4. LA TEORIA DE GRAFOS COMO BASE CONCEPTUAL

Raras veces se puede mostrar que un hecho de comportamiento posee ciertas propiedades matemáticas; y aún es más raro que la cuestión llegue a plantearse; por ello pocas veces es legítimo utilizar un modelo numérico para explicar su funcionamiento.

El problema de la reducción de los problemas del comportamiento a términos matemáticos requiere la definición de un paralelo ambiental entre el problema y una estructura matemática manifestable

Para ello matematizaremos problemas de las ciencias del comportamiento por medio de estructuras más pobres, con menos propiedades y más simples, de modo que sean fácilmente identificables en la realidad.

La teoría de grafos, teoría matemática de relaciones cualesquiera, suministra el vehículo ideal para estructuras que son ricas en aplicaciones potenciales a las ciencias del comportamiento

Dicha teoría nos ofrece estructuras pobres en propiedades que no pueden ser observadas en la conducta, pero que son ricas en posibilidades de aplicación a las ciencias del comportamiento.

Enmarcada dentro de la combinatoria, esta teoría permite modelar de forma simple cualquier sistema en el cual exista una relación binaria entre ciertos objetos; y por esto su ámbito de aplicación es muy general y cubre muchas áreas diversas.

En numerosos problemas cuantificables, en las organizaciones, intervienen una serie de elementos entre los que se establecen unas relaciones: por ejemplo, los problemas relacionados con posibilidades de comunicación (redes de comunicación y de transporte), relaciones de orden entre actividades o estructuras de producto complejas.

Los grafos son una herramienta que permite modelizar relaciones de esta naturaleza, de modo que se puedan resolver problemas asociados a esas circunstancias, frecuentemente de forma menos costosa que utilizando otras técnicas como la programación lineal.

4.1. Definiciones básicas.

Un grafo G= (X; Γ) es una estructura combinatoria constituida por un conjunto X de elementos y una función Γ sobre este conjunto A veces distinguimos el conjunto V de pares de X^2 tales que x e y ∈ X e y ∈ Γx; en este caso escribimos G= (X;V).
A los elementos de X los llamamos puntos, nodos o vértices del grafo y a los elementos de V , como veremos posteriormente, son los arcos o aristas del grafo.
El listado de parejas de puntos obtenido expresa las relaciones entre los elementos del conjunto.
Se dice que dos vértices son adyacentes si existe una arista que los relaciona. Dichos vértices y la arista serán incidentes. Por otro lado, se dice que dos aristas del grafo son independientes si no tienen vértices en común. El número de vértices de G es el orden del grado y el número de aristas es su tamaño. Podremos hablar de aristas paralelas que son aquellas que unen un mismo par de vértices. A un grafo con lazos (aristas que unen un vértice con él mismo) y/o con aristas paralelas se le puede llamar multigrafo.
Existen algunas propiedades interesantes dentro de la correspondencia Γ que nos definen grafos singulares.

- Grafo simétrico: para cualquier x e y ∈ X , (x,y)∈ V ⇔ (y,x) ∈ V
- Grafo transitivo: (x,y) ∈ V y (y,z) ∈ V => (x,z) ∈ V
- Grafo completo: para cualquier x e y ∈ X se da que o (x,y)∈V o (y,x)∈V o ambos
- Grafo reflexivo: para cualquier x e y ∈ V , (x,x) ∈ V; tal arco (x,x) se denomina loop (bucle).

Un grafo simétrico corresponde a una relación simétrica, un grafo transitivo completo a una relación de orden completa (como por ejemplo la relación de inclusión entre las partes de un conjunto), etc.
Nos encontramos con que la teoría de los grafos y la teoría de las relaciones son, en cierto modo similares.
Estas teorías son más o menos útiles en función de sus aplicaciones. La teoría de grafos nos es más útil para el estudio de relaciones arbitrarias, mientras que la teoría de las relaciones es más útil para el estudio de relaciones especiales.

Si no se considera el orden de los vértices en cada pareja, dichos pares se denominan aristas, y decimos que el grafo es no orientado.

Si se consideran las relaciones, el par de aristas se llama arco y el grafo es orientado. Un grafo no orientado puede siempre convertirse en orientado, expresando la doble relación entre los vértices.

4.2. Representación de un grafo.

Existen múltiples maneras de representar un grafo. Tomemos el grafo orientado G = (X;Γ) = (X; V) definido como un conjunto de vértices y arcos:

$$X=\{1,2,3,4,5\}$$
$$V=\{(1,5),(1,2),(2,5),(5,4),(3,4),(3,2),(2,3),(4,5)\}$$

Esta representación, pese a cumplir con los requerimientos de la definición, resulta poco práctica para la interpretación del grafo y la comprobación de propiedades relevantes de éste. Por este motivo, existen diferentes representaciones de los grafos:

1. La representación gráfica, adecuada para la interpretación y resolución de problemas en los grafos pequeños o medianos.
2. La representación mediante matriz asociada o de adyacentes, especialmente útil para el tratamiento de problemas de grafos con programas informáticos.
3. Otras representaciones, como el diccionario de grafo, buscan definir el grafo de forma más compacta, en términos de posiciones de memoria. Pueden ser útiles para representar grafos de gran tamaño.

.

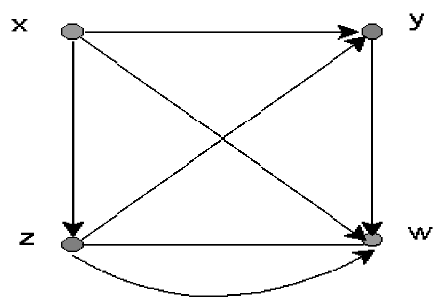
Representación gráfica.

Puede representarse por un diagrama de la siguiente manera. Los elementos de X se representan por puntos (geométricos) dispuestos de modo completamente arbitrario.
Las conexiones representarán diferentes maneras, dependiendo de que el grafo sea orientado o no:

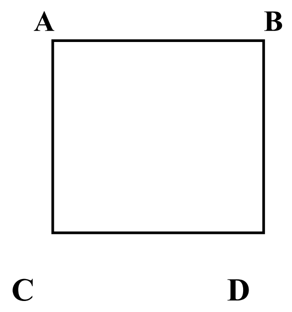
a) Si es relevante para la representación determinar cuál es el vértice origen y cuál el destino, las conexiones entre vértices se representan mediante flechas (denominadas arcos): tendremos entonces un grafo orientado. Se traza una flecha de x a y si y sólo si $(x,y) \in V$.

b) Si no es relevante determinar el sentido de la relación entre vértices, tendremos un grafo no orientado: los vértices se unirán mediante segmentos, denominados aristas.

Grafo orientado



Grafo no orientado



Matriz asociada a un grafo.

El principio en el que nos basamos para realizar una matriz asociada a un grafo es idéntico a asociar una tabla a una relación.

Si G tiene $n = |X|$ puntos formamos una matriz (o tabla) de n filas y n columnas. Cada uno de los componentes de la matriz representa una posibilidad de conexión.

A la i-ésima fila asociamos el punto $x_i \in X$; a la j-ésima columna, el punto $x_j \in X$. Cada punto está asociado a una fila y a una columna. Los elementos de la matriz se pueden denotar por g_{ij}; con $g_{ij}= 1$ si $(x_i,x_j) \in V$ o $g_{ij} = 0$ si $(x_i,x_j) \notin V$. Con esto tenemos representados por unos las conexiones existentes, y por ceros la ausencia de conexión.

Nos referiremos a la matriz asociada al grafo G con la notación $||G||$. Por lo tanto una matriz $||G||$ de nxn expresará que n es el número de vértices.

A continuación se muestra la matriz asociada al grafo del ejemplo.

$$||G||= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Una posible aplicación de dichas matrices la observamos en los sociogramas.

Puede ocurrir que para la situación que deseemos representar, no sea relevante determinar cuál de los dos vértices del grafo asociados a una conexión es el origen y cuál es el destino: tendremos entonces un grafo no orientado. En estos grafos, se cumplirá que $g_{ij} = g_{ji}$.

Si los arcos tienen asociado un valor (por ejemplo distancias entre elementos), puede representarse en la matriz $||G||$ colocando los valores de distancia en la posición correspondiente de la matriz.

Podríamos hablar de la matriz de adyacencia y la de incidencia.

La matriz de adyacencia de un grafo G con conjunto de vértices $X = \{x_1, x_2, ... x_n\}$ es la matriz cuadrada A = A(G), nxn definida por:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } (x_i, x_j) \in V \\ 0, \text{ de otro modo} \end{cases}$$

La matriz A es simétrica con elementos nulos en la diagonal. Por otra parte, el número de elementos iguales a uno en la fila (o columna) i de A es el grado del vértice x_i o, lo que es equivalente, el número de caminos que comienzan en el vértice x_i. De forma más general, las potencias de A dan información sobre los caminos de G.

Sea G un grafo con $X(G) = \{x_1, x_2, ... x_n\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, ... e_m\}$. La matriz de incidencia B= B(G) es la matriz nxm definida por:

$$(B)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ es incidente con } e_j \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases}$$

Como en el caso de la matriz de adyacencia, el número de unos en la fila i de B corresponde al grado del vértice x_i.

Otras representaciones

Podemos tener representaciones más compactas, a precio de perder la posibilidad de representar valores asociados a los arcos.

Por ejemplo, en el diccionario de grafo se enumeran los destinos de los arcos que parten de cada nodo. El diccionario inverso enumera los orígenes de los arcos que inciden en cada nodo. Para el grafo orientado del ejemplo, tenemos los siguientes diccionarios:

1	2	5	
2	3	5	
3	2	4	
4	5		
5	4		

diccionario de grafo

1			
2	1	3	
3	2		
4	3	5	
5	1	2	4

diccionario inverso

La lista de arcos permite una representación compacta del grafo. Nuevamente para el ejemplo, la lista de arcos para el grafo ejemplo queda como:

Origen	1	1	2	2	3	3	4	5
Destino	2	5	3	5	2	4	5	4

Subgrafos, grafos parciales y grafos reducidos, grafos isomorfos.

- Subgrafo: Sea $G= (X;\Gamma) = (X;V)$. $G' = (X';\Gamma) = (X';V')$ es un subgrafo de G si

  $X' \subset X$y si $x \in X' : \Gamma X' = \Gamma x \cap X'$

En otras palabras, $(x,y) \in V'$, si y sólo si $(x,y) \in V$ y x e y $\in X'$.

Se obtiene $||G'||$ eliminando de $||G||$ las filas y columnas correspondientes a X-X'.

En resumen, ciertos puntos y los arcos que parten de ellos, o inciden en ellos, son excluidos.

- Grafo parcial: $G' = (X'; V')$ es un grafo parcial de $G= (X;V)$ si

  $X' = X$ y $V' \subset\subset V$ (estrictamente incluido).

En resumen, se mantienen todos los puntos de G, quedando excluidos algunos de sus arcos.

$||G'||$ se obtiene poniendo cero en algunas casillas de $||G||$ en las que no figuraban ceros.

También existe una combinación de los dos casos anteriores. Estaríamos hablando de subgrafos parciales. Nos podemos encontrar con un subgrafo de un grafo parcial, o con un grafo parcial de un subgrafo.

- Reducción de un grafo: Sea G= (X;Γ) un grafo; defínase sobre X una partición X_1, X_2,...,X_r , tal que

$$\bigcup_{i=1}^{r} X_i = X \qquad y \qquad X_i \cap X_j = \varnothing \qquad \text{para todo } i,j = 1,2,..r$$

Sea $X^0 = \{X_1,X_2,...,X_r\}$ conjunto de partes de X y sea Γ^0 sobre X^0 una función definida por: $(X_i, X_j) \in \Gamma^0$ si y sólo si existe un punto $x \in X_i$ y un punto $y \in X_j$, tales que $(x,y) \in \Gamma$. El grafo $G^0 = (X^0; \Gamma^0)$ es un grafo reducido del grafo G.

Se pueden obtener muchos grafos reducidos de un grafo. El interés depende de las propiedades de partición de los puntos del grafo que establezcamos.

Dos grafos G= (X;V) y H= (X;V) se llaman isomorfos si existe una biyección Φ: $X(G) \rightarrow X(H)$ entre los correspondientes conjuntos de vértices, llamada isomorfismo, que preserva las adyacencias, es decir, $(u,v) \in V(G) \Leftrightarrow \Phi(u)\ \Phi(v) \in V(H)$. Dos grafos isomorfos sólo se diferencian por la rotulación de los vértices (y, en general, por su representación gráfica).

Cuando dos grafos son isomorfos tienen, obviamente, el mismo orden, el mismo tamaño y el mismo número de vértices de un grado determinado. Todos estos parámetros son ejemplos de parámetros invariantes por isomorfismo. Un invariante de un grafo G es un número asociado a G que toma el mismo valor para cada grafo isomorfo a G. Dado un grafo, no se conoce ningún conjunto completo de invariantes, es decir, un conjunto de invariantes que determinen el grafo salvo isomorfismos.

4.3. Topología de grafos

La determinación de las condiciones que ha de cumplir un grafo para representar determinadas situaciones, o para que le sean aplicables determinados algoritmos, exige definir determinadas propiedades topológicas a cumplir por los grafos. Seguidamente se exponen algunas de estas propiedades, tanto para grafos orientados como para no orientados.

Grafos orientados.

El grado de un vértice se define como el número total de arcos que inciden en o parten de dicho vértice, y evalúa su grado de conexión con el resto de vértices del grafo. Para un grafo orientado, podemos definir también los semigrados interior y exterior.

a) El semigrado interior de un vértice es el número de arcos con destino en el vértice. Para determinadas situaciones, un vértice con semigrado interior cero puede ser un origen del grafo.
b) El semigrado exterior de un vértice es el número de arcos con origen en el vértice. Un vértice con semigrado exterior cero puede representar, en determinadas situaciones, un destino del grafo.

La matriz asociada a un grafo nos facilita el estudio de algunas propiedades de un grafo. A partir de ella podemos establecer las anteriores definiciones relacionadas con la matriz.

1) Grado de emisión o semigrado externo de $x_i \in X$: el número de arcos que parten de x_i.

$$d^{+}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}$$

2) Grado de recepción o semigrado interno de $x_j \in X$: el número de arcos que inciden en x_j.

$$d^{-}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}$$

El concepto de grafo dirigido o digrafo deriva directamente del de grafo exigiendo que las aristas, sean pares ordenados de vértices distintos. En este caso pasaran a llamarse arcos. Cuando hablamos de redes de trasporte hablamos de este tipo de grafos.

Dado un grafo (multigrafo) G= (X,V), se cumple

$$\sum_{u \in X} d(u) = 2|\mathrm{V}|$$

Este resultado se conoce como el lema de las manos estrechadas (handshaking lemma) porque se puede formular diciendo que en toda reunión de personas el número total de manos que se estrechan, cuando las personas se saludan entre ellas, es siempre par. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente:

Corolario. En todo grafo (multigrafo) G el número de vértices con grado impar es par.

Demostración. Separando en la suma $\sum_{u \in X} d(u)$ los términos correspondientes a vértices de grado par de aquellos correspondientes a vértices de grado impar se tiene

$$2|\mathrm{V}| = \sum_{d(u)\,par} d(u) + \sum_{d(u)\,impar} d(u)$$

donde, siendo el primer sumando y la suma pares, el segundo sumando ha de ser también par.

Caminos, bucles y circuitos de un grafo.

Se denomina camino de un grafo G = (X; V) al subconjunto completamente ordenado V' de V tal que el k-ésimo arco de V termina en el punto de X del que parte el (k+1)-ésimo arco.

Si x es el origen del 1[er] arco de V' e y es el término del último arco de V' el camino se puede representar por γ (x,y).

Dos vértices pueden no estar conectados directamente, pero si indirectamente a través de un camino. Más formalmente, un camino es una sucesión de arcos tal que el vértice extremo de cada uno (exceptuando el último) coincide con el vértice extremo del siguiente en la sucesión.

Si queremos especificar puntos intermedios del camino (puntos a, b y c) podemos hacerlo de la forma γ (xabcy).

Si el grafo representa una red de tráfico con sus calles de dirección única, se verifica que un camino representa efectivamente una posible ruta.

Un camino es elemental si nunca pasa dos veces por el mismo punto.

Como ya hemos visto en el caso de grafos reflexivos, un vértice puede estar conectado consigo mismo de forma directa a través de un bucle o lazo, que no es más que un arco cuyos vértices origen y destino coinciden.
También puede estar conectado a través de otros vértices mediante un circuito, definido como un camino cuyos vértices origen y destino coinciden. En otras palabras, un circuito es un camino que vuelve a su punto de partida.

* Caminos y circuitos hamiltonianos: Un camino hamiltoniano es un camino elemental que pasa por todos los puntos del grafo. Un circuito hamiltoniano es un camino hamiltoniano que vuelve al punto de partida.

Grafos no orientados.

Aunque algunos conceptos definidos para grafos orientados son válidos también para grafos no orientados: así, se definen de la misma manera los conceptos de bucle y de grado de un vértice. Sin embargo, no tiene sentido para grafos no orientados distinguir entre semigrado interior y semigrado exterior. Finalmente, los conceptos relacionados con la conexión entre vértices tienen definición específica en grafos no orientados.

Cadenas y ciclos

Si analizamos un grafo sin prestar atención a la dirección de las flechas, podemos hablar de cadenas y ciclos.
Una cadena puede definirse como un camino no orientado: es una sucesión de aristas tal que el vértice extremo de cada una (exceptuando la última) coincide con el vértice extremo de la siguiente en la sucesión. Dos vértices que no están conectados directamente pueden estarlo indirectamente mediante una cadena.
Asimismo, un vértice puede estar conectado consigo mismo directamente mediante un bucle, o bien, mediante un ciclo, definido como un camino que se inicia y termina en el mismo vértice. Para los grafos orientados, puede definirse también ciclo como un conjunto de arcos que unen una serie de vértices, prescindiendo de su orientación.

En el proceso de transformación del grafo en un grafo simétrico reemplazamos el término arco por arista, el término camino por cadena y el término circuito por ciclo.

Arborescencias y árboles.

Los árboles y arborescencias son un tipo particular de grafos, útil para representar determinadas situaciones.
Un grafo G= (X;V) es una arborescencia con raíz a si:

1) Todo punto $x \in X$, para $x \neq a$ tiene un grado de recepción igual a uno.
2) El grado de recepción de a es cero.
3) El grafo G no contiene ningún circuito.

Podemos decir, por lo tanto, que una arborescencia es un grafo orientado, fuertemente conexo, sin ciclos ni bucles, en que todos los vértices tendrán semigrado interior igual a la unidad, excepto uno, raíz de la arborescencia, cuyo semigrado interior es cero.
Una arborescencia es un conjunto de caminos divergentes. Se denominan ramificaciones a los puntos cuyo grado de emisión es mayor que uno.
Las arborescencias son útiles para representar, por ejemplo, procesos decisionales.
Si G= (X;V) es una arborescencia el número de arcos de G es $|V| = (n-1)$ cuando el número de puntos de G es $|X| = n$.

La noción de árbol corresponde a la de arborescencia cuando no se toma en cuenta la dirección de los arcos, o si se prefiere, cuando el grafo considerado es simétrico.
Un árbol es un conjunto de aristas (en contraposición con arcos) que constituye un grafo con (n-1) aristas (en contraposición con arcos) y sin ciclos (en contraposición con circuitos).
Una arborescencia constituye un árbol, mientras que la inversa no se da generalmente.
Un árbol no tiene raíz, todo punto puede ser considerado como raíz.
Un árbol generador de un grafo G es un subgrafo generador de G que es árbol.

4.4. Conexidad de un grafo y nociones afines.

A diferencia de otros conceptos anteriores, que afectaban a vértices del grafo, la conectividad es una propiedad del grafo en su conjunto. Un grafo orientado puede ser conexo o fuertemente conexo. Un grafo no orientado sólo puede ser conexo.

La noción de conexidad de un grafo es importante para la aplicación de la teoría de grafos a las ciencias sociales: constituye la versión matemática de uno de los aspectos de la noción psicológica de cohesividad de grupo. Intuitivamente se refiere a la densidad de relaciones.

Los trabajos de Roy (1961), Harary (1959) y Luce (1950, 1952) son de gran importancia en este campo.

Tipos de conexidad

Sea $G = (X;\Gamma)$ un grafo.

- G es fuertemente conexo si para todo par (x,y) de puntos de G existe al menos un camino $\gamma(xy)$ en G. En otras palabras, podemos ir desde cualquier punto a otro cualesquiera del grafo.
- G es semifuertemente conexo o conexo unilateralmente si para todo par de puntos x, y en G existe un camino $\gamma(xy)$ o un camino $\gamma(yx)$ en G.
- G es quasi-fuertemente conexo si para todo par de puntos x,y en G existe en G un punto z y un punto z' (eventualmente igual a x o y) tal que algunos de los caminos $\gamma(xz)$, $\gamma(yz)$, $\gamma(z'x)$ y $\gamma(z'y)$ figuran en G.
- G es simplemente conexo o débilmente conexo si para todo par (x,y) de G existe una cadena (xy) en G.

Teorema: Todo grafo fuertemente conexo es semifuertemente conexo. Todo grafo semifuertemente conexo es quasi-fuertemente conexo. Todo grafo quasi-fuertemente conexo es débilmente conexo.

Un grafo débilmente conexo es un grafo conexo. Un grafo que no es siquiera débilmente conexo es inconexo. Un grafo conexo simétrico es fuertemente conexo.

Se denomina máximo componente conexo de un tipo dado de un grafo G a todo subgrafo de G que:

1) es conexo del tipo dado
2) no es un subgrafo de un subgrafo conexo, de G, del tipo dado.

Grado de conexidad.

Pueden distinguirse unos grafos de otros dentro de un mismo tipo de conexidad. Por ejemplo, siendo dos grafos fuertemente conexos, puede que se necesite suprimir un número diferente de arcos para cambiar el tipo de conexidad en dichos grafos.
Luce (1950) llama grado de conexidad de un grafo al mínimo número de arcos que deber ser suprimidos para convertirlo en inconexo.
Esta definición se originó en el ámbito de estudio de los grafos simétricos, que comprende un solo tipo de conexidad. Desde un punto de vista general podemos considerar el mínimo número de arcos que deben ser suprimidos para cambiar su tipo de conexidad de un grafo a un tipo inferior.

Llamamos grado de conexidad relativo a un tipo dado de conexidad al mínimo número de arcos que deber ser suprimidos para cambiar su tipo de conexidad.
Sea G' = (X';V') un subgrafo de G = (X; V) , G' es una "clique" si (x,y) $\in$ V' si y sólo si x e y $\in$ X', es decir, si existen en G' todos los arcos posibles.

Longitudes y desviaciones de un grafo.

La longitud de un camino γ se denota por l(γ) y se mide, por definición, por el número de arcos que constituyen el camino.
Desde un punto x a un punto y puede haber muchos caminos γ(xy); la desviación de x a y es por definición la longitud del camino más corto de x a y.

$$e(xy) = \min_i \{1 \left[\gamma i(xy)\right]\}$$

Un camino γ(xy) cuya longitud es igual a e (xy) es una pista y se representa por θ (xy).
Generalmente la desviación no es una distancia. En un grafo simétrico las desviaciones son distancias.

Cuando no existe un camino de x a y lo denotamos mediante e(xy) = ∞ (infinito). Generalmente se considera igual a cero la desviación de un punto respecto de si mismo; e(xx) = 0.
Si entre todo par de vértices de G existe un camino, la distancia, d(u,v), entre dos vértices u y v es la longitud mínima de un camino entre estos vértices. En un grafo conexo G, la distancia es una métrica, ya que para todo u,v,w, ∈ X(G) se cumplen las tres condiciones de distancia expuestas anteriormente para conjuntos.

Si G es conexo, su diámetro, D= D(G), es la mas grande de las distancias en el grafo.
La excentricidad de un vértice u ∈ X es la máxima de las distancias entre u y los otros vértices de G. Desde este punto de vista, el diámetro del grafo también se puede definir como la máxima de las excentricidades. Por otra parte, la mínima de las excentricidades de los vértices del grafo se llama radio. El centro del grafo es el conjunto de vértices con excentricidad igual al radio.

4.5. Modelización mediante grafos.

Mediante la teoría de grafos pueden representarse gran número de situaciones que supongan relaciones entre diversos elementos.

Redes de comunicación.

Un grupo social puede existir como tal grupo, sólo si sus miembros se comunican entre sí por medio de la expresión oral, escrita, mímica o de cualquier otro tipo.
Esta proposición es fácilmente admitida. Se ha de tener en cuenta el hecho de que toda comunicación, cualquiera que sea su naturaleza, requiere un soporte físico adecuado para poder llevarse a cabo.
La comunicación implica procesos físicos más o menos complejos y , en muchos casos el medio físico interviene facilitando o impidiendo la comunicación entre ciertos miembros del grupo.
El conjunto de condiciones físicas que posibilitan la comunicación en un grupo será denominado red de comunicación.

El problema psico-sociológico que se plantea es el siguiente: en qué medida depende la vida del grupo de la red de comunicación disponible.
Bavelas (1948 y 1950) y su escuela de investigación (especialmente Leavitt 1951) comenzaron a tratar este problema de un modo científico, matemático y experimental.
Como veremos una red puede ser representada por un grafo.
La idea de Bavelas fue buscar ciertas características matemáticas del grafo que representa una red y examinar experimentalmente su influjo en la vida del grupo.
Sin embargo el análisis de diferentes trabajos y nuevos experimentos (Flament 1965 y 1958) ha mostrado que estas características de la red son insuficientes para explicar los fenómenos; la tarea asignada al grupo y especialmente las relaciones entre la tarea y la red.
Leavitt (1951) parece que vislumbró este aspecto del problema pero a causa del insuficiente análisis matemático, no se reveló su importancia.

De manera bastante natural, un grafo puede representar las posibilidades de comunicación existentes entre diferentes puntos. Lo más frecuente es que los puntos estén representados en el grafo mediante vértices, y las posibilidades de comunicación mediante arcos (o en ocasiones aristas, si la comunicación entre dos nodos es siempre igual entre los dos sentidos). La representación de las posibilidades de comunicación se completa asociando a cada arco una magnitud relevante para la representación (distancia, tiempo, etc.)
Mediante grafos de este tipo pueden resolverse problemas de conectividad o problemas de caminos, en los que se trata de encontrar el camino de mínima distancia entre dos vértices.

Descripción de una red de comunicación.

Sea $X= \{x_1,x_2,...,x_n\}$ el conjunto de n miembros de un grupo. Definimos una aplicación Γ sobre X^2 que expresa las posibilidades de comunicación en el grupo:
$(x_i,x_j) \in \Gamma$ si y sólo si x_i puede dirigir una comunicación a xj.
Por consiguiente una red de comunicación puede representarse por un grafo, el cual será designado por N:

$$N= (X;\Gamma)$$

Si N es una red de comunicación, un arco (x_i , x_j) $\in$ N es denominado canal de comunicación.

En muchos casos N es un grafo simétrico:

$$(x_i , x_j) \in \Gamma <=> (x_j , x_i) \in \Gamma$$

pero existen grupos en los que algunas posibilidades de comunicación son unidireccionales. Este caso se da frecuentemente en redes de tráfico.

Red valorada

En numerosos problemas no basa con considerar sólo la alternativa de que si xi puede o no puede comunicar con x_j. Resulta necesario tomar en consideración la capacidad de cada canal, la accesibilidad para su utilización, el tiempo que necesita y el coste de la transmisión de un mensaje en esta anal, etc...

Las correspondientes indicaciones numéricas constituyen valoraciones de N

En lugar de asignar varios sistemas de valoración de N es conveniente, siempre que sea posible, integrarlos en un sistema único.

En general, siempre que se utiliza una valoración única esta representa el coste total del uso de cada canal.

La valoración de un canal pude consistir en una constante firmemente determinado, o simplemente en un valor medio que varía más o menos al azar (en relación con el proceso de comunicación estudiado).

Si el coste de utilización de un canal varía con su uso, es entonces legítima la representación de la red por un grafo valorado.

Cuando todos los canales estén igualmente valorados puede establecerse una valoración común igual a uno, pudiendo, en efecto, considerar la red sólo en su forma no valorada.

Red conexa.

Supongamos que x_i quiere enviar a x_j un mensaje z.

a) Si (x_i, x_j) $\in \Gamma$, no hay problema y se dice que la comunicación z de x_i a x_j es directa.

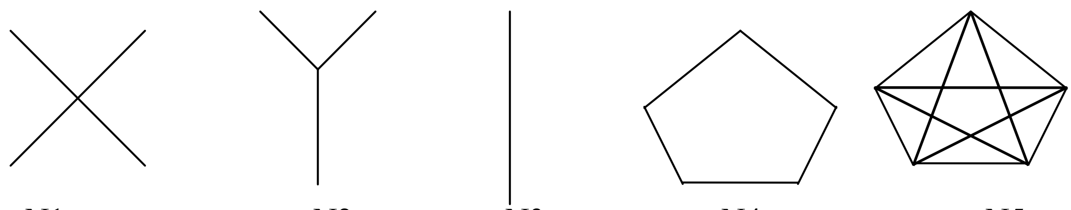
b) Si $(x_i, x_j) \notin \Gamma$ y existe en N un camino $\gamma(x_i x_j) = (x_i x_{i+1} x_{i+2} ... x_j)$ los puntos x_{i+1} ,x_{i+2} ,.., pueden retransmitir el mensaje de x_i a x_j ,diciéndose que la comunicación z de x_i a x_j es indirecta.

c) Si no existe ningún camino $\gamma(x_i x_j)$ en N , decimos que la comunicación z de x_i a x_j es imposible.

Las nociones de conexidad son importantes en el estudio de las redes de comunicación. Todas las comunicaciones imaginables serán posibles directa o indirectamente si y sólo si N es fuertemente conexo.

Índice de centralidad de Bavelas.

Examinando las redes de la figura Bavelas (1950) observa que intuitivamente puede decir que N_1 está más centralizado que N_2, N_2 más que N_3, etc. Define entonces un índice de centralidad con el cual pueden ser clasificadas las cuatro redes de la figura, en una dirección paralela a su orden de centralización.



N1 N2 N3 N4 N5

El índice de centralidad de Bavelas puede ser definido a partir de la matriz de desviaciones asociada a N: E(N).

Para todo i= 1,2,..,n se calcula $s_i = \sum_j^n e(xixj)$; después se suma:

$$S = \sum_i^n s_i$$

El índice de centralidad de punto se define como $c_i = S / s_i$; el índice (global) de centralidad es la suma de las centralidades de punto:

$$C = \sum_i^n c_i$$

Red	N1	N2	N3	N4	N5
Centralidad	26.4	26.2	26.1	25	25

Las redes N1 a N4 están clasificadas por el índice como se esperaba; pero N4 y N5 tienen el mismo índice de centralidad, aun cuando no es posible admitir que estén igualmente centralizadas.

Debe por tanto examinarse la verdadera significación de este índice. A partir de las definiciones obtenemos

$$C=\sum_{i}^{n} c_i = \sum_{i}^{n} \frac{S}{s_i} = \sum_{i}^{n} \frac{\sum_{j}^{n} sj}{si} = \sum_{i,j}^{n^2} \frac{s_j}{s_i} = \sum_{i}^{n} \frac{s_i}{s_i} + \sum_{i \neq j}^{n(n-1)/2} \frac{s_i}{s_j} + \frac{s_j}{s_i} = n + \sum_{i \neq j}^{n(n-1)/2} q_{ij}$$

donde $q_{ij} = \frac{s_i}{s_j} + \frac{s_j}{s_i}$

Puede mostrarse fácilmente que q_{ij} es mínimo si y sólo si $s_i = s_j$; si esto es así para todos los pares (ij), se obtiene el índice de centralidad mínimo:

$$e_{min} = n^2$$

esto es lo que se observa en N4 y N5.

Esto nos lleva a pensar que el índice de Bavelas mide específicamente el grado de disparidad entre los puntos de un grafo.

Relaciones de orden.

También pueden representarse mediante un grafo las relaciones de sucesión entre las actividades de un proyecto.

Es usual representar estas situaciones en grafos en los que las actividades pueden estar representadas por arcos (grafo PERT) o por nodos (grafo ROY).

En el primer caso los vértices del grafo representan etapas (instantes de tiempo en que se termina o empieza una actividad). Existe una restricción propia del grafo PERT, entre dos etapas sólo puede haber una actividad.

El grafo ROY suministra la misma información que el PERT, diferenciándose de éste en que las actividades están representadas pro vértices. Deben añadirse dos vértices representativos del inicio y del final del proyecto.

Estos grafos se emplean frecuentemente para la gestión de proyectos. Mediante su uso podemos determinar entre otros parámetros:

1. Tiempo en que puede finalizarse el proyecto.
2. Holgura de las actividades (retraso máximo que no afecta a la duración del proyecto)
3. Camino crítico (conjunto de actividades de holgura cero, que determina la duración del proyecto)

Estructura de un producto.

Puede representarse mediante un grafo la estructura de un producto complejo. Este tipo de grafos se utiliza en procedimientos de previsión de la demanda dependiente en el sistema de gestión de inventarios MRP 1 (Material Requirements Planning).

Redes de trasporte

También es posible representar mediante un gafo orientado los flujos que circulan a través de una red de transporte. En ciertas aplicaciones interesa determinar el flujo máximo (de un fluido, datos, etc.) que fluye a través de una red desde un cierto nodo s (origen) hasta otro nodo t (destino), cuando los enlaces de la red tienen una capacidad limitada de transmisión del flujo..Una red de transporte deberá tener uno o varios vértices origen (de semigrado interior cero) y uno o varios vértices destino (de semigrado exterior cero). El resto de vértices, con semigrados interior y exterior no nulos, serán vértices de transbordo.

Una red de transporte X = (G,s,t,c) es un digrafo G= (V,A) con dos vértices distinguidos, s y t, y una función c llamada capacidad que asigna a cada arco a = (u,v) $\in$ A(G) un valor entero no negativo c(a) = c(u,v) llamado la capacidad del arco a.

Dada una red de transporte X, una función $\Phi : A \to Z$ que cumple:

$$0 \leq \Phi(a) = \Phi(u,v) \leq c(a) \qquad \text{para cada a = (u,v)} \in \text{A(G)}$$

$$\text{y} \qquad \sum_{v \in \Gamma^+(u)} \Phi(u,v) = \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \Phi(v,u) \quad \text{para cada u} \in \text{V(G) - \{s,t\}}$$

se llama un flujo en X. Diremos también que $\Phi(a)$ es el flujo que atraviesa el arco a.

La primera condición acota el flujo que atraviesa un arco determinado por su capacidad.

También podríamos introducir las nociones de flujo neto saliente de u

$$\sum_{v \in \Gamma^+(u)} \Phi(u,v) - \sum_{v \in \Gamma^-(u)} \Phi(v,u)$$

y, análogamente el flujo neto entrante en u

$$\sum_{v \in \Gamma^-(u)} \Phi(v,u) - \sum_{v \in \Gamma^+(u)} \Phi(u,v)$$

La segunda condición dice que el flujo neto saliente de (o entrante en) cada vértice u diferente de s y t vale cero.

El valor del flujo, val(Φ), se define por:

$$\text{val}(\Phi) = \sum_{v \in \Gamma^+(s)} \Phi(s,v) - \sum_{v \in \Gamma^-(s)} \Phi(v,s) = \sum_{v \in \Gamma^-(t)} \Phi(v,t) - \sum_{v \in \Gamma^+(t)} \Phi(t,v)$$

y corresponde al flujo neto saliente del vértice s. De hecho, el valor del flujo es también el flujo neto entrante en t.

Dado S $\subset$ V, denotamos por (S, $\overline{S}$) el conjunto de todos los arcos (u,v) con u $\in$ S y v $\in$ $\overline{S}$, donde $\overline{S}$ = V/S. Un s-t corte es un conjunto F=(S, $\overline{S}$) tal que s $\in$ S y t $\in$ $\overline{S}$. La suma $\sum_{a \in F} c(a)$ de las capacidades de los arcos que forman F es la capacidad c(F) del s-t corte.

Observamos que un s-t corte F desconecta G en el sentido que G-F no contiene ningún camino dirigido de s hacia t.
El valor de flujo es menor o igual que la capacidad de un s-t corte.

$$\mathrm{val}(\Phi) \leq c(F)$$

Teorema del máximo flujo y del mínimo corte.

Un flujo máximo en una red de transporte X es un flujo Φ con la propiedad que val(Φ) $\geq$ val(Φ'), siendo Φ' cualquier otro flujo de red. Dado que el número de flujos que podemos definir en X es finito, siempre existe un flujo máximo.
Un s-t corte F se dice que es un corte mínimo si c(F) $\leq$ c(F') para cualquier otro s-t corte F'. Si Φ y F son un flujo y un corte en X tales que val(Φ)=c(F), entonces a partir de val(Φ)$\leq$c(F) , Φ es un flujo máximo y F es un corte mínimo.
El resultado más importante sobre redes de transporte lo da el teorema siguiente, debido a Ford y Fulkerson y conocido también como el teorema del flujo máximo- corte mínimo.
Teorema: En cualquier red de transporte, el valor de un flujo máximo es igual a la capacidad de un corte mínimo.

En una red de transporte, se asociarán a los arcos los valores del flujo que circula por dicha comunicación. Dichos flujos cumplirán algunas propiedades importantes:

1) En un vértice de transbordo, el total de los flujos entrantes (valores de los arcos que tienen como destino el vértice) será igual al de los flujos salientes (valores de los arcos que tienen como origen el vértice)
2) La suma de los valores de los flujos de los arcos que tienen como origen vértices origen será igual al de la suma de los valores de los flujos de los arcos que tiene como destino vértices destino. Dicho valor será el flujo total de la red de transporte.

Cada red de transporte admite un flujo de valor nulo.

Además del flujo que circula por el arco, podemos asociar otros valores a los arcos:

a) El flujo máximo y el flujo mínimo que pueden y deben, respectivamente, circular por un arco. Con dichos valores podremos resolver el problema del flujo total máximo que circula por una red de transporte.
b) El coste de vehicular una unidad de flujo por cada uno de los arcos. Dichos valores permitirán resolver el problema de flujo de coste mínimo, que consiste en vehicular por la red un determinado valor de flujo total.

1) Este modelo permite estudiar una red en la que pueden fluir elementos con una cierta capacidad límite.
2) Podemos encontrarnos con diversos tipos de problemas:

a) Problemas de caminos: se trata de algoritmos que permiten establecer la conexión entre todos los nodos del grafo a mínimo coste, o bien encontrar el camino más corto entre dos nodos del grafo.
b) Problemas de flujo total máximo: se trata de determinar cuál es el flujo máximo que puede circular por una red de transporte.

Problemas de caminos

En los problemas de caminos, se trabaja con grafos cuyos arcos o aristas tienen asociado un determinado valor (que puede corresponder, aunque no necesariamente, a la distancia entre los vértices unidos por el arco o arista). Dichos problemas pueden reducirse a encontrar:

1. el conjunto de aristas que conecta todos los nodos del grafo, tal que la suma de los valores asociados a las aristas sea mínimo. Dado que dicho conjunto ha de ser necesariamente un árbol, suele llamarse a este problema de árbol parcial mínimo.
2. el camino más corte desde un vértice origen hasta otro extremo. Se denominará camino más corto a aquel cuya suma de los valores asociados de los arcos que lo componen sea mínimo.

Problemas de flujos

Es frecuente que nos encontremos con situaciones en las que debamos tratar con magnitudes de flujo: fluidos que circulan por un sistema de tuberías, cadenas de montaje en la que las máquinas tienen diferentes valores de productividad, tráfico, etc. Estas situaciones pueden modelizarse mediante un grafo que representa una red de transporte. Los problemas más frecuentes en estos casos consisten en:

1. Determinar el flujo total máximo que es capaz de vehicular el sistema.
2. Si conocemos el coste de vehicular el flujo por cada uno de los vértices del grafo, puede interesarnos conocer cuánto flujo debe circular por cada arista para así obtener el flujo a coste mínimo para un determinado valor del flujo total.

5. INTRUMENTOS ASOCIADOS A UNA LECTURA DE LA RED SEGÚN TEORÍA DE GRAFOS.

Según Genre-Grandpierre, si la teoría de grafos permite medir la proximidad interna a una red, es decir, valorar las modificaciones de las relaciones de proximidad entre los polos que induce, una aproximación basada en la geometría fractal puede caracterizar en cierta manera la proximidad externa a la red y su cualidad de conexión espacial. Paralelamente se puede considerar que diversas características fractales pueden ser observadas en el interior de las ciudades, donde este tipo de análisis puede servir para describir la organización jerárquica de la red de vialidad a nivel de barrio. Por otra parte se observa que el trazado de ciertas redes de transporte público sigue igualmente una ley fractal, característica de una jerarquía interna en la organización de una red, que servirá una superficie siempre de forma incompleta. En definitiva, Frankhauser se sirve de la fractalidad según un proceso de auto-organización al cual añade los factores de las redes