9.3 PROBLEMAS RESUELTOS DE HIDROSTATICA.

1.- Una estrella de neutrones tiene un radio de 10 Km y una masa de 2×10^{30} Kg. ¿Cuánto pesaría un volumen de 1 cm^3 de esa estrella, bajo la influencia de la atracción gravitacional en la superficie de la tierra?

Solución: El peso debe calcularse multiplicando la masa por la aceleración de gravedad. En consecuencia debemos calcular la masa primero. Eso puede hacerse a través del concepto de densidad, puesto que:

$$\rho = \frac{\text{masa estrella}}{\text{volumen estrella}}$$

es decir, cada cm^3 de la estrella tendrá una masa de $0{,}5 \times 10^{12}$ Kg, por lo tanto en la superficie de la tierra pesará:

$$W = (0{,}5 \times 10^{12}\ Kg)(9{,}8\ \frac{m}{s^2}) = 0{,}5 \times 10^{12}\ N.$$

2.- Júpiter tiene un radio $R = 7{,}14 \times 10^4$ Km y la aceleración debida a la gravedad en su superficie es $g_J = 22{,}9\ \frac{m}{s^2}$. Use estos datos para calcular la densidad promedio de Júpiter.

Solución: La densidad es simplemente el cuociente entre la masa y el volumen del planeta. Por tanto, hay que calcular previamente ambas cantidades.

El volumen se puede calcular geométricamente con la expresión:

$$\text{(i)} \qquad \frac{4}{3}\pi r^3$$

y la masa se puede calcular recordando que el peso es una fuerza de atracción gravitacional que se puede encontrar con la expresión:

$$\text{(ii)} \qquad P = G\,\frac{m\,M}{R^2}$$

(donde G es una constante universal de valor $6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N\,m^2}{Kg^2}$, m es la masa de un objeto cualquiera en las cercanías del cuerpo que genera el campo gravitacional, en este caso el planeta Júpiter, M es la masa del planeta y R es la distancia entre el cuerpo y el planeta). Por otra parte, el peso de un cuerpo cualquiera cercano al planeta puede calcularse también con la expresión proveniente de la segunda ley de Newton :

$$P = mg \qquad \text{(iii).}$$

en consecuencia, igualando (ii) con (iii) :

$$G\,\frac{m\,M}{R^2} = m\,g$$

de donde :

$$M = \frac{g\,R^2}{G}$$

ahora podemos calcular la densidad :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{g\,R^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\,g}{4\,G\,R\,\pi}$$

$$\rho = \frac{(3)(22{,}9)}{(4)(6{,}67 \times 10^{-11})(7{,}14 \times 10^{7})(3{,}14)}$$

$$\rho = 1\,148{,}5\ \frac{Kg}{m^3}$$

3.- ¿ Cuál es la presión a 1 m y a 10 m de profundidad desde la superficie del mar?. Suponga que $\rho = 1{,}03 \times 10^3$ Kg/m^3 como densidad del agua de mar y que la presión atmosférica en la superficie del mar es de $1{,}01 \times 10^5$ Pa. Suponga además que a este nivel de precisión la densidad no varía con la profundidad.

Solución: En función de la profundidad la presión es:

$$P = P_0 + \rho\, g\, h$$

por tanto:

$$P = 1{,}01\text{x}10^5 \text{ Pa} + (1{,}03\text{x}10^3 \ \frac{Kg}{m^3})(9{,}8\ \frac{m}{s^2})(\ h)$$

si h = 1 m : $P = 1{,}11 \times 10^5$ Pa.

si h = 10 m : $P = 2{,}02 \times 10^5$ Pa

4.- Las dimensiones de una piscina rectangular son 25 m de largo, 12 m de ancho y 2 m de profundidad. Encontrar:

a) La presión manométrica en el fondo de la piscina.
b) La fuerza total en el fondo debida al agua que contiene.
c) La fuerza total sobre una de las paredes de 12 m, por 2 m.
d) La presión absoluta en el fondo de la piscina en condiciones atmosféricas normales, al nivel del mar.

Solución:

a) La presión manométrica se calcula con la expresión (10) :

$$P - P_0 = \rho\, g\, h$$

$$P - P_0 = (1 \frac{g}{cm^3})(980\ \frac{cm}{s^2})(200 \text{ cm})$$

$$P - P_0 = 196\ 000\ \frac{D}{cm^2} = 1{,}96\ \frac{N}{cm^2}$$

b) Como la profundidad es constante, se puede ocupar directamente la expresión (8), pues la fuerza estará uniformemente distribuida:

$$F = P\, A$$

donde P es la presión manométrica. Por tanto :

$$F = (1{,}96 \frac{N}{cm^2})\ (1200 \text{ cm})\ (2500 \text{ cm})$$

F= 5,88 x 106 N

c) La fuerza total sobre una de las paredes no puede calcularse de la misma forma, puesto que la presión varía con la profundidad, por lo que debe ocuparse la expresión (7):

$$dF = P\, dA$$

donde dF es la fuerza debida a la presión manométrica P, existente en un elemento de área dA de largo L y alto dh.

La presión manométrica varía con la profundidad según $\rho\, g\, h$.

por tanto :

$$dF = (\rho\, g\, h)\ (L\, dh)$$

la fuerza requerida se encontrará integrando esta expresión:

$$\int dF = \int \rho\, g\, L\, h\, dh$$

que resulta :

$$F = \rho\, g\, L^2/2$$

integrada y evaluada entre 0 y h.

con los datos del problema :

$$F = (1\frac{g}{cm^3})(980\frac{cm}{s^2})(1200\ cm)(\frac{200^2}{2}\ cm^2)$$

$F = 2{,}352 \times 10^{10}$ D = 235 200 N

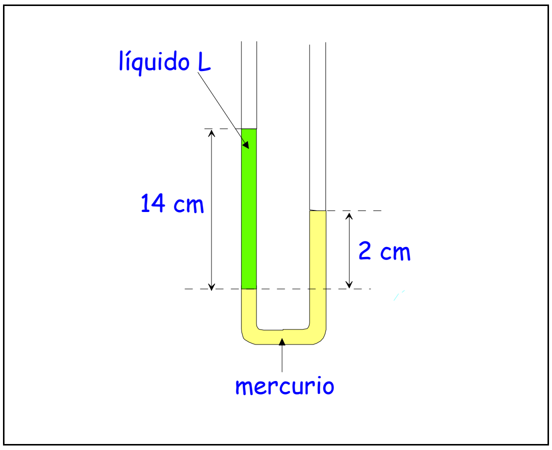
(d) La presión absoluta en el fondo de la piscina es la suma de las presiones manométrica y atmosférica, que a nivel del mar vale $1{,}01 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = 10{,}1\frac{N}{cm^2}$,

por tanto :

$$P = 1{,}96\ \frac{N}{cm^2} + 10{,}1\ \frac{N}{cm^2} = 12{,}06\ \frac{N}{cm^2}$$

5.- En el tubo en U de la figura, se ha llenado la rama de la derecha con mercurio y la de la izquierda con un líquido de densidad desconocida. Los niveles definitivos son los indicados en el esquema.

Hallar la densidad del líquido desconocido.



Solución: En el nivel de la superficie de separación la presión es la misma en los dos líquidos, En dicho nivel la presión debida al mercurio vale:

$$P_M = P_0 + \rho_M\, g\, h_M$$

y la del líquido desconocido vale:

$$P_L = P_0 + \rho_L\, g\, h_L$$

En ambas, P_0 es la presión atmosférica pues están abiertos.

Igualando ambas expresiones:

$$P_0 + \rho_M g\, h_M = P_0 + \rho_L\, g\, h_L$$

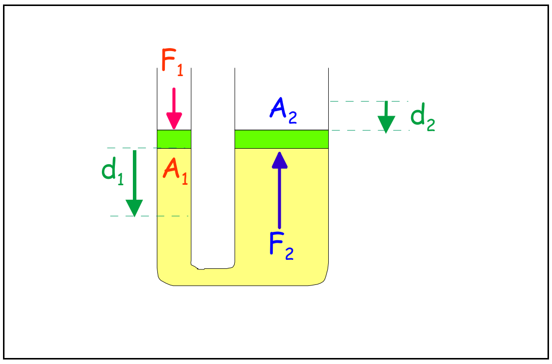
de donde :

$$\rho_L = \frac{\rho_M\ h_M}{h_L}$$

$$\rho_L = \frac{\left(13{,}6\frac{g}{cm^3}\right)(2cm)}{14\ cm}$$

$$\rho_L = (1{,}94\ \frac{g}{cm^3})$$

6.- Un recipiente cerrado que contiene líquido (incompresible) está conectado al exterior mediante dos pistones, uno pequeño de área $A_1 = 1\ cm^2$, y uno grande de área $A_2 = 100\ cm^2$ como se ve en la figura. Ambos pistones se encuentran a la misma altura. Cuando se aplica una fuerza F = 100 N hacia abajo sobre el pistón pequeño. ¿Cuánta masa m puede levantar el pistón grande?.



Solución: Cuando actúa F_1 sobre el pistón pequeño, la presión P del líquido en ese punto es :

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{100\ N}{1\ cm^2} = \frac{10^2\ N}{10^{-4} m^2} = 10^6\ Pa$$

Como el pistón grande está a la misma altura, tendrá la misma presión P que el otro pistón, por tanto la fuerza F_2 que actúa sobre él, es

$$F_2 = P\ A_2$$

y el peso que puede levantar es:

$$F_2 = m\ g$$

por lo que se puede escribir:

$$P\ A_2 = m\ g$$

de donde :

$$m = \frac{P\ A_2}{g} = \frac{(10^6\ Pa)(10^{-2} m^2)}{9{,}8\ \frac{m}{s^2}}$$

m = 1 020 Kg

7.- Calcular el empuje que ejerce (a) el agua y (b) el alcohol sobre un cuerpo enteramente sumergido en estos líquidos cuyo volumen es de 350 cm^3. El peso específico del alcohol es de 0,8 $\frac{gf}{cm^3}$.

Solución :
a) El empuje del agua es igual al peso de los 350 cm^3 de este líquido que el cuerpo desaloja y vale por lo tanto 350 gf.

(b) En alcohol corresponde al peso de 350 cm^3 de este líquido. Conocido su peso específico, que es el cuciente entre el peso del líquido y su volumen:

$$\text{Peso} = Pe\ V = (0{,}8\ \frac{gf}{cm^3})(350\ cm^3) = 280\ gf$$

8.- ¿Cuál es el peso específico de un cuerpo si flota en el agua de modo que emerge el 35 % de su volumen?

Solución: Si emerge el 35% de su volumen, está sumergido el 65% del cuerpo. Esto significa que sobre él existe aplicado un empuje equivalente al peso de un volumen de agua equivalente a 0,65 V (siendo V el volumen del cuerpo). Este puede ser expresado como en el ejercicio anterior, como:

$$P_{\text{agua desalojada}} = \text{Empuje} = PeV = (1\frac{gf}{cm^3})(0{,}65\ V)$$

Por otra parte, si flota es porque está en equilibrio, para lo que es necesario que el peso del cuerpo sea igual al empuje. El peso del cuerpo es:

$P_{cuerpo} = Pe\ V$.

Debido a lo antes expuesto:

$(0{,}65\ V)\ gf = Pe\ V$.

de donde :

$$Pe = 0{,}65\ \frac{gf}{cm^3}$$

9.- Una esfera metálica pesa 1 Kf en el aire y 880 gf sumergida en agua. Calcular su densidad absoluta y relativa y su peso específico absoluto y relativo.

Solución: De acuerdo a lo encontrado en (15) :

$$\rho_r = \frac{W}{E} = \frac{1000\ gf}{1000\ gf - 880\ gf} = 8{,}3$$

La densidad relativa es numéricamente igual que el peso específico relativo {ver ec (6)}, por lo que este también vale 8,3.

La densidad absoluta será 8,3 $\frac{g}{cm^3}$ por definición.

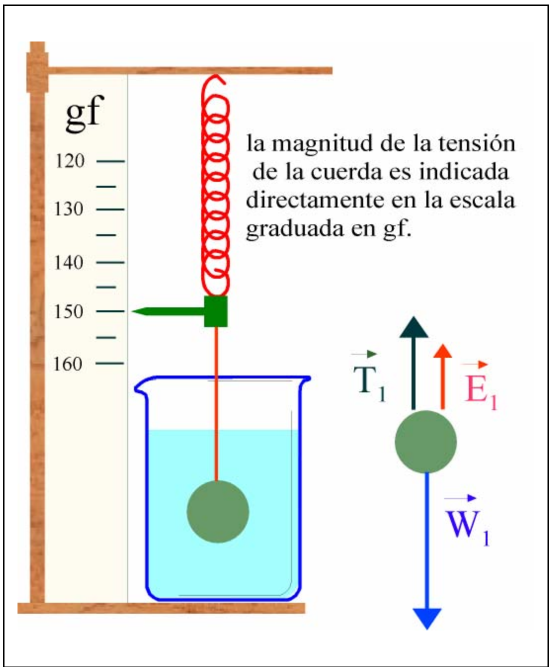
El peso específico absoluto se puede encontrar con la expresión (3):

$$Pe = \rho\, g = (8{,}3 \frac{g}{cm^3})(980 \frac{cm}{s^2})$$

$$Pe = 8\,134 \frac{D}{cm^3}$$

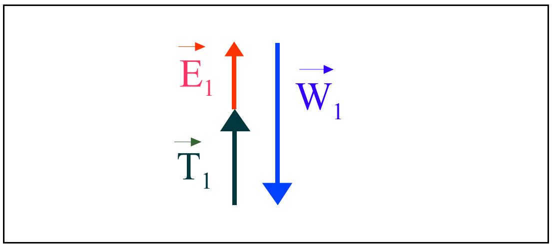
10.- Un objeto de masa 180 gramos y densidad desconocida (ρ_1), se pesa sumergido en agua obteniéndose una medida de 150 gf. Al pesarlo de nuevo, sumergido en un líquido de densidad desconocida (ρ_2), se obtiene 144 gf. Determinar la densidad del objeto y del segundo líquido.

Solución: Al pesarlo en agua se obtiene:



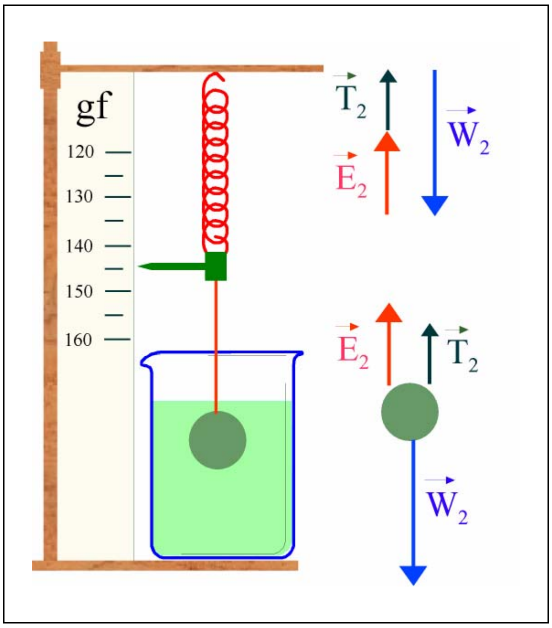
$$T_1 + E_1 - W_1 = 0$$

Pues el peso debe ser equilibrado por la suma de la tensión de la cuerda y el empuje del fluido.



En algunas ocasiones a la lectura del instrumento, que aquí mide la tensión de la cuerda (T_1) se le denomina peso aparente.

Al pesarlo en el otro líquido:



$$T_2 + E_2 - W_2 = 0$$

Note que aumentó el empuje y disminuyó la tensión en la cuerda. Entre ambos equilibran el peso del cuerpo, que no ha cambiado, pues es la fuerza con que la tierra lo atrae ($W_1 = W_2$).

y según Arquímedes:

$$E_1 = \rho_1\, g\, V$$

$$E_2 = \rho_2\, g\, V$$

donde V es el volumen del cuerpo.

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$T_1 + \rho_1\, g\, V - W_1 = 0$$
$$T_2 + \rho_2\, g\, V - W_2 = 0$$

de este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 (W_2 - T_2)}{W_1 - T_1}$$

donde:

$$W_1 = W_2 = W = m\, g = (180\ g)(\ 980\ \frac{cm}{s^2}\ )$$

W= 176 400 D

T_1 = 150 gf = 150 (980 D) = 147 000 D

T_2 = 144 gf = 144 (980 D) = 141 120 D

reemplazando :

$$\rho_2 = \frac{1 \frac{g}{cm^3} [176400\ D - 141120\ D]}{176400\ D\ -\ 147000\ D}$$

$$\rho_2 = 1{,}2 \frac{g}{cm^3}$$

La densidad del cuerpo es fácil de obtener, puesto que es igual a $\frac{m_c}{V}$.

El volumen V se puede obtener del sistema de ecuaciones:

$$V = \frac{W_1 - T_1}{\rho_1\ g}$$

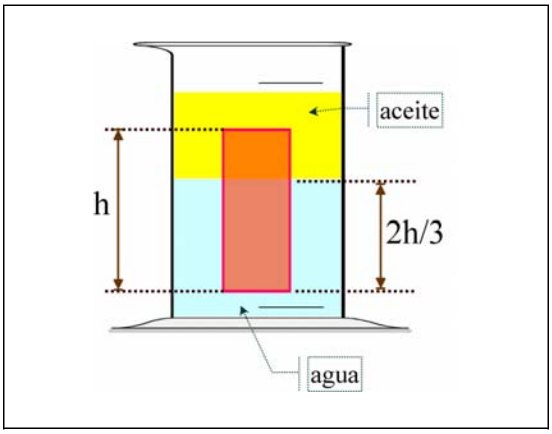
reemplazando :

$$V = \frac{176400\ D - 147000\ D}{\left(1 \frac{g}{cm^3}\right)\left(980 \frac{cm}{s^2}\right)} = 30\ cm^3$$

con lo que:

$$\rho_c = \frac{180\ g}{30\ cm^3} = 6{,}00\ \frac{g}{cm^3}$$

11.- Un recipiente contiene una capa de agua (ρ_2 = 1,00 $\frac{g}{cm^3}$), sobre la que flota una capa de aceite, de densidad ρ_1 = 0,80 $\frac{g}{cm^3}$. Un objeto cilíndrico de densidad desconocida ρ cuya área en la base es A y cuya altura es h, se deja caer al recipiente, quedando a flote finalmente cortando la superficie de separación entre el aceite y el agua, sumergido en esta última hasta la profundidad de $\frac{2h}{3}$ como se indica en la figura. Determinar la densidad del objeto.



El cuerpo está parcialmente sumergido en aceite y parcialmente sumergido en agua. Esta siendo sujeto de la acción de tres fuerzas: El peso, el empuje del volumen de aceite desplazado por el cuerpo y el empuje del volumen de agua desplazado por el cuerpo.

Está en equilibrio por lo que las fuerzas se anulan, por lo que:

$$E_1 + E_2 - W = 0$$

con:
$$E_1 = \rho_1\, g\, V = \rho_1\, g\, A\, h$$
$$E_2 = \rho_2\, g\, V = \rho_2\, g\, A\, h$$

reemplazando los datos:

$$\rho_1\, g\, A\, h + \rho_2\, g\, A\, h - \rho\, g\, A\, h = 0$$

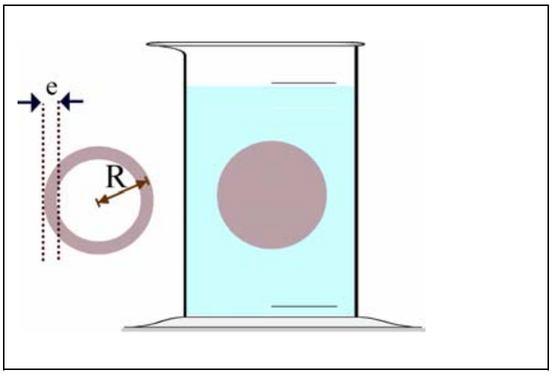
dividiendo por g A h se tiene :

$$\rho_1 + \rho_2 - \rho = 0$$

resolviendo para ρ y reemplazando:

$$\rho = 0{,}800\frac{g}{cm^3} + 1{,}00\frac{g}{cm^3} = 0{,}933\ \frac{g}{cm^3}$$

12.- Una esfera de plomo llena de aire, con radio R = 0,1 m, se encuentra totalmente sumergida en un tanque de agua como se ve en la figura.



¿ Cuál es el espesor e de la capa de plomo, si la esfera ni flota ni se hunde?. La densidad del plomo es $\rho = 11{,}3 \times 10^3\ \frac{Kg}{m^3}$.

Solución: Si está en equilibrio, las fuerzas que participan deben anularse. Estas son el peso de la esfera y el empuje del líquido.

El Peso de la esfera es:

$$W = mg = \rho_{plomo}\, V\, g$$

donde el volumen de la capa de plomo se calculará usando una aproximación, que consiste en calcular la superficie de una esfera de radio R, es decir $4\ \pi R^2$, y multiplicarla por el espesor e de la capa de plomo. Entonces el volumen que necesitamos es:

$$V = 4\, \pi\, R^2\, e$$

por tanto, el peso es:

$$W = (4\, \pi\, R^2\, e)\, (\rho_{plomo}\ g)$$

y el empuje es:

$$E = \rho_{agua}\, V\, g = \rho_{agua}\, g\, (4\, \pi\, \frac{R^3}{3})$$

Pues es el peso del volumen de agua desplazada correspondiente a una esfera de radio igual al radio exterior de la capa de plomo.
igualando ambas expresiones:

$$(4\, \pi\, R^2\, e)\, (\rho_{plomo}\, g) = \rho_{agua}\, g\, (4\, \pi\, \frac{R^3}{3})$$

$$e = \rho_{agua}\ \frac{R}{3\rho_{plomo}}$$

$$e = \frac{\left(10^3\, \frac{Kg}{m^3}\right)(0{,}1\ m)}{3\left(11{,}3x10^3\, \frac{Kg}{m^3}\right)} = 0{,}003\ m$$