formas de onda são detectadas nos receptores.

Veremos ainda que, por termos processos aleatórios em toda a cadeia de transmissão, trata-se de um sistema probabilístico, em que sempre haverá a probabilidade de errarmos a detecção. Um dos principais problemas é a presença de ruído térmico, como escrito no Capítulo 1, e veremos aqui a probabilidade de erro de detecção na presença de ruído.

b. Conceitos Básicos

Queremos enviar uma sequência de bits b_l com N_{bits} em um intervalo de tempo T . Precisamos então transmitir a uma **taxa de bits** $R_b = \frac{N_{bits}}{T}$, usualmente expressa em bps (bits/segundo). Caso esta taxa seja constante, podemos dizer que cada bit leva um tempo

$$T_b = \frac{1}{R_b} \quad (1)$$

para ser transmitido, chamado de **intervalo de bit**.

Para transmitir estes bits, podemos formar blocos de n_b bits, e cada bloco será transmitido portanto com uma duração

$$T_s = n_b T_b, \quad (2)$$

conhecida como **intervalo de símbolo**.

Da mesma forma que para bits, temos uma **taxa de símbolos**

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{R_b}{n_b}, \quad (3)$$

usualmente representada com a unidade bauds¹. A taxa de símbolos é também conhecida como taxa de bauds.

Cada bloco de n_b bits $\mathbf{b}_k = [b_{n_b k}, b_{n_b k+1}, \dots, b_{n_b(k+1)-1}]$ é mapeado em um sinal $s_i(t)$ dentre um conjunto de $M = 2^{n_b}$ sinais diferentes possíveis. Ou seja, para o bloco l de bits vamos escolher um índice $I_k(\mathbf{b}_k)$, com $0 \leq I_k < M$ e escolher o sinal $s_{I_k}(t)$. Os sinais escolhidos serão enviados no respectivo intervalo, de modo que a forma de onda enviada será

¹ Em homenagem ao matemático francês Émile Baudot

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{I_k}(t - kT_s) \quad (4)$$

Exemplo 1

Vamos supor um sistema quaternário, $M = 4$ ($n_b = \log_2 M = 2$) em que usamos o mapeamento da Figura 1.

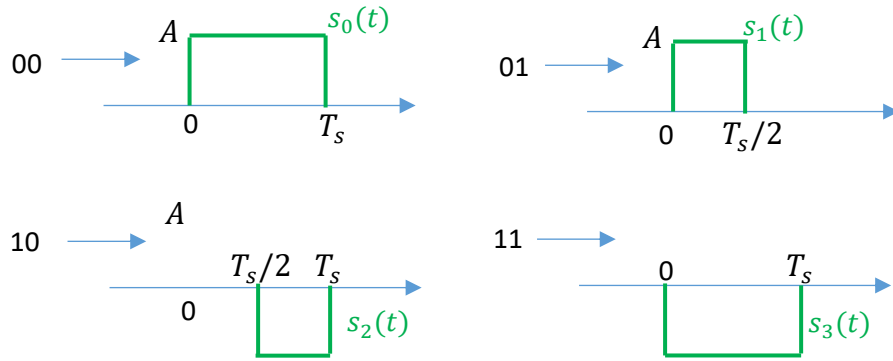


Figura 1. Exemplo de um mapeamento quaternário

Se enviarmos por exemplo a sequência $b_k = [0111010010]$, ela será agrupada em cinco blocos de $n_b = 2$ bits cada, $\mathbf{b}_l = [(01), (11), (01), (00), (10)]$, correspondente aos índices $I_l = [1; 3; 1; 0; 2]$, e o sinal enviado será

$$x(t) = s_1(t) + s_3(t - T_s) + s_1(t - 2T_s) + s_0(t - 3T_s) + s_2(t - 4T_s)$$

Que pode ser visualizado na Figura 2.

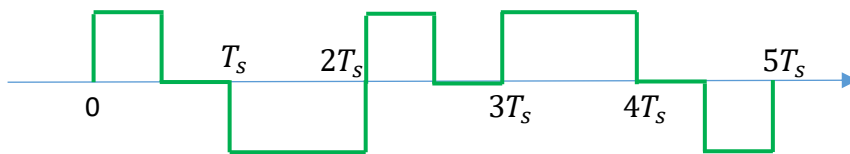


Figura 2. Exemplo de sinal quaternário transmitido

Exemplo 2 Cálculo de taxa de bits

Supondo que usamos o sistema do Exemplo 1, com um intervalo de símbolos $T_s = 1\text{ms}$, a taxa de símbolos será de $R_s = \frac{1}{T_s} = 1$ kbauds, e a taxa de bits será de $R_b = \frac{n_b}{T_s} = n_b R_s = 2$ kbps.

No receptor, basta então identificarmos qual dos M sinais foi provavelmente enviado, o que é chamado de detecção, e mapeá-lo nos bits correspondentes. Esta detecção pode ocorrer com erro, e queremos minimizar a probabilidade de estes erros ocorrerem. Esta probabilidade é usualmente conhecida como taxa de erro de bit (BER – *bit error rate*), que é a relação entre o número de bits recebidos com erro N_{err} e o número de bits enviados N_{bits} . Veremos mais tarde como escolher o conjunto de sinais e como a detecção pode ser feita da melhor maneira.

O sinal transmitido $x(t)$ é um sinal aleatório, pois depende de uma sequência aleatória de bits, e possui uma densidade espectral de potência $S_x(f)$. Caso esta densidade espectral de potência ocupe uma faixa do espectro em banda base, ou seja, $S_x(f) \approx 0$, se $|f| > B$, dizemos que temos um **código de linha**.

Em muitas aplicações o canal está disponível apenas em uma faixa do espectro. Isto pode ocorrer por questões físicas, como limitações das frequências que podem ser transmitidas por uma antena. Isto é necessário por exemplo também em transmissões ópticas, pois temos que ocupar o espectro de luz visível. Alternativamente, esta é uma necessidade para multiplexarmos diferentes sinais em um mesmo meio físico, transmitindo cada um em uma faixa de frequência diferente. Nestes casos dizemos que o sinal é transmitido em banda passante, e realizamos uma **modulação digital**.

Como veremos, não existe um código ou esquema de transmissão ideal, mas códigos com características diferentes, adequados a situações diferentes. Dentre as características de esquemas de transmissão que iremos analisar, podemos mencionar

- A **largura de banda** B_T ocupada, em Hz, ou seja, a largura de banda do sinal analógico $x(t)$. Lembrando que a mensagem é aleatória, $x(t)$ também é, e a largura de banda deve ser analisada a partir de sua densidade espectral de potência.
- Aliado à largura de banda, temos a **eficiência espectral**, que é a razão entre a taxa de bits e a banda ocupada $\eta = \frac{R_b}{B_T}$, em bps/Hz. A banda ocupada é geralmente limitada, e queremos transmitir a uma taxa o maior possível, ou seja, queremos a maior eficiência espectral possível.
- Além da banda ocupada, o formato do espectro também é relevante. Em particular, é desejado que o sinal não tenha um componente de corrente direta (DC). Um **componente DC** implica que o sinal tenha uma média não-nula em períodos de tempo relativamente longos, de modo que o sinal tenha uma média não-nula em alguns intervalos de tempo. Deste modo, o sinal pode sofrer uma acumulação de DC ao ser integrado, podendo saturar alguns circuitos elétricos. Da mesma forma o componente DC é bloqueado por exemplo em transformadores. Um sinal sem componente DC é tal que sua densidade espectral de potência não tenha componente DC, ou seja, $S_x(0) = 0$.
- Uma das principais figuras de mérito de sistemas de transmissão é a eficiência de potência. Todos os sistemas de comunicações sofrem com a presença de ruído que produzem erros, os sistemas devem ser projetados para uma certa **taxa de erro de bit** (BER) desejada, que depende da aplicação. Veremos que a taxa de erro de bit é uma função da potência de transmissão, e, para uma mesma BER, queremos uma potência de transmissão a menor possível.
- Algumas técnicas de transmissão permitem que sejam detectados alguns eventuais erros. Como veremos mais tarde, isso pode ser obtido também por meio do uso de códigos corretores e detectores de erro.
- Em qualquer sistema de transmissão digital é importante sabermos onde começa e termina cada símbolo. Isto é o que chamamos de recuperação de relógio ou sincronização. Algumas técnicas de transmissão permitem que isto seja obtido por características inerentes ao sinal de comunicação. Alternativamente, a sincronização pode ser obtida pelo envio de um sinal de referência conhecido a priori no receptor.
- É desejável que a probabilidade de erro de bit seja a mesma, independentemente da mensagem enviada. Isto é o que se chama de transparência.

- Além do ruído, temos diferentes imperfeições nos transceptores (transmissores / receptores), como não linearidades dos amplificadores, que podem afetar o desempenho da transmissão. É desejável que o esquema de transmissão seja robusto a estas imperfeições, ou seja, que seja pouco afetado por elas.
- Por fim, devemos levar em conta a complexidade e o custo tanto do transmissor quanto do receptor.

2. Códigos de Linha Binários

Começaremos o estudo pelos códigos de linha binários, ou seja, em que $M = 2$ e $n_b = 1$.

Veremos a seguir alguns dos principais códigos.

On-Off Keying (OOK)

Neste esquema, se o bit transmitido for $b_k = 0$, não será enviado nada no intervalo correspondente, e se $b_k = 1$, enviamos um pulso $p(t)$, ou seja $s_i(t) = 0$ ou $s_i(t) = p(t)$.

O sinal transmitido pode ser representado como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k p(t - kT_s) \quad (5)$$

Fica mais fácil compreendermos este esquema por meio de um exemplo, a seguir.

Exemplo 3 – OOK - RZ

Suponha que temos um pulso $p(t) = A \text{rect}\left(\frac{2t}{T_s}\right)$, ou seja, um pulso retangular com largura igual à metade da largura de símbolo, como na Figura 3.

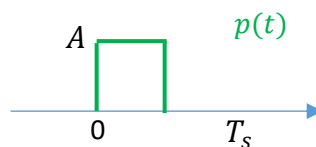


Figura 3. Pulso RZ

Se quisermos enviar a sequência $b_k = 10100110$ teremos o sinal mostrado na Figura 4.

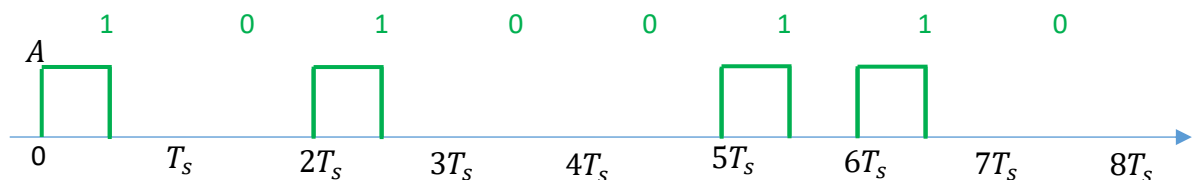


Figura 4. Exemplo de transmissão de sinal on-off RZ.

Este é conhecido como um sinal **return-to-zero** (RZ), já que o nível sempre volta ao zero no meio de cada símbolo.

Exemplo 4 – OOK – NRZ

Suponha agora um pulso $p(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$, ou seja, um pulso retangular com largura igual à largura de símbolo, como na Figura 5.

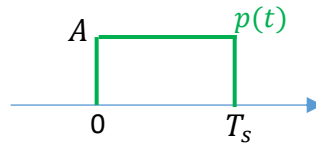


Figura 5. Pulso NRZ

Se quisermos enviar a mesma sequência, teremos agora o sinal mostrado na Figura 6, onde vemos que, quando são transmitidos dois bits 1 consecutivos, o sinal não retorna ao nível nulo. Este é conhecido como um sinal non-return-to-zero (NRZ).

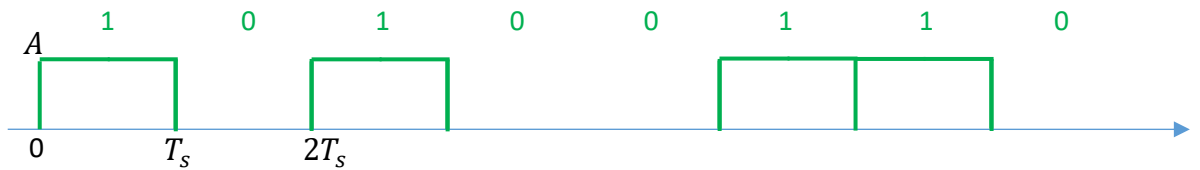


Figura 6. Exemplo de transmissão de sinal on-off NRZ.

Codificação Polar

Neste esquema, se o bit transmitido for $b_k = 0$, será enviado um pulso $s_i(t) = -p(t)$ no intervalo correspondente, e se $b_k = 1$, enviamos um pulso $p(t)$, ou seja $s_i(t) = \pm p(t)$. Neste código, variamos a polaridade do pulso, daí o nome.

O sinal transmitido pode ser representado como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2b_k - 1) p(t - kT_s) \quad (6)$$

Exemplo 5 – Polar - RZ

Suponha novamente um pulso RZ $p(t) = A \text{ rect}\left(\frac{2t}{T_s}\right)$, se quisermos enviar a sequência $b_k = 10100110$ teremos o sinal mostrado na Figura 7.

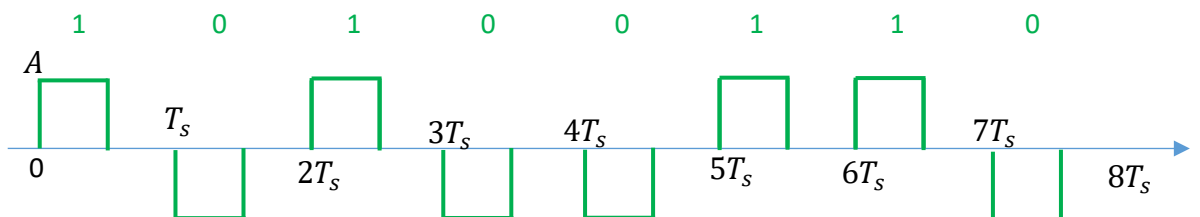


Figura 7. Exemplo de transmissão de sinal polar RZ.

Exemplo 6 – Polar – NRZ

Suponha agora novamente um pulso NRZ $p(t) = A \text{ rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$,

Se quisermos enviar a mesma sequência, teremos agora o sinal mostrado na Figura 8.



Figura 8. Exemplo de transmissão de sinal on-off NRZ.

Podemos ver nos exemplos acima que nos esquemas NRZ, se tivermos longas sequências de bits zeros ou uns consecutivos podemos ter um longo período de tempo com o mesmo nível de sinal, o que dificulta a identificação de quando começa e termina cada bit, ou seja, dificulta a recuperação de relógio. Por contra, na transmissão polar RZ, podemos facilmente identificar a transmissão de cada bit. Veremos mais tarde, porém, que um sistema RZ apresenta banda de transmissão maior.

3. Formatação de Pulso

a. Critério de Nyquist para Interferência Inter-Simbólica nula

Nos exemplos acima utilizamos pulsos retangulares, em que o sinal representando cada bit fica confinado dentro do intervalo de tempo dedicado a ele. O espectro de um pulso retangular no tempo é uma função sinc na frequência, que, como sabemos, tem, estritamente falando, uma largura de banda infinita. Isto pode ser visto na Figura 9. Porém, os canais de comunicação são usualmente limitados em banda, seja por características do canal (por exemplo, limitação da banda de transmissão de antenas) ou porque apenas parte do espectro é alocada para a aplicação desejada (por exemplo, um canal de TV). Também na Figura 9 vemos o efeito da limitação em banda no pulso de transmissão. Um sinal limitado em banda tem duração infinita no tempo, e parte do sinal vaza para fora do intervalo inicialmente alocado, podendo causar o que é chamado de interferência intersimbólica (ISI – *Intersymbol Interference*).

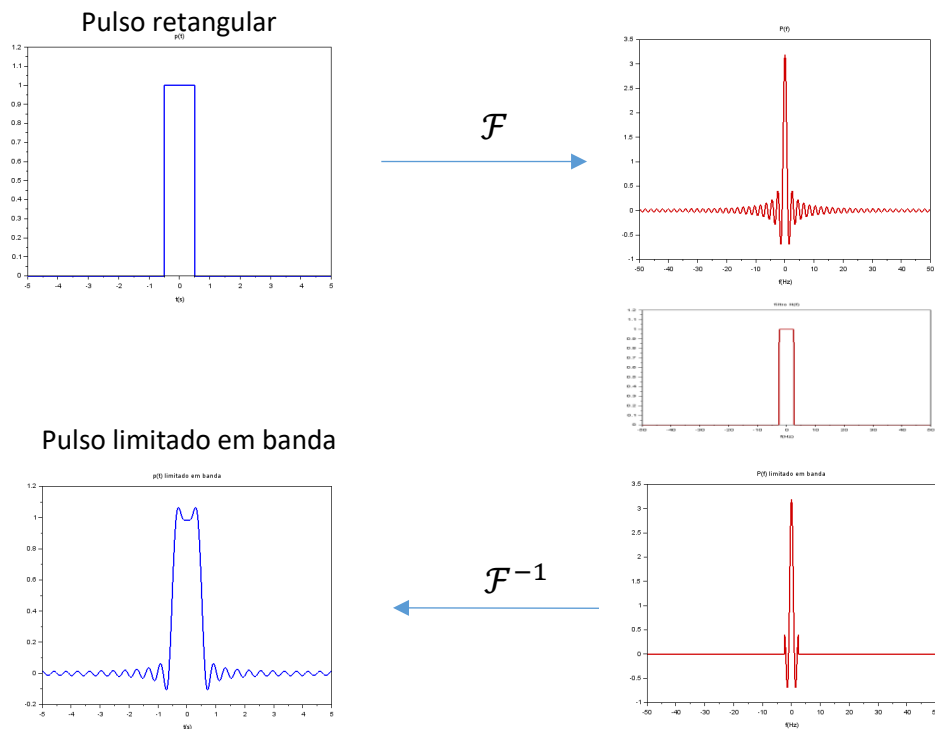


Figura 9. Transmissão com pulso limitado em banda

Podemos, porém, projetar pulsos limitados em banda que não gerem interferência intersimbólica. Para isto precisamos levar em conta que, em um sistema digital, o sinal será amostrado antes de detectarmos o sinal.

Podemos representar um sinal digital genérico como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_s) \quad (7)$$

Por exemplo, vemos que tanto as codificações polar (5) quanto on-off (6) são casos particulares desta equação.

Se fizermos

$$p(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t = \pm kT_s' \end{cases} \quad (8)$$

nos instantes em que amostramos o sinal, em nT_s , teremos

$$x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p((n - k)T_s) = a_n, \quad (9)$$

ou seja, no n -ésimo instante de amostragem só vemos a informação devido ao símbolo n , sem interferência de outros símbolos.

Este é conhecido como o **critério de Nyquist** para interferência intersimbólica (ISI – *Intersymbol Interference*) nula

Note ainda que em (8) só interessam os valores do pulso nos instantes múltiplos de T_s , e não seus valores intermediários.

Este conceito pode ser ainda aplicado no domínio da frequência. Podemos construir um trem de impulsos $\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$. Ao multiplicarmos o pulso $p(t)$ por este trem de impulsos, se ele satisfizer o critério, temos que

$$p(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(nT_s)\delta(t - nT_s) = \delta(t) \quad (10)$$

No domínio da frequência, sabemos que

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_s}(t)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \delta_{R_s}(f) \quad (11)$$

e, portanto,

$$\mathcal{F}\{p(t)\delta_{T_s}(t)\} = P(f) * \delta_{R_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_s) \quad (12)$$

Sabemos ainda de (10) que

$$\mathcal{F}\{p(t)\delta_{T_s}(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1. \quad (13)$$

Conseqüentemente, e levando-se em conta que a multiplicação por uma constante não afeta em nada a análise, o critério de Nyquist no domínio da frequência é dado por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_s) = C \quad (14)$$

em que C é uma constante qualquer.

Podemos ver esta análise na Figura 10.

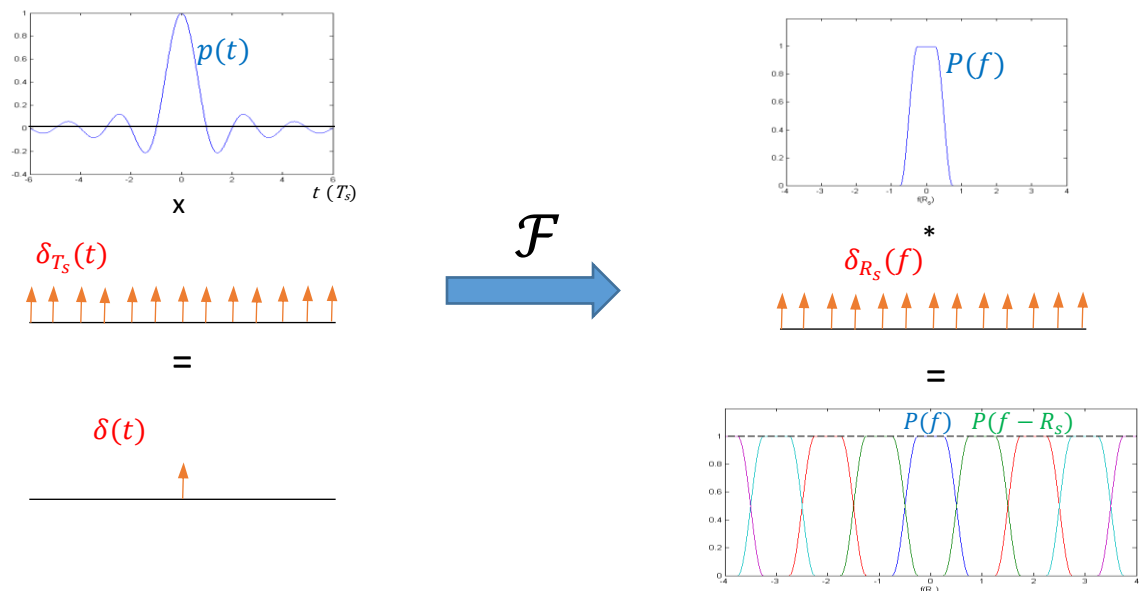


Figura 10. Critério de Nyquist para ISI zero

Supondo que o pulso $P(f)$ tem uma largura de banda B_T . Temos três situações possíveis.

- Se $B_T < \frac{R_s}{2}$, é impossível satisfazer a condição em (14).

- ii) Se $B_T = \frac{R_s}{2}$, só há uma possibilidade de pulso que satisfaça a condição, ou seja, $P(f) = T_s \text{rect}\left(\frac{f}{R_s}\right)$. No domínio do tempo, temos então que $p(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$. Podemos ver este caso na 0.

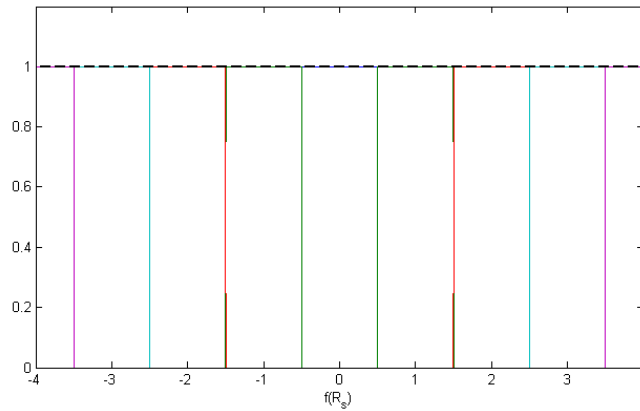


Figura 11. Critério de Nyquist com $B_T = \frac{R_s}{2}$

- iii) Se $\frac{R_s}{2} < B_T \leq R_s$, podemos satisfazer o critério de Nyquist se

$$P(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} - f_x \\ 0 & , |f| > \frac{R_s}{2} + f_x \end{cases} \quad (15)$$

$$\left|P\left(\frac{R_s}{2} + f\right)\right| + \left|P\left(\frac{R_s}{2} - f\right)\right| = 1, \quad \text{se } \frac{R_s}{2} - f_x < |f| \leq \frac{R_s}{2} + f_x$$

Esta condição pode ser visualizada na 0, onde vemos que a soma do pulso com sua versão deslocada na frequência tem que ser uma constante.

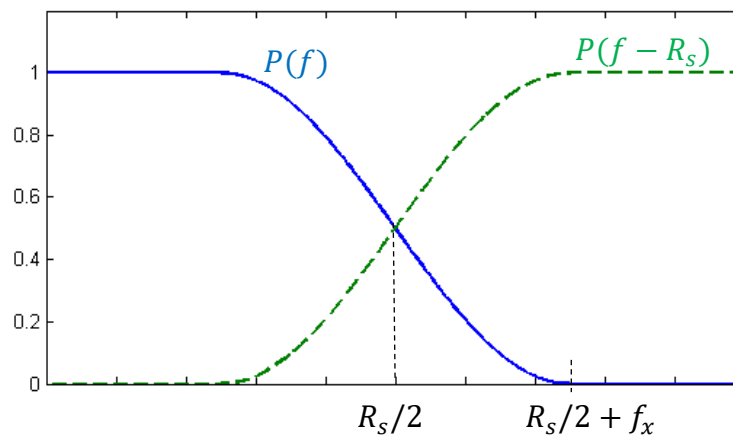


Figura 12. Detalhe de um pulso de Nyquist

f_x é a banda em excesso, em relação ao mínimo $\frac{R_s}{2}$, ou seja, $B_T - \frac{R_s}{2} = f_x$. Usualmente esta banda em excesso é expressa pelo **fator de roll-off** ρ .

$$\rho = \frac{f_x}{R_s/2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (16)$$

Desta forma a largura de banda do pulso é dada por

$$B_T = \frac{R_s}{2} + f_x = \frac{(1 + \rho)R_s}{2} \quad (17)$$

O pulso $p(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)$ é um caso particular para $\rho = 0$.

Exemplo 7 –

Se usarmos um pulso $p(t) = \text{sinc}^2(2000\pi t)$ em um sistema de transmissão binário, qual a taxa de transmissão?

Sabemos que $P(f) = A \Delta\left(\frac{f}{4000}\right)$, ou seja, um pulso triangular entre -2000 e 2000 Hz, e observando na Figura 13 vemos que, para satisfazer o critério de Nyquist, temos que ter $\frac{R_s}{2} = 1000$, e um fator de roll-off $\rho = 1$.

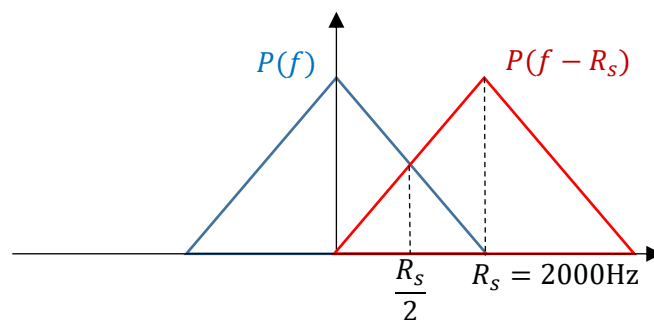


Figura 13. Pulso de Nyquist com espectro triangular

Portanto, sendo transmissão binária, temos que $R_b = R_s = 2\text{kbps}$.

Existem inúmeros pulsos que satisfazem o critério de Nyquist, como o do Exemplo 7. Porém, dentre eles o mais utilizado é o pulso de cosseno levantado (*raised cosine*), definido por

$$P(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2}(1 - \rho) \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{\rho R_s} \left(|f| - \frac{R_s(1 - \rho)}{2} \right) \right) \right] & , \frac{R_s}{2}(1 - \rho) < |f| \leq \frac{R_s}{2}(1 + \rho) \\ 0 & , |f| > \frac{R_s}{2}(1 + \rho) \end{cases} \quad (18)$$

e, no domínio do tempo,

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi \rho t}{T_s}\right)}{1 - 4\rho^2 \frac{t^2}{T_s^2}} \quad (19)$$

Podemos ver na Figura 14 exemplos de pulsos de cosseno levantado com diferentes fatores de *roll-off* ρ . Como podemos ver, quanto maior o fator de *roll-off*, mais estreito será o pulso no domínio do tempo, porém maior vai ser a banda ocupada.

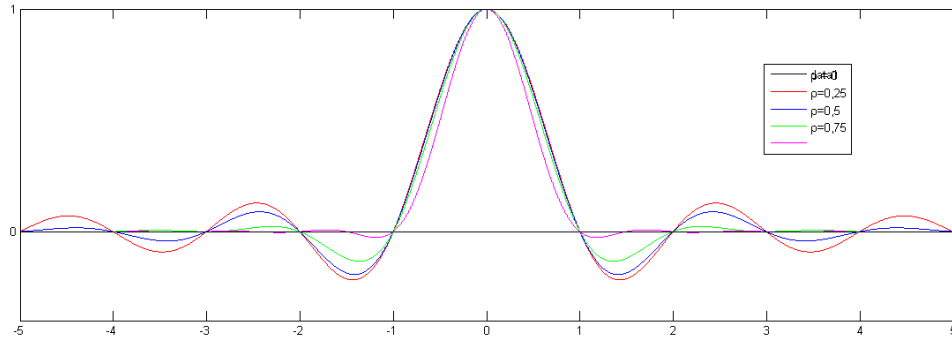


Figura 14. Pulsos de cosseno levantado

4. Densidade Espectral de Potência

Como já vimos, uma das principais características de interesse de sinais de comunicação é sua largura de banda ocupada. Além disso, o formato do espectro é também importante. Em particular, a presença de um componente DC é muitas vezes indesejada. O sinal transmitido é um processo estocástico, já que a mensagem enviada é aleatória, ou não precisaria ser enviada. Desta forma, a análise do espectro deve ser feita considerando a densidade espectral de potência (PSD) – *Power Spectral Density*), supondo que o sinal é um processo estacionário no sentido amplo.

Consideremos um sinal genérico

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_s) \tag{20}$$

ou seja, temos uma série de pulsos deslocados e com amplitudes a_k , que são variáveis aleatórias, que dependem dos bits enviados b_k . As codificações polar e on-off são casos particulares deste modelo genérico, com $a_k = 2b_k - 1 = \pm 1$ para codificação polar e $a_k = b_k = 0$ ou 1 para codificação on-off.

Podemos criar um sinal

$$x_a(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_s) \tag{21}$$

e, vemos que o sinal $x(t)$ pode ser escrito como

$$x(t) = x_a(t) * p(t), \tag{22}$$

ou seja, é a resposta de um sistema linear com resposta $p(t)$ a um processo aleatório de entrada $x_a(t)$, como podemos ver na Figura 15.

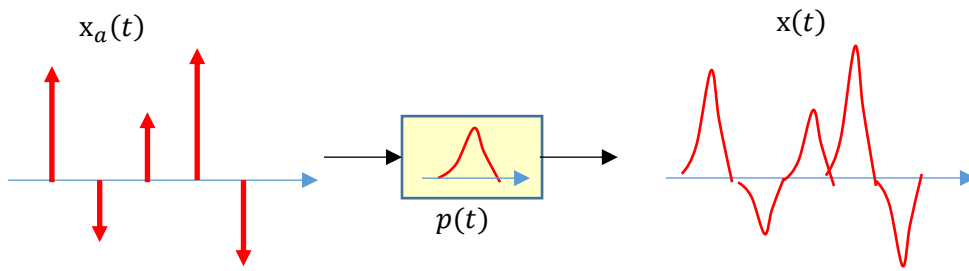


Figura 15. Código de linha genérico

Conseqüentemente, a densidade espectral de potência do sinal $x(t)$ é

$$S_x(f) = |P(f)|^2 S_a(f) \quad (23)$$

em que $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ e $S_a(f)$ é a densidade espectral de potência de $x_a(t)$, que depende apenas da seqüência a_k .

Sabemos ainda que

$$S_a(f) = \mathcal{F}\{R_a(\tau)\}, \quad (24)$$

em que

$$R_a(\tau) = E\{x_a(t)x_a^*(t - \tau)\} = E\left\{\sum_k a_k \delta(t - kT_s) \sum_l a_l^* \delta(t - lT_s + \tau)\right\} \quad (25)$$

Podemos ver na Figura 16 o que acontece com a autocorrelação. Na parte de cima da figura temos uma situação em que $\tau \neq kT_s$, ou seja, a diferença de tempo não é um múltiplo do intervalo de símbolo. Neste caso, podemos ver que $R_a(\tau) = 0$. Na parte de baixo podemos ver o caso em que $\tau = kT_s$, e vemos que, neste caso, o produto de uma realização por uma versão atrasada dela mesma não é nula.

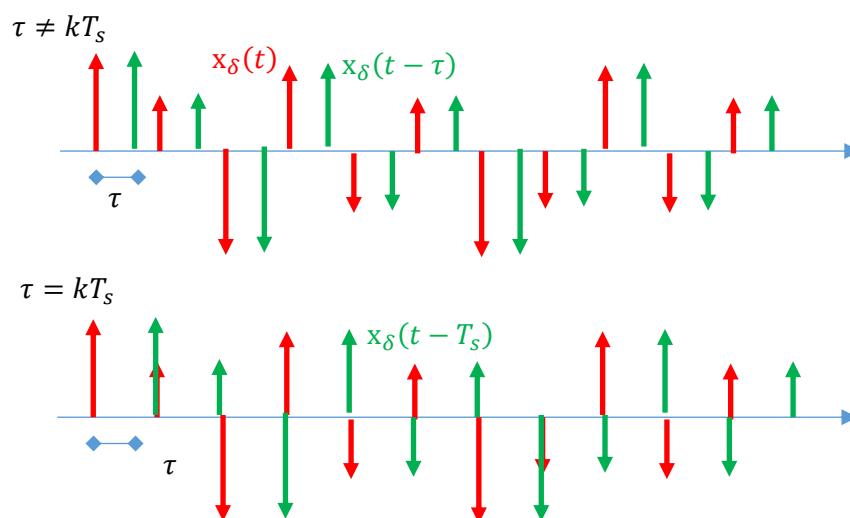


Figura 16. Autocorrelação do sinal codificado em tempo discreto

Por este motivo, a função de autocorrelação só é não nula em valores múltiplos de T_s . Para estes valores, não iremos deduzir explicitamente, mas pode-se mostrar que [1]

$$E\{x_a(t)x_a^*(t + nT_s)\} = \frac{1}{T_s}R_n \quad (26)$$

com

$$R_n = E\{a_k a_{k+n}^*\} = R_{-n}^* \quad (27)$$

a correlação discreta das amplitudes dos símbolos.

Desta forma, temos que

$$R_a(\tau) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \delta(\tau - nT_s). \quad (28)$$

e lembrando que $\mathcal{F}\{\delta(\tau - nT_s)\} = e^{-j2\pi n f T_s}$, temos que

$$S_a(f) = \mathcal{F}\{R_a(\tau)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_s} \quad (29)$$

Voltando à densidade espectral de potência em (23), temos que

$$S_x(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_s} \quad (30)$$

Iremos a seguir analisar a densidade espectral de potência para alguns esquemas de transmissão.

a. Densidade Espectral de Potência de Codificação Polar

Precisamos inicialmente encontrar os valores da autocorrelação discreta R_n . Para codificação polar, lembremos que $a_k = \pm 1$, e, considerando bits equiprováveis, para $n = 0$,

$$\begin{aligned} R_0 &= E\{a_k^2\} = \Pr(a_k = 1) (+1)^2 + \Pr(a_k = -1) (-1)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1 \end{aligned} \quad (31)$$

Para $n \neq 0$ temos a correlação entre símbolos distintos, e, considerando que os bits são independentes,

$$\begin{aligned} R_n &= E\{a_k a_{k+n}\} \\ &= \Pr(a_k = -1, a_{k+n} = -1) (-1)(-1) + \Pr(a_k = -1, a_{k+n} = 1) (-1)(1) \\ &\quad + \Pr(a_k = 1, a_{k+n} = -1) (1)(-1) + \Pr(a_k = 1, a_{k+n} = 1) (1)(1) \\ &= \frac{1}{4}\{(-1)(-1) + (-1)(1) + (1)(-1) + (1)(1)\} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Substituindo em (30), temos que, para um sistema com codificação polar a densidade espectral de potência é dada por

$$S_{x, \text{polar}}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \quad (33)$$

Exemplo 8 Densidade Espectral de Potência de Codificação Polar NRZ

Neste caso $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$, e, portanto, $P(f) = T_s \text{sinc}(\pi f T_s)$. Consequentemente,

$$S_{x, \text{polar, NRZ}}(f) = T_s \text{sinc}^2(\pi f T_s) \quad (34)$$

Exemplo 9 Densidade Espectral de Potência de Codificação Polar RZ

Considerando um pulso NRZ com largura igual à metade de um intervalo de símbolo, $p(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T_s}\right)$, e, portanto, $P(f) = \frac{T_s}{2} \text{sinc}\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)$. Consequentemente,

$$S_{x, \text{polar, RZ}}(f) = \frac{T_s}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right) \quad (35)$$

As densidades espectrais de potência do Exemplo 8 e do Exemplo 9 podem ser vistas na Figura 17.

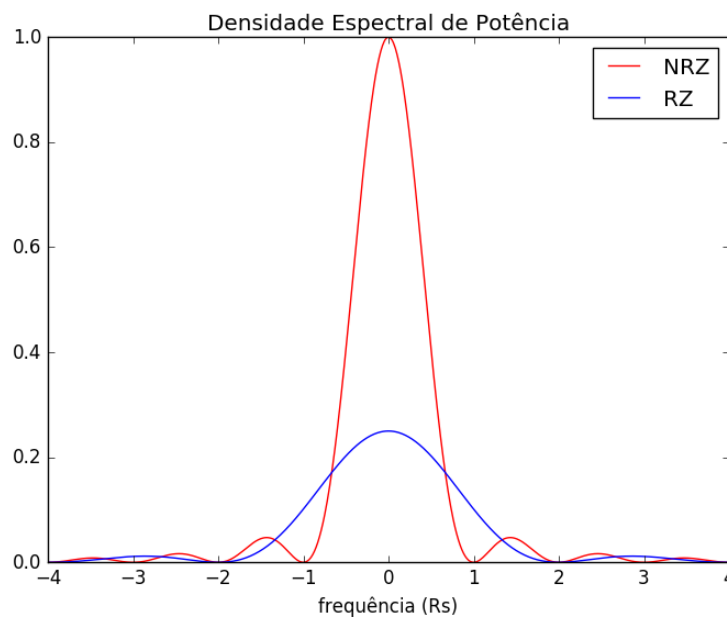


Figura 17. Densidade espectral de potência de codificação polar

Podemos ver que, por ter os pulsos mais estreitos, o sinal RZ tem um espectro mais largo. Se considerarmos que a potência está concentrada no lóbulo principal do espectro, temos que, para o sinal NRZ a largura de banda será dada por $B_{T, NRZ} \approx R_s$, enquanto que para o sinal RZ com pulso de largura $\frac{T_s}{2}$, a largura de banda é dada por $B_{T, RZ} \approx 2R_s$.

Porém um sinal RZ, ao garantir que em todo símbolo há uma transição da amplitude 0 para a amplitude $\pm A$, facilita a recuperação de relógio, já que podemos sempre identificar quando começa e termina cada bit. Já no NRZ, em uma sequência de 0's ou 1's o nível do sinal continua constante, o que pode ocorrer perda de sincronismo

Exemplo 10 Pulsos de Nyquist

Neste caso, vemos que a densidade espectral de potência depende apenas do espectro do pulso $P(f)$, confirmando o que já foi visto na Seção 3, que a largura de banda é dada por $B_T = \frac{R_s}{2}(1 + \rho)$

b. Codificação de Manchester

Como mencionado anteriormente, é desejável em diversas aplicações que não tenhamos um componente DC, ou seja, queremos que $S_x(f = 0) = 0$. Como vimos em (23), isto pode ser conseguido seja pela forma do pulso $P(f)$ ou pela autocorrelação das amplitudes R_n . Considerando a forma do pulso, queremos que

$$P(f = 0) = 0 \quad (36)$$

ou seja, lembrando da definição da transformada de Fourier, queremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) = 0. \quad (37)$$

Exemplo 11 Código de Manchester

Um pulso que satisfaz esta condição é a chamada codificação de Manchester, criada inicialmente para o armazenamento em discos magnéticos no Manchester Mark 1, um dos primeiros computadores da história, em 1948.

O pulso pode ser descrito por

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T_s} + \frac{1}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{2t}{T_s} - \frac{1}{2}\right), \quad (38)$$

e pode ser visto na Figura 18, junto com um exemplo de sequência transmitida.

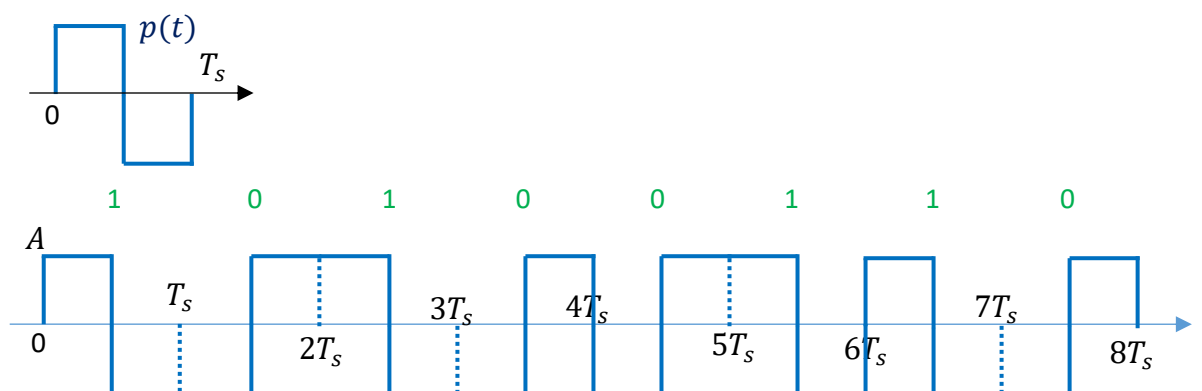


Figura 18. Código de Manchester

Sua transformada de Fourier é dada por

$$T_s \left[\frac{j\pi f T_s}{1 - j\pi f T_s} - \frac{-j\pi f T_s}{1 + j\pi f T_s} \right] \quad (39)$$

$$= T_s \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)$$

Devido ao fator $\sin(\cdot)$, podemos ver facilmente que $P(0) = 0$.

A densidade espectral de potência é dada então por

$$S_x(f) = T_s \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right) \quad (40)$$

e pode ser comparada com a DEP de um pulso NRZ na Figura 19. Além de verificarmos a ausência de componente DC podemos ver ainda que a largura de banda com código de Manchester é dada aproximadamente por $B_{T, Manch} \approx 2R_s$.

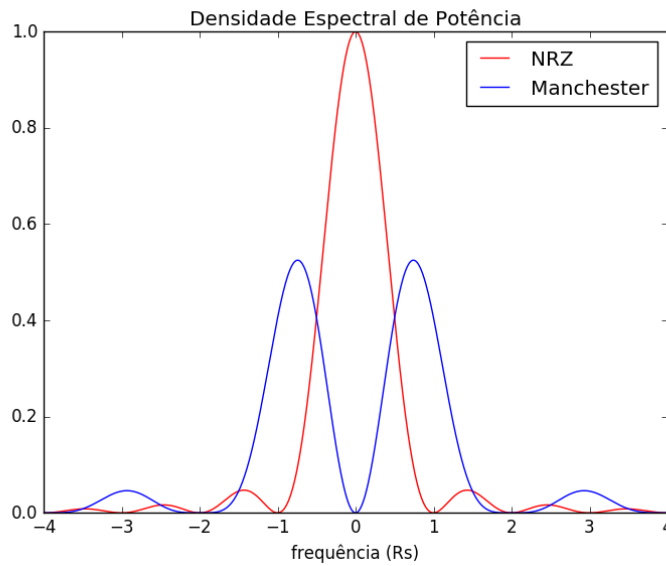


Figura 19. Densidade espectral de potência de código de Manchester

Além de não possuir componente DC, o fato de que o nível de sinal sempre varia no meio de um símbolo favorece a recuperação de relógio.

c. Densidade Espectral de Potência de Codificação On-Off

Agora temos que $a_k = 0$ ou 1 com igual probabilidade. Similarmente ao realizado para a codificação polar, a autocorrelação pode ser obtida por

$$R_0 = E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{2} \quad (41)$$

$$R_n = E\{a_k a_{k+n}\} = \frac{1}{4}(0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 1) = \frac{1}{4}, \quad n \neq 0$$

Conseqüentemente

$$S_a(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_s}$$

$$= \frac{1}{T_s} \left(\frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-j2\pi n f T_s} \right) = \frac{1}{T_s} \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-j2\pi n f T_s} \right) \quad (42)$$

É difícil visualizar o significado do somatório no segundo termo, mas podemos reescrever a equação da seguinte forma²

$$S_a(f) = \frac{1}{4T_s} + \frac{1}{4T_s^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right), \quad (43)$$

e, conseqüentemente, de (23),

$$S_x(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T_s} \left(1 + \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right)\right) \quad (44)$$

Exemplo 12 Densidade Espectral de potência de um código on-off RZ

Neste caso, temos um pulso $(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T_s}\right)$, e, portanto, $P(f) = \frac{T_s}{2} \text{sinc}\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)$.

A densidade espectral de potência neste caso pode ser vista na Figura 20. Como podemos ver, e, como era de se esperar pela expressão em (44), temos o espectro de um sinal polar adicionado de uma série de impulsos nos múltiplos de R_s , ponderados por $|P(f)|^2$.

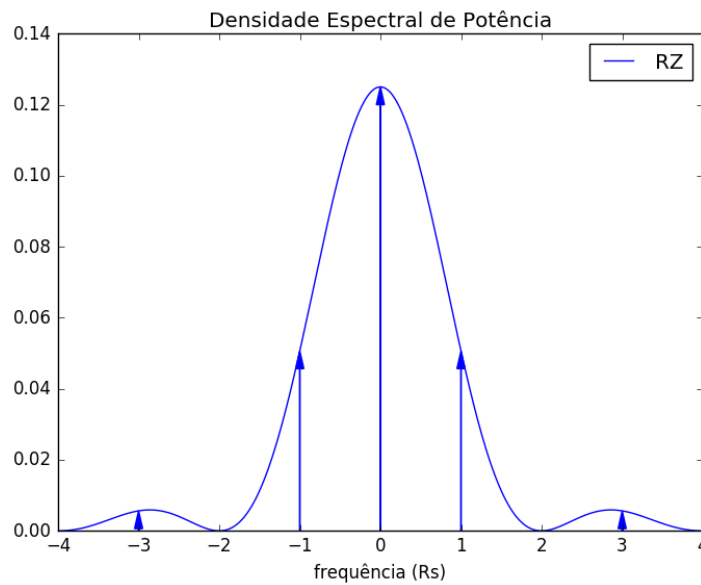


Figura 20. Densidade espectral de potência de um código on-off RZ

Uma outra forma de se entender o comportamento do on-off é observando-se que um sinal on-off de amplitude A é equivalente à soma de um sinal polar com amplitude $A/2$ com um sinal periódico de período T_s . O espectro de um sinal periódico, como sabemos, é composto por uma série de impulsos nas frequências k/T_s , como vemos.

² Sabemos que o trem de impulsos $\delta_{X_0}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0)$ é um sinal periódico, com período X_0 , que, conseqüentemente, pode ser representada por sua série de Fourier $\delta_{X_0}(x) = \frac{1}{X_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nx/X_0}$. Substituindo x por f , e $X_0 = 1/T_s$, chegamos na expressão desejada.

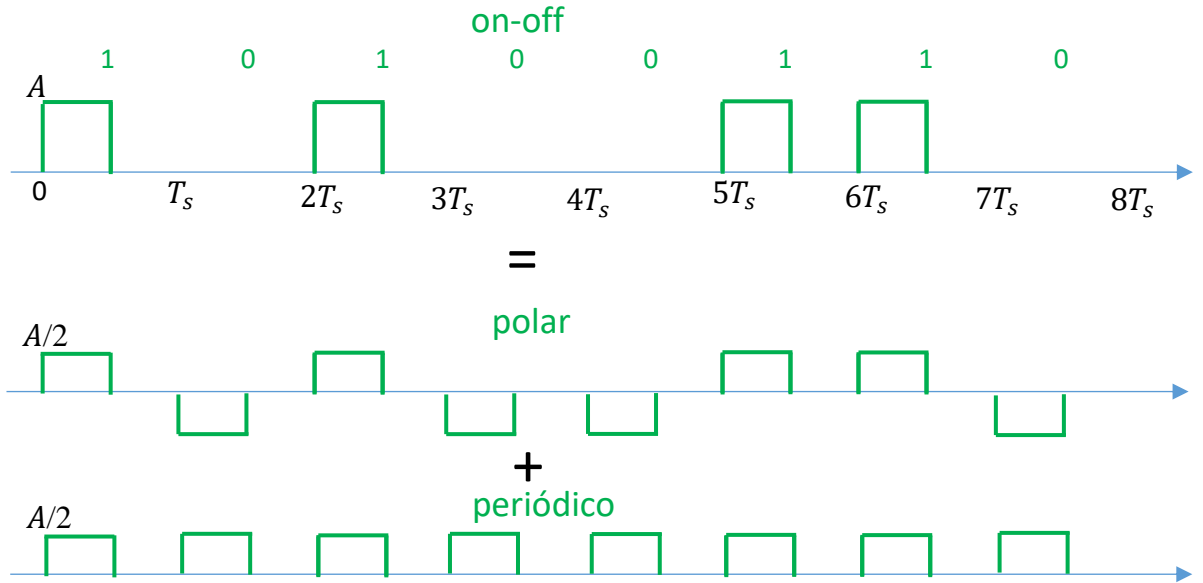


Figura 21. Sinal on-off como soma de sinal polar e sinal periódico

d. Sinalização Bipolar ou *Alternate Mark Inverse* (AMI)

Na Seção 4b vimos a codificação de Manchester, em que utilizamos o pulso adequado para garantir que não tenhamos um componente DC. Sabemos ainda que também podemos moldar o espectro por meio da autocorrelação entre as amplitudes R_n .

Neste esquema se o bit $b_k = 0$, não enviamos nenhum sinal no intervalo correspondente, como na codificação on-off, e se o bit $b_k = 1$, enviamos $\pm p(t)$, dependendo da polaridade do último bit igual a 1, invertendo a polaridade. Fica mais fácil visualizar este comportamento por meio da Figura 22.

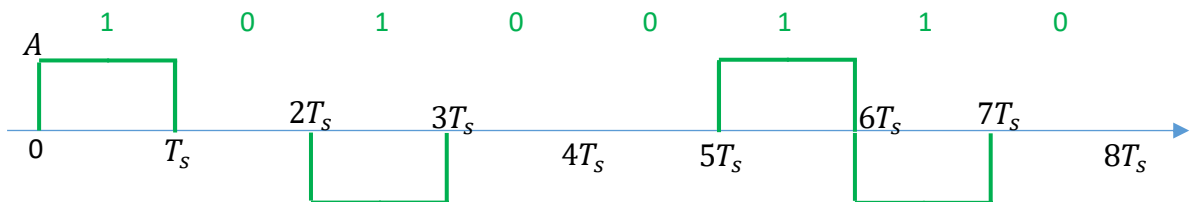


Figura 22. Exemplo de codificação bipolar

As amplitudes agora podem ser $a_k = \pm 1$ ou 0, e a autocorrelação pode ser calculada como

$$R_0 = E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(\pm 1)^2 = \frac{1}{2} \quad (45)$$

Para valores de $n \neq 0$, temos que levar em conta a inversão de polaridade de símbolos correspondentes a 1's seguidos. Para $n = 1$, temos

$$R_1 = E\{a_k a_{k+1}\} = \frac{1}{4}[(0)(0) + 0(\pm 1) + (\pm 1)(0) + (\pm 1)(\mp 1)] = -\frac{1}{4}, \quad (46)$$

ou seja, por conta da inversão de polaridades, temos o sinal negativo em R_1 , diferentemente de para a codificação on-off. Já para $n = 2$, os valores de a_k e a_{k+2} dependem não só dos bits b_k e b_{k+2} , mas também do bit b_{k+1} , devido à regra de inversão de polaridade. Sendo assim

$$\begin{aligned}
R_2 = & \Pr(000) (0)(0) + \Pr(001) (0)(\pm 1) + \Pr(010) (0)(0) + \\
& + \Pr(011) (0)(\pm 1) + \Pr(100) (\pm 1)(0) + \Pr(101) (\pm 1)(\mp 1) + \\
& + \Pr(110) (\pm 1)(0) + \Pr(111) (\pm 1)(\pm 1) = 0
\end{aligned} \tag{47}$$

ou seja, de todas as oito sequências $b_k b_{k+1} b_{k+2}$, todas com probabilidade $\Pr(b_k b_{k+1} b_{k+2}) = \frac{1}{8}$, apenas em duas delas $a_k a_{k+2} \neq 0$. Em uma, 101, a polaridade se inverte, e na outra, 111, a polaridade se mantém entre a_k e a_{k+2} , e por isso $R_2 = 0$. Podemos mostrar que o mesmo ocorrerá, $R_n = 0$ para qualquer valor de $|n| \geq 2$, pois teremos a mesma polaridade e inversão de polaridade com a mesma probabilidade.

Desta forma, de (30), obtemos

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= \frac{|P(f)|^2}{T_s} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{-j2\pi f T_s} + e^{j2\pi f T_s}) \right) \\
&= \frac{|P(f)|^2}{T_s} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi f T_s) \right) \\
&= \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sin^2(\pi f T_s)
\end{aligned} \tag{48}$$

e, como $\sin(0) = 0$, temos que $S_x(0) = 0$, independentemente da forma do pulso $P(f)$. Outra maneira de entendermos o fato de não termos DC é que o sinal está sempre alternando entre +1 e -1, e nunca terá uma média diferente de 0.

A densidade espectral de potência de uma transmissão bipolar pode ser vista na Figura 23. Podemos ver que a transmissão bipolar possui uma largura de banda $B_T \approx R_s$, ou seja, equivalente a um sistema polar NRZ, e menor que a codificação de Manchester, além de, como esperado, não apresentar componente DC.

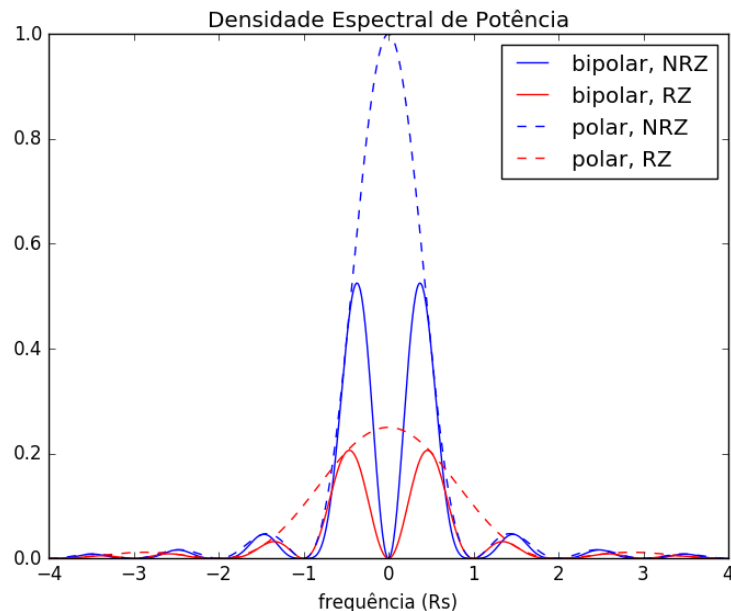


Figura 23. Densidade espectral de potência de sinal bipolar

Uma outra vantagem da codificação bipolar é que ela permite uma detecção de erros, como vemos no exemplo abaixo.

Exemplo 13 Detecção de erro

Um sistema de transmissão bipolar é utilizado para transmitirmos a sequência

$$b_k = 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1.$$

Consequentemente, as amplitudes enviadas serão

$$a_k = 0, +1, -1, 0, 0, +1, -1, +1, 0, -1, 0, 0, 0, +1.$$

Suponhamos agora que tenha ocorrido um erro na transmissão, no sétimo símbolo, de modo que estimamos a seguinte sequência no receptor

$$\hat{a}_k = 0, +1, -1, 0, 0, +1, 0, +1, 0, -1, 0, 0, 0, +1.$$

Podemos claramente ver que o símbolo logo após do erro viola a regra de troca de polarização, e consequentemente, sabemos que ocorreu erro em algum símbolo.

Não é possível identificarmos onde ocorreu o erro e corrigi-lo, mas sabendo que houve erro, podemos solicitar uma retransmissão do pacote.

Embora a codificação bipolar torne a sincronização mais fácil que na codificação polar NRZ, já que sequências de 1's apresentam transições de nível, ainda é possível que ocorram sequências longas de 0's, em que podemos perder a sincronização. Para evitar que isto ocorra, existem diversas abordagens de modificação do esquema AMI bipolar. Dentre estas, podemos citar o esquema HDB-3 (*High-Density Bipolar*), utilizado no padrão portadora-E (E-Carrier), padronizado pela ITU (*International Telecommunication Union*) e utilizado em quase todos os países do mundo para telefonia digital³, que transmite bits a uma taxa de 2Mbps.

Em um esquema HDB-3, substituímos uma sequência de quatro 0's consecutivos 0000 por uma sequência B00V ou 000V, em que B indica um bit 1 satisfazendo a regra bipolar, e V indica um bit 1, violando a regra bipolar. A gente deve usar 000V se ocorrer um número ímpar de bits 1's desde a última sequência 0000, e B00V caso contrário. Para entender melhor podemos ver num exemplo.

Exemplo 14 Codificação HDB-3

Suponha que queiramos enviar a sequência de bits

$$b_k = 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.$$

onde vemos, em azul, sequências de 4 zeros consecutivos. Antes da primeira sequência, temos dois 1's e a substituímos por B00V, entre a primeira e a segunda, temos três 1's, e a substituímos por 000V, e assim por diante. Sendo assim, a sequência codificada será

$$b_k = 0, 1, 1, B, 0, 0, V, 1, 0, 1, 0, 0, 0, V, B, 0, 0, V, 0, 1.$$

que será mapeada nas amplitudes

$$a_k = 0, +1, -1, +1, 0, 0, +1, -1, 0, +1, 0, 0, 0, +1, -1, 0, 0, -1, 0, 1.$$

³ Os EUA, Canadá e Japão utilizam um padrão similar, chamado de T-Carrier. Com o crescimento da transmissão via protocolos IP, os protocolos de telefonia digital, como o E/T-Carrier, vêm caindo em desuso.

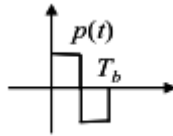
Os símbolos em vermelho correspondem aos V's, e não há troca de polaridade neles, ou seja, quando isso ocorre, pode indicar que em vez de um bit 1, temos uma sequência de quatro 0's, desde que as condições do HDB-3 para o uso de 000v ou B00V tenham sido satisfeitas.

5. Pulsos com Resposta Parcial

Exercícios

Exercício 1. ([1] Ex. 7.2-2)

Uma sequência de dados binária **100110...** é transmitida usando um código de Manchester com o pulso $p(t)$ abaixo.



- Esboce o sinal transmitido $y(t)$.
- Determine e esboce a densidade espectral de potência $S_y(f)$ do sinal do item anterior

Exercício 2. ([1] Ex. 7.3-1)

Um sinal binário com taxa de 6 kbits/s é transmitido em um canal com largura de banda 4kHz usando pulsos que satisfazem o critério de Nyquist. Determine o fator de roll-off máximo que pode ser utilizado.

Exercício 3. ([1] Ex. 7.3-2)

Um sistema de telemetria fornece 8 medidas analógicas, cada uma com largura de banda de 4kHz. Amostras deste sinal são multiplexadas no tempo, quantizadas e codificadas binariamente. O erro de quantização não pode ser maior que 1% da amplitude de pico e a taxa de amostragem deve ser ao menos 25% acima da taxa de Nyquist.

Qual a largura de banda de transmissão, se pulsos com o critério de Nyquist com fator de roll-off $r = 0,2$ são utilizados?

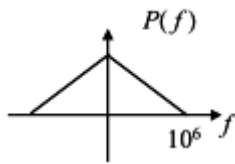
Exercício 4. ([1] Ex. 7.3-3)

Uma linha telefônica com largura de banda 3kHz é utilizada para transmitir dados binários. Calcule a taxa de dados (em bits/s) que pode ser transmitida se for utilizada:

- a) sinalização polar com pulsos retangulares de largura $T_b/2$
- b) sinalização polar com pulsos retangulares de largura T_b
- c) sinalização polar usando pulsos de Nyquist com $r = 0,25$
- d) sinalização bipolar com pulsos retangulares de largura $T_b/2$
- e) sinalização bipolar com pulsos retangulares de largura T_b

Exercício 5. ([1] Ex. 7.3-4)

A transformada de Fourier $P(f)$ do pulso $p(t)$ utilizado em um sistema de comunicações binário é mostrado abaixo.



- pelos dados de $P(f)$, explique se este pulso satisfaz o critério de Nyquist.
- encontre $p(t)$ e verifique se este pulso satisfaz o critério de Nyquist.
- Se o pulso satisfaz o critério de Nyquist, qual a taxa de transmissão e qual o fator de roll-off.

Exercício 6. ([1] Ex. 7.3-10)

Em um sinal binário utilizando pulsos duobinários, os valores de amostra são:

1 2 0 -2 -2 0 0 -2 0 2 0 0 2 0 0 0 -2

- Ocorreu algum erro de detecção? Por quê?
- Se não ocorreu nenhum erro, qual a sequência de bits recebida?

Exercício 7. ([1] Ex. 7.7-1)

Em um sistema de sinalização M -ário com $M = 16$,

- determine a largura de banda de transmissão mínima exigida para transmitirmos dados a 12kbps/s sem interferência entre símbolos.
- determine a largura de banda de transmissão se pulsos de Nyquist com roll-off $r = 0,2$ forem utilizados.

Exercício 8. ([1] Ex. 7.7-5)

Um sinal analógico com largura de banda 10kHz é amostrado a uma taxa de 24kHz, quantizado em 256 níveis e codificado utilizando pulsos M -ários satisfazendo o critério de Nyquist com fator de roll-off $r = 0,2$. Um canal com largura de banda 30kHz está disponível para a transmissão de dados. Determine o menor valor aceitável de M .

Resolução dos Exercícios

Referências

Este texto se baseia em grande parte no livro texto

- [1] B.P. Lathi e Z. Ding, *Sistemas de Comunicações Analógicas e Digitais Modernos*, 4ª Ed., Editora LTC, 2012, Caps. 8 e 9

Boas referências em probabilidade e processos estocásticos são

- [2] J.A. Gubner, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers*, Cambridge University Press, 2006
- [3] J.P.A. Albuquerque, J.M.P. Fortes, W.A. Finamore, *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*, Interciência, 2008
- [4] A. Papoulis e S.U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 4ª Edição, 2002