# Juegos cooperativos y sus aplicaciones económicas

Joss Sánchez-Pérez[1]
Facultad de Economía, UASLP
San Luis Potosí, México
joss.sanchez@uaslp.mx

**Resumen**

En este artículo se presentan los conceptos y resultados básicos de la teoría de juegos cooperativos en un nivel elemental. Algunos ejemplos de aplicación económica son desarrollados progresivamente conforme el presente trabajo. Se definen la función característica, el núcleo y el valor de Shapley, así como también su cálculo para los distintos ejemplos.

**Abstract**

In this article we present basic concepts and results of cooperative game theory, at an elementary level. Some examples of economic applications are progressively developed throughout the article. The characteristic function, the core and the Shapley value are defined and computed for the distinct examples.

Palabras clave: Juegos cooperativos, soluciones, valor de Shapley.
Clasificación JEL: C02, C71.

## 1. Introducción

De forma general, la teoría de juegos es una colección de modelos matemáticos para estudiar situaciones de conflicto y/o cooperación. Su función es el explicar o dar una guía normativa para el comportamiento racional de

[1] The author acknowledges support from CONACYT research grant 82610.

agentes económicos enfrentando decisiones estratégicas o interacciones sociales. La teoría concierne a comportamiento estratégico, situaciones de equilibrio, negociación, formación de coaliciones, distribución justa, y conceptos similares relacionados a resolver diferencias entre grupos. La competencia en muchas actividades sociales ha hecho de la teoría de juegos un enfoque fundamental para modelar diversas situaciones, tales como en economía, ciencia política, investigación de operaciones y planeación militar.

La teoría de juegos se ha desarrollado gradualmente y, a grandes rasgos, se pueden distinguir dos grandes áreas: la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos, la cual incluye a su vez dos líneas de investigación: los denominados juegos de utilidad transferible y los juegos de utilidad no transferible. En este artículo se revisarán los conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos $n$-personales de utilidad transferible, con respectivas aplicaciones para introducir e ilustrar nociones básicas.

**Ejemplo 1 (Problema de bancarrota)** *Una pequeña compañía se declara en bancarrota y debe dinero a tres acreedores. La compañía debe* $\$100,000$ *al acreedor* $1$*,* $\$200,000$ *al acreedor* $2$ *y,* $\$300,000$ *al acreedor* $3$*. Si la compañía tiene sólo* $\$360,000$ *para cubrir estas deudas, ¿cómo debería de dividirse el valor neto de la compañía entre sus acreedores?. Naturalmente, es una situación en la que hay un problema de distribución en la que hay que asignar una cantidad insuficiente que no es capaz de satisfacer las demandas de todos los agentes implicados en el reparto.*

**Ejemplo 2 (Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas)** *Es un organismo de la ONU encargado de mantener la paz y seguridad entre las naciones. A diferencia de otros organismos de la ONU que únicamente pueden realizar recomendaciones a los gobiernos, este Consejo de Seguridad puede tomar decisiones (conocidas como resoluciones) y obligar a los miembros a cumplirlas. El Consejo está formado por quince naciones, cinco son miembros permanentes (China, Francia, Reino Unido, Rusia y Estados Unidos), y 10 miembros son no permanentes (Austria, Burkina Faso, Costa Rica, Croacia, Japón, Libia, México, Turquía, Uganda y Vietnam) y son electos* *cada dos años como representantes regionales. La investigación de la disputa y aplicación de sanciones, y las decisiones requieren voto a favor de al menos nueve miembros, incluyendo los cinco miembros permanentes. Si un miembro permanente vota en contra, la resolución simplemente no pasa. Este es el famoso "derecho a veto" de "los cinco grandes", usado cientos de veces desde 1945. Este sistema, obviamente, da a cada miembro permanente un mayor poder que un miembro no permanente. Pero, ¿qué tan mayor?.*

**Ejemplo 3 (Manejo de inversiones)** *Un inversionista (jugador* 1*) desea invertir la cantidad de* $1,800,000 *sobre una base a corto plazo (de 3 meses). En México, el tipo de interés anual es una función de la suma invertida.*

| *Depósito* | *Tasa de interés anual* |
|---:|---:|
| \$0 - \$1,000,000 | 7.75 % |
| \$1,000,000 - \$3,000,000 | 10.25 % |
| \$3,000,000 - \$5,000,000 | 12 % |

*Este inversionista contacta a un segundo y tercer inversionistas (jugador* 2 *y* 3*, respectivamente). El inversionista* 2 *está de acuerdo con depositar* $900,000 *en el fondo común y el tesorero* 3*,* $300,000. *Así pues, se alcanza un fondo de* $3,000,000 *y la tasa de interés será del* 12 %. *¿Cómo se debería repartir la ganancia entre las tres asociaciones?.*

Este par de ejemplos tienen algunos elementos en común:

- Los participantes tienen algunos beneficios para compartir (poder político, dinero, etc...).
- Esta oportunidad de dividir los beneficios resulta de la cooperación de todos los participantes o de un subgrupo de ellos.
- Los agentes son libres de participar en negociaciones o en formación de coaliciones.
- Los participantes tienen objetivos en conflicto; cada uno quiere asegurar la mayor parte del beneficio para sí mismo.

La teoría de juegos cooperativos analiza este tipo de situaciones, donde los objetivos de los participantes se prestan parcialmente para darse una cooperación y parcialmente para entrar en conflicto. El cooperar o no, dependerá de los intereses de los participantes, con el fin de obtener el mayor beneficio posible. Tales situaciones usualmente se pueden modelar con juegos cooperativos $n$-personales en forma de función característica, definidos a continuación.

## 2. Juegos en forma de función característica

Primeramente, especificaremos las situaciones que se considerarán en este trabajo, así como algunas suposiciones implícitas.

- Los participantes están libremente autorizados a cooperar, negociar, hacer contratos unos con otros, formar grupos o subgrupos,...
- Todos los participantes están informados acerca de las reglas del juego, de los pagos bajo cada situación posible, todas las estrategias disponibles,...
- Los participantes negocian acerca de cómo dividir ciertos beneficios (tales como dinero o poder político), los cuales son completamente transferibles entre jugadores y evaluados del mismo modo por todos. Esta es la razón por la cual la clase de juegos tratados aquí, son llamados "juegos cooperativos con utilidad transferible".

**Definición 4** *Por un juego n-personal en forma de función característica (y en lo sucesivo, simplemente un juego) se entenderá una pareja* $(N, v)$, *donde* $N = \{1, ..., n\}$ *es un conjunto finito de jugadores y* $v$ *es una función* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *tal que* $v(\varnothing) = 0$.

A los subconjuntos $S$ de $N$ se les llama coaliciones y son subconjuntos de jugadores que potencialmente pueden jugar unidos, sin considerar las acciones que los demás jugadores puedan llevar a cabo. La coalición formada por todos los jugadores se le llama la gran coalición. Si los jugadores que forman $S$ juegan unidos tienen una valía $v(S)$. Intuitivamente, las cantidades $v(S)$ pueden ser ganancias conjuntas, costos comunes o simplemente 1 o 0 dependiendo de si la coalición $S$ logra o no mayoría en una votación. De cualquier forma a $v(S)$, siempre lo consideraremos como un número real. Aquí, se supondrá un conjunto de jugadores fijo, así que se identificará el juego $(N, v)$ con su función característica $v$. Adicionalmente, se denotará la cardinalidad de un conjunto por su letra minúscula correspondiente; por ejemplo $|N| = n$ y $|S| = s$.

Denotaremos por $G$ al espacio de juegos, es decir,

$$G = \{v : 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\varnothing) = 0\}$$

Se puede mostrar que este conjunto de juegos con espacio de jugadores $N = \{1, ..., n\}$ forma un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se define la suma y el producto como sigue:

**(a)** $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ para todo $v_1, v_2 \in G$

**(b)** $(cv)(S) = cv(S)$ para todo $v \in G$ y $c \in \mathbb{R}$

Como la cooperación crea beneficios, suponemos que la función $v$ es superaditiva, i.e.,

**Definición 5** *Se dirá que un juego $v$ es superaditivo si y sólo si*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \textit{para todo } S, T \subset N \textit{ tal que } S \cap T = \varnothing$$

La mayoría de los juegos que surgen en la realidad son superaditivos, ya que al estar jugando juntos los elementos de $S \cup T$ pueden acordar jugar como dos coaliciones, garantizando con ello cuando menos $v(S) + v(T)$. Una propiedad inmediata de los juegos superaditivos es,

**Proposición 6** *Si $v$ es un juego superaditivo, entonces $v(N) \geq \sum_{j=1}^{r} v(S_j)$ para toda partición $P = \{S_1, S_2, ..., S_r\}$ de $N$.*

Esto significa que en juegos superaditivos no existe forma alguna de que se agrupen los jugadores para conseguir más de lo que pueden lograr jugando todos aliados.

**Ejemplo 7 (Problema de bancarrota)** *Podemos definir un juego para este problema de la siguiente forma. Los acreedores cuentan con* $\$360,000$ *para repartirse entre ellos, por lo que* $v(\{1,2,3\}) = 360,000$. *Por sí mismo, el acreedor* $1$ *no garantiza recibir pago alguno, ya que los otros acreedores podrían repartirse la cantidad total; así hacemos* $v(\{1\}) = 0$. *De forma similar* $v(\{2\}) = 0$. *El acreedor* $3$ *podría recibir al menos* $\$60,000$, *ya que aunque los acreedores* $1$ *y* $2$ *recibieran el total de sus reclamos, éste tendría la cantidad de* $\$360,000 - \$300,000 = \$60,000$. *Entonces tomamos* $v(\{3\}) = 60,000$. *Siguiendo un razonamiento similar, obtenemos que* $v(\{1,2\}) = 60,000$, $v(\{1,3\}) = 160,000$ *y* $v(\{2,3\}) = 260,000$.

**Definición 8** *Un juego de bancarrota está definido como una terna* $(N, d, C)$*; donde* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *es el conjunto de acreedores,* $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ *con* $d_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, *es el vector de demandas de los acreedores y* $C$ *es el valor neto para repartir entre los elementos de* $N$. *El juego asociado a este problema se define como*

$$v(S) = \text{máx}\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} d_i\right\}$$

**Ejemplo 9 (Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas)** *Debido a que una resolución pasa o no pasa, podemos asignar una valía de* $1$ *a todas las coaliciones ganadoras, y* $0$ *a toda coalición perdedora. Entonces, el juego puede ser descrito por la función característica*

$v(S) = 1$ *para todo* $S$ *que contiene a los cinco miembros permanentes y al menos* $4$ *no permanentes.*

$v(S) = 0$ *para cualquier otro caso.*

**Definición 10** *Se dice que un juego* $v$ *es simple si y sólo si* $v(S)$ *únicamente puede ser* $0$ *ó* $1$ *para todo* $S \subseteq N$. *Dado un juego simple* $v$, *diremos que:*

- $S \subseteq N$ *es una coalición ganadora si y sólo si* $v(S) = 1$.
- $i \in N$ *es un jugador vetador si y sólo si está en toda coalición ganadora.*

Una clase interesante de juegos simples está formada por los llamados juegos de mayoría ponderada.

**Definición 11** *Un juego de mayoría ponderada es una terna* $(N, w, q)$*; donde* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *es el conjunto de jugadores,* $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ *con* $w_i \geq 0$*,* $1 \leq i \leq n$*, es una distribución de pesos y* $q > \frac{1}{2}\sum_{j\in N} w_j$ *es la cuota. Habitualmente un juego de mayoría ponderada se representa por*

$$[q; w_1, w_2, ..., w_n]$$

*con función característica*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si \sum\limits_{j\in S} w_j \geq q \\ 0 & si \sum\limits_{j\in S} w_j < q \end{cases}$$

Este tipo de juegos permite modelar situaciones en las que se supone disciplina de voto: los jugadores son partidos políticos o grupos del tipo unificado que sea, cuyos pesos corresponden al número de miembros de la agrupación en cuestión, siendo $q$ la mayoría exigida para ganar la votación.

**Ejemplo 12 (Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas)** *Este problema se puede modelar como un juego de mayoría ponderada. Cada miembro permanente espera siete votos, cada miembro no permanente un voto y la cuota es de 39 votos. Una resolución sólo pasará si los cinco miembros permanentes (35 votos) y por lo menos cuatro miembros no permanentes (4 votos) están a favor. Así pues, el juego se representa por*

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

*Aunque, como se verá, esto no significa que un miembro permanente sea siete veces más poderoso que un miembro no permanente.*

**Ejemplo 13 (Manejo de inversiones)** *Simples cálculos dan lugar a que el interés total que cada coalición puede asegurar, está dado por la función característica:*

| $S$ | $v(S)$ |
|---|---|
| $\{1\}$ | $46,125$ |
| $\{2\}$ | $17,437.5$ |
| $\{3\}$ | $5,812.5$ |
| $\{1,2\}$ | $69,187.5$ |
| $\{1,3\}$ | $53,812.5$ |
| $\{2,3\}$ | $30,750$ |
| $\{1,2,3\}$ | $90,000$ |

## 3. El núcleo

Por razones naturales, el interés fundamental de los jugadores está puesto en un vector de pagos, resultante de la cooperación de los jugadores.

**Definición 14** *Una solución para el juego $v$ es una función*

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^n$$

*Así, $\varphi(v) \in \mathbb{R}^n$ será un vector de pagos para $v \in G$ y sus coordenadas se indexan con los elementos de $N$.*

**Ejemplo 15 (Manejo de inversiones)** *Si los inversionistas en cuestión acuerdan una forma de dividir el interés obtenido por la cooperación, ellos tendrán un total de $\$90,000$ para repartirse. Denotemos por $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)) \in \mathbb{R}^3$ el pago (o distribución) que recibirán los jugadores. Obviamente, el jugador $1$ sólo aceptará un pago que le asegure al menos la cantidad de $\$46,125$, la cantidad que él obtendría por cuenta propia. A esto se le conoce como una condición de racionalidad individual.*

**Definición 16** *El vector de pagos $\varphi(v) \in \mathbb{R}^n$ asociado a $v \in G$, se dice racional individual si $\varphi_i(v) \geq v(\{i\})$ para todo $i \in N$.*

**Definición 17** *Una imputación para el juego $v$, es un vector de pagos $\varphi(v) \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\varphi_i(v) \geq v(\{i\}) \quad \textit{para todo } i \in N, \qquad \sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

Así, una imputación es un vector de pagos racional individual que reparte el monto máximo.

**Ejemplo 18 (Problema de bancarrota)** *Una imputación para este juego es cualquier vector de pagos $\varphi(v) \in \mathbb{R}^3$ que cumpla*

$$\begin{aligned} \varphi_1(v) &\geq 0 \\ \varphi_2(v) &\geq 0 \\ \varphi_3(v) &\geq 60,000 \\ \varphi_1(v) + \varphi_2(v) + \varphi_3(v) &= 360,000 \end{aligned}$$

**Ejemplo 19 (Manejo de inversiones)** *Para este problema, una imputación es cualquier vector de pagos $\varphi(v) \in \mathbb{R}^3$ tal que*

$$\begin{aligned} \varphi_1(v) &\geq 46,125 \\ \varphi_2(v) &\geq 17,437.5 \\ \varphi_3(v) &\geq 5,812.5 \\ \varphi_1(v) + \varphi_2(v) + \varphi_3(v) &= 90,000 \end{aligned}$$

Ahora, podemos pedir una condición natural y razonable: que ninguna coalición debería tener un incentivo para no formar la gran coalición.

**Definición 20** *El vector de pagos $\varphi(v) \in \mathbb{R}^n$ se dice racional de grupo si*

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(v) \geq v(S) \quad \textit{para todo } S \subseteq N$$

**Definición 21** *El núcleo de un juego $v$, $C(v)$, es el conjunto de imputaciones que poseen la propiedad de racionalidad de grupo, i.e.,*

$$C(v) = \left\{ \varphi(v) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in S} \varphi_i(v) \geq v(S) \quad \textit{para todo } S \subseteq N, \ \sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N) \right\}$$

El núcleo de un juego puede ser vacío, cuando no lo es, consiste de uno, varios o infinitos elementos. El núcleo de un juego también puede ser definido usando la noción de dominancia.

**Definición 22** *Si $\varphi(v), \psi(v) \in \mathbb{R}^n$ son dos vectores de pagos asociados a $v \in G$, diremos que $\varphi(v)$ domina a $\psi(v)$ a través de la coalición $S \neq \varnothing$ si*

$$\varphi_i(v) > \psi_i(v) \ \ \textit{para todo } i \in S, \quad y \quad v(S) \geq \sum_{i \in S} \varphi_i(v)$$

Es decir, existe un grupo de jugadores $S$, que prefiere el vector de pagos $\varphi(v)$ en vez que $\psi(v)$, y que tiene el poder de forzar a obtener tal vector de pagos.

**Definición 23** *Si $\varphi(v), \psi(v) \in \mathbb{R}^n$ son dos vectores de pagos, se dirá que $\varphi(v)$ domina a $\psi(v)$ si existe una coalición $S$ tal que $\varphi(v)$ domina a $\psi(v)$ a través de $S$.*

**Definición 24** *El núcleo de un juego es el conjunto de imputaciones que no pueden ser dominadas.*

Las definiciones 21 y 24 para el núcleo de un juego son equivalentes.

**Ejemplo 25 (Problema de bancarrota)** *Es fácil ver que el núcleo para este juego consiste en todos aquellos vectores de pago que cumplan*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_1(v) \leq 100,000 \\ 0 &\leq \varphi_2(v) \leq 200,000 \\ 60,000 &\leq \varphi_3(v) \leq 300,000 \\ \varphi_1(v) + \varphi_2(v) + \varphi_3(v) &= 360,000 \end{aligned}$$

**Ejemplo 26 (Manejo de inversiones)** *El núcleo para este juego consiste en todos los vectores* $\varphi(v) \in \mathbb{R}^3$ *tales que*

$$\begin{aligned} 46,125 &\leq \varphi_1(v) \leq 59,250 \\ 17,437.5 &\leq \varphi_2(v) \leq 36,187.5 \\ 5,812.5 &\leq \varphi_3(v) \leq 20,812.5 \\ \varphi_1(v)+\varphi_2(v)+\varphi_3(v) &= 90,000 \end{aligned}$$

# 4. El valor de Shapley

Tal como en el caso del núcleo, algunos conceptos de solución se limitan a asignar un conjunto de vectores de pago a un juego. En esta sección se abordará el problema de definir una solución determinada unívocamente bajo un conjunto de propiedades.

Dar soluciones axiomáticas (o valores), es definir operadores $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$con lo que cualquiera que éste sea, en menor o mayor medida resuelve todos los juegos en $G$ y el problema de resolver todos los juegos en $G$ se cambia a seleccionar una "buena" $\varphi$. Para ello, se pide que este operador satisfaga axiomas o propiedades deseables, para después demostrar que existe un único operador que los satisface.

**Ejemplo 27 (Manejo de inversiones)** *Supongamos que el inversionista* 1 *decide iniciar el proceso de formación de coaliciones. Jugando solo, él lograría* $v(\{1\}) = 46,125$. *Si el segundo inversionista decide unírsele, la coalición* $\{1,2\}$ *lograría* $v(\{1,2\}) = 69,187.5$. *Supongamos que el jugador* 1 *acuerda conceder al jugador* 2 *los beneficios de la cooperación; el jugador* 2 *recibe su contribución* $v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 23,062.5$. *El jugador* 3 *se une a ellos en una segunda etapa, e incrementa la posible ganancia a* 90,000. *Si este último permite mantener su contribución* $v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\}) = 20,812.5$, *se obtendría el vector de pagos*

$$(46,125; \quad 23,062.5; \quad 20,812.5)$$

*Este reparto, por supuesto que depende de el orden de la formación de la gran coalición. Si el jugador* 1 *se une primero, luego el jugador* 3 *y* *por último el jugador 2, y si todos mantienen sus contribuciones, entonces resulta el siguiente vector de pagos*

$$(46,125; \quad 36,187.5; \quad 7,687.5)$$

*Los cuatro órdenes restantes posibles* [(213), (231), (312), (321)] *dan lugar a los vectores pago*

$$\begin{array}{lll}(51,750; & 17,437.5; & 20,812.5)\\(59,250; & 17,437.5; & 13,312.5)\\(48,000; & 36,187.5; & 5,812.5)\\(59,250; & 24,937.5; & 5,812.5)\end{array}$$

*Ahora, supongamos que decidimos tomar el promedio de estos seis vectores de pago, para así obtener el reparto final*

$$(51,750; \quad 25,875; \quad 12,375)$$

*Lo que hemos calculado, de hecho, es el valor de Shapley del juego, la contribución esperada cuando todas las permutaciones de los jugadores son equiprobables.*

Shapley (1953) demuestra que sólo hay un operador $Sh : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface el siguiente conjunto de axiomas.

**Axioma 28 (Aditividad)** $Sh(v_1+v_2) = Sh(v_1)+Sh(v_2)$ *para todo* $v_1, v_2 \in J$.

Nótese que como se definió $v_1 + v_2$, lo que obtiene cada coalición es exactamente la suma de lo que obtiene en cada uno de los juegos originales y por lo tanto los jugadores no pueden obtener ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie. Resulta natural pedir que lo que deba obtener cada jugador en el juego suma, sea exactamente la suma de lo que obtengan en los juegos originales.

Otra característica razonable que debería tener la solución es que no dependa de los atributos personales de cada jugador; en otras palabras, que sea anónima. Así, si los jugadores intercambian papeles en el juego y además cualquier grupo de jugadores logra la misma valía que la que conseguían en el juego original los jugadores a los que sustituyen, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual suplanta. A continuación se precisa esta idea.

Denotaremos por $S_n$ al conjunto de permutaciones del conjunto de jugadores, es decir, $S_n = \{\theta : N \to N \mid \theta \text{ es biyectiva}\}$. Así, si $\theta \in S_n$ y $S \subseteq N$, entonces $\theta(S) = \{\theta(i) \mid i \in S\}$. Cada $\theta \in S_n$ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego, en particular el jugador $i$ pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$.

**Axioma 29 (Simetría)** *$Sh(\theta \cdot v) = \theta \cdot Sh(v)$ para todo $v \in G$ y para todo $\theta \in S_n$, donde el juego $\theta \cdot v \in G$ se define como*

$$(\theta \cdot v)(S) = v(\theta^{-1}(S))$$

*para cada $S \subseteq N$.*

Es decir, el axioma de simetría pide que el vector de pagos asociado a este nuevo juego, sea la permutación correspondiente del vector de pago asociado al juego original; dicho brevemente, si los jugadores intercambian papeles, entonces deben intercambiar pagos.

**Axioma 30 (Eficiencia)** *$\sum_{i \in N} Sh_i(v) = v(N)$ para todo $v \in G$.*

En otras palabras, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo $Sh$ es exactamente el monto $v(N)$ que puede conseguir la gran coalición.

Finalmente, se requiere un axioma donde alguien que sólo juegue el papel de observador del juego, debe ser excluido de la repartición. Formalmente, se dirá que $i \in N$ es un jugador nulo en $v \in G$ si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para todo $S \subseteq N$.

**Axioma 31 (Nulidad)** *Si $i \in N$ es un jugador nulo en $v \in G$, entonces $Sh_i(v) = 0$ para todo $v \in G$.*

**Teorema 32 (Shapley, 1953)** *Existe un único operador* $Sh : G \to \mathbb{R}^n$ *que satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y nulidad; y está dado por:*

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \not\ni i}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[ v(S \cup \{i\}) - v(S) \right] \tag{1}$$

La solución anterior es un “compromiso razonable” para cada uno de los jugadores. Para comprender mejor su significado, considere el siguiente proceso aleatorio:

**(a)** Se elige la cardinalidad de una coalición que no contenga al jugador $i$ de acuerdo a una distribución uniforme sobre el conjunto $\{0, ..., n-1\}$.

**(b)** Se elige aleatoriamente una coalición $S$ con la cardinalidad dada en (a), de acuerdo a una distribución uniforme sobre las $\binom{n-1}{s}$ coaliciones disponibles.

**(c)** Se le da al jugador $i$ la utilidad marginal que aporta a $v(N)$ al incorporarse a $S$, es decir, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Entonces, $Sh_i(v)$ es el pago esperado para el jugador $i$ en este proceso.

Así, el pago que el Valor de Shapley asigna a cada jugador es una media ponderada de las contribuciones marginales de ese jugador a las coaliciones a las que se incorpora. Los factores de ponderación $\frac{1}{n\binom{n-1}{s}}$ forman una distribución de probabilidad sobre dichas coaliciones, al escoger de modo equiprobable el cardinal de la coalición y, posteriormente, una de las coaliciones de dicho cardinal.

**Ejemplo 33 (Problema de bancarrota)** *Usando la expresión (1), podemos ver que la distribución para los acreedores sería de*

$$(60,000; \quad 110,000; \quad 190,000)$$

Para juegos simples, la fórmula (1) puede ser simplificada, ya que las diferencias $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ siempre son 1 ó 0. Así pues, la expresión (1) puede simplificarse a:

$$Sh_i(v) = \sum_{\substack{S \text{ ganando} \\ S\backslash\{i\} \text{ perdiendo}}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

Esta expresión es el llamado índice de poder de Shapley-Shubik y nos permite medir el poder de un jugador en juegos simples.

**Ejemplo 34 (Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas)** *En este problema, se tendrán coaliciones ganadoras siempre que contenga a los cinco miembros permanentes y al menos cuatro de los miembros no permanentes; entonces habrá coaliciones ganadoras de tamaño* 9, 10, 11, 12, 13, 14 *y* 15. *Por lo que el índice de poder de Shapley-Shubik para un miembro permanente está dado por*

$$\begin{aligned} Sh_{perm}(v) &= \binom{10}{4}\frac{8!6!}{15!} + \binom{10}{5}\frac{9!5!}{15!} + \binom{10}{6}\frac{10!4!}{15!} + \binom{10}{7}\frac{11!3!}{15!} \\ &\quad + \binom{10}{8}\frac{12!2!}{15!} + \binom{10}{9}\frac{13!1!}{15!} + \binom{10}{10}\frac{14!}{15!} \end{aligned}$$

*Así entonces,*

$$Sh_{perm}(v) = \frac{421}{2145} = 0.1962703963 \approx 19.627\,\%$$

*Y para un miembro no permanente, el índice de poder es*

$$Sh_{no\ perm}(v) = \binom{9}{3}\frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{2145} = 0.001864801865 \approx 0.18645\,\%$$

*De lo que se concluye que un miembro permanente es aproximadamente* 100 *veces más poderoso que un miembro no permanente.*

Una propiedad importante del valor de Shapley para juegos superaditivos es la siguiente.

**Proposición 35** *Si $v \in G$ es un juego convexo, entonces $Sh(v) \in C(v)$.*

**Ejemplo 36** *Como los juegos definidos para el problema de bancarrota y manejo de inversiones son convexos, entonces sus respectivas soluciones de acuerdo al valor de Shapley, son elementos del núcleo.*

## 5. Conclusiones

Soluciones en juegos cooperativos han sido implementados eficientemente en numerosas situaciones. Algunas de ellas son

- Reparto de impuestos entre divisiones de diversas corporaciones.
- Distribución en costos de renta para compañías de líneas telefónicas.
- División en costos de mantenimiento en bibliotecas.
- Desarrollo de proyectos para el abastecimiento de agua en comunidades agrícolas.
- Subsidios de transporte público en algunas ciudades.

La teoría de juegos cooperativos trata de competencia, cooperación, conflictos, negociaciones, formación de coaliciones, reparto de beneficios o distribución de costos. En consecuencia, uno esperaría numerosas aplicaciones económicas. El propósito de este artículo es el contribuír a propagar conocimiento acerca de las situaciones que los juegos cooperativos modelan.

## Referencias

[1] Lemaire J. (1983), "An application of game theory cost allocation", ASTIN Bulletin, 14, 61-81.

[2] Shapley L. (1953), "A value for n-person games", Contribution to the Theory of Games, 2, 307-317.

[3] Sánchez P. J. (2005), "El axioma de consistencia en los juegos cooperativos", Centro de Investigación en Matemáticas, Tesis de Maestría.

[4] Sobolev A., (1973), "The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game", Advances in Game Theory. Vilkas E. (ed), 151-153.

[5] Thomson W. and Myerson R. (1980), "Monotonicity and independence axioms", International Journal of Game Theory, 9, 37-49.

[6] Thomson W. (1996), "Consistent Allocation Rules", Rochester Center for Economic Research, Working Paper No. 418.

[7] Von Neumann J. and Morgenstern O. (1944), "Theory of games and economic behavior", Princeton University Press.