Universidad Nacional de La Plata – Facultad de Ciencias Exactas
ANÁLISIS MATEMÁTICO II (CiBEx - Física Médica)
2014 – Segundo Semestre

GUÍA Nro. 2: FUNCIONES VECTORIALES

1. Curvas paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro

Con frecuencia consideramos una curva en el plano como una línea trazada sobre un papel, tal como puede ser una línea recta, una curva parabólica o una circunferencia. Nos preguntamos ahora, ¿cómo podemos describir (analíticamente) una curva en el plano? Es evidente que debemos indicar de alguna manera los puntos por donde pasa, los puntos que forman la curva. En algunos casos, podemos usar para ello las coordenadas cartesianas de los puntos $P(x, y)$ *de la curva, expresando* y *como una función de* x $\left[y = F(x)\right.$*, por ejemplo* $\left.y = 1 + x^2\right]$*, ó* x *como una función de* y $\left[x = G(y)\right.$*, por ejemplo* $\left.x = \cos^2 y\right]$*, o dar una relación entre* x *e* y *que defina implícitamente a una variable en términos de la otra* $\left[H(x, y) = 0\right.$*, por ejemplo* $\left.x^2 + y^2 - 16 = 0\right]$*. Hay curvas que se representan más fácilmente mediante otro sistema de coordenadas [por ejemplo,* $r = 2\cos\theta$ *usando coordenadas polares]. Algunas curvas se describen mejor cuando las coordenadas* x *e* y *están dadas en términos de una tercera variable* t *llamada* <u>*parámetro*</u> *[*$x = f(t)$ *e* $y = g(t)$*, recordar las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano vistas en la Sección 5.1 de la Guía 1]. Podemos, también, indicar cada punto de una curva haciendo uso de la asociación de* P *con el punto final del* <u>*vector*</u> $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ *ubicado en posición canónica. En esta guía discutiremos la* <u>*forma paramétrica*</u> *de describir curvas, mediante una* <u>*representación vectorial*</u>*.*

1.1. Curvas paramétricas

Imaginemos un objeto que se mueve en un plano y, a medida que transcurre el tiempo, describe un camino como el representado por la curva de la Figura 1. Si bien notamos que esta curva no puede ser descripta

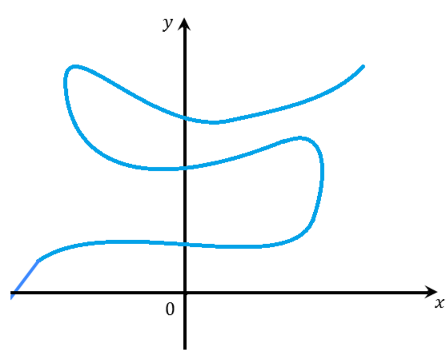

Figura 1: Curva en el plano

por una ecuación de la forma $y = F(x)$ (¿por qué?), sabemos que las coordenadas x e y de la posición de la partícula dependen del instante de tiempo t. Por lo tanto existirán funciones f y g de la variable (o *parámetro*) t, tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Este par de ecuaciones, que muchas veces es una forma conveniente para describir una curva, se llama *ecuaciones paramétricas* de la curva en el plano:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Cada valor de t determina un punto (x, y) en el plano. Cuando t varía (en un intervalo de números reales), el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ se mueve generando una curva en el plano.

EJEMPLO 1: Las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= t^2 - 2t \\ y &= t + 1 \end{cases}$$

con t real, definen una curva plana. Describir y graficar la curva para los siguientes casos: $a)$ si $t \in (-\infty, +\infty)$; $b)$ si $t \in [0, 4]$.

En este ejemplo tenemos $f(t) = t^2 - 2t$, $g(t) = t + 1$.

a) A cada valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$, le corresponde un punto sobre la curva. Por ejemplo, para $t = 0$ se tiene $x = f(0) = 0$ e $y = g(0) = 1$, o sea que el punto de la curva correspondiente a $t = 0$ es $(0, 1)$. Podemos así evaluar x e y para varios valores del parámetro, por ejemplo asignar a t los valores -2, -1, 1, 2, 3, 4, y luego situar los puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ en el plano. Si unimos estos puntos para producir una curva continua obtenemos la Figura 2(a), en la que las flechas indican el sentido en el que se van generando los puntos de la curva a medida que t aumenta su valor (indique el valor de t que corresponde a cada punto marcado en la curva).

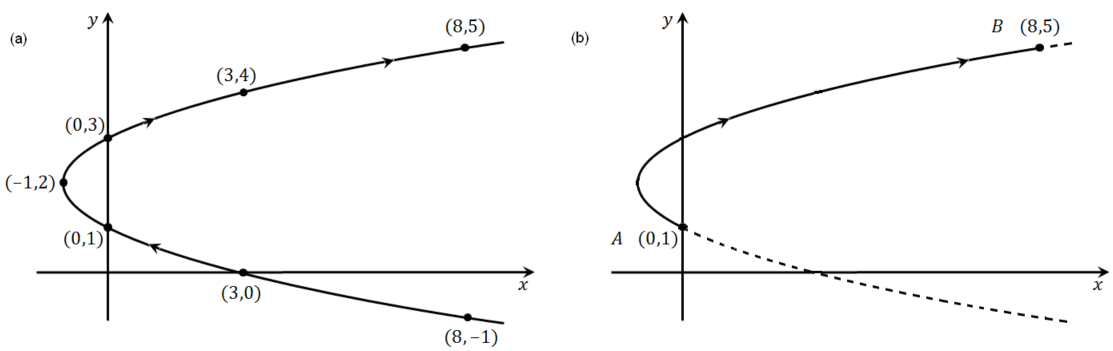

Figura 2: Ejemplo 1. (a) El parámetro t adopta cualquier valor real. (b) El parámetro t varía en $[0, 4]$.

Observando la figura, parece que la curva trazada fuera una parábola. ¿Cómo podemos comprobarlo? Una forma es reescribir las ecuaciones paramétricas de la curva usando (sólo) coordenadas cartesianas, esto es, buscar una relación entre x e y, sin el parámetro t. Para ello debemos eliminar t en las ecuaciones dadas. En este ejemplo es posible hacerlo, por ejemplo despejando $t = y - 1$ de la segunda ecuación y luego sustituyendo en la primera ecuación. Esto da:

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y así vemos que la curva descripta por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola $x+1 = (y-2)^2$, de eje horizontal y vértice en $(-1, 2)$, con las ramas que abren hacia la derecha.

b) Si $t \in [0, 4]$, la correspondiente curva es la parte de la parábola $x = y^2 - 4y + 3$ que empieza en el punto que corresponde al valor $t = 0$ del parámetro, o sea $A(0, 1)$, y termina en el punto que corresponde a $t = 4$, esto es en $B(8, 5)$, como se muestra en la Figura 2(b). La flecha señala el sentido de recorrido de la curva cuando el parámetro aumenta su valor desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

Consideremos ahora un objeto que se mueve en el espacio, describiendo un camino imaginario representado por una curva en el espacio. Habrá entonces tres funciones del tiempo, f, g y h, que nos permitirán escribir las coordenadas de la posición de la partícula en cada instante t mediante las siguientes *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= h(t) \end{cases}$$

Observemos que para cada t, el punto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ es el *punto-posición* de la partícula en el tiempo t. Luego podemos definir el vector que va de O a P, para cada t (ver Figura 3). Esto sugiere que una curva paramétrica podría ser descripta mediante *una función que a cada valor del parámetro t le asigne el vector* $\overrightarrow{OP} = f(t)\ \breve{\imath} + g(t)\ \breve{\jmath} + h(t)\ \breve{k}$, esto es, mediante una *función con valores vectoriales*. En el caso de una curva en el plano, se tiene $\overrightarrow{OP} = f(t)\ \breve{\imath} + g(t)\ \breve{\jmath}$.

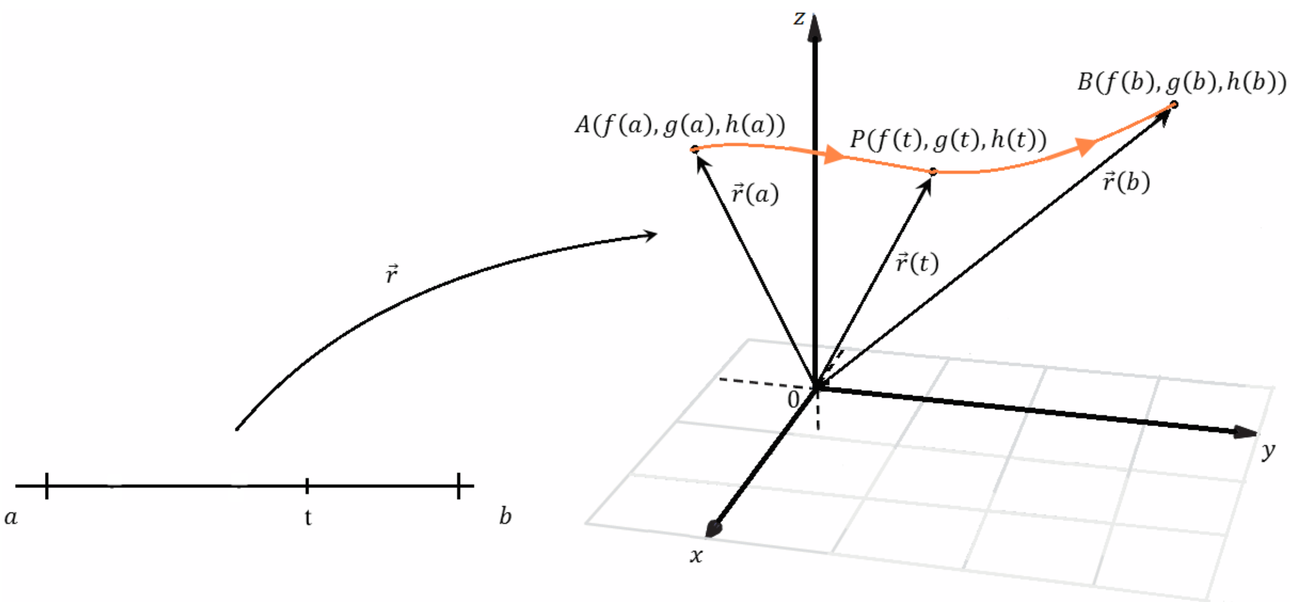

Figura 3: Cuando el parámetro t varía en $[a, b]$, el punto final del vector $\vec{r}(t)$ genera una curva en el espacio.

Ahora bien, ¿qué es una *función con valores vectoriales*? Sabemos que una función en general, es una regla que asigna a cada elemento del dominio un único elemento de su rango o imagen. El caso de una *función vectorial* es uno de los temas de estudio en Análisis II. Veremos más adelante que la representación vectorial permite estudiar con facilidad el movimiento de un objeto en función del tiempo, caracterizando la variación temporal del desplazamiento, la velocidad y aceleración.

1.2. Funciones vectoriales de un parámetro

DEFINICIÓN: *Una* ***función con valores vectoriales****, o simplemente* ***función vectorial****, es una función cuyo rango o imagen es un conjunto de vectores.*

En esta guía trabajaremos con funciones vectoriales, que denotaremos $\vec{r}(t)$, cuyo dominio está en la recta real (intervalo I cerrado o semicerrado, o toda la recta) y cuyo rango o imagen está formado por vectores del espacio o del plano. Se tiene

$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to V_n$$

donde $n = 3$ ó 2.

Podemos decir que a cada número real t (*parámetro*) del dominio, la función vectorial $\vec{r}$ le asigna un vector

$$\vec{r}(t) = f(t)\ \breve{\imath} + g(t)\ \breve{\jmath} + h(t)\ \breve{k}$$

en el espacio [ó $\vec{r}(t) = f(t)\ \breve{\imath} + g(t)\ \breve{\jmath}$ en el plano]. Para expresar una función vectorial usaremos también la notación

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

en el espacio [ó $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ en el plano]. Notar que, estrictamente, la función vectorial asigna a cada valor t el vector $\vec{r}(t)$ en posición canónica, esto es, el vector con su punto inicial en el origen de coordenadas.

Algunas características:

- Las componentes $f(t), g(t), h(t)$ $\big($ ó $x(t), y(t), z(t)$ $\big)$ del vector $\vec{r}(t)$, son funciones escalares de una variable real, y las llamaremos *funciones componentes* de $\vec{r}$.

- Cuando el parámetro t varía en su dominio, el punto extremo o final del vector $\vec{r}(t)$ (ubicado en posición canónica) genera una curva C llamada *curva paramétrica.*

- El *sentido* de la curva paramétrica C está dado por el sentido en el que se van generando los puntos de la curva a medida que el parámetro t aumenta su valor en su dominio $I \subset \mathbb{R}$.

- El dominio de variación del parámetro muchas veces está restringido a un intervalo finito $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. En este caso, la curva C tiene un *punto inicial* o *de partida* $A(f(a), g(a), h(a))$ (que es el punto extremo del vector $\vec{r}(t = a)$ en posición canónica) y un *punto final* o *de llegada* $B(f(b), g(b), h(b))$ (que es el punto extremo del vector $\vec{r}(t = b)$ en posición canónica). Ver Figura 3.

- El parámetro no siempre representa el tiempo y podríamos usar otra letra en lugar de t para indicarlo. Veremos más adelante que un parámetro especialmente "interesante" es el que representa, no ya el tiempo transcurrido, sino la longitud de la porción de curva recorrida desde su inicio; se suele denotar a este parámetro con la letra s, y se lo llama *longitud de arco.*

COMENTARIO: Según vimos, una función vectorial de un parámetro representa una región del plano o del espacio que no es una región sólida ni una superficie, sino que podríamos decir que es un "objeto unidimensional": $\vec{r}(t)$ representa una curva paramétrica en el espacio o en el plano coordenado. De manera similar veremos más adelante que resulta que es posible definir una función vectorial que depende de dos parámetros y que (podemos aventurar) representará un "objeto bidimensional", esto es, una superficie paramétrica en el espacio; su estudio queda postergado hasta la Guía 5, cuando necesitemos parametrizar superficies en el espacio. Por ahora dediquémonos a las curvas paramétricas.

EJEMPLO 2:
a) El movimiento de una partícula en el plano está definido por la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}_1(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Graficar la curva imaginaria que describe la partícula al moverse, indicando los puntos inicial y final así como el sentido del recorrido.

b) Si el movimiento está representado por $\vec{r}_2(t) = (-4\operatorname{sen}(2t), 4\cos(2t))$, con $0 \le t \le 2\pi$, ¿cuál es la curva determinada? Compare con el caso *a*).

a) Las funciones componentes son $x_1(t) = 4\cos t$ *e* $y_1(t) = 4\,\mathrm{sen}\, t$*. Si para algunos valores de* t *situamos en el plano los puntos* $P\,(x_1(t), y_1(t))$*, o sea* $P\,(4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t)$*, su ubicación parece indicarnos que la curva es una circunferencia (evalúe* $\vec{r}_1(t)$ *en* $t = \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$*). Si eliminamos el parámetro* t *entre las ecuaciones* $x = x_1(t)$*,* $y = y_1(t)$*, obtenemos la ecuación cartesiana de la curva. Para ello, en este caso conviene sumar las componentes al cuadrado para eliminar el parámetro, entonces queda:*

$$x^2 + y^2 = [x_1(t)]^2 + [y_1(t)]^2 = (4\cos t)^2 + (4\,\mathrm{sen}\, t)^2 = 16\cos^2 t + 16\,\mathrm{sen}^2\, t = 16(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t) = 16$$

luego

$$x^2 + y^2 = 4^2.$$

Vemos así que el punto $P\,(x_1(t), y_1(t))$*, con* $t \in [0, 2\pi]$*, está en la circunferencia de radio* 4 *centrada en el origen. Notar que en este ejemplo el parámetro* t *corresponde al ángulo entre el semieje* $+x$ *y el vector* $\overrightarrow{OP}$*, como se ve en la Figura 4(a).*
El punto inicial de la curva es $A_1(4, 0)$*; a medida que el parámetro aumenta desde* 0 *hasta* 2π*, el punto* $P\,(4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t)$ *da una vuelta a la circunferencia en sentido "antihorario", esto es contrario al movimiento de las agujas de un reloj.*

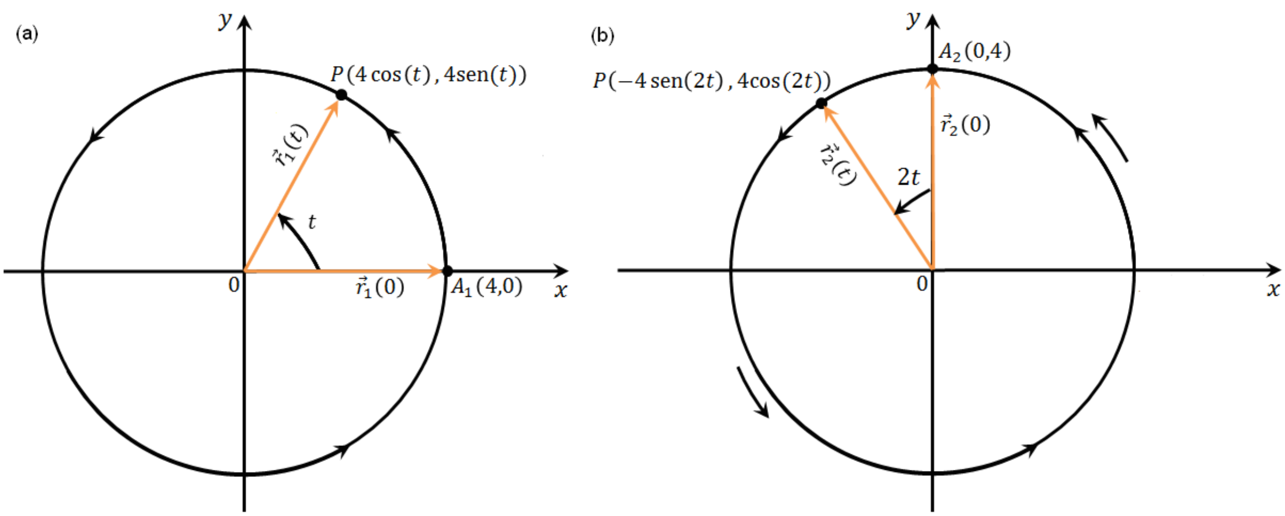

Figura 4: Ejemplo 2. Curvas definidas por: (a) $\vec{r}_1(t)$, (b) $\vec{r}_2(t)$, para t de 0 a 2π.

b) Si eliminamos el parámetro como hicimos en el inciso anterior, tenemos:

$$x^2 + y^2 = [x_2(t)]^2 + [y_2(t)]^2 = [-4\,\mathrm{sen}(2t)]^2 + [4\cos(2t)]^2 = 16\,\mathrm{sen}^2(2t) + 16\cos^2(2t) = 16$$

luego

$$x^2 + y^2 = 4^2.$$

O sea que la gráfica de la curva nuevamente es la circunferencia de radio 4 *centrada en el origen. Notar que ahora el parámetro* t *corresponde a la mitad del ángulo entre el semieje* $+y$ *y el vector* $\overrightarrow{OP}$*, como se ve en la Figura 4(b).*
La curva parametrizada por $\vec{r}_2(t)$ *comienza en* $A_2(0, 4)$ *y termina en ese mismo punto después de haber girado dos veces sobre la circunferencia en sentido antihorario.*

A partir de este ejemplo, vamos a derivar resultados similares. Supongamos que se desea estudiar la curva de la Figura 4(a) pero desde una perspectiva espacial (con el eje z saliendo hacia arriba de la hoja). Es fácil ver que una parametrización de la circunferencia de radio 4 centrada en el origen, horizontal y apoyada en el plano xy, y recorrida una vez en sentido antihorario visto desde $+z$, es

$$\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t, 0), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Imagine que la circunferencia está en ubicación vertical, apoyada en el plano yz; proponga una función vectorial que la describa.
Ahora imagine que se traslada la circunferencia original, manteniéndola siempre horizontal, hasta que su centro está en $(0,0,3)$, ¿qué función vectorial daría? ¿Y si el centro se traslada al $(1,2,3)$?
Por otro lado, notamos que las funciones componentes de $\vec{r}_1(t)$ son tales que la suma de los cuadrados de $\frac{x_1(t)}{4}$ e $\frac{y_1(t)}{4}$ resulta ser igual a $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t$ que tiene el valor constante 1 para cualquier t, luego aquella combinación permite deshacerse del parámetro. Esto sugiere que para parametrizar una *elipse* de semiejes, por ejemplo, 3 y 5 basta tomar

$$\vec{r}(t) = (3\cos t, 5\,\mathrm{sen}\,t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ya que $\left(\frac{x(t)}{3}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{5}\right)^2 = 1$ para cualquier t.

NOTA: Los Ejemplos 2.a) y 2.b) presentan funciones vectoriales distintas, que tienen la misma gráfica. Es necesario distinguir entre una curva, que es un conjunto de puntos, y una curva paramétrica en la cual los puntos son obtenidos mediante una función vectorial, o sea siguiendo un camino, una dirección y un sentido determinados. En ese ejemplo, aunque las gráficas coinciden, las curvas paramétricas son diferentes. Si pensamos en la curva trazada por el movimiento de un objeto, su representación paramétrica nos dice en qué punto está el móvil en cada instante de tiempo, hacia dónde va, y con qué velocidad y aceleración se mueve; mientras que la gráfica de la curva sólo da información de los puntos por los que pasa el móvil.

EJEMPLO 3: Parametrización de una recta.
Sea L la recta en el espacio que pasa por los puntos $P(2,4,-3)$ y $Q(3,-1,1)$. Dar una función vectorial que la parametrice.

Observamos que el vector $\overrightarrow{PQ} = \big(3-2, -1-4, 1-(-3)\big) = (1,-5,4)$ *es paralelo a la recta L. Si tomamos a* $P(2,4,-3)$ *como un punto de la recta y* $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ *como un vector director, entonces:*

$$\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 4-5t \\ z &= -3+4t \end{aligned}$$

son ecuaciones paramétricas de la recta, según aprendimos en la Guía 1. Luego

$$\vec{r}(t) = (2+t, 4-5t, -3+4t), \quad t \in \mathbb{R}$$

es una representación de L mediante una función vectorial.

Grafique la curva paramétrica. Elija 5 valores de t e indique en el gráfico a qué puntos sobre la recta corresponden, según la parametrización dada.
¿En qué sentido es recorrida la recta, de acuerdo a esta parametrización?
Si se restringe el dominio de $\vec{r}(t)$ *al intervalo finito* $[0,1]$*, ¿qué curva representa en este caso* $\vec{r}(t)$*?*
¿Y para $t \in [-1,2]$?

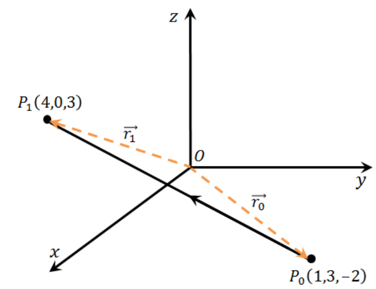

Figura 5: Ejemplo 4. Segmento rectilíneo orientado que va desde P_0 hasta P_1.

EJEMPLO 4: Parametrización de un segmento.
Determinar una función vectorial para el segmento rectilíneo orientado que va desde el punto $P_0(1,3,-2)$ hasta el punto $P_1(4,0,3)$. Ver Figura 5.

Recordando la deducción de las ecuaciones para una recta que pasa por dos puntos dados, vista en la Sección 5.2 de la Guía 1, sabemos que una ecuación vectorial para el segmento que une el punto final del vector $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ con el punto final del vector $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, está dada por:

$$\vec{r}(t) = (1-t)\ \vec{r}_0 + t\ \vec{r}_1, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Efectivamente con esta parametrización se satisface que

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \qquad y \qquad \vec{r}(t=1) = \vec{r}_1,$$

y que para valores de t intermedios (entre 0 y 1), se obtienen los puntos del segmento entre P_0 y P_1.
La parametrización dada también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

donde reconocemos el punto de referencia P_0 por donde pasa la recta y el vector director $\overrightarrow{P_0P_1}$.
Para este ejemplo, tomamos $\vec{r}_0 = (1,3,-2)$ y $\vec{r}_1 = (4,0,3)$. Luego una función vectorial para el segmento orientado que va desde P_0 hasta P_1 es

$$\vec{r}(t) = (1-t)(1,3,-2)+t\,(4,0,3) = (1,3,-2)+t[(4,0,3)-(1,3,-2)] = (1+3t, 3-3t, -2+5t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

EJEMPLO 5: Hélice circular.

Trazar la curva paramétrica determinada por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + 3t\ \breve{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Las funciones componentes de $\vec{r}(t)$ son $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = 3t$, y están definidas para todos los valores reales de t. La curva descripta por $\vec{r}(t)$ es una hélice que se desarrolla en la superficie del cilindro circular recto de eje z y radio 1: $x^2 + y^2 = 1$. En efecto, la curva está sobre dicho cilindro ya que las componentes $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la ecuación de la superficie cilíndrica:

$$S: \quad x^2 + y^2 = [f(t)]^2 + [g(t)]^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Además, la curva "sube" sobre el cilindro cuando la componente $h(t) = 3t$ aumenta (ver Figura 6). En este ejemplo, la periodicidad de las funciones componentes en x e y es de 2π; entonces, cada vez

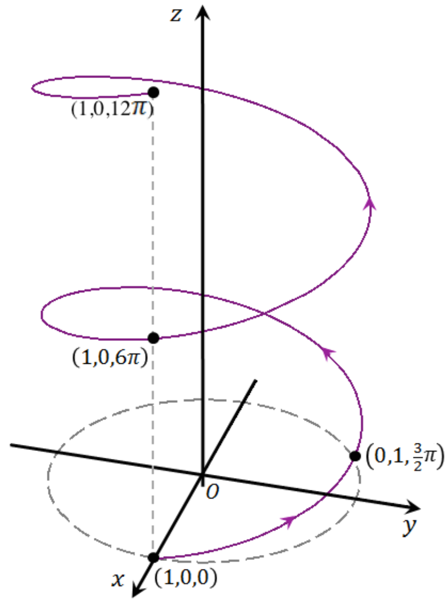

Figura 6: Ejemplo 5. Hélice circular de eje z, radio 1 y paso 6π.

que t aumenta su valor en 2π, la curva completa una vuelta alrededor del cilindro. Pero no vuelve al mismo punto: la distancia (en este caso vertical) entre dos puntos de una hélice que corresponden a una vuelta (en este caso por un cambio de 2π en el parámetro), se llama paso de la hélice circular. Aquí el paso es $3\ 2\pi = 6\pi \simeq 18,85$.

¿Cómo se podría parametrizar una hélice que se desarrolla en la superficie de un cilindro recto de eje z, cuya sección transversal es una elipse (digamos, de semiejes 3 y 5)? Suponga que el paso es el mismo que en el ejemplo resuelto.

Recordemos de la Guía 1 que dos superficies $S_1 = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) : G(x, y, z) = 0\}$ que se cortan entre sí, determinan una curva en el espacio que es el conjunto de puntos que satisface ambos vínculos simultáneamente: $C = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0, G(x; y; z) = 0\}$. Veamos una forma alternativa de describir tal curva, mediante una función vectorial.

EJEMPLO 6: Parametrización de la curva determinada por la intersección entre dos superficies.

Considerar la curva determinada por la intersección entre la superficie cilíndrica dada por la ecuación $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (cilindro circular de eje z y radio 1) y la superficie plana dada por $G(x, y, z) = y + z - 2 = 0$. Ver Figura 7. Encontrar una función vectorial que describa la curva intersección, e indicar el sentido asignado por la parametrización propuesta.

A partir de la figura, notamos que la curva intersección C es una curva cerrada y tiene la forma de una elipse sobre el plano dado. Un punto cualquiera $P(x, y, z)$ que está en la curva debe verificar simultáneamente ambas ecuaciones, dado que pertenece a ambas superficies a la vez:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1 \\ y + z & = & 2 \end{cases}$$

Buscamos expresar x, y, z en términos de un parámetro t de forma de verificar ambas ecuaciones. Vemos que si tomamos $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ se satisface la ecuación del cilindro $x^2+y^2 = 1$. Usando

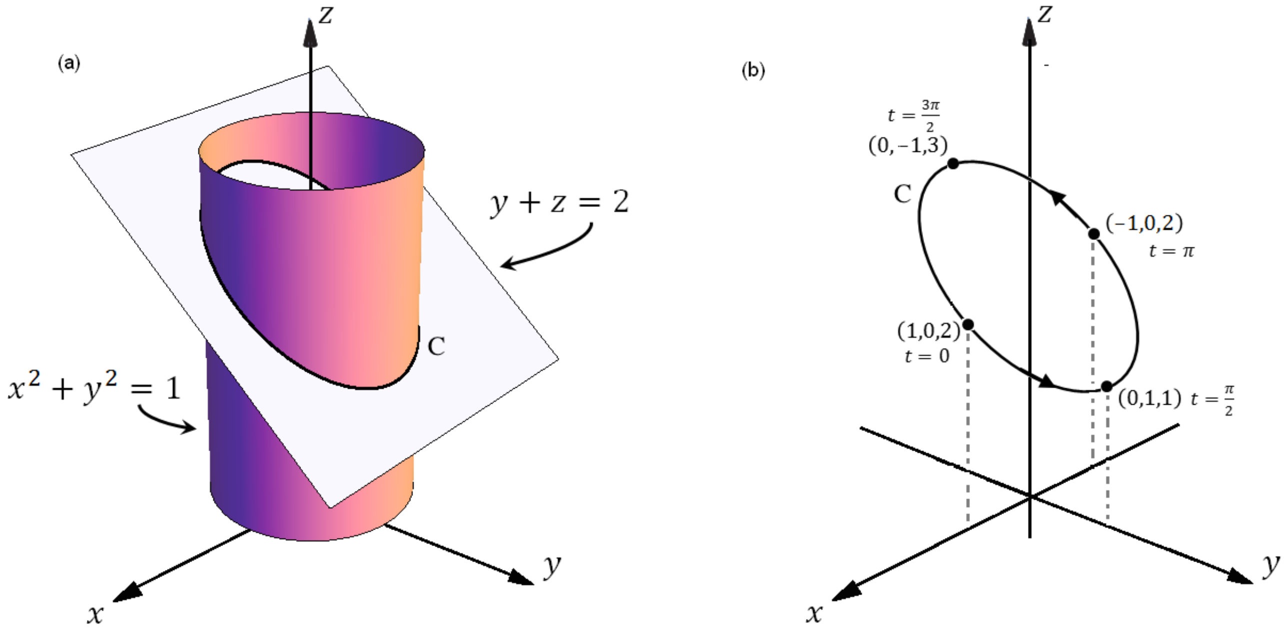

Figura 7: Ejemplo 6. Elipse como intersección entre un cilindro circular y un plano oblicuo.

ahora la ecuación del plano tenemos que $z = 2 - y$*, luego* $z(t) = 2 - \operatorname{sen} t$*. Así, una parametrización de la curva intersección es:*

$$C : \qquad \vec{r}(t) = \cos t \ \breve{\imath} + \operatorname{sen} t \ \breve{\jmath} + (2 - \operatorname{sen} t) \ \breve{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

¿Por qué razón hemos restringido el intervalo paramétrico al $[0, 2\pi]$*?*
Finalmente, el sentido en el cual se recorre la curva paramétrica C *a medida que aumenta el parámetro t, de acuerdo a la parametrización dada, es sentido antihorario visto desde el semieje* z *positivo.*

PARAMETRIZACIÓN TRIVIAL DE UNA CURVA EN EL PLANO

Dada una función escalar de una variable (como las de Análisis I) $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la gráfica de F es, como ya sabemos, el conjunto de puntos $\{(x, y) : x \in I, \ y = F(x)\}$, que ubicados en el plano xy producen una <u>curva</u>. Podemos usar la variable x como parámetro ("trivial"), es decir que para $t \in \mathbb{R}$ definimos $x(t) = t$, luego $y(t) = F(t)$. Y tenemos $\vec{r}(t) = (t, F(t))$ como una función vectorial que parametriza (trivialmente) la curva que es gráfica de la función F. Notar que esa función vectorial le asigna a la curva el sentido de recorrido de izquierda a derecha, pues es en el sentido creciente del parámetro.
Dado que el parámetro es x (la abscisa de los puntos que forman la curva), es común escribir:

$$\vec{r}(x) = (x, F(x)), \quad x \in I$$

Discuta la siguiente afirmación y dé un ejemplo: Tomando como parámetro $t = -x$ (esto es, definiendo que $x(t) = -t$), se obtiene una parametrización de la misma gráfica pero recorrida *en sentido inverso* (de derecha a izquierda); se debe tener en cuenta que si $x \in I = [a, b]$, entonces $t = -x \in [-b, -a]$.

Otra caso trivial es cuando los puntos de una curva satisfacen una ecuación de la forma $x = G(y)$ para y en cierto intervalo $J \subset \mathbb{R}$, luego podemos parametrizarla trivialmente tomando a y como el parámetro: $\vec{r}(y) = (G(y), y)$, con $y \in J$. ¿Cuál es el sentido de recorrido asignado por esta parametrización?

EJEMPLO 7: Parametrización trivial de la gráfica de una función.
Dar una función vectorial que describa la gráfica de: a) $F(x) = 1+x^2,\ x \in \mathbb{R}$; b) $G(y) = \cos^2 y,\ y \in \mathbb{R}$.

a) Para describir la curva $y = 1 + x^2$, gráfica de F, podemos usar la variable x como parámetro:

$$x(t) = t, \qquad y(t) = 1 + t^2.$$

Así la función vectorial $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + (1 + t^2)\ \breve{\jmath}$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función escalar $F(x) = 1 + x^2$, recorrida en el sentido de x creciente (hacia la derecha).

b) Para describir la curva $x = \cos^2 y$, gráfica de G, podemos usar la variable y como parámetro:

$$y(t) = t, \qquad x(t) = \cos^2 t.$$

Así la función vectorial $\vec{r}(t) = \cos^2 t\ \breve{\imath} + t\ \breve{\jmath}$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función escalar $G(y) = \cos^2 y$, recorrida en sentido de y creciente (hacia arriba).

Veamos una aplicación típica en Física 1:

EJEMPLO 8: Disparo de un proyectil ideal: tiro oblicuo.

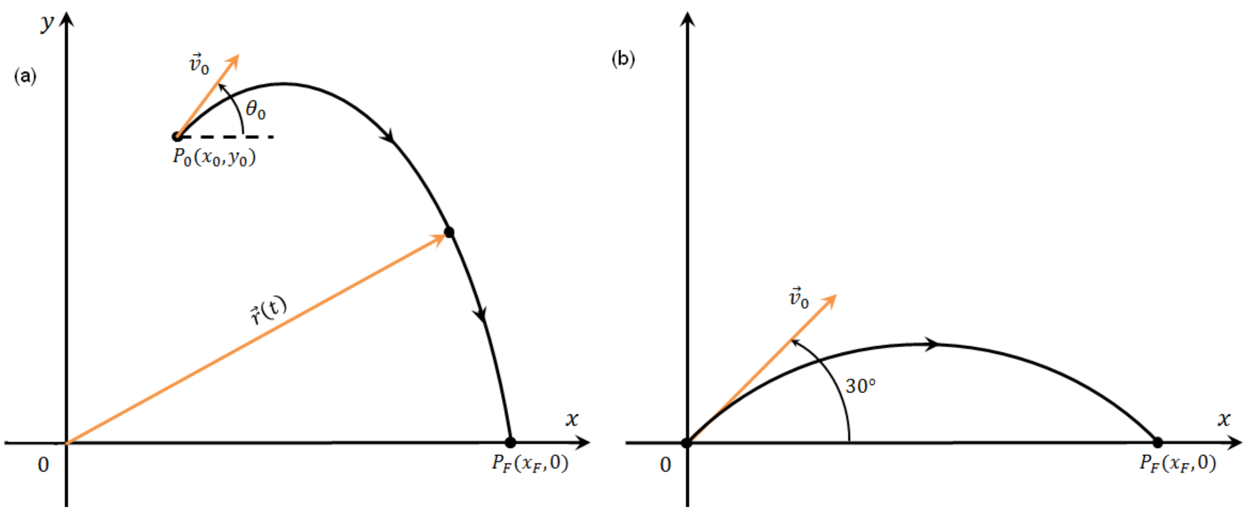

Figura 8: Ejemplo 8. Tiro oblicuo: (a) caso general, (b) proyectil lanzado desde O con velocidad inicial $\vec{v}_0$.

Se lanza un proyectil desde un punto $P_0(x_0, y_0)$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\breve{\imath} + v_{0y}\breve{\jmath}$ (en m/s), como se indica en la Figura 8. Se supone que la resistencia del aire es despreciable y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil durante su vuelo es la fuerza constante peso $-mg\ \breve{\jmath}$, donde $g \cong 9{,}8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad y m la masa del proyectil.

En estas condiciones, el movimiento del proyectil a partir del instante de tiempo inicial t_0, puede modelarse mediante la siguiente función vectorial para la posición:

$$\vec{r}(t) = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)]\ \breve{\imath} + \left[y_0 + v_{0y}\,(t - t_0) - \frac{1}{2}g\,(t - t_0)^2\right]\ \breve{\jmath}, \qquad t_0 \leq t \leq t_F$$

donde t_F es el instante final, en el cual el proyectil choca contra el piso.

a) ¿Cuáles son las funciones componentes del vector posición? ¿Cuál es el vector $\vec{r}(t_0)$?

b) Si el proyectil es lanzado desde el origen en el instante $t_0 = 0$ s, con una rapidez inicial de 10 m/s formando un ángulo de 30º con la horizontal [ver Figura 8(b)], ¿cómo quedan las funciones componentes en este caso particular? ¿Cuánto valen el instante final t_F y la posición final $\vec{r}(t_F)$?

a) Las funciones componentes de $\vec{r}(t)$ *son:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y(t) & = & y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{array} \right.$$

En $t = t_0$ *se tiene, por supuesto,* $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0) = \overrightarrow{OP_0}$.

b) Si el proyectil es lanzado desde el origen, entonces $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. *Las componentes de la velocidad inicial son* $v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos\theta_0$, $v_{0y} = |\vec{v}_0| \operatorname{sen}\theta_0$. *Como la rapidez inicial es* $|\vec{v}_0| = 10$ *m/s y el ángulo inicial* θ_0 *con la horizontal es* $\frac{\pi}{6}$, *entonces se tiene* $v_{0x} = 5\sqrt{3}$ *m/s,* $v_{0y} = 5$ *m/s.*
Reemplazando en la expresión de las componentes generales, se obtiene para este caso:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 5\sqrt{3}\ t \\ y(t) & = & 5\ t - 4,9\ t^2 \end{array} \right.$$

Luego $\vec{r}(t) = (5\sqrt{3}\,t, 5\,t - 4,9\,t^2)$ *es una función vectorial que parametriza el recorrido del proyectil.*

En el instante t_F *en que el proyectil choca contra el piso, se verifica* $y(t_F) = 0$. *Despejando* t_F *a partir de esta condición, y teniendo en cuenta que* $t_F > 0$, *obtenemos* $t_F = \frac{10}{9{,}8}$ $s \simeq 1,02$ *s. Se tiene* $x(t_F) = x\left(\frac{10}{9{,}8}\right) = \frac{50\sqrt{3}}{9{,}8}$ *m. Luego* $\vec{r}(t_F) = (\frac{50\sqrt{3}}{9{,}8}, 0)$ *y el punto final de la trayectoria es* $P_F(\frac{50\sqrt{3}}{9{,}8},\ 0)$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1:

1. Coloque un lápiz (o lapicera) y una pulsera (o anillo) sobre su mesada. ¿Podría dar funciones vectoriales que los representen en el sistema de coordenadas del aula? Analice intervalo paramétrico y sentido.

2. En grupo, consigan un reloj (de pulsera o de pared) con agujas. El conjunto de puntos determinado por la punta de una aguja da origen a una circunferencia (imaginaria). ¿Cómo la describiría usando la noción de función vectorial? Discutan cuál sería un parámetro adecuado y su dominio (pensando que el reloj anda durante las 3 horas de clase); cuál es el vector imagen; el sentido de recorrido de la circunferencia; si la curva tiene puntos inicial y final, si es cerrada o no, si da una o varias vueltas. Escriban una función vectorial para cada aguja, si el parámetro es el tiempo medido en minutos.

3. Revea la Sec. 5 de Guía 1, y escriba ecuaciones para esas rectas por medio de funciones vectoriales.

4. Trace y describa con sus palabras las siguientes curvas paramétricas en el plano xy, indicando el sentido del recorrido (a, b, x_C, y_C constantes). En cada caso, escriba la función vectorial y también la ecuación cartesiana correspondiente.

   a) $\left\{ \begin{array}{rcl} f(t) & = & a \operatorname{sen} t \\ g(t) & = & a \cos t \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

   b) $\left\{ \begin{array}{rcl} f(t) & = & x_C + a \cos t \\ g(t) & = & y_C + a \operatorname{sen} t \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   c) $\left\{ \begin{array}{rcl} f(t) & = & a \cos t \\ g(t) & = & b \operatorname{sen} t \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   d) $\left\{ \begin{array}{rcl} f(t) & = & x_C + a \cos t \\ g(t) & = & y_C + b \operatorname{sen} t \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

5. a) Halle una función vectorial que describa el segmento en el plano xy que va de $P(2,5)$ a $Q(6,1)$.

   b) Trace la curva definida por la función vectorial: $\vec{r}(t) = (1+t, 3t, -t)$, con $-1 \leq t \leq 2$.

6. a) Trace la curva del plano xy dada por la siguiente función vectorial e indique el sentido del recorrido: $\vec{r}(t) = (5\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

   b) Sea $\vec{r}(t) = 5\cos(3t)\ \breve{\imath} + 2\,\mathrm{sen}(3t)\ \breve{\jmath}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Esta función vectorial, ¿describe la misma curva que en a)? De no ser así, indique un intervalo de t para el cual se obtenga la misma curva.

7. Dadas las siguientes funciones vectoriales, grafique las curvas que representan:

   a) $\vec{r}(t) = (t, \mathrm{sen}\, t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

   b) $\vec{r}(t) = (t, \cos(2t), \mathrm{sen}(2t)) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

8. Analice las diferencias que hay entre las curvas descriptas por las 3 maneras siguientes:

   a) $\begin{cases} x^2+y^2 &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$

   b) $\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \mathrm{sen}\, t\ \breve{\jmath} + (3-\cos t)\ \breve{k} \qquad 0 \leq t \leq \pi$

   c) $\begin{cases} f(t) &= \cos t \\ g(t) &= \mathrm{sen}\, t \\ h(t) &= 3-\cos t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 3\pi$

9. Considere el movimiento de dos partículas en el espacio, tales que al tiempo t una de las partículas está en $P_1(-1+t, 4-t, -1+2t)$ y la otra en $P_2(-7+2t, -6+2t, -1+t)$. Discuta:

   a) ¿Se cruzan las trayectorias de estas partículas? Si es así, indique en qué punto lo hacen.

   b) ¿Chocan las partículas? Si es así, indique dónde (en qué punto del espacio) y cuándo (para qué valor de t) lo hacen.

10. Considere una situación como la del ejercicio anterior, con la diferencia que el vector posición en función del tiempo está dado por $\vec{r}_1(t) = (t^2, 3t, -3t+2t^2)$ para una partícula y por $\vec{r}_2(t) = (-1+2t, 1+2t, t^3-2)$ para la otra. ¿Chocan? Si es así, indique dónde y cuándo.

11. Muestre que la función vectorial $\vec{r}(t) = (\mathrm{sen}\, t, \cos t, \mathrm{sen}^2 t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, representa la curva dada por la intersección entre la superficie del cilindro parabólico $z = x^2$ y la superficie del cilindro circular $x^2+y^2 = 1$. Realice un esbozo de la curva que representa esa función vectorial, indicando el sentido de recorrido. ¿A qué se parece? Observando que la segunda componente al cuadrado más la tercera componente suman 1, exprese la curva como intersección de otro par de superficies.

12. La curva con ecuaciones paramétricas $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\,\mathrm{sen}\, t$, $z(t) = t$, para $0 \leq t \leq 4\pi$, ¿se encuentra en la superficie de un cono? Si es así, realice un bosquejo de la curva.

13. ¿En qué puntos del espacio la curva definida por $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + (2t-t^2)\ \breve{k}$ corta al paraboloide $z = x^2+y^2$? Esboce las gráficas de la curva y del paraboloide, y señale los puntos de intersección.

14. En cada uno de los siguientes casos, halle una función vectorial que describa la curva determinada por la intersección entre las superficies dadas; señale el sentido de recorrido asignado por su parametrización; grafique.

    a) El plano $z = 1+y$ y la mitad superior del cono $z = +\sqrt{x^2+y^2}$.

    b) El cilindro parabólico $y = x^2$ y la mitad superior del elipsoide $x^2+4y^2+4z^2 = 16$.

    c) El cilindro circular $x^2+y^2 = 4$ y la superficie $z = xy$.

2. Derivación e integración de funciones vectoriales

Para funciones vectoriales son válidas todas las operaciones definidas para vectores: suma, multiplicación por un escalar, producto escalar y producto vectorial.
Veremos ahora de qué manera las ideas y conceptos desarrollados en Análisis I, como límite, continuidad, derivada e integral de una función con valores reales, pueden extenderse a una clase más amplia de funciones: las funciones con valores vectoriales.

2.1. Límite y continuidad

El *límite de una función vectorial* se define mediante los límites de sus funciones componentes, suponiendo que éstos existan.

DEFINICIÓN: *Si* $\vec{r}(t) = f(t)\ \breve{\imath} + g(t)\ \breve{\jmath} + h(t)\ \breve{k}$, *el* ***límite de la función vectorial*** $\vec{r}(t)$ ***cuando*** t ***tiende a*** t_0 *es*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\ \breve{\imath} + \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\ \breve{\jmath} + \left(\lim_{t\to t_0} h(t)\right)\ \breve{k}$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes.

Los límites de funciones vectoriales siguen las mismas reglas que los límites de funciones escalares de una variable real.

EJEMPLO 9: *Si* $\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k}$, *con* $t \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{t\to\pi/4} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to\pi/4} \cos t\right)\ \breve{\imath} + \left(\lim_{t\to\pi/4} \operatorname{sen} t\right)\ \breve{\jmath} + \left(\lim_{t\to\pi/4} t\right)\ \breve{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \breve{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \breve{\jmath} + \frac{\pi}{4}\ \breve{k}.$$

La *continuidad de una función vectorial* se define de manera similar a la continuidad de una función escalar.

DEFINICIÓN: *Una* ***función vectorial*** $\vec{r}(t)$ ***es continua en*** $t = t_0$ *si:*

1. *existe* $\vec{r}(t_0)$
2. *existe* $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$
3. *se verifica que* $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Propiedad:
Se prueba fácilmente (hacerlo) que $\vec{r}(t)$ es continua en t_0 si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en t_0.

EJEMPLOS: En el Ejemplo 9, dado que existe $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ y coincide con $\lim_{t\to\pi/4} \vec{r}(t)$, la función vectorial resulta continua en $t = \frac{\pi}{4}$; además, sabiendo que las funciones trigonométricas seno y coseno, así como las funciones polinomiales, son continuas en toda la recta real, podemos asegurar que la función $\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Una función vectorial continua define una curva paramétrica continua en el espacio (es lo que nos permitió en el Ejemplo 1 y otros, "unir los puntos para producir una curva continua").

2.2. Derivación

DEFINICIÓN: *La* ***derivada*** $\vec{r}\,'$ *de la función vectorial* $\vec{r}(t)$ *respecto del parámetro en* $t = t_0$ *está dada por*

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

si este límite existe.

Si existe $\vec{r}\,'(t_0)$, se dice que la función vectorial $\vec{r}(t)$ es *derivable en* t_0.
Si las funciones componentes de $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$ son derivables para todo $t_0 \in (a, b)$, entonces $\vec{r}(t)$ es derivable en ese intervalo paramétrico, y se satisface que:

$$\vec{r}\,'(t) = f'(t)\,\breve{\imath} + g'(t)\,\breve{\jmath} + h'(t)\,\breve{k}, \qquad t \in (a, b)$$

EJEMPLOS: Para la función del Ejemplo 9, la derivada en $\frac{\pi}{4}$ es $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, y en cualquier $t \in \mathbb{R}$ es $\vec{r}\,'(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$. La función vectorial $\vec{R}(t) = (t, |t|),\ t \in \mathbb{R}$ (¿cuya gráfica es …?), <u>no</u> es derivable en $t = 0$; justifique.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Como la derivada de una función vectorial puede calcularse derivando sus funciones componentes, las reglas de derivación son similares a las de funciones de valores reales. Supongamos que $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son funciones vectoriales derivables, y a es un escalar, entonces:

- $[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]\,' = \vec{r}_1\,'(t) + \vec{r}_2\,'(t)$
- $[a\,\vec{r}_1(t)]\,' = a\ \vec{r}_1\,'(t)$
- $[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)]\,' = \vec{r}_1\,'(t) \cdot \vec{r}_2(t)\ +\ \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2\,'(t)$
- $[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)]\,' = \vec{r}_1\,'(t) \times \vec{r}_2(t)\ +\ \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2\,'(t)$

FUNCIONES COMPUESTAS (REPARAMETRIZACIÓN) Y REGLA DE LA CADENA

Sea $\vec{r}(u)$ una función vectorial y sea $u(t)$ una función de valores reales, ambas derivables. Luego se puede evaluar la composición de estas funciones: $\vec{r}\,(u(t)) = \vec{R}(t)$ que depende de t. La derivada de la función vectorial compuesta (respecto de su variable, t) es

$$\frac{d}{dt}\vec{R}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}\,(u(t)) = \frac{d}{du}\vec{r}(u)\ \frac{d}{dt}u(t)$$

o sea: $[\vec{r}(u(t))]\,' = \vec{r}\,'(u)\ u'(t)$ (Regla de la cadena).

La composición de una función vectorial con una función escalar, como veremos, es útil para *reparametrizar* una curva, esto es, describirla en términos de otro parámetro (que tenga, por ejemplo, cierto dominio o comportamiento deseado, inclusive para invertir el sentido de la curva).

EJEMPLO: En el Ejemplo 2.b), compruebe que la función $\vec{r}_2(t)$ puede pensarse como la composición de la función vectorial $\vec{r}(u) = (-4 \operatorname{sen} u, 4 \cos u),\ u \in [0, 4\pi]$, con la función escalar $u(t) = 2t, t \in [0, 2\pi]$. La derivada de la función vectorial compuesta resulta $[\vec{r}_2(u(t))]\,' = (-4 \cos u, -4 \operatorname{sen} u)\ 2 = (-8 \cos(2t), -8 \operatorname{sen}(2t))$, donde al final dimos la expresión en términos de la variable de la función compuesta, t.

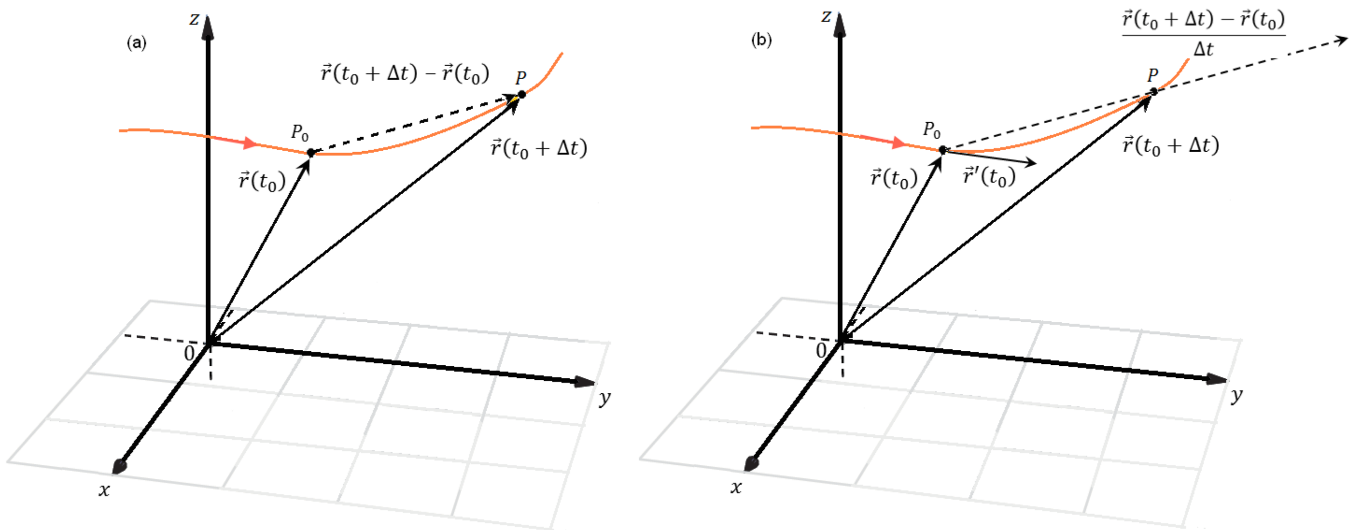

Figura 9: Derivada de una función vectorial

VECTOR TANGENTE

En la Figura 9 se ilustra el significado geométrico de la definición dada para la derivada de una función vectorial. Consideremos una función vectorial $\vec{r}(t)$ cuya representación gráfica es la curva paramétrica de la figura. Los vectores $\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}(t_0+\Delta t)$ corresponden a los vectores de posición de los puntos P_0 y P, respectivamente, de la curva. Luego, el vector diferencia $\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ es igual al vector $\overrightarrow{P_0P}$ que va de P_0 a P [Figura 9(a)]. Para $\Delta t>0$ (es el caso mostrado en las figuras), $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ apunta en el mismo sentido que $\overrightarrow{P_0P}$; mientras que para $\Delta t<0$, $\overrightarrow{P_0P}$ apunta "hacia atrás", contra el sentido del movimiento (ya que entonces P estaría antes que P_0), sin embargo el cociente $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ apuntará de nuevo "hacia adelante", es decir en el sentido de la curva.
Dibuje en la figura lo que ocurre si se toma un Δt más chico, y observe cómo va cambiando la dirección entre el punto P_0 y cada nuevo punto P, hasta llegar a ser tangencial. Efectivamente, cuando $\Delta t\to 0$, el vector $[\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)]/\Delta t$ tiende a un vector que es tangente a la curva en P_0. Si $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$ entonces se lo define como un *vector tangente* a la curva en P_0. La *recta tangente* L_T a la curva en P_0 está definida como la recta que pasa por P_0 y tiene como vector director a $\vec{r}\,'(t_0)$.

DEFINICIÓN: *Sea P_0 un punto perteneciente a la curva $C:\ \vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))\,,t\in I\subset\mathbb{R}$; por lo tanto P_0 es el punto final de $\vec{r}(t_0)$, para algún $t_0\in I$. Entonces, si $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$, se dice que $\vec{r}\,'(t_0)$ es un **vector tangente** a la curva C en $P_0\,(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$.*

DEFINICIÓN: *La **recta tangente** a la curva determinada por $\vec{r}(t)$, en el punto P_0, es la recta paralela a $\vec{r}\,'(t_0)$ que pasa por P_0.*

Notemos que para indicar la orientación de la recta tangente, se puede dar cualquier vector proporcional a $\vec{r}\,'(t_0)$. En particular, es útil muchas veces emplear el VECTOR TANGENTE UNITARIO, que se obtiene por normalización:

$$\breve{T}(t_0)=\frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|}$$

si $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$. Notar que $\breve{T}$ apunta en el mismo sentido que la curva.

EJEMPLO 10: Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = (2-t)\ \breve{\imath} + \sqrt{t}\ \breve{\jmath}$, con $t \geq 0$, determinar $\vec{r}\ '(t)$ e indicar su dominio. Hallar vector posición y vector tangente para $t_0 = 4$. Graficar la curva.

Derivando la función vectorial $\vec{r}(t)$ por componentes (usando las reglas de derivación para funciones escalares aprendidas en Análisis I), se obtiene

$$\vec{r}\ '(t) = -\ \breve{\imath} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \breve{\jmath}, \qquad t > 0$$

donde notamos que $\vec{r}(t)$ no es derivable en $t = 0$. Para $t_0 = 4$ se tiene $\vec{r}(4) = -2\breve{\imath} + 2\breve{\jmath}$, y se puede calcular $\vec{r}\,'(4)$ "por definición" como $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(4+\Delta t) - \vec{r}(4)}{\Delta t}$, o "por regla" evaluando $\vec{r}\,'(t)$ en $t = 4$ (¿podría hacer lo mismo para $t = 0$?, ¿por qué?); resulta $\vec{r}\ '(4) = -\ \breve{\imath} + \frac{1}{4}\ \breve{\jmath}$.

Para graficar la curva conviene obtener una expresión usando coordenadas cartesianas. Al eliminar el parámetro entre las ecuaciones $x = 2-t$ e $y = \sqrt{t}$, se obtiene $x = 2-y^2$, para $y \geq 0$ (observar que hemos tenido en cuenta que $y = +\sqrt{t}$; luego al despejar t como y^2, se debe recordar que y no era negativa). Se trata de "la mitad" de una parábola de eje x, con vértice en $V(2,0)$ y abierta hacia la izquierda; como curva paramétrica, tenemos que decir también el sentido: la rama de la parábola es recorrida de derecha a izquierda (o, también, de abajo hacia arriba), pues cuando el parámetro t aumenta, la ordenada de un punto de la curva crece mientras que la abscisa disminuye.

La curva pasa, por ejemplo, por $P_0(-2,2)$ (cuando $t = 4$) y en dicho punto el vector $-\breve{\imath}+\frac{1}{4}\breve{\jmath}$ es tangente a la curva. Muéstrelo en un gráfico.

EJEMPLO 11: Escribir una ecuación para la recta tangente a la hélice circular $C:\ \vec{r}(t) = 4\cos t\ \breve{\imath} + 4\,\mathrm{sen}\, t\ \breve{\jmath} + 3t\ \breve{k}$ en el punto P_0 de la hélice que corresponde a $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Si conseguimos un punto por donde pasa la recta y un vector director, podemos escribir una ecuación de la recta. El punto puede ser P_0; buscamos entonces las coordenadas de P_0, calculando la función vectorial en $t_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4}\ \breve{\imath} + 4\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\ \breve{\jmath} + 3\frac{\pi}{4}\ \breve{k} = 2\sqrt{2}\ \breve{\imath} + 2\sqrt{2}\ \breve{\jmath} + \frac{3}{4}\pi\ \breve{k}$$

de donde se obtiene el punto $P_0(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi)$.

Ahora bien, la dirección tangente a la hélice para un t genérico está dada por el vector

$$\vec{r}\ '(t) = -4\,\mathrm{sen}\, t\ \breve{\imath} + 4\cos t\ \breve{\jmath} + 3\ \breve{k}$$

¿Cuál es la dirección tangente a la hélice en el punto P_0? Es la dirección del vector:

$$\vec{r}\ '\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\ \breve{\imath} + 4\cos\frac{\pi}{4}\ \breve{\jmath} + 3\ \breve{k} = -2\sqrt{2}\ \breve{\imath} + 2\sqrt{2}\ \breve{\jmath} + 3\ \breve{k}$$

Ya tenemos el punto de tangencia P_0 y un vector tangente en ese punto, $\vec{r}\ '(t_0)$, que podemos usar como vector director; entonces las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice en P_0 son:

$$L_T: \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\ u \\ y & = & 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\ u \\ z & = & \frac{3}{4}\pi + 3\ u \end{array} \right. \qquad u \in \mathbb{R}$$

(donde denominamos u al parámetro en las ecuaciones de la recta, para diferenciarlo del parámetro de la curva).

EJEMPLO 12: Determinar un vector tangente en cada punto de la curva que se obtiene como intersección entre el plano $\Pi: \ z - x = 0$ y la superficie $S: \ y - 3x^3 + z^2 = 0$. Verificar que, en cada punto de la curva, dicho vector es perpendicular al vector normal al plano Π. ¿Por qué?

Llamemos C a la curva determinada por la intersección entre ambas superficies:

$$C = \Pi \bigcap S : \begin{cases} z &= x \\ y &= 3x^3 - z^2 \end{cases}$$

Tomando a la variable x como parámetro, se tiene "trivialmente" que

$$\vec{r}(t) = \big(t, \ 3t^3 - t^2, \ t\big)$$

con t variando en $\mathbb{R}$, es una función vectorial que parametriza a la curva C. Un vector tangente a C en un punto cualquiera $P_0 \in C$, correspondiente a un dado valor t_0 del parámetro, es

$$\vec{r}\,'(t_0) = \big(1, \ 9t_0^2 - 2t_0, \ 1\big)$$

Un vector normal al plano $-x + z = 0$ es $\vec{n} = (-1, \ 0, \ 1)$. Haciendo el producto escalar $\vec{r}\,'(t_0) \cdot \vec{n} = \big(1, \ 9t_0^2 - 2t_0, \ 1\big) \cdot (-1, \ 0, \ 1) = -1 + 0 + 1 = 0$, vemos que $\vec{r}\,'(t_0)$ es perpendicular al vector normal al plano dado, para cualquier t_0, o sea para cualquier punto P_0 de la curva C. Para explicarlo, notemos que dado que C es intersección de Π y S, la curva pertenece tanto al plano como a la superficie; en particular, $C \subset \Pi$ (lo que significa que la curva C es plana, tal como ocurría en el Ejemplo 6). En consecuencia, un vector tangente a C "debe estar en el plano"; más estrictamente, $\vec{r}'(t_0)$ es paralelo al plano, luego es perpendicular a un vector normal al plano.

CURVA SUAVE (A TROZOS)

Pensemos en una partícula que se mueve en el espacio a lo largo de una curva imaginaria. La partícula no puede desaparecer y volver a aparecer espontáneamente en otro punto del espacio; ni tampoco cambiar repentinamente la velocidad de su movimiento: una partícula, en general, se mueve siguiendo una curva (imaginaria) que es *suave*.

En general consideraremos funciones vectoriales $\vec{r}(t)$, con $t \in I$, de clase $\mathcal{C}^1$, que son las funciones derivables con continuidad (o sea, funciones con derivada primera continua) en el intervalo I; pediremos además que se cumpla $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$. Estas funciones se llaman *funciones vectoriales suaves.*

Si una curva puede ser parametrizada por una función vectorial suave, se dice que es una *curva suave.*
Una curva suave admite en cada punto un vector tangente que varía con continuidad a lo largo de la misma.

EJEMPLOS: la hélice del Ejemplo 11 y la curva del Ejemplo 12 son curvas suaves en todo su recorrido.

Hacemos notar que hay curvas que aunque estén definidas por funciones vectoriales de clase $\mathcal{C}^1$, presentan sin embargo esquinas puntiagudas o cambios bruscos de dirección. La condición adicional $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$, garantiza la existencia de recta tangente en cada punto de la curva.

Veamos el caso de una curva con picos:

EJEMPLO 13: La Figura 10 muestra una curva conocida como hipocicloide de cuatro picos, definida por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿La función vectorial $\vec{r}(t)$ es de clase $\mathcal{C}^1$? ¿Qué pasa en los cuatro picos del hipocicloide?

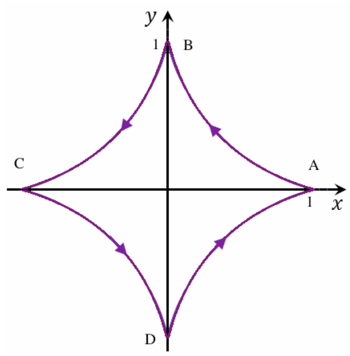

Figura 10: Ejemplo 13. Hipocicloide de cuatro picos

Derivando la función vectorial, vemos que $\vec{r}\,'(t) = (-3\ \cos^2 t\ \operatorname{sen} t,\ 3\ \operatorname{sen}^2 t\ \cos t)$ *es una función continua, por lo tanto* $\vec{r}(t)$ *es de clase* $\mathcal{C}^1$*. A partir del gráfico, notamos que los picos se encuentran en los puntos* $A(1,0)$*,* $B(0,1)$*,* $C(-1,0)$ *y* $D(0,-1)$ *de la curva, que corresponden a los valores* $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi,$ *y* $\frac{3\pi}{2}$ *del parámetro, respectivamente. Si calculamos* $\vec{r}\,'(t)$ *para el valor de* t *correspondiente a cada uno de los puntos-pico, tenemos:* $\vec{r}\,'(0) = \vec{r}\,'(\frac{\pi}{2}) = \vec{r}\,'(\pi) = \vec{r}\,'(\frac{3\pi}{2}) = \vec{0}$*. La curva cambia bruscamente su dirección en cada uno de los puntos-pico donde, como vemos, no hay recta tangente ya que el vector nulo no tiene dirección definida; tampoco se puede obtener el vector tangente unitario en esos puntos.*

En algunas situaciones encontraremos curvas que se forman con la unión sucesiva de varias curvas suaves; la curva completa se llama precisamente *suave por tramos* o *suave a trozos*. El hipocicloide del ejemplo anterior es una curva suave a trozos. Otro caso es la curva frontera de un triángulo, que está formada por tres tramos (los lados del triángulo) suaves; para definir la curva completa hará falta una función vectorial diferente para cada tramo. ¿Cómo podría parametrizar la frontera del triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$, recorridos en ese orden? (Observe que el sentido de recorrido de la curva es tal que la región triangular que encierra, queda siempre a la izquierda de la curva frontera; hablaremos un poco más adelante de la orientación de una curva cerrada con respecto a la región encerrada por ella).

Hay curvas como el contorno del símbolo "∞" o el número "8", tales que se cruzan a sí mismas en un punto dado. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 14: Considerar la curva C asociada a la función vectorial $\vec{r}(t) = t^2\ \breve{\imath} + (t^3 - 3t)\ \breve{\jmath}$, con $-2 \leq t \leq 2$. Mostrar que C tiene dos rectas tangentes en el punto $P(3,0)$ y encontrar sus ecuaciones.

Las funciones componentes son $x(t) = t^2$*,* $y(t) = t^3 - 3t$ *. Buscamos el o los valores de* t *que dan el punto* $P(3,0)$*; luego hay que resolver el sistema de ecuaciones:* $3 = t^2$*,* $0 = t^3 - 3t$*, de donde surgen dos soluciones:* $t_1 = -\sqrt{3}$ *y* $t_2 = \sqrt{3}$ *(notar que* $t_3 = 0$ *es solución de la segunda ecuación pero no de la primera). Esto indica que* C *se cruza a sí misma en* $P(3,0)$*, siendo* $\vec{r}(-\sqrt{3}) = \vec{r}(\sqrt{3})$ [1].
Calculamos el vector $\vec{r}\,'(t) = (2t,\ 3t^2 - 3)$ *para* $t = \pm\sqrt{3}$*, obteniendo dos vectores diferentes:* $\vec{r}\,'(-\sqrt{3}) = (-2\sqrt{3},\ 6)$ *y* $\vec{r}\,'(\sqrt{3}) = (2\sqrt{3},\ 6)$*, lo que indica que en* $P(3,0)$ *existen dos rectas tangentes, dependiendo del "instante" (si* t *fuera el tiempo) en que se pasa por ahí.*

Para el valor $t_1 = -\sqrt{3}$ *del parámetro, las ecuaciones paramétricas de una de las rectas tangentes a*

[1] En coordenadas cartesianas, se tiene $C:\ y = \pm\sqrt{x}\,(x^2 - 3)$, que puede verse como la unión de dos curvas, una correspondiente a la gráfica de la función $F(x) = -\sqrt{x}\,(x^2 - 3)$ y la otra a $G(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 3)$. Intente graficarlas usando computadora (tiene aproximadamente la forma de una letra α, siendo P el punto de cruce).

C en $P(3,0)$ se pueden obtener como

$$L_{T_1}: \begin{cases} x &= 3-2\sqrt{3}\ u \\ y &= 0+6\ u \end{cases}$$

cuya forma cartesiana es $y=-\sqrt{3}\ (x-3)$.
Procediendo de manera similar, para $t_2=\sqrt{3}$ *se obtiene una ecuación de la otra recta tangente a C en $P(3,0)$ como*

$$L_{T_2}: \begin{cases} x &= 3+2\sqrt{3}\ v \\ y &= 0+6\ v \end{cases}$$

que en cartesianas se expresa $y=\sqrt{3}\ (x-3)$.
Entonces, ambas rectas pasan por P pero tienen distinta pendiente.

2.3. Integración

La integral definida de una función vectorial continua $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ en un intervalo $[a,b]$ del parámetro, se define de forma similar a la integral de una función con valores reales, pero teniendo en cuenta que ahora el resultado es un vector. La integral de $\vec{r}(t)$ entre $t=a$ y $t=b$ se puede expresar en términos de las integrales de sus funciones componentes.

DEFINICIÓN: *La* ***integral definida*** *de una función vectorial* $\vec{r}(t)=f(t)\ \breve{\imath}+g(t)\ \breve{\jmath}+h(t)\ \breve{k}$ *entre* $t=a$ *y* $t=b$ *está dada por:*

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b f(t)dt\right)\ \breve{\imath}+\left(\int_a^b g(t)dt\right)\ \breve{\jmath}+\left(\int_a^b h(t)dt\right)\ \breve{k}$$

si cada una de las integrales existe.

El Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow se generalizan para funciones vectoriales continuas, de la siguiente manera:

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt=\left.\vec{R}(t)\right|_a^b=\vec{R}(b)-\vec{R}(a)$$

donde $\vec{R}$ es una primitiva de $\vec{r}$, o sea $\vec{R}\,'(t)=\vec{r}(t)$.

EJEMPLO 15: Si $\vec{r}(t)=2\cos t\ \breve{\imath}+\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath}+2t\ \breve{k}$, evaluar $\int_0^{\pi/2}\vec{r}(t)\,dt$.

Busquemos primero la familia de primitivas (o integral indefinida) de $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned}\int \vec{r}(t)\ dt &= \left(\int 2\cos t\ dt\right)\ \breve{\imath}+\left(\int \operatorname{sen} t\ dt\right)\ \breve{\jmath}+\left(\int 2t\ dt\right)\ \breve{k} \\ &= (2\operatorname{sen} t+C_1)\ \breve{\imath}+(-\cos t+C_2)\ \breve{\jmath}+\left(t^2+C_3\right)\ \breve{k} \\ &= 2\operatorname{sen} t\ \breve{\imath}-\cos t\ \breve{\jmath}+t^2\ \breve{k}+\vec{C}=\vec{R}(t)\end{aligned}$$

donde $\vec{C}=C_1\ \breve{\imath}+C_2\ \breve{\jmath}+C_3\ \breve{k}$ *es una constante de integración vectorial. Aplicamos la regla de Barrow:*

$$\int_0^{\pi/2}\vec{r}(t)\ dt=\left.\left(2\operatorname{sen} t\ \breve{\imath}-\cos t\ \breve{\jmath}+t^2\ \breve{k}+\vec{C}\right)\right|_0^{\pi/2}=\left(2\ \breve{\imath}+\frac{\pi^2}{4}\ \breve{k}+\vec{C}\right)-\left(-\ \breve{\jmath}+\vec{C}\right)=2\ \breve{\imath}+\ \breve{\jmath}+\frac{\pi^2}{4}\ \breve{k}$$

Luego, la integral definida de $\vec{r}(t)$ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ da como resultado el vector $\vec{v}=(2,1,\frac{\pi^2}{4})$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2:

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

   a) $\vec{r}(t) = \breve{\imath} + \ \breve{\jmath} + e^{4t}\ \breve{k}$

   b) $\vec{r}(t) = t\cos(3t)\ \breve{\imath} + \operatorname{sen}^3 t\ \breve{\jmath} + \cos^3 t\ \breve{k}$

2. En los siguientes casos grafique la curva plana generada por $\vec{r}(t)$, prestando atención al dominio natural de cada función vectorial. Halle $\vec{r}\,'(t)$. Además, para el valor dado de t_0, dibuje el vector $\vec{r}(t_0)$ en posición canónica y el vector tangente $\vec{r}\,'(t_0)$ donde termina $\vec{r}(t_0)$.

   a) $\vec{r}(t) = (1+t)\ \breve{\imath} + \sqrt{t}\ \breve{\jmath}, \qquad t_0 = 1$

   b) $\vec{r}(t) = e^{t}\ \breve{\imath} + e^{3t}\ \breve{\jmath}, \qquad t_0 = 0$

3. Halle el vector tangente unitario $\breve{T}$ a la curva dada por $\vec{r}(t)$ en el punto correspondiente a t_0:

   a) $\vec{r}(t) = 2\cos t\ \breve{\imath} + 2\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + \operatorname{tg} t\ \breve{k}, \qquad t_0 = \frac{\pi}{4}$

   b) $\vec{r}(t) = e^{2t}\ \breve{\imath} + e^{-2t}\ \breve{\jmath} + t\,e^{2t}\ \breve{k}, \qquad t_0 = \frac{1}{2}$

4. En cada caso, determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva dada C en el punto especificado P (asegúrese previamente de que el punto pertenezca a la curva):

   a) $C:\ \vec{r}(t) = (1+2\sqrt{t}, t^3 - t, t^3 + t), \qquad P(3,0,2)$

   b) $C:\ \vec{r}(t) = e^{-t}\cos t\ \breve{\imath} + e^{-t}\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + e^{-t}\ \breve{k}, \qquad P(1,0,1)$

5. Sea $C:\ \vec{r}(t) = \operatorname{sen}(\pi t)\ \breve{\imath} + 2\operatorname{sen}(\pi t)\ \breve{\jmath} + \cos(\pi t)\ \breve{k}, t \in \mathbb{R}$, una curva paramétrica. Para los puntos de la curva correspondientes a $t = 0$ y a $t = \frac{1}{2}$, determine las rectas tangentes a C y encuentre el punto de intersección entre dichas rectas (si existe). Grafique la curva y ambas rectas, mostrando dónde son tangentes a C y dónde se intersecan.

6. Se desea hallar la recta tangente a la curva dada por $\vec{r}(t) = \left(t^3 - 4t\right)\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath}$ en el punto $P(0,4)$. ¿Qué dificultad encuentra? Realice un bosquejo de la curva y explique qué ocurre en P.

7. Muestre que la curva definida por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t\ \cos t, 3)$ tiene dos rectas tangentes en el punto $(0,0,3)$.

8. ¿En qué punto (ó puntos) se intersecan las curvas $C_1:\ \vec{r}_1(t) = (t, 1-t, 3+t^2)$ y $C_2:\ \vec{r}_2(u) = (3-u, u-2, u^2)$? Halle el ángulo de intersección entre las curvas en el punto donde se cortan.

9. Evalúe las siguientes integrales:

   a) $\int \left(\frac{4}{1+t^2}\ \breve{\jmath} + \frac{2t}{1+t^2}\ \breve{k}\right) dt$

   b) $\int_0^{\pi/2} \left(3\operatorname{sen}^2 t\cos t\ \breve{\imath} + 3\operatorname{sen} t\cos^2 t\ \breve{\jmath} + 2\operatorname{sen} t\cos t\ \breve{k}\right) dt$

10. Encuentre $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}\,'(t) = t\ \breve{\imath} + e^{t}\ \breve{\jmath} + te^{t}\ \breve{k}$, y se conoce $\vec{r}(0) = \breve{\imath} + \ \breve{\jmath} + \ \breve{k}$.

3. Longitud de una curva paramétrica

Consideremos una curva C de clase $\mathcal{C}^1$ en el plano, parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$ con $t \in [a, b]$. Dividamos el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δt (entonces $\Delta t = \frac{b-a}{n}$, que será pequeño si tomamos n muy grande).

Sea $t_0 = a$ el parámetro que corresponde al punto inicial $P_0 = A$ de la curva, y $t_n = b$ el parámetro que corresponde al punto final $P_n = B$. Llamemos $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n$ (donde $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, para cada i) a los valores de t al final de cada subintervalo en la recta paramétrica. Para cada i: $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de un punto $P_i(x_i, y_i)$ que está sobre la curva C. La poligonal con vértices $P_0 = A, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_n = B$ aproxima a la curva C (ver Figura 11).

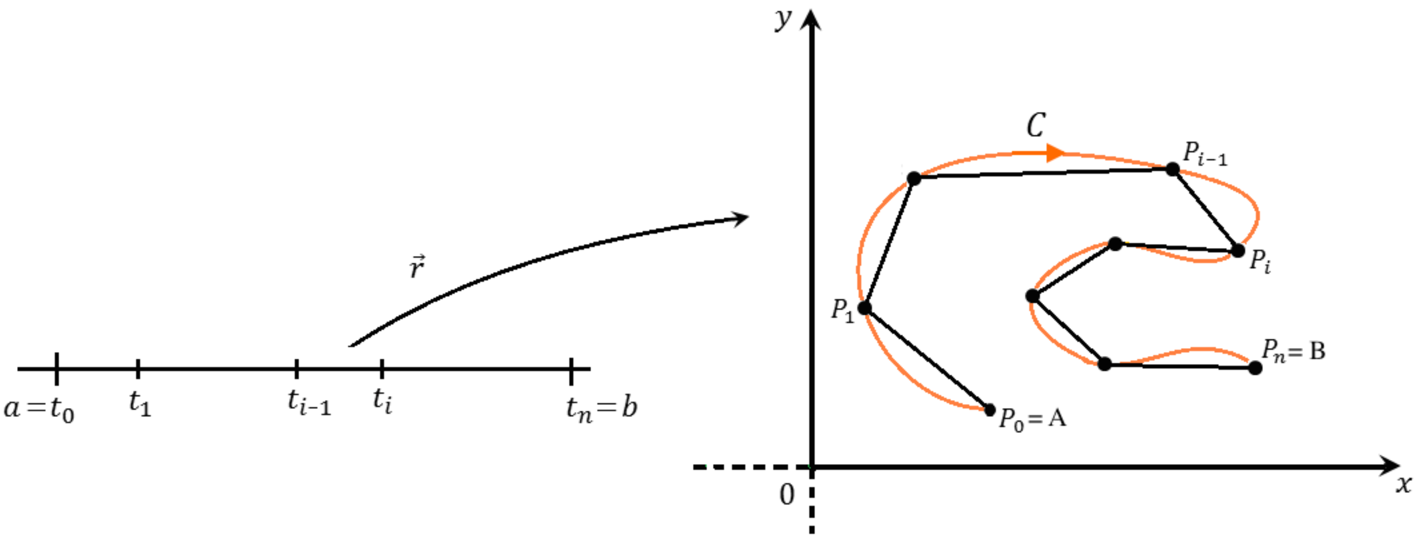

Figura 11: Aproximación poligonal de C.

Queremos medir la longitud de la curva, aproximándola con la longitud de la poligonal, que es la suma de las longitudes de los n segmentos. Considerando que cuando $n \to \infty$, la poligonal se aproxima cada vez "mejor" a la curva, definimos la longitud total de la curva C como

$$L_C = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

donde

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{\left[f(t_i) - f(t_{i-1})\right]^2 + \left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right]^2}$$

es la longitud del i-ésimo segmento, que une P_{i-1} con P_i.

Aplicamos ahora el Teorema del Valor Medio [2] a las funciones $f(t)$ y $g(t)$ en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$: siendo f y g continuas, sabemos que existen valores c_i y d_i en el intervalo (t_{i-1}, t_i), tales que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)\,\Delta t\ , \qquad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)\,\Delta t$$

Entonces, la suma de las longitudes de los segmentos resulta

$$L_C = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}\ \Delta t$$

[2]TVM: Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe (al menos) un $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Esta expresión nos recuerda a una *suma de Riemann* para la función $\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$, pero ella no es exactamente una suma de Riemann porque en general $c_i \neq d_i$. No obstante, teniendo en cuenta que f' y g' son funciones continuas, se puede probar que el límite existe y que es igual a la integral definida

$$L_C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\; dt$$

En el caso de una curva de clase $\mathcal{C}^1$ en el espacio, parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ con $t \in [a, b]$, el resultado anterior se generaliza a

$$L_C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\; dt$$

El integrando es el módulo del vector tangente $\vec{r}\,'(t)$. Luego, la longitud total de una curva $C : \vec{r}(t), t \in [a, b]$, está dada por

$$L_C = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

NOTA: Si bien aquí se plantea el cálculo usando una función vectorial particular para describir la curva, se puede probar que la longitud de una curva suave (a trozos) es independiente de la parametrización usada.

EJEMPLO 16: a) Calcular la longitud de la circunferencia del Ej. 2.a). b) Idem para el Ej. 2.b).

a) Vemos que $|\vec{r}_1\,'(t)| = |-4\,\mathrm{sen}\,t\,\breve{\imath} + 4\cos t\,\breve{\jmath}| = \sqrt{16\,\mathrm{sen}^2\,t + 16\cos^2 t} = 4$. *La longitud de la curva es*

$$L_1 = \int_0^{2\pi} |\vec{r}_1\,'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 4\, dt = 4\int_0^{2\pi} dt = 8\pi$$

b) Se tiene $|\vec{r}_2\,'(t)| = |8\cos(2t)\;\breve{\imath} - 8\,\mathrm{sen}(2t)\;\breve{\jmath}| = 8$. *Entonces la longitud de esta curva es*

$$L_2 = \int_0^{2\pi} |\vec{r}_2\,'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 8\, dt = 16\pi$$

Notar que $L_1 = 8\pi$ es la longitud de una vuelta de la circunferencia de radio 4. Mientras que L_2 es el doble, porque en este caso la circunferencia es recorrida dos veces por la parametrización dada en 2.b).

NOTA: Este ejemplo muestra casos particulares de un resultado general (y conocido!). Una circunferencia de radio R puede parametrizarse mediante $(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, y tiene en cada punto vector tangente de módulo constante e igual a R. Luego $L_C = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$, que es un resultado ya conocido (¡desde la antigüedad!) para la longitud de una vuelta de circunferencia. Dicho de otra forma, el número irracional π es el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

MÁS EJEMPLOS: Mencionamos algunos otros casos para los que es posible hallar una primitiva explícita de $|\vec{r}\,'|$ y aplicar la regla de Barrow, a fin de obtener la longitud de una curva.
En el Ejemplo 1.a), la longitud de la curva es infinita; mientras que en el Ejemplo 1.b), la expresión para hallar la longitud de la porción de la parábola $x + 1 = (y - 2)^2$ entre $A(0, 1)$ y $B(8, 5)$, usando la parametrización dada, es $L_C = \int_0^4 \sqrt{1 + 4(t-1)^2}\, dt$ (que dejamos aquí planteada).
En el Ej. 4, (compruebe que) la longitud del segmento es igual a la distancia entre $P_0(1, 3, -2)$ y $P_1(4, 0, 3)$.
En el Ejemplo 13, siendo una curva suave a trozos con 4 secciones de igual largo (por simetría), es conveniente calcular la longitud de un tramo y multiplicar por 4. Pruebe que cada arco del hipocicloide mide $\frac{3}{2}$ (un poco más que $\sqrt{2}$, que es la distancia entre dos picos sucesivos); luego la longitud total de ese hipocicloide de cuatro picos es 6.

FUNCIÓN LONGITUD DE ARCO

Pensemos en una persona que se encuentra caminando por un sendero en una montaña. El movimiento del senderista puede ser representado por la curva $C : \vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ en función del tiempo, habiendo partido de la posición determinada por $\vec{r}(a)$ en el instante $t = a$. Cuando la persona llegue al final del recorrido (la posición $\vec{r}(b)$ en el instante $t = b$), habrá caminado L_C metros (suponiendo que las distancias se miden en esta unidad). En un instante intermedio t, ¿cuántos metros habrá recorrido?

En el instante t la persona llegó al punto del sendero $P(f(t), g(t), h(t))$, habiendo comenzado su recorrido en $A(f(a), g(a), h(a))$. Es decir que caminó la porción del sendero comprendida entre los puntos A y P. Calculamos entonces la longitud de la porción de curva entre estos puntos. Teniendo en cuenta que la longitud total de la curva (desde A para $t = a$, hasta B para $t = b$) es $\int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$, la longitud de la porción de curva entre los puntos que corresponden a los valores a y t del parámetro, estará dada por

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(u)|\, du$$

que depende del instante t (llamamos u a la variable muda de integración). Queda así definida una función, para t entre a y b, que da la medida de la longitud de la curva $C : \vec{r}(t)$, para cada t a partir del punto inicial. La función $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama *función longitud de arco* o *función longitud de curva*.

Veamos algunas propiedades interesantes de la función longitud de arco $s(t)$:

1. $\mathrm{Dom}(s) = [a, b]$ e $\mathrm{Im}(s) = [0, L_C]$, siendo $s(a) = 0$ y $s(b) = L_C$.
2. $s(t)$ es una función continua y derivable para $t \in (a, b)$, siendo $s\,'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$.
3. $s(t)$ es una función estrictamente creciente y por lo tanto admite inversa en $[a, b]$.
4. $t(s)$, función inversa de $s(t)$, tiene dominio $[0, L_C]$ e imagen $[a, b]$; es continua y derivable, siendo $t'(s) = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}$.

Las demostraciones de estas propiedades son sencillas:

1. Por definición, $s(t = a) = \int_a^a |\vec{r}\,'(u)|\, du = 0$ (la longitud de un punto es nula), mientras que $s(t = b) = \int_a^b |\vec{r}\,'(u)|\, du = L_C$ (la longitud de toda la curva es L_C). Se tiene

$$s : [a, b] \to [0, L_C]$$

2. Por el Teorema Fundamental del Cálculo [3], la derivada de $s(t)$ es igual al integrando evaluado en t. Destacamos esta relación, que usaremos más adelante:

$$\frac{d}{dt} s(t) = |\vec{r}\,'(t)|$$

3. Dado que $s'(t)$ es el módulo de un vector, no puede ser negativa; además, como la curva es suave, se tiene $|\vec{r}\,'(t)| \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Entonces $s'(t) > 0$, de donde $s(t)$ resulta una función estrictamente creciente. Efectivamente, la longitud de curva crece siempre, desde 0 en $t = a$ hasta L_C en $t = b$.

[3] TFC: Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$, y sea $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$. Entonces $\frac{d}{dt} F(t) = f(t)$.

4. Recordamos de Análisis I que si $f(x)$ es invertible, sabemos que existe f^{-1} y que la derivada de f^{-1} es la inversa (multiplicativa) de la derivada de f. Llamemos $t(s)$ a la función inversa de $s(t)$. Vemos que expresa el tiempo transcurrido en función del camino recorrido, que $t : [0, L_C] \to [a, b]$, y que su derivada está dada por

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t(s))|}$$

Notar que dada una curva descripta en términos del parámetro t, podríamos escribir t en función de s y *reparametrizar* la curva respecto de este nuevo parámetro, de la siguiente forma:

$$C : \vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)) = \vec{q}(s), \qquad s \in [0, L]$$

Resulta que $\vec{q}(s)$ con $s \in [0, L]$, describe la misma curva que $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, conservando además el sentido de recorrido. Esto último se prueba notando que $\frac{d\vec{q}(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t(s))}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$, por la regla de la cadena; dado que $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t(s))|} > 0$, los vectores tangente $\vec{q}\,'(s)$ y $\vec{r}\,'(t)$ tendrán entonces el mismo sentido para cualquier s y t. Cuando se usa la parametrización $\vec{q}(s)$, se dice que la curva está *parametrizada en términos de la longitud de arco*.

Notar que la parametrización de una curva C en términos de la longitud de arco describe la posición de cada punto de la curva en términos de su distancia al punto inicial, medida sobre la trayectoria de C.
Pensemos nuevamente en una persona que camina a lo largo de la curva C partiendo del punto inicial de la misma, pero supongamos ahora que C está parametrizada en función de la longitud de arco, es decir que está descripta por $\vec{q}(s)$. La persona parte de la posición $\vec{q}(0)$ (punto inicial) y cuando llegue a un punto Q correspondiente, por ejemplo, a $\vec{q}(5)$, eso significa que habrá caminado 5 metros a lo largo de la curva. ¿Cuánto habrá caminado al completar el recorrido, o sea cuando llegue a la posición $\vec{q}(L_C)$? Por supuesto: L_C metros, que es el largo total de la curva.

EJEMPLO 17: *a*) Calcular la longitud de una vuelta de una hélice circular H de radio R y paso $2\pi c$ (siendo R y c constantes positivas), parametrizada por $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, c\,t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.
b) Obtener una nueva parametrización $\vec{q}(s)$, en función del parámetro longitud de arco de la hélice; calcular $|\vec{q}\,'(s)|$.

a) Comenzamos calculando el módulo del vector tangente para cada $t \in (0, 2\pi)$:

$$|\vec{r}\,'(t)| = |(-R\,\mathrm{sen}\,t,\ R\cos t,\ c)| = \sqrt{R^2 + c^2}$$

para luego calcular la longitud de una vuelta de hélice:

$$L_H = \int_{a=0}^{b=2\pi} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + c^2}\,dt = \sqrt{R^2 + c^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,\sqrt{R^2 + c^2}$$

Observamos en la expresión para L_H las dos situaciones extremas: si $c = 0$, resulta $L = 2\pi R$ que es la longitud de una vuelta de circunferencia; mientras que si $R = 0$, $L = 2\pi c$ da justamente el paso de la hélice, ahora deformada en un segmento recto. La longitud de la hélice aumenta con c y con R, lo que resulta coherente.

b) La función longitud de arco es

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(u)|\,du = \sqrt{R^2 + c^2}\,t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

(observe que se cumplen las propiedades mencionadas), cuya inversa se obtiene despejando t como

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s, \qquad s \in \left[0, 2\pi\sqrt{R^2+c^2}\right]$$

La nueva parametrización $\vec{q}(s)$ es

$$\begin{aligned} \vec{q}(s) &= \vec{r}\,(t(s)) = \vec{r}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s\right) \\ &= \left(R\ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s\right),\ R\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s\right),\ \frac{c}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s\right) \end{aligned}$$

Esta función vectorial caracteriza igualmente a la hélice, en términos del parámetro longitud de arco s, de 0 a la longitud total de la curva.

Por último calculamos el módulo del vector tangente para la nueva parametrización:

$$\begin{aligned} |\vec{q}\,'(s)| &= \left|\left(-\frac{R}{\sqrt{R^2+c^2}}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s\right), \frac{R}{\sqrt{R^2+c^2}}\ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\; s\right),\ \frac{c}{\sqrt{R^2+c^2}}\right)\right| \\ &= \frac{R^2+c^2}{R^2+c^2} = 1 \end{aligned}$$

NOTA: En el ejemplo se obtuvo $|\vec{q}\,'(s)| = 1$. Interprete este resultado. ¿Se cumplirá en todos los casos? La respuesta es afirmativa: de hecho, la parametrización en términos del parámetro longitud de arco da un vector tangente que es *unitario* en todo punto de la curva.

MÁS EJEMPLOS:

En el Ej. 1.b), el parámetro longitud de arco se obtiene resolviendo la integral $s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4(u-1)^2}\, du$.
En el Ejemplo 2.a), donde $r_1(t)$ parametriza a una circunferencia de radio 4 centrada en el origen, la función vectorial correspondiente en términos de la longitud de arco es $q_1(s) = (4\cos\frac{s}{4}, 4\operatorname{sen}\frac{s}{4})$, con $s \in [0, 8\pi]$; justamente s da la longitud del arco de circunferencia medido a partir del punto $A_1(4,0)$.
En el Ejemplo 4, de acuerdo a la parametrización dada, el vector derivada coincide con el vector director usado para la recta, $\overrightarrow{P_0P_1}$, cuyo módulo es constante e igual a $\sqrt{43}$; luego $s(t) = \sqrt{43}\, t,\ t \in [0,1]$.
En el Ejemplo 13, se tiene $|\vec{r}\,'(t)| = 3\,|\operatorname{sen} t|\,|\cos t|$. Restringiéndonos sólo al primer arco del hipocicloide ($t \in [0, \frac{\pi}{2}]$), resulta $s(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 t$, cuya inversa es $t(s) = \operatorname{arc\,sen}(\frac{2}{3}s)$ para $s \in [0, \frac{3}{2}]$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3:

1. Tomen un tubo de cartón y una cinta métrica. Enrollen la cinta alrededor del tubo en forma helicoidal, eligiendo un paso que sea: a) la mitad, b) igual, c) el doble del diámetro del tubo. En cada caso, midan la longitud de una vuelta de hélice y verifiquen la expresión analítica hallada en el Ejemplo 17.

2. ¿Cuál es la longitud de la curva plana dada por $\vec{r}(t) = e^t \cos t\ \breve{\imath} + e^t \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath}$, con $0 \le t \le 1$?

3. Calcule la longitud del arco definido por la función vectorial $\vec{r}(t) = (e^t\cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t)$ desde $A(1,0,1)$ hasta $B(-e^{\pi},\ 0,\ e^{\pi})$.

4. Considere una vuelta de hélice circular de radio 2 y paso 2π. Dé alguna parametrización para la curva y calcule su longitud.
   Compare con los cálculos hechos por otros compañeros, que probablemente hayan usado otra parametrización (inclusive pueden haber ubicado la hélice con un eje diferente), y verifique que todos obtienen el mismo resultado para la longitud.

5. Una curva C está descripta por $\vec{r}(t) = 3\cosh(2t)\ \breve{\imath} + 3\operatorname{senh}(2t)\ \breve{\jmath} + 6t\ \breve{k}$, con $0 \le t \le 1$. Halle el parámetro longitud de arco $s(t)$ para cualquier $t \in [0,1]$, y evalúe $s(0)$ y $s(1)$. ¿Cuánto vale L_C?

4. Aplicación: Movimiento en el espacio

En esta sección veremos cómo se pueden usar las ideas discutidas en esta guía, para estudiar el movimiento de una partícula u objeto que describe cierta trayectoria en el espacio (o en el plano).

Pensemos en una partícula que se mueve a lo largo de una curva (imaginaria) $C : \vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$, con $t \in [t_0, t_F]$. Aquí $\vec{r}$ indica la posición espacial de la partícula y t indica el tiempo. Las componentes de $\vec{r}$ tienen unidades de longitud (como el metro) y t digamos que se mide en segundos. En el instante t la partícula se encuentra en el punto P de coordenadas $(f(t), g(t), h(t))$.

Las magnitudes vectoriales de interés físico son las siguientes:

- El *desplazamiento* entre el instante inicial y un instante t está dado por el vector $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$.
- La *velocidad* de la partícula en el instante t, $\vec{v}(t)$, está dada por la función vectorial:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

  Para representar gráficamente la velocidad, se ubica el vector $\vec{v}(t)$ con su punto inicial (no en posición canónica sino) en el punto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ donde se encuentra la partícula en <u>ese</u> instante. De esta forma, el vector velocidad en el instante t es un vector *tangente* a la curva en P, e indica el cambio instantáneo de posición.

- La *aceleración* de la partícula en el instante t, $\vec{a}(t)$, está dada por la función vectorial:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$$

También las siguientes magnitudes escalares son relevantes para estudiar objetos en movimiento:

- La *rapidez* con que se mueve la partícula en el instante t es el módulo del vector velocidad:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \left|\vec{r}\,'(t)\right|$$

  Esta función escalar se mide en unidades de metros/segundo.

- La *distancia* recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria durante el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, puede ser evaluada mediante la integral:

$$d(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(u)|\, du$$

  Es decir que la distancia recorrida (en metros) por la partícula coincide, como era de esperar, con la longitud de la porción de curva que está entre el punto inicial $P_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ y el punto $P(f(t), g(t), h(t))$. El largo total del recorrido de la partícula será entonces $L_C = d(t_F)$.

Si para un móvil se conoce la aceleración en función del tiempo, $\vec{a}(t)$, integrando esta función vectorial se obtiene el *cambio de velocidad* en un dado intervalo temporal:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)$$

de acuerdo a la regla de Barrow, siendo $\vec{v}(t)$ una primitiva de $\vec{a}(t)$. De aquí se obtiene

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt$$

Notar que se necesita conocer el dato de la velocidad inicial.
De manera similar, integrando la velocidad y teniendo como dato la posición inicial, se obtiene el cambio de posición (o desplazamiento). ¿Cómo se expresa entonces la posición $\vec{r}(t)$, conociendo la velocidad?

EJEMPLO 18: Vuelo de un planeador
Una persona en un planeador vuela en espiral hacia arriba debido a una corriente de aire de rápido ascenso, en una trayectoria cuyo vector de posición es $\vec{r}(t) = 3\cos t\ \breve{\imath} + 3\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + t^2\ \breve{k}$. La trayectoria es similar a la de una hélice (aunque no es una hélice, ¿por qué?). Esbozar la gráfica para $0 \leq t \leq 2\pi$.
Determinar:
a) la velocidad y aceleración en el instante t,
b) la rapidez del planeador en el instante t,
c) el momento en el que la aceleración del planeador es ortogonal a su velocidad, si es que existe.

a) *Derivando sucesivamente $\vec{r}(t)$ obtenemos la velocidad*

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -3\operatorname{sen} t\ \breve{\imath} + 3\cos t\ \breve{\jmath} + 2t\ \breve{k}$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = -3\cos t\ \breve{\imath} - 3\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + 2\ \breve{k}$$

para $t \geq 0$.
b) *Para obtener la rapidez, calculamos el módulo de la velocidad:*

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-3\operatorname{sen} t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$$

que aumenta con el tiempo.
c) *Para determinar los instantes en que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son ortogonales, buscamos valores de t para los cuales*

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{a} = 9\operatorname{sen} t\cos t - 9\cos t\operatorname{sen} t + 4t = 4t$$

Así, en este caso, el único instante en que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad es cuando $t = 0$, esto es, en el punto inicial $(3, 0, 0)$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4:

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula si la posición está dada por $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath} + 2\ \breve{k}$. Trace la trayectoria de la partícula y dibuje los vectores velocidad y aceleración para $t = 1$s y $t = 2$s.

2. Determine para $t \geq 0$ los vectores velocidad y posición de una partícula que tiene aceleración dada por $\vec{a}(t) = \breve{\imath} + 2\ \breve{\jmath}$, sabiendo que la velocidad y posición iniciales son $\vec{v}(0) = \breve{k}$ y $\vec{r}(0) = \vec{0}$, respectivamente.

3. Movimiento circular uniforme.
La función vectorial $\vec{r}(t) = A\cos t\ \breve{\imath} + A\operatorname{sen} t\ \breve{\jmath}$, con $t \in [0, 2\pi]$ en segundos, describe la posición de una partícula que realiza un recorrido circular alrededor del origen, a una distancia A del mismo. Considere $A = 4$ cm (recordar el Ejemplo 2).

a) ¿Cuáles son los puntos inicial y final de la trayectoria? ¿En qué lugar se encuentra la partícula en los instantes $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$? ¿Cuál es el sentido del recorrido? Grafique la curva.

b) Calcule las funciones velocidad y aceleración. Evalúe dichas funciones en los instantes dados en *a*). Grafique los vectores obtenidos, ubicándolos en la posición de la partícula en cada instante.

c) Pruebe que en este caso $\vec{v}(t)$ es perpendicular al vector posición $\vec{r}(t)$, y que $\vec{a}(t)$ apunta hacia el centro de la circunferencia para todo t. Muestre que la rapidez es constante ("uniforme").

4. En su recorrido, una partícula genera una curva C representada por la función vectorial $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{5}\,\text{sen}\,t,\ \sqrt{5}\cos t,\ 2\,t\right)$, donde $t \geq 0$ denota el tiempo en segundos.

   a) Suponiendo que el trayecto que realiza la partícula es medido en metros y comienza en el punto $(0,\ \sqrt{5},\ 0)$, encuentre el punto Q al que llega la partícula si recorrió 3π metros.

   b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en Q ?

ACTIVIDADES INTEGRADORAS:

1. ¿Cómo se puede cambiar la orientación de una curva $C : \vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$?

2. La función vectorial $\vec{r}(t) = (t, 2t + 3)$, con $-\infty < t < \infty$, parametriza una recta en el plano.

   a) $\vec{r}_1(t) = (t^3, 2t^3 + 3)$ también parametriza una recta en el plano. ¿Qué diferencia hay?

   b) La función $\vec{r}_2(t) = (t^2, 2t^2 + 3)$, ¿qué curva representa?

3. Tiro vertical.
   Tome una pelotita de ping pong y arrójela hacia arriba. Escriba una función vectorial que represente la posición del móvil, indicando las funciones componentes y su dominio (recuerde el Ejemplo 8 sobre Tiro oblicuo, y adáptelo a esta situación). Obtenga luego las funciones vectoriales que correspondan a velocidad y aceleración.

4. Encuentre ecuaciones paramétricas para las siguientes rectas:

   a) La recta que pasa por los puntos $P(2, 3, -1)$ y $Q(5, 2, 0)$.

   b) La recta que apunta en la dirección del vector $\vec{u} = 3\,\breve{\imath} - 3\,\breve{\jmath} + \breve{k}$ y pasa por el punto $R(1, 2, 3)$.

   c) ¿Se intersecan las rectas dadas en los incisos *a*) y *b*)?

5. Escriba la familia de todos los "caminos" rectos en el plano que pasan por $O(0, 0)$. Idem utilizando parábolas de eje y y parábolas de eje x, con vértice en $O(0, 0)$.

6. *a*) Construya una hélice cónica utilizando, por ejemplo, un cucurucho como soporte y un trozo de alambre de aluminio; luego retire el soporte y estudie la "curva" fabricada.

   b) Aplaste la curva hasta hacerla plana, ¿qué curva obtiene como proyección de la hélice cónica?

7. Un tobogán con forma helicoidal de 1.5 m de radio, tiene 2 m de altura y da un giro completo desde arriba hasta abajo. Halle una función vectorial que modele la línea central del tobogán.

8. Si la aceleración de un móvil está dada por $\vec{a}(t) = \breve{\imath} + \breve{\jmath} + \breve{k}$ para $t \geq 0$ con $\vec{v}(0) = \vec{0}$ (el móvil parte del reposo) y $\vec{r}(0) = \breve{\imath} + \breve{\jmath}$, ¿cuáles son las funciones velocidad y posición del móvil? ¿Cuál es la posición en $t = 2$ s?

9. Halle el vector velocidad y la rapidez con que se mueve una partícula sobre una circunferencia de radio R (en cm) parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\ \breve{\imath} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\ \breve{\jmath}$, donde ω es la velocidad angular (en rad/s) constante. Compruebe que el vector velocidad es ortogonal al vector posición, para cualquier instante. Halle el vector aceleración y verifique que apunta hacia el centro de la circunferencia. Calcule el módulo del vector aceleración. Grafique, indicando los vectores $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para 4 valores de t elegidos (tome $R = 3$ cm y $\omega = 6\pi$ rad/s).

10. Sea C una curva en el espacio y $\vec{r}(t)$ una parametrización de la misma.

    a) Halle $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}\,'(t) = -3\,\mathrm{sen}\,t\ \breve{\imath} + 3\cos t\ \breve{\jmath} + 4\ \breve{k}$ y $\vec{r}(0) = 3\ \breve{\imath} +\ \breve{\jmath} -\ \breve{k}$.

    b) Obtenga una ecuación para la recta tangente a C en el punto $P_0(3, 1, -1)$.

    c) Reparametrice la trayectoria asociada a $\vec{r}(t)$ con respecto a la longitud de arco s, medida desde el punto en el cual $t = 0$ y en la dirección creciente de t.

    d) Halle la expresión general de un vector tangente a C en función del parámetro longitud de arco s. ¿Cuánto vale su módulo?

11. Halle una función vectorial que describa la frontera de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 4x,\ \ y = x,\ \ y = \frac{1}{x}$, recorrida en sentido antihorario. Encuentre un vector tangente a la curva en $P(\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$. ¿En qué puntos no se puede definir un vector tangente a la curva dada? Justifique.

12. Parametrice el borde C del semicírculo de radio 1 centrado en el origen, en el semiplano superior. Asigne sentido antihorario (o "sentido positivo") a la curva paramétrica, de tal forma que los puntos del semicírculo quedan a la izquierda de C.

13. Dada $C : \vec{r}(t) = \big(2t^{3/2},\ \cos(2t),\ \mathrm{sen}(2t)\big)$ con $t \in [-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}]$, calcule la longitud de C.

14. Dada una curva con ecuación cartesiana $C_k :\ x^2 + y^2 = k$ (con k constante positiva, fija):

    a) dé una parametrización para la curva C_k;

    b) halle un vector <u>normal</u> a C_k en el punto $P(0, \sqrt{k})$;

    c) grafique para distintos k.

AUTOEVALUACIÓN DE LA GUÍA NRO. 2:

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos).

1. Dada la hélice $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{1-R^2}\; t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, siendo R una constante fija, positiva:

   a) halle una ecuación de la recta tangente a la hélice, en el punto $(0, R, \frac{1}{2}\sqrt{1-R^2}\;\pi)$;

   b) calcule la longitud de una vuelta de esta hélice;

   c) reparametrice la curva en función del parámetro longitud de arco s.

2. Defina una función vectorial que represente a la curva del espacio determinada por la intersección de las superficies $(x-1)^2 + z^2 = 4$ y $z - y = 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido asignado por la parametrización propuesta.

3. Considere el movimiento de una partícula descripto por la función vectorial

   $$\vec{r}(t) = 3\cos\left(\frac{t}{2}\right)\ \breve{\imath} + 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\ \breve{\jmath}$$

   donde $t \geq 0$ indica el tiempo transcurrido, en segundos.

   a) ¿Qué tipo de movimiento describe esta partícula? Grafique la curva paramétrica en el plano.

   b) Para $t = \frac{\pi}{2}$, calcule los vectores velocidad y aceleración. Indique en el gráfico el correspondiente vector de posición y dibuje en su extremo la velocidad y la aceleración calculadas.

   c) Calcule la rapidez con que se mueve la partícula. ¿Depende del punto donde se encuentra?