Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

Tema 4

Juegos dinámicos (I)

Juegos con información perfecta

(Versión provisional)

Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice general

4.1 Introducción

En los dos temas anteriores hemos estudiado los juegos estáticos, para los cuales hemos propuesto distintos criterios de solución (de selección entre las combinaciones posibles de estrategias) a partir de la forma normal. En este tema pasamos a ocuparnos de los juegos dinámicos, en los cuales la toma de decisiones deja de ser simultánea para tener un carácter secuencial. Aunque seguiremos utilizando la representación en forma normal y los conceptos de solución asociados ella, para este tipo de juegos resulta conveniente su modelización inicial a partir de la forma extensiva, ya a que través de ella se puede recoger explícitamente la naturaleza secuencial de la toma de decisiones.

En el Tema 1 ya hicimos una primera aproximación a la forma extensiva, utilizando para especificarla un diagrama que denominábamos *árbol del juego*. Al menos para los juegos más sencillos, era posible recoger las reglas del juego mediante dicha representación gráfica. Un concepto especialmente relevante era el de *conjunto de información*, el cuál nos permitía incorporar al modelo la información de que disponían los jugadores en las distintas *situaciones* en las que les podría tocar mover. A partir del mismo se establecía la diferencia entre un juego dinámico con información perfecta (todos los conjuntos de información constan de un único nodo) y un juego dinámico con información imperfecta (al menos un jugador tiene un conjunto de información con dos o más nodos). Las figuras 4.1 y 4.2 recogen, respectivamente, un ejemplo de un juego con información perfecta y de uno con información imperfecta.

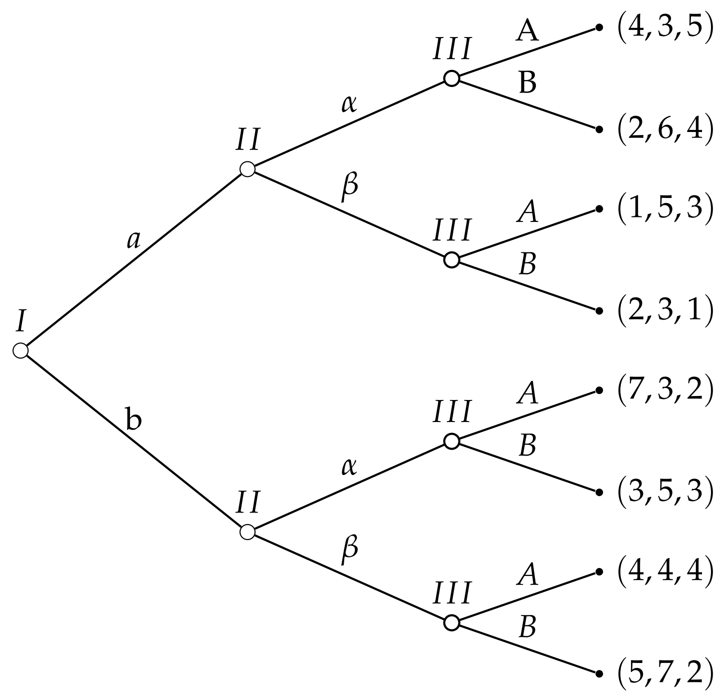


Figura 4.1. ***Un juego multietápico con información perfecta***

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

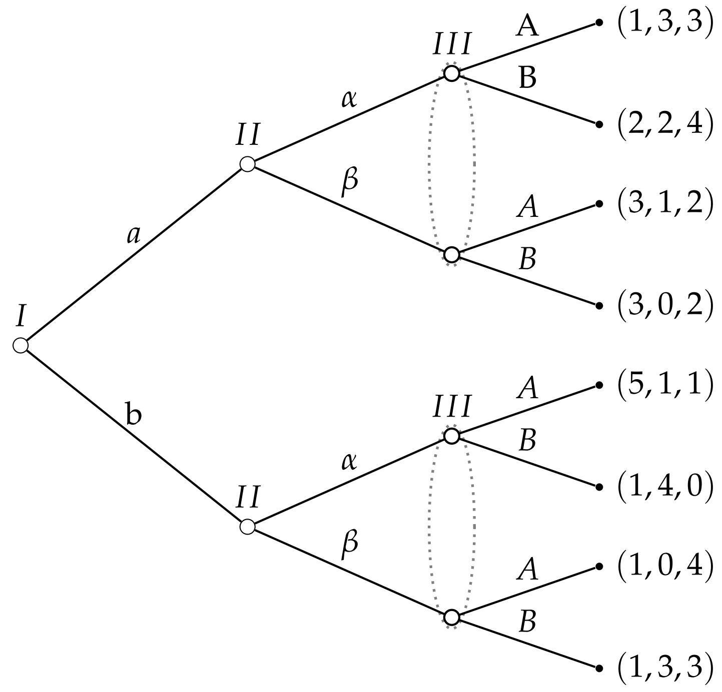


Figura 4.2. *Un juego multietápico con información imperfecta*

En este tema nos ocuparemos únicamente de los juegos dinámicos con información perfecta. En primer lugar daremos una descripción más formalizada de la forma extensiva y veremos, a continuación, como pasar de ella a la forma estratégica. Una vez sepamos como representarlos, pasaremos al análisis de los mismos, esto es, a plantearnos como cabe esperar que se desarrollen las distintas situaciones de interdependencia estratégica que recogen.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

4.2 Representación en forma extensiva

Como paso previo a una definición más formalizada de la representación en forma extensiva, es necesario que nos familiaricemos primero con la terminología propia de este tipo de representación. Para ello vamos a tomar como referencia el **árbol del juego** del ejemplo de las *votaciones estratégicas* del Tema 1 y que aparece recogido de nuevo la Figura 4.3.

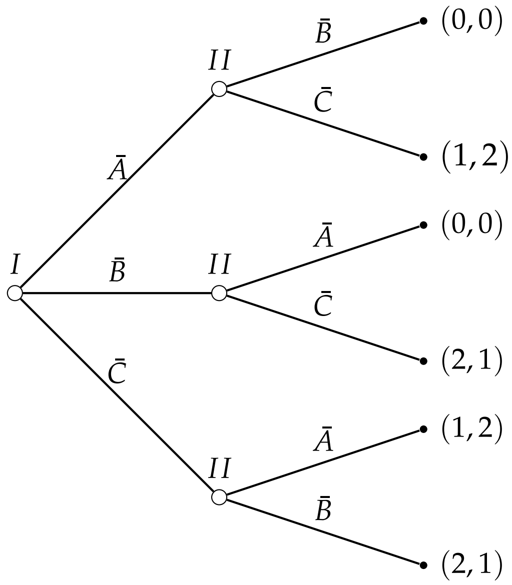


Figura 4.3. ***Votaciones estratégicas: el árbol del juego***

Utilizaremos el término **historia terminal** para referirnos a cada una de las secuencias de movimientos que constituyen un desarrollo completo del juego, esto es, que van del nodo raíz a uno de los nodos terminales. Denominaremos **Z** al conjunto de todas las historias terminales posibles, el cual vendría dado en nuestro ejemplo por:

$$\mathbf{Z} = \Big\{(\bar{A},\bar{B}),(\bar{A},\bar{C}),(\bar{B},\bar{A}),(\bar{B},\bar{C}),(\bar{C},\bar{A}),(\bar{C},\bar{B})\Big\}.$$

El conjunto **Z** nos proporciona implícitamente la siguiente información sobre la estructura del juego:

1. **El orden en el que deciden los jugadores**. En tanto que secuencia, cada historia terminal nos informa sobre las **historias no terminales** o **posiciones** por las que ha de pasar el juego para desarrollarse conforme a esa historia completa. Además, hemos de tener en cuenta que existe una posición inicial (la correspondiente al nodo raíz) sin historia previa. Vamos a denominar **X** al conjunto de todas las historias parciales o posiciones posibles del juego, del cual formará parte la posición inicial que representaremos por $\emptyset$.

   En nuestro ejemplo, el conjunto de posiciones vendría dado por $\mathbf{X} = \{\emptyset, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Cada una de los elementos de **X** constituye una posición x, la cual podemos identificar a partir de la historia no terminal que nos lleva a ella. Así, el hecho de que $\bar{A} \in \mathbf{X}$ significa que existe una posición en la cual un jugador tendría que decidir sabiendo que previamente se ha vetado el proyecto A. La posición inicial es la única que no tiene una historia previa, de ahí que utilicemos la notación $\emptyset$ para referirnos a ella.

2. **Las alternativas de que dispone cada jugador en cada posición del juego en la que le toque mover**. En el nodo raíz habrá tantas alternativas como valores distintos toma el primer componente de las secuencias. En nuestro ejemplo, todas las secuencias empiezan por $\bar{A}$,$\bar{B}$ o $\bar{C}$, por tanto, estas serán las alternativas entre las que podrá elegir el jugador al que le toca mover al principio del juego. Cada movimiento posible en el nodo raíz dará lugar, bien a un nodo terminal, bien a una posición que podemos identificar con el movimiento que nos ha llevado a ella. En nuestro caso los tres movimientos posibles en la posición inicial nos llevan a posiciones en las que le toca mover a otro jugador. Si consideramos todas las secuencias de acciones cuyo primer elemento sea el mismo, podemos ver, a partir de todos los valores que toma su segundo elemento, el conjunto de movimientos posibles en esa posición. En nuestro caso, si cogemos, por ejemplo, todas las secuencias que tienen como primer elemento $\bar{A}$, veremos que las alternativas que tendría el jugador que le toca mover en esa posición serían $\bar{B}$ y $\bar{C}$. En general, nos referiremos al conjunto de movimientos disponibles en la posición x como $\mathbf{A}(x)$. En nuestro ejemplo, una especificación completa de las acciones disponibles en cada una de las posiciones del juego vendría dada por:

$$\mathbf{A}(\emptyset) = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\};\ \mathbf{A}(\bar{A}) = \{\bar{B}, \bar{C}\};\ \mathbf{A}(\bar{B}) = \{\bar{A}, \bar{C}\};\ \mathbf{A}(\bar{C}) = \{\bar{A}, \bar{B}\}.$$

Por tanto, a través de la especificación de **Z** es posible recoger parte de la estructura del juego, quedándonos pendiente de incorporar:

- la información sobre a qué jugador *le tocaría* mover en cada una de las posiciones o historias parciales del juego x;
- la información de la que dispondrían los jugadores en cada una de las posiciones en las que le tocaría mover;
- la valoración por parte de cada jugador de los posibles desarrollos del juego.

Dado el conjunto de jugadores **J** y el conjunto de posiciones del juego **X**, la asignación de cada posición a un jugador podemos recogerla a través de una *partición*[1] de **X** en tantos

[1] En teoría de conjuntos una partición de un conjunto dado es una colección de subconjuntos no vacíos del mismo (*bloques*) que cumplen las propiedades de (1) ser disjuntos y (2) su unión es el conjunto original.

bloques como elementos tenga $\mathbf{J}$:

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}) = \left\{\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_N\right\},$$

donde $\mathbf{X}_i = \{x_{i1}, \cdots, x_{iM}\}$ es el subconjunto de posiciones en las que le corresponde mover al jugador i. En el ejemplo que estamos analizando podemos recoger la asignación de jugadores mediante la partición:

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}) = \left\{\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_{II}\right\} = \left\{\{\emptyset\}, \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}\right\}.$$

Pasemos ahora a considerar la forma de incorporar *las preferencias* de los jugadores en relación a los posibles desarrollos del juego. En la representación en forma normal suponíamos que existía una función de pagos $U_i(\mathbf{s})$ definida sobre las combinaciones posibles de estrategias $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$. La única novedad en la representación en forma extensiva es que dichas funciones de pagos están definidas sobre cada una de las historias terminales o desarrollos posibles del juego.

$$\begin{aligned} U_i : \quad & \mathbf{Z} \to \mathbb{R} \\ & z \mapsto U_i(z). \end{aligned}$$

Cada una de las historias terminales llevará asociado, por tanto, un vector de pagos en el que cada uno de sus N componentes $U_i(z)$ se corresponde con el valor que toma una función de utilidad cardinal que recoge las preferencias del jugador i en relación a los posibles desarrollos del juego Z. Como explicábamos en el Tema 1, el supuesto de que se trata de una función cardinal hace que podamos analizar la toma de decisiones de los jugadores en términos de la maximización del pago esperado (de la utilidad esperada).

Por último, en cuanto la información por los jugadores en cada posible situación en la que les podría tocar mover, en los juegos de información perfecta los jugadores conocen de manera perfecta la historia previa del juego (la posición del juego en la que se encuentran).

Ya estamos en condiciones de proponer, aunque por el momento sólo para los juegos con información perfecta, una especificación de la forma extensiva que vaya más allá de la representación gráfica mediante un diagrama. Si tomamos como punto de partida la representación en forma normal $G = \left\langle \mathbf{J}, \{\mathbf{S}_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \right\rangle$, en la forma extensiva se mantienen el conjunto de jugadores $\mathbf{J}$ y las funciones de pagos[2] $\left\{U_i\right\}_{i=1}^N$, pero, en lugar de los conjuntos de estrategias de los jugadores $\mathbf{S}_i$ incorporaremos:

- El conjunto $\mathbf{Z}$ de secuencias que constituyen desarrollos posibles del juego.
- Una partición $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ que asigna las posiciones del juego a los jugadores.

[2]Es necesario tener en cuenta que las funciones de pagos de la forma extensiva vienen definidas sobre las historias terminales z mientras que las de la forma extensiva vienen dadas sobre las posibles combinaciones de estrategias $\mathbf{s}$.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Definición 4.2.1 (Forma extensiva de un juego con información perfecta)**.** *La forma extensiva de un juego con información perfecta es una 4-tupla* $\mathbf{\Gamma} = \left\langle \mathbf{J}, \mathbf{Z}, \mathcal{P}(\mathbf{X}), \{U_i\}_{i=1}^N \right\rangle$*, donde:*

- $\mathbf{J} = \{1, \cdots, N\}$ *es el conjunto de jugadores.*
- $\mathbf{Z}$ *es el conjunto de secuencias que constituyen desarrollos posibles del juego. En tanto que conjunto de secuencias,* $\mathbf{Z}$ *nos informará implícitamente sobre:*
  - *El conjunto de posiciones o historias no terminales* $\mathbf{X}$*.*
  - *Las alternativas disponibles por cada jugador en cada una de las posiciones* $\mathbf{A}(x)$*.*
- $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ *es una partición de las posiciones del juego en función del jugador al que le tocaría mover en cada una de ellas.*
- $U_i(z)$ *es una función de utilidad cardinal para todo* i*.*

▶ **Ejercicio 4.2.1**

En la Figura 4.4 se representa una situación de interdependencia estratégica en la cual una determinada empresa E (entrante) esta evaluando la posibilidad de entrar (e) o no ($\bar{e}$) en un mercado que hasta el momento estaba siendo controlado por otra empresa I (incumbente). Si E decide entrar, I puede optar por acomodar la entrada (a) o bien por desencadenar una guerra de precios ($\bar{a}$). Se pide:

1. Especifique los distintos componentes de la forma extensiva del juego
2. Determine el conjunto de posiciones del juego $\mathbf{X}$ y el conjunto de acciones $\mathbf{A}(x)$ en cada una de esas posiciones.

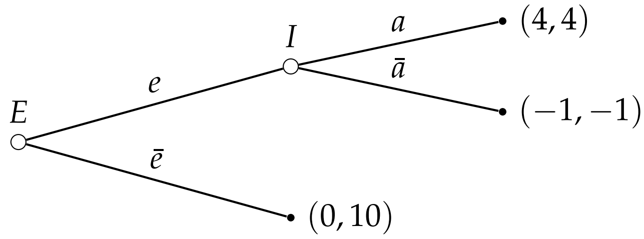


Figura 4.4. ***Entrada en un mercado monopolizado: ¿acomodación a la entrada o precios predatorios?***

Solución 1. *La forma extensiva* $\Gamma = \left\langle \mathbf{J}, \mathbf{Z}, \mathcal{P}(\mathbf{X}), \{U_i\}_{i=1}^N \right\rangle$ *viene dada en este caso por:*

- $\mathbf{J} = \{E, I\}$.
- $\mathbf{Z} = \{\bar{e}, (e, a), (e, \bar{a})\}$.
- $\mathcal{P}(\mathbf{X}) = \left\{ \mathbf{X}_E, \mathbf{X}_I \right\} = \left\{ \{\emptyset\}, \{e\} \right\}$.
- $U_E(\bar{e}) = 0, U_E((e, a) = 4, U_E((e, l) = -1; \quad U_I(\bar{e}) = 10, U_I(e, a) = 4, U_I(e, l) = -1.$

A partir del conjunto $\mathbf{Z}$ *podemos obtener la respuesta a la segunda pregunta:*

- $\mathbf{X} = \{\emptyset, e\}$.

- $\mathbf{A}(\emptyset) = \{e, \bar{e}\}; \mathbf{A}(e) = \{a, \bar{a}\}$.

▶ **Ejercicio 4.2.2**

Especifique todos los componentes de la forma extensiva para el juego de la La Figura 4.1.

Los dos ejemplos utilizados hasta el momento para ilustrar la forma extensiva son extraordinariamente sencillos. Además de ser juegos de información perfecta, en ambos había dos únicas etapas y en cada una de ellas el jugador al que correspondía mover se enfrentaba un número muy reducido de alternativas. La definición que hemos dado de la forma extensiva para juegos con información perfecta es válida para situaciones en las que en algunas o en todas las etapas el conjunto de alternativas entre las que puede elegir un jugador viene dado por una variable continua, como ocurre en el Ejercicio 4.2.3.

▶ **Ejercicio 4.2.3** Juego del *ultimatum*

A dos individuos, I y II, se les ofrecen 100 € condicionados a que lleguen a un acuerdo de reparto entre ambos mediante el siguiente procedimiento. El individuo I ha de hacer una propuesta de reparto al II, si éste la acepta se lleva a cabo, pero si no la acepta ninguno de los dos recibe nada. Se pide:

- Represente el árbol del juego.
- Especifique cada uno de los componentes de la forma extensiva.

Solución. *Sea $y \in [0,1]$ una variable continua que representa la proporción del dinero que I le ofrece a II y $r \in \{0,1\}$ una variable binaria que representa la respuesta del jugador II (interpretamos $r = 1$ como «acepta» y $r = 0$ como «rechaza»). La forma extensiva $\Gamma = \left\langle \mathbf{J}, \mathbf{Z}, \mathcal{P}(\mathbf{X}), \{U_i\}_{i=1}^{N} \right\rangle$ vendrá dada por:*

- $\mathbf{J} = \{I, II\}$.
- $\mathbf{Z} = \{(y,r) : y \in [0,1], r \in \{0,1\}\}$.
- $\mathbf{X}_I = \{\emptyset\}, \quad \mathbf{X}_{II} = \{y : y \in [0,1]\}$.
- $U_I(y,r) = \begin{cases} 100(1-y) & si\ r = 1 \\ 0 & si\ r = 0. \end{cases} \quad U_{II}(y,r) = \begin{cases} 100y & si\ r = 1 \\ 0 & si\ r = 0. \end{cases}$

Veremos más adelante que la definición 4.2.1 también es válida para juegos con *horizonte infinito*. En este tipo de juegos existen secuencias de acciones que no tienen un final determinado, sino que pueden prolongarse durante un número de etapas indeterminado. Aunque las situaciones de interdependencia estratégica del mundo real siempre sean finitas, este tipo de modelos tienen un gran número de aplicaciones en la economía. El Ejemplo 4.2.1 plantea una situación que deberíamos modelizar como un juego de horizonte infinito.

Ejemplo 4.2.1

Dos individuos negocian el reparto de una determinada cantidad de dinero V mediante el siguiente procedimiento. El individuo I tiene el primer turno para hacer una propuesta, decidiendo a continuación el II si la acepta o no. En caso de que II la acepte se lleva a cabo el reparto, pero en el caso de que la rechace la cantidad inicial se ve reducida un 10 % pasando a ser II el que debe hacer una propuesta a I y este el que decide si la acepta o no. En caso de que I no acepte la propuesta la cantidad de dinero se ve reducida de nuevo en un 10 % y prosiguen las rondas de negociación alternándose los jugadores a la hora de hacer las propuestas y perdiéndose siempre un 10 % del dinero disponible al final de cada una de ellas.

Definición 4.2.2 (Juegos finitos)**.** *Un juego en forma extensiva* Γ *es finito si tiene (1) un número finito de historias terminales y (2) horizonte finito.*

La descripción detallada de la forma extensiva puede resultar engorrosa incluso para juegos con información perfecta, por lo que en muchos ocasiones no nos detendremos en ella. Lo verdaderamente importante es ser conscientes de que un análisis correcto de cualquier juego dinámico pasa por conocer de manera precisa los elementos que nos pide la forma extensiva, los cuales son básicamente —para los juegos de información perfecta— las distintas **posiciones** en las que les podría tocar mover a cada uno de los jugadores, las **alternativas que tendrían en cada una de ellas** y los ***pagos*** de cada jugador.

4.2.1 De la forma extensiva a la forma normal: el concepto de estrategia

Como ya señalamos en el Tema 1, dada la representación en forma extensiva de un juego, siempre es posible pasar a su representación en forma normal a partir del concepto de estrategia. En el caso de un juego con información perfecta, dada su representación en forma extensiva Γ, se define una estrategia para un jugador i como un plan completo de acción, en el sentido de que le asigna un movimiento en cada una de las posiciones $x_i \in \mathbf{X}_i$ en las que le podría tocar mover. Podemos pensar en una estrategia como la respuesta de los jugadores a un cuestionario sobre que harían en cada una de las *situaciones* en las que se podrían llegar a encontrar.

Definición 4.2.3 (Estrategia)**.** *Dada la forma extensiva* Γ *de un juego con información perfecta, una estrategia para el jugador i es una función* $s_i(x_i)$ *que le asigna un movimiento* $a \in \mathbf{A}(x_i)$ *en cada una de las posiciones en las que le podría tocar mover* $x_i \in \mathbf{X_i}$.

En los juegos de información perfecta cada conjunto de información contiene una única posición, por lo que una estrategia asignará tantos movimientos como posiciones (nodos) tenga asignadas un jugador. En los juegos finitos podemos representar las estrategias de un jugador ordenando sus nodos de acuerdo con algún criterio y especificando a continuación las posibles secuencias de movimientos respetando dicho orden. A modo de ejemplo, los

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

juegos que admiten representación mediante un diagrama se suele adoptar el criterio de ordenar los nodos de izquierda a derecha (orden de las etapas) y, en segundo lugar, de arriba abajo.

En el ejemplo de las votaciones estratégicas el jugador I mueve únicamente en el nodo raíz (en la posición $\emptyset$) por lo que sus estrategias serán un plan muy sencillo que constará únicamente de un movimiento. Su conjunto de estrategias posibles es $S_I = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$. Sin embargo, el jugador II tiene asignadas tres posiciones en el juego $X_2 = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ por lo que cada una de sus estrategias constará de tres movimientos. A modo de ejemplo, con la estrategia $s_{II} = \bar{B}\bar{C}\bar{B}$ el jugador II respondería vetando el proyecto B si el I vetase el proyecto A o el C y vetando el proyecto C si el I vetase el proyecto B. Como II puede tener que mover en tres posiciones distintas y en cada una de ellas tiene dos alternativas, tiene 8 estrategias posibles:

$$S_{II} = \{\bar{B}\bar{A}\bar{A}, \bar{B}\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}\bar{A}, \bar{B}\bar{C}\bar{B}, \bar{C}\bar{A}\bar{A}, \bar{C}\bar{A}\bar{B}, \bar{C}\bar{C}\bar{A}, \bar{C}\bar{C}\bar{B}\}$$

Para juegos más complejos iremos viendo otras formas más manejables de especificar las estrategias. También dejamos para más adelante la posibilidad de que los jugadores elijan en una o más posiciones de acuerdo a algún mecanismo aleatorio, de manera similar a la posibilidad que tenían de elegir estrategias mixtas en los juegos estáticos.

▶ Ejercicio 4.2.4

Determine los espacios de estrategias de cada uno de los jugadores para los juegos cuya forma extensiva aparece recogida en las figuras 4.1, y 4.4 y para los juegos de los ejercicios 4.2.1 y 4.2.3.

Una vez tengamos los espacios de estrategias de los jugadores $\mathbf{S}_i$, para completar el paso de la forma extensiva a la normal sólo nos faltará utilizar las funciones de pagos de la forma extensiva —las cuales aparecen en función de las historias terminales $U_i(z)$— para obtener las funciones de pagos de la forma normal —las cuales han de estar en función de las combinaciones de estrategias $U_i(\mathbf{s})$—.

Ejemplo 4.2.2

En el juego de las votaciones la forma estratégica del juego vendrá dada por:

Jugadores $J = \{I, II\}$

Estrategias $S_I = \{(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C})\}$; $S_{II} = \{(\bar{B}, \bar{A}, \bar{A}), (\bar{B}, \bar{A}, \bar{B}), \cdots\}$

Funciones de pagos Podríamos recogerlas mediante una matriz de pagos 2X8 cuyos elementos serían: $U_I[(\bar{B}), (\bar{B}, \bar{C}, \bar{A})] = 2, \cdots$ $U_{II}[(\bar{B}), (\bar{B}, \bar{A}, \bar{A})] = 1, \cdots$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

► Ejercicio 4.2.5

Represente en forma estratégica los juegos de las figuras 4.1 y 4.4 y el del ejercicio 4.2.3.

4.3 Inducción hacia atrás y equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

En la sección anterior hemos aprendido a representar un juego con información perfecta en forma extensiva y a pasar de ésta a la forma estratégica. Ya tenemos todas las herramientas para recoger mediante un modelo el nuevo tipo de situaciones de interdependencia estratégica que representan los juegos dinámicos. El paso siguiente ha ser el plantearnos como *resolver* dichos modelos, esto es, que criterios proponer a la hora de seleccionar entre los posibles desarrollos del juego.

Al igual que hacíamos en el caso de los juegos estáticos, partiremos inicialmente de dos supuestos básicos:

- la estructura del juego es conocimiento común (y, por tanto, lo es también la forma extensiva del mismo);
- los jugadores son racionales (deciden de acuerdo con el criterio de maximización de la utilidad esperada) y esto es conocimiento común.

4.3.1 Racionalidad secuencial y equilibrio de Nash: la *perfección* en subjuegos

Dado que el concepto de estrategia nos permite pasar cualquier juego dinámico en forma extensiva a su forma estratégica, parece lógico preguntarnos si no sería posible utilizar los mismos conceptos de solución vistos para los juegos estáticos, en particular el de equilibrio de Nash. Consideremos en primer lugar el caso del juego entre la empresa entrante y la incumbente. En la figura 4.5 aparece su representación en forma estratégica a partir de una matriz de pagos. La determinación de los equilibrios de Nash del juego puede hacerse de la manera habitual, a partir de las funciones de mejor respuesta de los jugadores. Podemos apreciar que en este caso existen dos combinaciones de estrategias (puras) que son equilibrios de Nash: (e, a) y $(\bar{e}, \bar{a})$.

	a	$\bar{a}$
e	$\underline{4}, \underline{4}$	$-1, -1$
$\bar{e}$	$0, \underline{10}$	$\underline{0}, \underline{10}$

Figura 4.5. Forma estratégica del juego entrante-incumbente

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Parece razonable exigir a las combinaciones de estrategias que propongamos como solución de un juego dinámico que sean equilibrios de Nash, esto es, que cada jugador este adoptando una estrategia que sea mejor respuesta a las estrategias del resto de jugadores. Sin embargo, en este tipo de juegos podemos ir un poco más allá. En efecto, en la determinación de los equilibrios de Nash a partir de la forma estratégica procedemos cómo si los jugadores eligiesen simultáneamente sus estrategias de manera irreversible al principio del juego. Esta perspectiva resulta adecuada para los juegos estáticos, pero no para los dinámicos. En estos últimos, algunos de los jugadores tendrán que tomar su decisión, no al principio del juego, sino una vez observen los movimientos de los jugadores que mueven antes que ellos, siendo esto conocimiento común. En el ejemplo que estamos analizando, la empresa incumbente tendrá que decidir si acomoda la entrada o desata una guerra de precios una vez que el entrante haya tomado la decisión de entrar y no antes de saber lo que hará éste. Ese carácter secuencial de la toma de decisiones, que no esta presente en la forma normal, pero si en la forma extensiva, ha de ser tenido en cuenta a la hora de proponer criterios para seleccionar el desarrollo esperado del juego. En concreto, lo que exigiremos ahora, además de que las combinaciones de estrategias constituyan un equilibrio de Nash, es que cada una de las estrategias sea **secuencialmente racional**, esto es, que el movimiento asignado a cada posición del juego se corresponda con el comportamiento racional del jugador si tuviese que decidir sabiendo que esta en ella.

En el caso de nuestro ejemplo, una de las dos combinaciones de estrategias que es equilibrio de Nash, $(\bar{e}, \bar{a})$, no es secuencialmente racional. En efecto, el movimiento asignado a la empresa incumbente en dicho equilibrio de Nash no constituye su mejor movimiento una vez el juego se encuentre en la posición en la que le toca tomar esa decisión. Podríamos decir que dicho equilibrio de Nash descansa en la **amenaza no creíble** por parte de la empresa establecida de desencadenar una guerra de precios en caso de que se produzca la entrada. Ciertamente, si el entrante creyese la amenaza del incumbente su mejor respuesta sería no entrar, lo que ocurre es que dichas creencias no son sostenibles dada la información que tiene el entrante (por ser un juego de información completa conoce las funciones de pagos del incumbente y sabe que iría en contra de sus intereses desencadenar la guerra de precios). Por el contrario, el equilibrio de Nash (e, a) si cumple la condición de que las estrategias de los jugadores sean secuencialmente racionales: la estrategia del incumbente le asigna un movimiento óptimo en la posición en la que le toca decidir si acomoda o no la entrada. En los dos equilibrios de Nash se cumple la condición de comportamiento óptimo de ambos jugadores ante la estrategia del otro, la diferencia es que en el segundo se impone además la condición de que el jugador que mueve primero está deciendo bajo unas expectativas de que el que mueve después se va a comportar racionalmente.

Con carácter general, en un juego dinámico los jugadores que *mueven primero* antes de tomar su decisión *miran hacia adelante*, esto es, tratan de anticipar las consecuencias de cada una de las alternativas que tienen a su alcance, para lo cuál deberán formarse unas expectativas sobre el desarrollo del juego en cada una de las posiciones que faltan por resolverse. La racionalidad secuencial lo que exige es que esas expectativas tengan en cuenta la racionalidad del resto de jugadores, en el sentido de que si les llega el turno de mover en una determinada posición lo relevante será lo que les interesa hacer en esa posición (y no, en el caso de que esto fuera posible, lo que pudieran haber dicho antes de empezar el juego que harían en ella en caso de alcanzarla). Podríamos decir que vamos a *cribar* las combinaciones de estrategias que son equilibrios de Nash para quedarnos únicamente con aquellas que cumplen el requisito adicional de ser consistentes con el supuesto de que la racionalidad es conocimiento común.

Una combinación de estrategias que, además de ser equilibrio de Nash, cumpla este requisito de la racionalidad secuencial se dice que constituye **un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos**. Antes de justificar el porqué de esta denominación, vamos a explicar un procedimiento sencillo para determinar los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos para los juegos con horizonte finito e información perfecta.

4.3.2 El procedimiento de la inducción hacia atrás

En juego con información perfecta y horizonte finito, siempre es posible determinar los equilibrios de Nash del mismo que son perfectos en subjuegos utilizando un procedimiento sencillo que se conoce como **inducción hacia atrás**. Dicho procedimiento consiste en comenzar por determinar los movimientos óptimos del jugador que mueve en último lugar y proceder secuencialmente hacia atrás hasta alcanzar el nodo raíz. En el ejemplo de la amenaza de entrada, resolveríamos primero el problema de decisión de I en la única posición del juego que tiene asignada, procediendo después a resolver el de E bajo el supuesto de que es capaz de anticipar la respuesta (racional) de I en la siguiente etapa. En la Figura 4.6 aparecen marcadas en grueso las ramas del árbol que constituyen el movimiento óptimo del jugador al que le toca mover en el conjunto de información correspondiente. La *senda* o *camino* que selecciona el proceso de inducción hacia atrás constituye la trayectoria de equilibrio del juego y se conoce como resultado por inducción hacia atrás.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

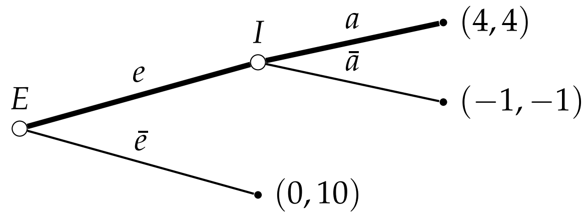


Figura 4.6. ***Resultado por inducción hacia atrás para el juego entrante-incumbente***

En un juego tan sencillo como el anterior, el resultado por inducción hacia atrás coincide con el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos debido a que la trayectoria de equilibrio incluye las dos únicas posiciones en las que tienen que tomar decisiones los jugadores. En general, sin embargo, en un juego existirán posiciones fuera de la trayectoria de equilibrio; en este caso, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos ya no coincidirá con el resultado por inducción hacia atrás. Mientras que el resultado por inducción hacia atrás sólo nos indicará la trayectoria de equilibrio del juego, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos recogerá los movimientos óptimos de los jugadores en cada uno de sus posiciones, estén o no en la trayectoria de equilibrio del juego. A modo de ejemplo, en el juego recogido en la Figura 4.7 el resultado por inducción hacia atrás es (a_{I1}, a_{II2}), mientras que el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del mismo es $(a_{I1}, a_{II2}a_{II4})$. En ese mismo juego, la combinación de estrategias $(a_{I2}, a_{II1}a_{II4})$ es un equilibrio de Nash, pero no es perfecto en subjuegos al asignar un movimiento no óptimo al jugador II en uno de sus conjuntos de infomación. Podríamos decir que este equilibrio de Nash se sustenta en la amenaza no creíble —porque va en contra de sus intereses— del jugador II de mover a_{II1} si el jugador I mueve a_{I1}.

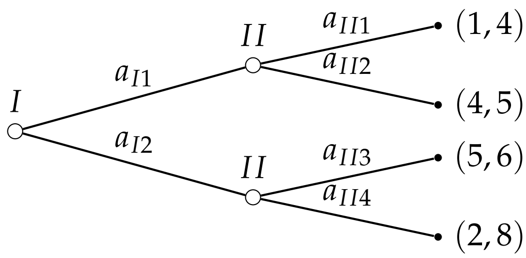


Figura 4.7

A continuación aparece otro ejemplo, ya conocido, en el que se aplica la inducción hacia atrás para determinar tanto el resultado por inducción hacia atrás como el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Ejemplo 4.3.1 Juego de las ***votaciones estratégicas.***

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

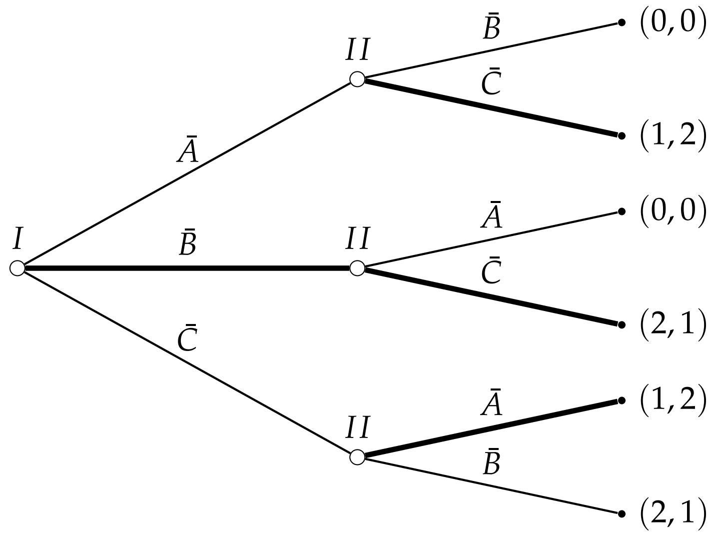


Figura 4.8. ***El juego de las «votaciones estratégicas».*** La inducción hacia atrás no sólo nos permite determinar la trayectoria de equilibrio, sino también la combinación de estrategias que constituye el equilibrio perfecto en subjuegos.

Pongámonos primero en lugar del jugador I. En el momento de tomar su decisión es consciente de que las consecuencias dependen de como responda el jugador II, por lo que tratará de anticipar dicha respuesta. Podríamos decir que el jugador que mueve en primer lugar se plantea el problema de decisión del que mueve después como paso previo a tomar su propia decisión. Al ser un juego de información completa, el jugador I conoce las preferencias del jugador II, por lo que puede resolver perfectamente la segunda etapa. De esta manera, anticipará que, tanto si él veta el proyecto A, como si veta el proyecto B, el jugador II vetará el C, mientras que si él veta el C, el II vetará el A. Tras este razonamiento, claramente le interesa vetar el proyecto B, con lo que logrará que salga su proyecto preferido, el A.

Tenemos ya una propuesta de solución para este juego: el jugador I elige $\bar{B}$ y el II elige $\bar{C}$. Para determinar la solución hemos aplicado la inducción hacia atrás: hemos resuelto primero la segunda etapa y a continuación —dando por supuesto que el jugador que mueve primero anticipa como se resolverá la segunda— la primera. Para los juegos sencillos, con un número reducido de jugadores y de movimientos para cada uno de ellos, podemos determinar el resultado por inducción hacia atrás sobre el propio árbol. Para ello, nos situaremos en cada uno de los nodos en los que puede tener que mover el jugador que mueve el último y señalaremos su alternativa más preferida en cada uno de ellos. Procederemos a continuación de la misma manera con el jugador que mueve el penúltimo y así sucesivamente hasta alcanzar el nodo raíz del árbol. Como puede apreciarse en la la Figura 4.8 misma, la inducción hacia atrás nos determina no sólo lo que podríamos denominar la **senda o trayectoria de equilibrio del juego** —que en

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

este caso sería $(\bar{B}, \bar{C})$— sino también la combinación de estrategias que constituye el **equilibrio de Nash perfecto en subjuegos**—en este caso concreto $(\bar{B}, \bar{C}\bar{C}\bar{A})$—.

► Ejercicio 4.3.1

En el juego de las votaciones estratégicas, ¿constituye la combinación de estrategias $(\bar{B}, \bar{C}\bar{C}\bar{A})$ un equilibrio de Nash? En caso de que su respuesta sea afirmativa, ¿constituye un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

La aplicación de la inducción hacia atrás a juegos con información perfecta nos permite seleccionar los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos para cualquier juego con información perfecta. Al aplicar dicho procedimiento estamos considerando que los jugadores que mueven primero se ponen en los pies de los que mueven en etapas posteriores, tratando de anticipar cuál será su movimiento. Al tratarse de juego de información completa, conocerán perfectamente sus preferencias y esto, junto con el conocimiento común de la racionalidad, les permite resolver su problema de decisión tan bien como el propio jugador al que le tocará mover cuando le llegue su turno. Podríamos decir que la inducción hacia atrás elimina las estrategias que incluyen promesas o amenazas no creíbles, esto es, que proponen movimientos de los jugadores cuya ejecución llegado el momento iría en contra de sus intereses. En otras palabras, la inducción hacia atrás incorpora la exigencia de la **racionalidad secuencial** a la hora de seleccionar entre las combinaciones de estrategias como los candidatos a desarrollo esperado del juego. Un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, además de exigir que las estrategias de cada uno de los jugadores sean mejores respuestas a las de los otros, establece una condición adicional: que el comportamiento asignado a cada jugador sea secuencialmente racional. Visto de otra manera, en un equilibrio de Nash que no sea perfecto en subjuegos algunos de los jugadores están adoptando estrategias que son mejores respuestas a estrategias de los otros a las que deberían asignar probabilidad cero bajo el supuesto de que la estructura del juego y la racionalidad son conocimiento común.

► Ejercicio 4.3.2

Determine el resultado por inducción hacia atrás y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para el juego de la Figura 4.1.

4.3.3 Subjuegos de un juego con información perfecta

Hasta el momento nos hemos limitado a utilizar la inducción hacia atrás para seleccionar de entre los equilibrios de Nash aquellos que cumplen el requisito adicional de ser secuencialmente racionales, esto es, las estrategias de los jugadores deben ser óptimas, dadas las estrategias del resto, no sólo al principio del juego sino también en cualquiera de las po-

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

siciones en las que podría tener que mover. Hemos dicho que los equilibrios de Nash que cumplen esta condición adicional se califican como *perfectos en subjuegos*. Para entender el porqué de esta denominación debemos dar primero una definición de lo que se entiende por subjuego.

Dada una posición cualquiera del juego x podríamos decir que ella misma constituye la posición inicial (nodo raíz) de un juego reducido que es lo que constituye el *subjuego asociado a esa posición*. A modo de ejemplo, en el juego de la figura 4.1 el movimiento a por parte de I da paso a un subjuego que arrancaría en la posición a la que asignamos ese mismo nombre a (la historia que nos lleva a ella) y que puede recogerse mediante el árbol que aparece en la figura 4.9. De la misma manera el movimiento b daría paso a un subjuego distinto también entre II y III. Además de estos dos subjuegos, tendríamos otros cuatro, los asociados a las posiciones del jugador III: $(a,\alpha),(a,\beta)(b,\alpha)(b,\beta)$. Ciertamente estos subjuegos recogen un problema de decisión unipersonal más que un juego propiamente dicho, pero ello no impide su consideración como subjuego. En ocasiones se considera también un subjuego el juego completo. En este caso sólo se consideran *subjuegos propios* aquellos subjuegos que son distintos del juego completo.

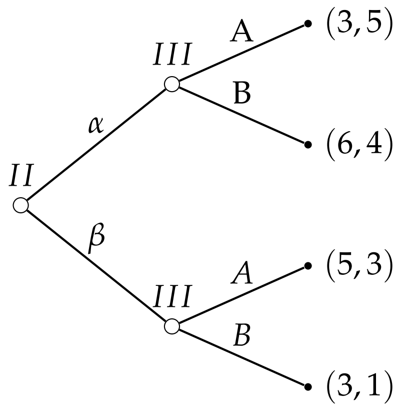


Figura 4.9. ***Subjuego al que da paso el movimiento* a *por parte del jugador* I *en el juego de la Figura 4.1.***

Definición 4.3.1 (Subjuego de un juego con información perfecta)**.** *Dada la forma extensiva* Γ *de un juego con información perfecta y una posición cualquiera del mismo* x*, el subjuego* $\Gamma(x)$ *asociado a dicha posición viene dado por la siguiente forma extensiva:*

Jugadores *Los jugadores que en* Γ *tienen asignados movimientos en* x *y en todas las posiciones que siguen a* x*.*

Historias terminales *El conjunto de secuencias completas de acciones que arrancarían en* x*.*

Partición de jugadores *La misma que proyecta* Γ *sobre la parte del juego que se inicia en* x*.*

Funciones de pagos *Las correspondientes de* Γ *para las historias terminales y los jugadores que forman parte del subjuego.*

▶ Ejercicio 4.3.3

Determine todos los subjuegos del juego del entrante y la empresa incumbente y del juego de las votaciones estratégicas.

Una vez dada la definición de subjuego, ya estamos en condiciones de aclarar el significado de la expresión equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. El requisito adicional de racionalidad secuencial que introducíamos a través de la inducción hacia atrás es equivalente a exigir a las estrategias de los jugadores que sean óptimas no sólo para el juego completo, sino también para cada uno de los subjuegos del mismo.

Definición 4.3.2 (Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para juegos con información perfecta)**.** *Una determinada combinación de estrategias* $\hat{\mathbf{s}}$ *constituye un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, de un juego con información perfecta, si dicha combinación de estrategias, además de constituir un equilibrio de Nash del juego completo, asigna un equilibrio de Nash a cada uno de los subjuegos del mismo.*

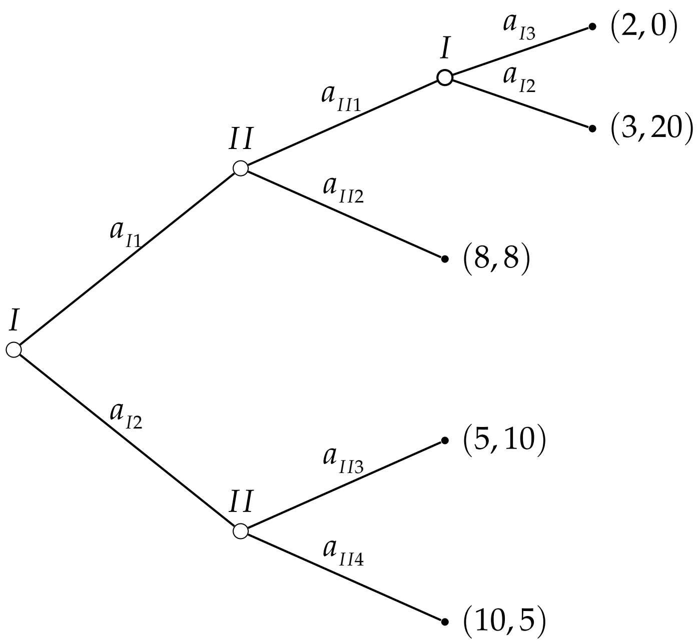
En relación con la definición anterior, es necesario precisar que lo que exige para los subjuegos que constituyen un problema de decisión de un único jugador, es que la estrategia correspondiente le asigne un movimiento óptimo en dicha posición. Puede resultar útil pensar que cuando un jugador toma una decisión en una determinada posición —salvo que ésta sea un posición final— esta decidiendo en realidad entre subjuegos (con cada movimiento dará paso a un subjuego distinto), por lo que tratará de anticipar como se resolvería cada uno de ellos. La respuesta es que esperará que cada subjuego de desarrolle conforme a un equilibrio de Nash.

4.4 Ejercicios

▶ Ejercicio 4.4.1

Dado el juego representado en la figura adjunta:

- Especifique los componentes de la forma extensiva Γ.
- Determine el resultado por inducción hacia atrás y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
- Ponga un ejemplo de un equilibrio de Nash que no sea perfecto en subjuegos.



▶ Ejercicio 4.4.2

Tres miembros de una institución pública, A, B y C, han de decidir por mayoría si se suben o no su propio sueldo en una cuantía de K um .El procedimiento de votación establecido exige que cada uno de ellos ha de ir anunciando públicamente su voto, empezando el A y terminando el C. Todos ellos desean el aumento de sueldo, pero al mismo tiempo le atribuyen un coste de C um al hecho de anunciarlo públicamente.

1. Represente el juego en forma extensiva.
2. Determine el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
3. Ponga un ejemplo de un equilibrio de Nash no perfecto en subjuegos.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 4.4.3

Dos individuos, I y II, tienen que repartirse un excedente, por valor de 500 *um*, mediante el siguiente procedimiento. El individuo I comienza haciendo una propuesta de reparto a II. Si éste la acepta, se lleva a cabo inmediatamente; en caso de que II no la acepte, el excedente se reduce en 200 *um* y se le concede a II el turno para hacer una propuesta, la cual, de ser aceptada por I, se hará efectiva. En caso de que I la rechace cada uno de los jugadores recibe 100 *um*.

1. Haga un esbozo del juego y determine tanto el resultado por inducción hacia atrás como el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
2. Ponga un ejemplo de un equilibrio de Nash no perfecto en subjuegos.

▶ Ejercicio 4.4.4

Dos individuos, I, y II, se enfrentan a la posibilidad de llevar a cabo un determinado proyecto, al cual atribuyen, respectivamente, un valor de 3 000 *um* y V_{II} *um*. La realización del mismo requiere una aportación total de 1 000 *um*, que han de ser cubiertas entre ambos de acuerdo al siguiente procedimiento: en primer lugar el individuo I ha de comunicar al II cual es la aportación que esta dispuesto a hacer (c_I); a continuación será el agente II quien diga si esta dispuesto a asumir la parte del coste restante —en cuyo caso el proyecto se lleva a cabo— o no —en cuyo caso el proyecto no se se realizará—. Se pide:

a. Haga un esbozo del juego.

b. Determine el/los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en función del valor de los parámetros V_{II}.

c. Ponga un ejemplo de un equilibrio de Nash no perfecto en subjuegos.

▶ Ejercicio 4.4.5

Una determinada empresa tiene el monopolio de producción del bien X, pudiendo producir la cantidad que desee a un coste unitario de c *um*, esto es, su función de costes totales es de la forma:

$$CT^P(x) = cx, \tag{4.1}$$

donde x es la cantidad total producida. Dicha empresa no vende directamente a los consumidores, sino que suministra su producto a un determinado precio, P_M, a una empresa distribuidora que se encarga, también en condiciones de monopolio, de su venta

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

al público. Además del coste de compra el distribuidor incurre también un coste de distribución de d u.m. por unidad de X vendida:

$$CT_I^D(x_I^D) = (P_M + d)x_I^D. \tag{4.2}$$

La demanda final del producto por parte de los consumidores viene dada por la expresión:

$$P = a - X^D, \tag{4.3}$$

donde x^D es la cantidad total sacada al mercado por los minoristas (suponga que sacan al mercado todo lo que le compran al productor).

a. Realice un esbozo del juego.

b. Determine el resultado por inducción hacia atrás.

c. Determine el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

d. Ponga un ejemplo de un equilibrio de Nash no perfecto en subjuegos.

▶ Ejercicio 4.4.6

En una determinada empresa los representantes sindicales negocian con la dirección de la misma en relación a los salarios (w) y el nivel de empleo (L). Suponga que las preferencias de los representantes de los trabajadores vienen dadas por la función de utilidad $U(w, L) = (w - \underline{w})L$, donde $\underline{w}$ es el salario que el trabajador representativo podría obtener en otro empleo y L es el número total de trabajadores contratados por la empresa. Respecto a la función de beneficios de la empresa, sabemos que ésta tiene el monopolio del mercado y que la demanda de su producto viene dada por la función $p = a - Q$, donde Q es la cantidad total que saca al mercado . Para simplificar el modelo, se considera también que cada trabajador obtiene una unidad de output por cada unidad de trabajo que aporta ($Q = L$) y que la empresa no tiene más costes que los laborales. Suponga que es el Sindicato quien decide el nivel salarial, fijando a continuación la empresa el nivel de empleo que desean. Se pide:

a. Plantee la situación anterior como un juego y determine el resultado por inducción hacia atrás.

b. Determine el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 4.4.7

Dos indiviudos, I y II, se enfrentan a la siguiente situación: se le entregan a I dos monedas de oro idénticas y se le pide que haga una propuesta de reparto con el II; si éste acepta la propuesta se lleva a cabo, pero si no la acepta ninguno de los dos recibe nada.

- Represente el juego en forma extensiva.
- Determine el resultado por inducción hacia atrás, ¿con qué problema se encuentra?
- A pesar del problema encontrado en el apartado anterior, ¿cuáles cree usted que son los ENPS de este juego?
- Considere la siguiente combinación de estrategias:
    - El jugador I propone quedarse el con las dos monedas.
    - El jugador II aceptaría si le ofrece una o dos monedas, pero no aceptaría si no le ofrece ninguna. ¿Constituye dicha combinación de estrategias un equilibrio de Nash? ¿Es racionalizable la estrategia del jugador I?

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

4.5 Aplicación I: El modelo de duopolio de Stackelberg

Introducción

En el tema anterior hemos analizado los modelos clásicos de oligopolio de Cournot y de Bertrand, en los cuales las empresas tomaban sus decisiones de manera simultánea. Los juegos dinámicos nos permiten analizar situaciones en las cuales las empresas deciden de manera secuencial, esto es, algunas de ellas conocerán las decisiones de las otras antes de tomar su propia decisión. En esta apartado vamos a analizar el modelo de Stackelberg[3], otro modelo clásico de duopolio similar al de Cournot, pero con la novedad de que una de las empresas actúa como *líder*, esperando la otra (*seguidora*) a conocer su decisión antes de tomar la suya. Dado que nuestro interés se centra en el análisis de los aspectos estratégicos, presentamos el modelo en un marco sencillo con una demanda de mercado lineal y funciones de costes también lineales e iguales para ambas empresas.

Consideremos una situación en la cual el mercado de determinado bien es abastecido por dos únicas empresas, L y S. La característica básica del modelo de Stackelberg es que L actúa como *líder*, en el sentido de que la otra empresa esperará a conocer x_L antes de elegir x_S. Vamos a analizar un modelo sencillo en cuanto a las condiciones de demanda y de costes. Supondremos que el coste total para la empresa i de poner en el mercado una determinada cantidad del bien x_i vienen dado por una función $C_i(x_i)$ que vamos a suponer lineal e idéntica para ambas empresas:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad \text{para} \quad i = L, S. \tag{4.4}$$

El producto se vende en el mercado a un precio único, el cual quedará determinado conjuntamente por la cantidad total puesta en el mercado por ambas empresas y por la demanda del mismo, la cual vamos a suponer también lineal:

$$p = a - bX, \tag{4.5}$$

siendo $X = x_L + x_S$.

Representación en forma extensiva y en forma normal

En la Figura 4.10 aparece representado un esbozo de la forma extensiva del juego. Podemos apreciar que se trata de un juego de información perfecta con dos etapas. En la primera etapa L tiene que decidir x_L, siendo esta una variable continua que suponemos puede tomar

[3] Heinrich von Stackelberg (1905-46) fue un economista alemán que presentó este modelo de oligopolio en 1934, formando parte de su obra *Estructura de mercado y equilibrio*.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

cualquier valor no negativo. En la segunda etapa es S la que tendrá que decidir, conociendo X_L, la cantidad x_S, que también suponemos continua y no negativa. Cada una de los infinitos desarrollos posibles del juego lleva asociado un vector que recoge los beneficios que obtendrían cada una de las empresas para ese par de cantidades y que vendrían dados por:

$$\pi_L(x_L, x_S) = x_L[a - b(x_L + x_S) - c]; \quad \pi_S(x_L, x_S) = x_S[a - b(x_L + x_S) - c].$$

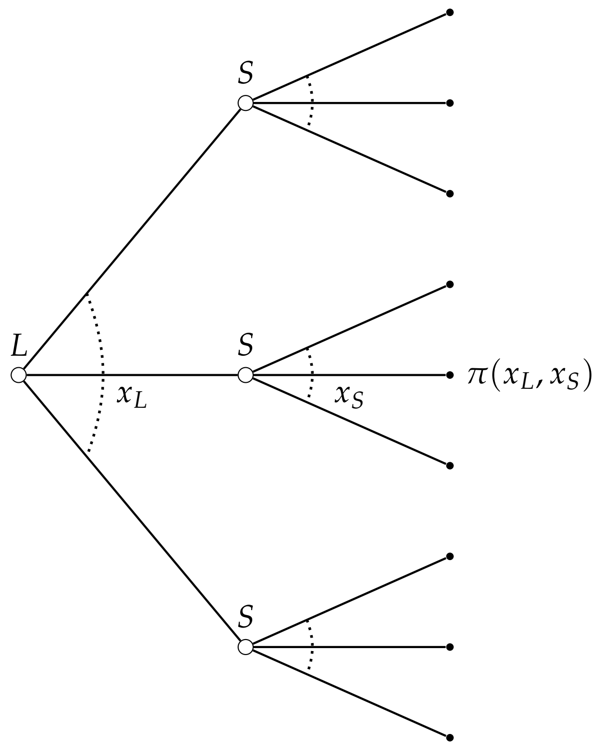


Figura 4.10. ***El modelo de Stackelberg: esbozo del árbol del juego***

Partiendo de la definición 4.2.1 podríamos dar una descripción más formalizada de la forma extensiva:

- $\mathbf{J} = \{L, S\}$.
- $\mathbf{Z} = \{(x_L, x_S) : x_L, x_s \in [0, \infty)\}$.
- $\mathbf{X}_L = \{\emptyset\}, \quad \mathbf{X}_S = \{x_L : x_L \in [0, \infty)\}$.
- $\pi_L(x_L, x_S) = x_L[a - b(x_L + x_S) - c]; \quad \pi_S(x_L, x_S) = x_S[a - b(x_L + x_S) - c]$.

El paso de la forma extensiva a la estratégica tan sólo requiere tener en cuenta que las estrategias de la empresa seguidora han de ser planes que asignen una respuesta a cada posible x_L. Podemos recoger una estrategia para la seguidora a través de una función r_s que asigne una producción por parte de la seguidora $r_S(x_L)$ a cada posible x_L:

$$\begin{aligned} r_S : \quad & \mathbf{X}_L \to \mathbb{R}_+ \\ & x_L \mapsto r_S(x_L), \end{aligned}$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

en cuyo caso la forma estratégica vendría dada por:

- $\mathbf{J} = \{L, S\}$.
- $\mathbf{S}_L = \{x_L : x_L \in [0, \infty)\}$; $\quad \mathbf{S}_S = \{r_S(x_L)\}$.
- $\pi_L[x_L, r_S(x_L)] = x_L\Big[a - b[x_L + r_S(x_L)] - c\Big]$; $\pi_S[x_L, r_S(x_L)] = x_S[a - b[x_L + r_S(x_L)] - c]$.

Determinación del resultado por inducción hacia atrás y del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

Una vez tenemos la representación del juego en su forma extensiva y en su forma normal podemos aplicar los criterios de selección vistos para juegos dinámicos. Como se trata de un juego de información perfecta, podemos aplicar el procedimiento de la inducción hacia atrás para determinar las combinaciones de estrategias que son equilibrios de Nash perfectos en subjuegos. En este caso la lógica del procedimiento viene a ser la siguiente. La empresa líder antes de decidir qué cantidad sacar al mercado tratará de anticipar cuál será la x_S elegida en la segunda etapa por la seguidora para cada posible x_L. Por ser un juego de información completa, la líder conoce la función de beneficios de la seguidora y será capaz de determinar su función de mejor respuesta $B_S(x_L)$. Esta función recogerá las expectativas de la líder sobre lo que hará la seguidora en la segunda etapa y decidirá en la primera etapa de acuerdo con ellas. Comenzaremos, pues, resolviendo la segunda etapa, para determinar las expectativas de la líder sobre el comportamiento de la seguidora:

Segunda etapa: determinación de la estrategia de la empresa seguidora.
Dado que en el momento de tomar su decisión la seguidora conocerá x_L, podemos plantear su problema de decisión como,

$$\max_{x_S} \pi_S(x_L, x_S) = \max_{x_S} x_S[a - b(x_S + x_L) - c]. \tag{4.6}$$

Dado que la función objetivo es cóncava, la condición de primer orden será a la vez necesaria y suficiente:

$$\frac{d\pi_S}{dx_S}(x_S^*, x_L) = a - 2bx_S^* - bx_L - c = 0.$$

Dicha condición nos informa implícitamente de la respuesta de la líder x_S^* para cada posible valor de x_L. Se trata, pues, de una función de mejor respuesta que vamos a denotar por $B_S(x_L)$ y que podemos hacer explícita sin más que despejar x_S^*:

$$x_S^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_L \equiv B_S(x_L). \tag{4.7}$$

Primera etapa: la estrategia de la empresa líder.
Una vez conoce la función de mejor respuesta de la seguidora, podemos plantear el proble-

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

ma de la líder como:

$$\max_{x_L} \pi_L[x_L, B_S(x_L)] = \max_{x_L} x_L \Big[a - b[x_L + (\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_L)] - c\Big], \tag{4.8}$$

que podemos simplificar y expresar como:

$$\max_{x_L} x_L \Big(\frac{a-c}{2} - \frac{1}{2}x_L\Big). \tag{4.9}$$

De nuevo la concavidad de la función nos garantiza que la condición de primer orden será a la vez necesaria y suficiente. En este caso dicha condición es:

$$\frac{d\pi_L}{dx_L}[x_L^*; B_S(x_L)] = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_L^* = 0,$$

y despejando obtenemos de forma explícita la cantidad óptima para cada posible valor de los parámetros:

$$x_L^* = \frac{a-c}{2b}.$$

La inducción hacia atrás nos ha permitido seleccionar una combinación de estrategias que sabemos constituirá un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos:

$$(\hat{s}_L, \hat{s}_S) = \Big(\frac{a-c}{2}, \frac{a-c}{2} - \frac{1}{2}x_L\Big).$$

Si sustituimos x_L^* en $B_S(x_L)$ obtenemos lo que se conoce como resultado por inducción hacia atrás (RIA) que recoge la *trayectoria de equilibrio del juego*:

$$(\hat{x}_L, \hat{x}_S) = \Big(\frac{a-c}{2b}, \frac{a-c}{4b}\Big).$$

Como hemos visto anteriormente, el ENPS, en tanto que combinación de estrategias, nos informa del movimiento asignado a un jugador en cada una de sus posiciones. Por el contrario, el RIA nos informa únicamente de la respuesta de los jugadores en las posiciones que están en la trayectoria de equilibrio. El ENPS contiene una información mucho más rica, ya que además de decirnos cual es la trayectoria de equilibrio nos informa implícitamente acerca de la razón por la cual es esa y no otra: dado el comportamiento esperado de la seguidora en los distintas posiciones (subjuegos) en las que él la puede colocar su mejor decisión es $\hat{x}_L$.

▶ Ejercicio 4.5.1

Determine el RIA y el ENPS para el modelo de Stackelberg bajo las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$p = 130 - X;$$
$$CT_i = 10x_i;\ i = L, S.$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Valoración de los resultados

En el único ENPS del juego la cantidad total sacada al mercado sería:

$$\hat{X} = \hat{x}_L + \hat{x}_S = \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{3}{4}\frac{(a-c)}{b},$$

vaciándose el mercado para un precio,

$$\hat{p} = a - b[\frac{3}{4}\frac{(a-c)}{b}] = c + \frac{a-c}{4}.$$

Bajo estas mismas condiciones de demanda y de costes, cuando las empresas decidían de manera simultánea (modelo de Cournot) la cantidad sacada al mercado era menor y, por tanto, el precio de equilibrio mayor. La empresa seguidora obtendrá un menor beneficio que cuando eligen de manera simultánea ya que está vendiendo una cantidad menor y con un margen más reducido. Sin embargo, ser líder si es rentable ya que su beneficio será:

$$\pi_L(\hat{x}_L, \hat{x}_S) = \left(\frac{a-c}{4}\right)\left(\frac{a-c}{2b}\right) = \frac{(a-c)^2}{8b} > \frac{(a-c)^2}{9} = \pi_L(\hat{x}_i^C, \hat{x}_i^C).$$

Si comparamos los resultados que obtienen las empresas con los que obtenían en el modelo de Cournot, la empresa líder tiene una ventaja de ser el primero en mover (*first mover advantage*). La existencia de esta ventaja puede ser anticipada si tenemos en cuenta que la empresa líder podría hacer que el juego se desarrollase conforme al equilibrio de Cournot. Para ello sería suficiente con que ella sacase al mercado en la primera etapa la cantidad de Cournot $\frac{a-c}{3b}$, para la cual ya sabemos que la mejor respuesta de la seguidora es sacar también $\frac{a-c}{3b}$. Si en lugar de esa cantidad L decide sacar $\frac{a-c}{2b}$ ha de ser porque con esta cantidad obtiene un mayor beneficio esperado dada la respuesta esperada de la seguidora.

▶ Ejercicio 4.5.2

Compare los resultados de equilibrio del Ejercicio 4.5.1 con los que se obtendrían bajo el supuesto de que las empresas compitiesen *à la Cournot*.

El modelo de Stackelberg y el valor estratégico de los compromisos creíbles

El modelo analizado pone de manifiesto que, incluso en unas condiciones para las dos empresas de absoluta igualdad en cuanto a las condiciones de demanda y de costes, la posibilidad de actuar como líder concede una ventaja estratégica que se traduce en unos mayores beneficios. ¿Cuál es entonces el origen del mayor beneficio de la líder? ¿Cómo puede una

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

empresa lograr esa posición ventajosa de liderazgo?

Comenzamos por plantearnos qué es lo que hace que una empresa pueda obtener más beneficios por *mover primero*, cuando cabría incluso esperar que fuese la seguidora la que pudiese aprovechar su ventaja *informativa* en relación al caso en que no conociese la cantidad que va a sacar al mercado la otra empresa (modelo de Cournot). En realidad el mayor beneficio de la líder se deriva de la capacidad que se le otorga en el modelo a *comprometerse* a sacar una cantidad determinada con independencia de la que decida sacar la seguidora. En términos de la forma extensiva, lo que le da ventaja es que puede decidir de antemano en que posición situar a la seguidora (en que subjuego). El *compromiso* de la líder a sacar $\frac{a-c}{2b}$ haga lo que haga la seguidora es lo que le da la ventaja estratégica: si la seguidora sabe que la líder no puede cambiar esa cantidad lo mejor que puede hacer es sacar $\frac{a-c}{4b}$. De hecho, la cantidad sacada por la líder en el RIA no es su mejor respuesta a la cantidad sacada por la seguidora, si pudiese cambiar su decisión con la certeza de que la seguidora no cambiaría la suya lo haría (reduciría su cantidad hasta $\frac{3}{8}\frac{a-c}{b}$). Sin embargo, si la empresa líder dispusiera de esta posibilidad y la seguidora lo supiese, esa mayor flexibilidad iría en contra de sus intereses. Ya tenemos, pues, la respuesta a la primera pregunta, la capacidad de comprometerse a no cambiar su decisión es la única fuente de la ventaja estratégica de la líder.

▶ Ejercicio 4.5.3

Considere el modelo de Stackelberg y suponga que la líder tuviese la oportunidad de cambiar su cantidad después de observar la decisión de la seguidora, siendo esto conocimiento común. Determine el RIA y valore los resultados.

La ventaja estratégica de comprometerse de antemano a seguir un determinado curso de acción no es exclusiva del modelo de Stackelberg, sino que se produce en otras muchas situaciones de interdependencia estratégica. Pero, ?cómo puede comprometerse de antemano un decisor a seguir un determinado curso de acción? Parece claro que no será suficiente con anunciarlo, sino que el compromiso deberá ser creíble. Para el caso concreto del modelo de Stackelberg la empresa líder podría hacer creíble su compromiso a partir de una reputación previa o de una inversión irreversible en capacidad productiva. Con carácter general la credibilidad de los compromisos va asociada a que sea costoso su incumplimiento. En la búsqueda de la credibilidad de sus compromisos los agentes pueden tomar decisiones que aparentemente van en contra de sus intereses (cortar comunicaciones, establecer contratos explícitos o implícitos con terceras partes que les suponga una penalización en caso de incumplimiento, invertir en exceso de capacidad,...).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Ejercicios

▶ Ejercicio 4.5.4

Considere las mismas condiciones de demanda y de costes que en el modelo de Bertrand con producto homogéneo, pero suponga que una de las empresas actúa como líder y la otra como seguidora.

- Determine el RIA y el ENPS.
- Valore los resultados, en particular si existe o no una ventaja derivada de mover el primero.

▶ Ejercicio 4.5.5

Considere una situación de interdependencia estratégica similar a la del modelo de Stackelberg, pero con la diferencia de que el producto no es homogéneo y las empresas eligen precios en lugar de cantidades. En concreto, considere un modelo con dos empresas, 1 y 2, con funciones de demanda para sus productos dadas por $x_i = 84 - 2p_i + p_j; \quad i,j = 1,2; i \neq j$. Sin perdida de generalidad, suponga también que los costes de producción son nulos.

Determine el RIA y el ENPS bajo el supuesto de que la empresa 1 elige primero su precio, disponiendo la 2 de esta información antes de fijar el suyo. Valore los resultados, en particular determine si constituye una ventaja o no poder comprometerse de antemano(ser líder).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

4.6 Aplicación II: Un modelo de negociación colectiva

Gibbons págs. 62-66.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

4.7 Aplicación III: Negociación secuencial

Gibbons págs. 66-69.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria