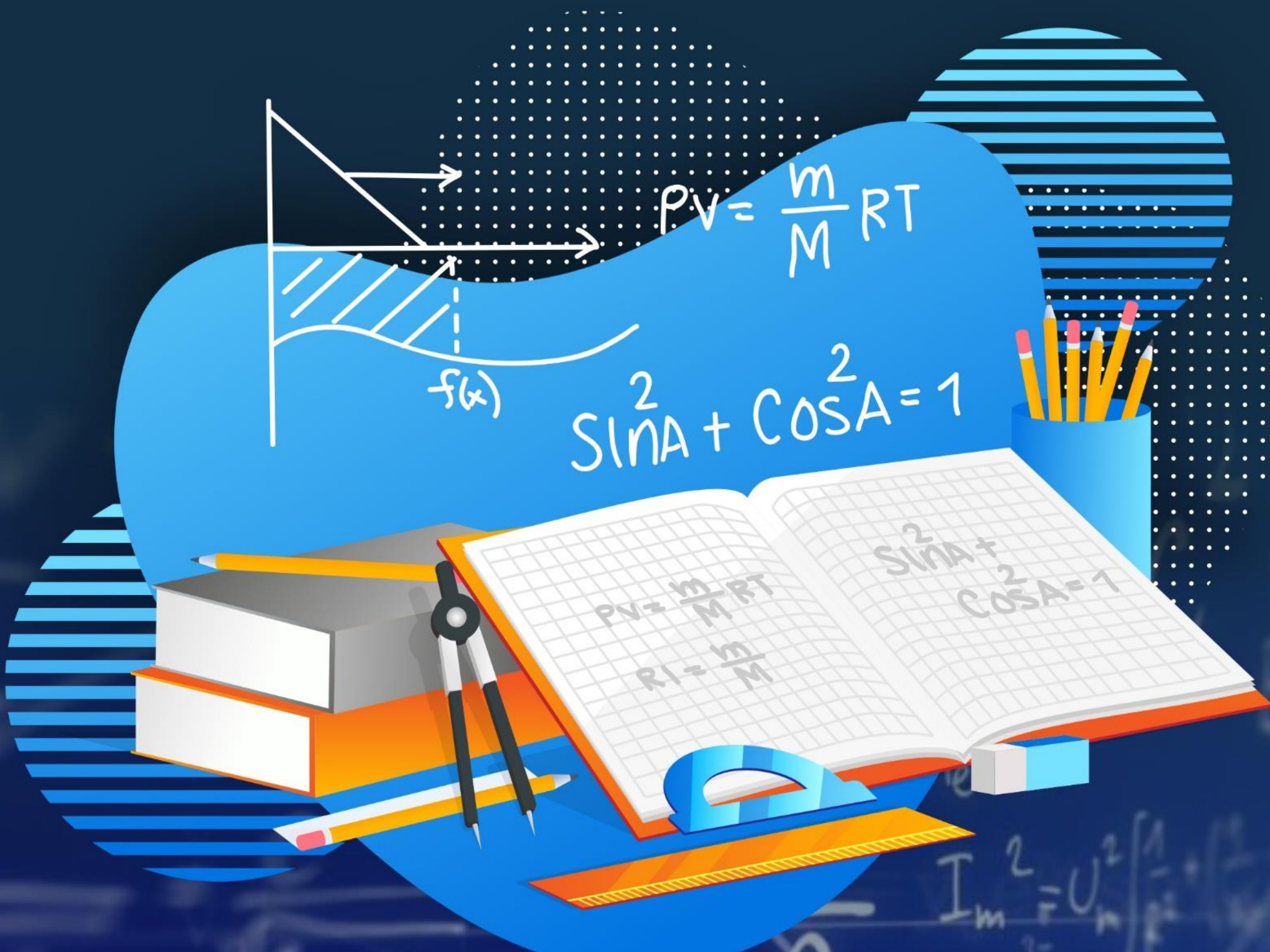
COLEGIO DE
**BACHILLERES
DE CHIAPAS**

CHIAPAS
GOBIERNO DEL ESTADO

GUÍA DIDÁCTICA
CÁLCULO INTEGRAL

SEXTO SEMESTRE



AUTORES
MTRO. ALEJANDRO GARCÍA PUCH
ING. TANIA VILLATORO MEZA
MTRO. ELIUTH PALACIOS SÁNCHEZ

GUÍA DIDÁCTICA
CÁLCULO INTEGRAL

Presentación

Esta guía didáctica fue desarrollada por un grupo colegiado de docentes del Colegio de Bachilleres de Chiapas con la finalidad de brindar material de apoyo para el aprendizaje autogestivo para los jóvenes de los diversos planteles y Centros de Servicio de Educación Media Superior a Distancia.

Cálculo Integral se ubica en el sexto semestre del componente de formación propedéutica del Plan de Estudios del Bachillerato General.

El Cálculo Integral es una rama de las matemáticas con más aplicaciones, en diversas área de conocimiento ya que permite plantear modelos que resuelven problemas surgidos del diario vivir del ser humano, mediante la cual puede analizar cualitativa y cuantitativamente los diferentes fenómenos que se le presenten en su entorno cotidiano y profesional.

El mundo de las matemáticas es infinito y en este trabajo encontraras elementos que te ayudaran al análisis instantáneo de diversos fenómenos.

“Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas”.

Albert Einstein

COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS
DIRECCIÓN ACADÉMICA
SUBDIRECCIÓN DE DESARROLLO ACADÉMICO
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN Y SEGUIMIENTO A LA ACADEMIA

Directorio

Dra. Nancy Leticia Hernández Reyes
Directora General

Ing. Luis Alberto Hernández Zambrano
Director Académico

Mtra. María Eunice López Antonio
Subdirectora de Desarrollo Académico

Mtra. Elba D. Casanova Ozuna
Jefa del Departamento de Formación y Seguimiento a la Academia

COLEGIADO PARA EL DESARROLLO DE LA GUÍA:

Mtro. Alejandro García Puch, CEMSaD 126 Nueva Orizaba
Ing. Tania Villatoro Meza, CEMSaD 327 La Floresta
Ing. Eliuth Palacios Sánchez, CEMSaD 297 Amatenango de la Frontera

Colaboración especial
Mtra. Magda Patricia Díaz Molina

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; enero 2021.

Índice

Bloque 1. Diferenciales

1.1. Introducción

En tu diario vivir es muy posible que observes fenómenos que van cambiando poco o poco, como el llenado de un tanque de agua, el deshielo de un glacial, el crecimiento poblacional, la deforestación de la selva o la contaminación ambiental, entre otros tantos. El quehacer matemático analiza mediante modelos o funciones en forma de ecuaciones el comportamiento de los sucesos, para luego predecir comportamientos futuros de esos fenómenos.

En este bloque utilizarás a las derivadas como una herramienta para acercarte al análisis instantáneo de los fenómenos. Descubrirás la forma en que se pueden realizar cálculos a las variaciones instantáneas a través del uso de las diferenciales, las que podemos emplear en los eventos de aproximación como pueden ser las raíces cuadradas no exactas de los números, así como en la aproximación de algún tipo de error de medición, que se genere en determinado evento.

El error, la duda y el valor para corregir te ayudarán mucho en tus aprendizajes por ello la invitación a que participes activamente con tus compañeros y docente en la realización de las actividades que están diseñadas para que se te facilite la comprensión de los temas. ¡Qué tengas mucho éxito en tus aprendizajes!

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Utilizar de manera reflexiva, la aplicación de diferenciales que contribuyan en la resolución de situaciones de tu vida cotidiana, a través de métodos de aproximación.

1.2.2. Objetivos específicos

- Aplicar la derivada en la construcción de la diferencial para poder resolver problemas que se acercan a un fenómeno real o hipotético, mediante el método de aproximaciones.
- Utilizar la diferencial como método alternativo de aproximación para la obtención de raíces cuadradas no exactas de los números.
- Representar gráficamente la aplicación de las diferenciales que asistan la solución de problemas de la vida diaria.
- Interpretar las gráficas de las diferenciales que asistan la solución de problemas de la vida diaria.
- Adquirir los conocimientos sobre diferentes métodos de aproximación numérica para la resolución de problemas.
- Utilizar los métodos de aproximación numérica para la resolución de modelos matemáticos

1.3. Competencias Genéricas Disciplinares

Competencias a desarrollar en el Bloque			
Claves	**Genéricas**	**Claves**	**Disciplinares**
CG 1.1	Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	**CDEM 1**	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CG 4.1	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	**CDEM 2**	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicados a diferentes enfoques.
CG 5.1	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objeto.		

1.4. Secuencias

<table>
<tr><th colspan="4">Elementos integradores a desarrollar en el Bloque</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Interdisciplinariedad</td><td rowspan="2">Ecología y Medio Ambiente.</td><td>Eje Transversal</td><td>Tema de eje Transversal</td></tr>
<tr><td>Social</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto Semestre.</td><td>Ambiental</td></tr>
<tr><td>Salud</td></tr>
<tr><td>Habilidades Lectoras.</td></tr>
</table>

1.5. Conceptos claves

- **Derivada:** utilizar los conceptos de derivada como razón de cambio instantánea entre las variables independiente y dependiente. Utilizar la idea geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función.
- **Diferencial:** comprender el uso de la diferencial, como el producto de la derivada por los cambios de la variable independiente.
- **Infinitesimal:** comprender que la variación es relativamente muy pequeña pero que ayudan a aproximar las afectaciones de los fenómenos.

1.6. Actividades de aprendizaje
1.6.1. Concepto de diferenciales
1.6.1.1. Analítico

Aquí empezamos el estudio del Cálculo Integral con un concepto fundamental que se denominan **las diferenciales o simplemente la diferencial**, la cual la observaremos en este primer momento desde un punto de visto analítico y más adelante se observará desde un punto de vista geométrico, pero antes retomaremos algunos conceptos analizados en el curso de Cálculo Diferencial, tal como la función y la derivada que nos serán de mucha utilidad.

Según Cano (2012), la función la podemos considerar como una dependencia, causalidad, correspondencia, relación, cambio, modificación o alteración que sufre una variable dependiente (y) debido a los cambios que sufre otra, llamada variable independiente (x). La función se puede expresar con la notación ***f(x)*** y se lee ***f de x***. En ocasiones las funciones se pueden expresar con la letra **y**. Así la función la puedes tener como notación **f(x)** o simplemente **y**. Las funciones se analizaron en diferentes formas dentro de las que se destacan como diagramas sagitales, tabulaciones, parejas ordenadas, gráficas o como ecuaciones.

La derivada la consideramos en Cálculo Diferencial como una razón de cambio, es decir, como una división, entre lo que cambia de manera infinitesimal la función respecto de los incrementos o cambios de la variable independiente x, estos cambios de la variable x suelen ser tan pequeños que se aproximan a cero. De esta manera, la derivada la podemos encontrar en muchas expresiones que básicamente significan lo mismo:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x} = f'(x) = \mathrm{y}'(\mathrm{x})$$

El triángulo, es una letra griega mayúscula llamada Delta, en Cálculo esta letra representa <u>los incrementos</u> que sufren las variables. Los incrementos son cambios muy pequeños llamados infinitesimales, que sufren las variables de un momento a otro y lo consideramos como la diferencia entre el valor final de la variable y el valor anterior de esa misma variable. La nomenclatura de la derivada la vimos como una <u>f´(x)= y´(x)</u> se lee <u>f prima de x</u> o también como <u>primera derivada.</u>

Si deseas recordar o fortalecer los procesos de derivación consulta las fuentes bibliográficas de referencia que están al final del tema.

> Se define la diferencial de una función *f* en un punto x, como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente y se denota por las expresiones *df*(x) ó *dy*, su expresión es:
> d f(x) = dy = f´(x) dx   para toda dx≠0
> Si observamos dy/dx= f´(x)

Vamos a ver algunos ejemplos para determinar la diferencial dy en algunas funciones, es importante que tengas tus tablas de derivación para ir determinando las derivadas.

Ejemplo1. Determina la diferencial de la siguiente función f(x) = 3 x^7

Solución:

De la definición de la diferencial observamos que debemos derivar a la función y multiplicar por la diferencial de la variable independiente, entonces:

a) Derivamos la función $f(x) = 3x^7$ y queda $f'(x) = 3(7)x^{7-1}$

$f'(x) = 21x^6$

b) Ahora solo multiplicamos por la diferencial de la variable independiente x, llamada dx.

c) De acuerdo con la definición de diferencial $dy = f'(x)\,dx$ la diferencial es $dy=(21x^6)dx$

Ejemplo 2. Determina la diferencial de la siguiente función $y = -5x^6 + \frac{4}{x}$

Solución:

a) Aplicando las reglas de derivación , hallamos la primera derivada $f'(x) = -5(6)x^{6-1} + 4(-1)x^{-1-1} = -30x^5 - 4x^{-2}$

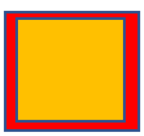
$-30x^5 - \frac{4}{x^2}$

b) La diferencial de la variable independiente, dx.

c) De acuerdo con la definición de diferencial $dy = f'(x)\,dx$ la diferencial es $dy= \left(-30x^5 - \frac{4}{x^2}\right) dx$

Ejemplo 4.- Si una placa de metal cuadrada los lados miden 30 cm antes de someterse a altas temperaturas y luego por efecto de la dilatación la longitud de sus lados crece 0.02 cm. Determina ¿cuál será el incremento del área que experimenta la placa por efecto de la dilatación?

Solución



Vamos a realizar el proceso de solución por dos métodos para compararlos al final.

Método aritmético

Originalmente la placa tenía 30 cm en cada lado, por lo que su área será 30 x 30 = 900 cm^2 antes de someterse a las altas temperaturas.

Luego de someterse a la temperatura los lados crecen 0.02 cm por lo que el área será 30.02 x 30.02 = 901.2004 cm^2

Por lo tanto, la diferencia de área será 901.2004 cm^2 – 900 cm^2 = **1.2004 cm^2**

Método con la diferencial

Ahora veremos cómo utilizar el cálculo y principalmente el concepto de la diferencial para apreciar la aproximación en los resultados.

Si consideramos al lado x y al área A = x^2 por ser una figura cuadrada y la convertimos a función podemos A(x) = x^2. Entonces ya tenemos la función A(x) = x^2, si queremos obtener el incremento de la diferencial del área podemos hacer los procesos de diferencial.

a) Derivamos A(x) = x^2 y obtenemos A´(x) = 2 x.
b) Ahora la diferencial dx.
c) Entonces la diferencial dy = f´(x) dx, la diferencial del área queda dy =2 x dx
d) Ahora con los datos x = 30 cm y dx = 0.02 cm si sustituimos en la diferencial dy = 2x dx tenemos dy= 2(30) (0.02) = **1.2 cm²**

Ahora si comparamos los resultados del incremento del área calculado con el método aritmético resulta exacto 1.2004 cm^2 con el obtenido con la diferencial resulta aproximado de 1.2 cm^2 veremos que la aproximación es bastante cercana solo 0.004 es la diferencia, aquí la importancia de ambos.

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad diagnóstica

Realiza en tu cuaderno un dibujo, esquema, cálculo o análisis que pudieran indicarte la solución a cada una de las siguientes preguntas, comparte en un foro organizado por tu maestro y con la participación de tus compañeros (20 minutos).

a) ¿Cómo consideras que se pudiera medir el área o superficie que tiene una montaña?
b) ¿Lograste determinar un método para cualquier tipo de montaña?
c) ¿Cuál consideras que es la mayor dificultad para establecer un cálculo preciso del área?

Actividad de apertura

Lee la siguiente información introductoria de diferenciales para poder tener una referencia del tema central. Revisa los conceptos claves de este tema (40 minutos).

Actividad de fortalecimiento

Lee los siguientes enunciados y contesta las preguntas (30 minutos).

1. Un tanque de agua tiene una forma de prisma rectangular, la altura es tres veces del ancho y lo ancho es dos veces lo largo. El largo se desconoce. Si se desea determinar la expresión algebraica del volumen del tanque ¿Cuál de las siguientes expresiones definen al volumen en función del largo?

a) V(l)= 3^x
b) V(x) =12 ax
c) V(a) = $12x^3$
d) V(x) = 12 x^3

2. Ordena de manera secuencial lo que harías para encontrar la derivada de una función.

a) Obtener la derivada
a) Ir a tablas y comparar la función a derivar con las tablas
b) Observar el tipo de función a derivar (polinómica, trigonométrica, etc.)
c) Aplicar los procesos de derivación
d) Sustituir la función que tienes con los de la tabla

3. Determina la derivada de la siguiente función: $\mathbf{f(x)} = \boldsymbol{8x - 6x^9}$

a) f´(x) = $\boldsymbol{6x^8}$
b) f´(x) = $\boldsymbol{8x - 48x^8}$

c) f´(x) = $\mathbf{8 - 54x^8}$

4. De manera simple podemos abreviar que la diferencial es …

a) La derivada de la función

b) El producto de la derivada de la función por la diferencial independiente

c) El incremento de la diferencia de dos funciones

d) La multiplicación de la derivada por la función

Actividad de cierre

Determina la diferencial de las siguientes funciones y relaciona con su correspondiente (40 min).

a) ( ) $f(x) = 4x^5 + 8x^3$

b) ( ) $f(x) = \sqrt{x^5}$

c) ( ) $f(x) = \cos 4x$

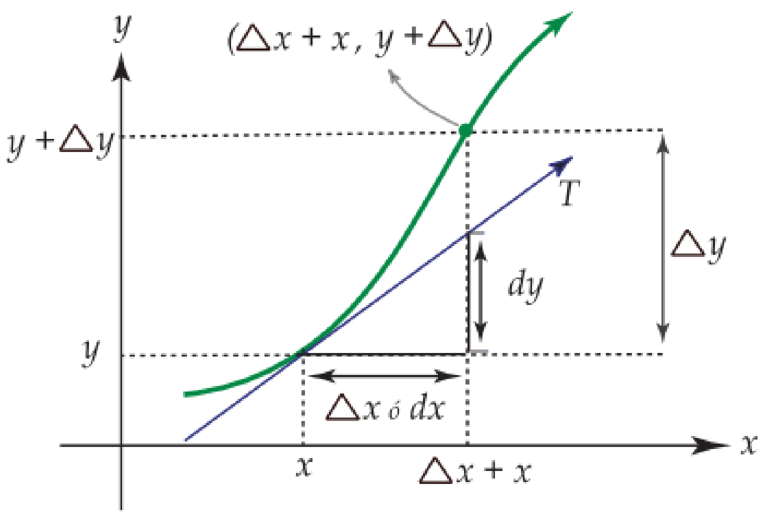
d) ( ) $f(x) = \tan 4x$

1. $dy = \left(\frac{5x^4}{4(x^5)^{\frac{3}{4}}}\right)dx$
2. $dy = -4\sin 4x\, dx$
3. $dy = (20x^4 + 24x^2)dx$
4. $dy = 4\sec^2 4x$

1.6.1.2. Geométrico

Sea f una función definida por y = f (x), derivable sobre un intervalo S.

Sea Δx diferente de cero tal que Δx + x pertenece al dominio de f y el punto (x +Δx, f (x +Δx)) esté en la gráfica de f como se muestra en la siguiente figura:



Sabemos de la definición 2.5 que

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ si el límite existe

luego:

$\lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$

de donde para cualquier ε > 0 existe δ > 0 tal que $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right|$ < ε siempre que 0 < |Δx| < δ o sea, |Δy − f 0 (x) ·Δx| < εΔx siempre que 0 < |Δx| < δ.

Lo anterior significa que |Δx − f 0 (x)Δx| puede hacerse tan pequeño como se quiera, tomando |Δx| suficientemente pequeño.

Luego, f´(x)Δx es tan buena aproximación para el incremento |Δy| como se desee, tomando |Δx| suficientemente pequeño.

Definición de diferencial: Si f es una función tal que f 0 (x) existe sobre un intervalo S y si Δx es cualquier número distinto de cero, la diferencia de f con respecto a x es igual f 0 (x) multiplicada por Δx. Esta diferencial se denota por dx f (x) de tal forma que

dx f (x) = f 0 (x)Δx

Ejemplo 1

Determinar $\Delta y,\ dy,\ \Delta y - dy$ para $y = x^2 - 3x,\ x = 2;\ \Delta x = 0.03$

Solución: Consideremos $f(x) = y = x^2 - 3x$. Calculemos primero el incremento:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - (x^2 - 3x)$

$\Longrightarrow \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x$

$\Longrightarrow \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x$

$\Longrightarrow \Delta y = (2x + \Delta x - 3)\Delta x$

Para $x = 2,\ \Delta x = 0.03;\ \Delta y = (4 + 0.03 - 3)(0.03)$ de donde $\Delta y = 0.0309$

Ahora calculemos la diferencial dy:

$dy = f'(x)dx = (2x - 3)dx$

Luego para $x = 2,\ \Delta x = 0.03$ se tiene que $dy = (2\cdot 2 - 3)(0.03) = 0.03$

Ejemplo 2

El lado de un cuadrado es igual a 5 cm. Hallar el incremento aproximado de su área si el lado aumenta 0.01 cm.

Solución: Sea $A(x) = y = x^2$ donde x es el lado del cuadrado, A denota su área.

Se desea determinar cuánto aumenta el área cuando la longitud del lado pasa de 5 cm a 5.01 cm.

Calculemos la diferencial de área. Así:

$dA = f'(x)dx = 2xdx,$ donde $x = 5$ y $dx = 0.01$

Luego:

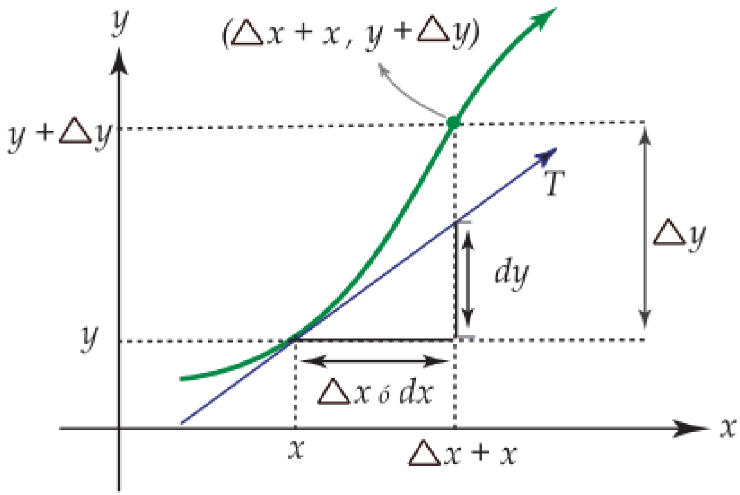
$dA = 10(0.01) = 0.1$ y aproximamos $A + \Delta A$ para $x = 5,\ dx = 0.01$ con $A + dA = 25 + 0.10$ de donde $A + dA = 25.10,$ área del nuevo cuadrado.

El incremento del área es de 0.1 cm^2.

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura

En la siguiente figura de la interpretación geométrica de la diferencial, rellena de color rojo el área de las dy, de color azul el área del Δy, por último, menciona con tus palabras que entiendes por diferenciales **(15 min).**



Actividad de fortalecimiento

Trabaja en pareja para representar de forma gráfica los siguientes incisos **(20 min)**:

a) Una función para el área de un cuadrado
b) Evalúa un incremento de 0.5 cm la función cuando x=5
c) Colorea de rojo el área de dy
d) Colorea de azul el área del Δy

Actividad de fortalecimiento

Trabaja en pareja para representar de forma gráfica Δy, dy para $y = x^2$, x= 3; Δx=0.5 **(30 min)**.

Actividad de cierre

Realiza un ensayo en una cuartilla de hoja del tema de interpretación geométrica de la diferencial, recuerda que la estructura de un ensayo es: introducción, desarrollo y conclusión. Para realizarlo apóyate de los recursos didácticos **(40 min)**.

1.6.2. Incremento de una función

Si el incremento de la variable independiente *dx* es muy pequeño, entonces *dy* y Δ*y* son aproximadamente iguales, es decir:

Si *dx*=AB es muy pequeño, *dy*=BC = Δ, *y*=BA´

Cuando sólo es necesario obtener un valor aproximado del incremento de la función, el simple hecho de calcular el valor de la diferencial será suficiente para resolver el problema. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1.- Calcula el valor aproximado de √39

Solución:

Sea y=√x (función representativa de √39)

Tomemos x=36 ya que es el número más próximo al lado con raíz cuadrada exacta *dx*=Δx=3 que es el incremento para tener √39

Entonces:

y=√x

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Sustituyendo los valores

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{36}}(3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Si $y = \sqrt{x} = \sqrt{36} = 6$

$$\sqrt{39} = y + dy$$
$$\sqrt{39} = 6 + 0.25$$
$$\therefore \sqrt{39} = 6.25$$

Si realizas la operación en tu calculadora obtendrás que $\sqrt{39} = 6.244997998$, como ves el valor que obtuvimos es mayos que el real en 0.005002002 unidades. ¡Prácticamente nada!

Ejemplo 2.-Calcula el valor aproximado de $\sin 98°$ y tomemos x=90, que es el número próximo al dado con que cumple que, $\sin 90° = 1$

$dx = \Delta x = 8$ que es incremento para tener $sen\ 98°$

Entonces:

$$y = sen\ x$$
$$dy = -\cos 90(8) = 0$$

Si $y = \sin 90° = 1$

$$sen 98° = y + dy$$
$$\sin 98° = 1 + 0$$
$$\therefore \sin 98° = 1$$

Si haces la operación en tu calculadora comprobarás lo siguiente: $\sin 98° = 0.990268068$, como podrás ver, el valor que obtuvimos es mayor que el valor real en 0.009731931 unidades. De nuevo ¡casi nada!

Ejemplo 3.- Utilizando diferenciales calcula aproximadamente el valor de $\sqrt[3]{122}$

Solución:

Tomemos $y = \sqrt[3]{x}$ que es la función representativa de $\sqrt[3]{122}$, además x=125 que es el valor aproximado a 122 con raíz cúbica exacta entonces

$$dx = -3$$

Entonces calculemos

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

Sustituyendo valores

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}}(-3) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(5^3)^2}}(-3) = \frac{1}{3(5^2)}(-3) = \frac{-3}{3(25)} = \frac{-1}{25} = -0.04$$

Entonces si:

$y = \sqrt[3]{125}$ =5

$$\sqrt[3]{122} = \mathrm{y} + \mathrm{dy}$$
$$\sqrt[3]{122} = 5 + (-0.04)$$
$$\therefore \sqrt[3]{122} = 4.96$$

Comparándolo con el cálculo real tenemos un error de 0.000324336 unidades.

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura

En parejas resuelvan el siguiente problema: Determina el incremento de área de un cuadrado de lado 4m al aumentar el lado 3mm **(10 min)**.

Actividad de fortalecimiento. En equipo de tres integrantes den solución a la siguiente serie de ejercicios **(25 minutos)**.

1. $\sqrt[3]{100}$
2. 37^{-2}
3. $sen\,61°$
4. $\sqrt[4]{87}$
5. $\sqrt[2]{35}$
6. Calcula el incremento del área de un cuadrado de lado 5m cuando su lado aumenta 2.5mm.
7. Determina el incremento del volumen de un cubo de lado 3.5m si su lado aumenta 0.002m.

Actividad de cierre

En parejas resuelvan los siguientes ejercicios **(20 min)**:

1.- Al calentar una esfera de radio r=5 cm, su volumen aumentó 32.4π cm³. Calcula el alargamiento del radio de la esfera (R=0.1cm).

2.- Halla el incremento en el área de un cuadrado cuyo lado mide 6m, cuando el lado aumenta 8mm.

1.6.3. Aproximación de una raíz

Cuando se trata de hallar las raíces de una función f(x) se debe resolver la ecuación f(x)=0. En algunos casos, esto es una tarea sencilla, por ejemplo, con las funciones lineales o cuadráticas, pero en otros no es nada fácil. Para estos casos existen métodos útiles que permiten, si no determinar, aproximar las raíces buscadas.

Método de Rolle

Se halla la derivada primera y luego se estudian sus ceros y su signo. Por ejemplo, si el signo de f'(x) es

```
 -  0  +  0  -
-----|-----|----->
     a     b
```

En el intervalo (a,b) la función es creciente (ver condición suficiente para el crecimiento en un intervalo).

- Si el signo de f en a y b es el mismo (positivo o negativo), f no cruza el eje ox en (a,b).
- Si el signo de f en a es distinto del signo de f en b, entonces por el teorema de Bolzano, f tiene una raíz en (a,b), y es una sola por ser creciente.
-

Para hallar esa raíz se va partiendo el intervalo hasta que se llega a ella o a una aproximación. Veámoslo más claramente con un ejemplo:

f(x) = 2x3 + 3x2 - 12x - 30

f'(x) = 6x2 + 6x - 12

+ 0 - 0 +

sg f' -------|-------|------->
-2 1

f(-2) = -10
f(1) = -37

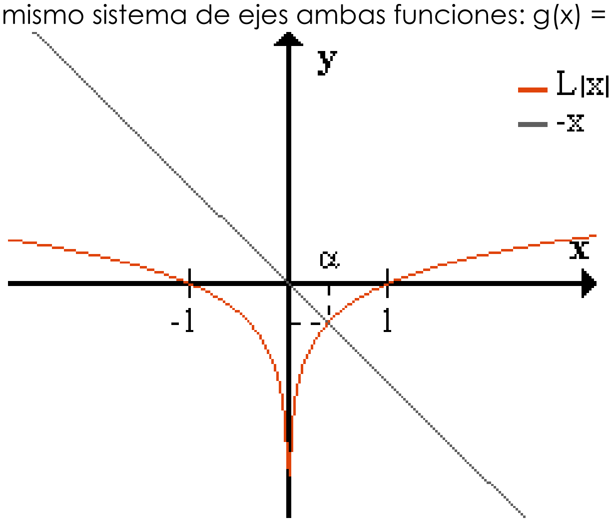
-inf - - +inf
sg f -------|-------|------->
-2 1

- f es decreciente en (-2,1) (ver signo de f') y negativa en los extremos (ver signo de f) => no tiene raíz en ese intervalo.
- f es creciente en (1,+inf), de acuerdo al signo de f', y como es negativa en 1 y positiva para valores muy grandes de x, tiene una raíz a > 1.

f(2) = -26
f(3) = 15
=> 2 < a < 3
Probemos entonces con 2.5:
f(2.5) = -10
=> 2.5 < a < 3
Probemos con 2.8:
f(2.8) = 3.824
=> 2.5 < a < 2.8
Veamos f(2.7):
f(2.7) = -1.164
=> 2.7 < a < 2.8
Continuando de esta manera, llegamos a que a está entre 2.72 y 2.73:
f(2.73) = 0.29
f(2.72) = -0.19
=> Podemos aproximar a a 2.725.
Si quisiéramos una aproximación mayor de la raíz, deberíamos seguir este proceso.

Método de Ábacos

Se utiliza cuando la función puede expresarse como diferencia de dos funciones fáciles de graficar. Veamos un ejemplo:
f(x) = L|x| + x
f(x) puede expresarse como f(x) = L|x| - (-x)
Graficamos sobre el mismo sistema de ejes ambas funciones: g(x) = L|x| y h(x) = -x.



En el punto donde se cortan las curvas, ambas funciones tienen el mismo valor numérico, g (a) = h (a). Entonces a es un cero de f(x), pues f (a) = g(a) - h(a) = 0

- Para valores menores que a, la recta correspondiente a -x está por encima de la curva correspondiente a L|x|, así que la resta da negativo.
- Para valores de x mayores que a, L|x| es mayor que -x, así que la resta da positivo. Observando la gráfica vemos que a está entre 0 y 1.

```
             - E - 0 + + +
Signo de f(x) -----|-----|-----|----->
                   0     a     1
```

Comencemos a aproximar:

f(0.5) = -0.19 | f(0.56) = -0.02 | => | => a = 0.565
f(0.6) = 0.089 | f(0.57) = 0.008 |

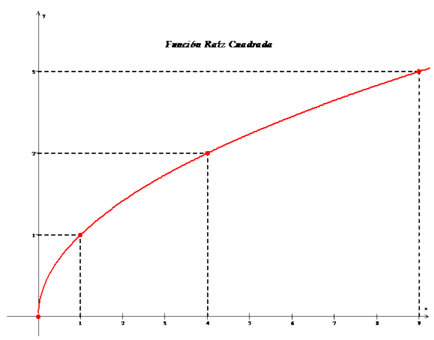
<u>Aproximaciones de la función de raíz cuadrada</u>

La función real de variable real f, cuya regla de correspondencia es: f(x)= $\sqrt{x}$, notación algebraica, está definida para el conjunto de números reales no negativos.

La notación algebraica se utiliza para representar al número real raíz cuadrada de x, x no negativo.

x	0	1	2	4	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3

La función raíz cuadrada f es una función creciente, es decir, como se observa en la siguiente gráfica:



$\forall x_1, x_2 \in Dom(f): Si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Aproximaciones e iteraciones: raíz cuadrada de a (a: no negativo), para representar al número irracional raíz cuadrada de dos se utiliza la notación: $\sqrt{2}$, existen varias maneras de aproximar este valor; por ejemplo, a partir de la fórmula de recurrencia (atribuida a Herón de Alejandría).

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \ \text{donde} \ x_0 = 1$$

Se puede obtener mediante iteraciones el valor de la raíz cuadrada de a. Así, si a = 2:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+\frac{2}{1}) = \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}; \quad x_0 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}}) = \frac{1}{2}(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}) = \frac{577}{408}$$

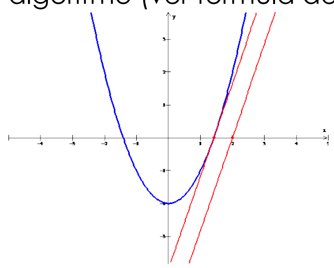
-

-

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

Método de Newton de Aproximaciones Sucesivas

También, para hallar el valor del número real raíz cuadrada de dos podemos hacer uso del Método de Newton de Aproximaciones Sucesivas teniendo en cuenta que existen algunas condiciones iniciales para su aplicación. Es importante tener en cuenta que no siempre el Método de Newton genera aproximaciones que convergen hacia la raíz que se desea encontrar, una dificultad es que el valor inicial x(0) no esté suficientemente cerca de la raíz a encontrar, para iniciar el proceso de convergencia; otra dificultad surge cuando la función derivada de f es cero en la raíz o cerca de la raíz, dado que la derivada de f se encuentra en el denominador del algoritmo (ver fórmula de recurrencia).



Por ejemplo, dada la gráfica anterior:

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x, \text{asumiendo } x_0 = 2;$$

Entonces, la fórmula de recurrencia es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

De donde,

$$x_1 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{17}{12} \approx 1,416\overline{6}$$

$$x_3 = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{408} \approx 1,4142156863$$

$$x_4 = \frac{577}{408} - \frac{\frac{1}{166464}}{\frac{577}{204}} = \frac{135834828}{96049728} \approx 1,4142135624$$

-

-

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488016887242097$$

De lo expuesto, utilizando una calculadora y ejecutando el comando cuyo rótulo es sqrt (o la notación algebraica de raíz cuadrada) se puede comprobar o verificar sendos resultados.

Obviamente, surge una interrogante: ¿Para qué utilizar estos procedimientos si existe la calculadora? Bueno, si bien es cierto que actualmente se puede conocer presionando un botón el valor de la raíz cuadrada de a, a no negativo; haciendo un poco de memoria ¿cómo hicieron las civilizaciones antiguas para obtener una aproximación de estos números irracionales?

El Antiguo Imperio Babilónico se desarrolló en Mesopotamia entre los años 1900 A.C. y 1600 A.C. Existen en la actualidad tabletas cuneiformes de arcilla fielmente resguardadas en museos de universidades de prestigio a nivel mundial (por ejemplo, la Colección Babilónica de la Universidad de Yale). La notación cuneiforme expresa números en base sexagesimal. Los babilonios resolvían de manera natural a partir de un conjunto de tablas de sumas de cuadrados y cubos ecuaciones de grado dos y grado tres. Sin embargo, resulta interesante cómo es que los babilonios hallaban una buena aproximación a la raíz cuadrada de un número dado. Se asume que los babilonios utilizaban un algoritmo similar al de Herón de Alejandría; es decir, empezaban por una aproximación inicial x (0).

Por ejemplo, para hallar la raíz cuadrada de 32, a partir de la gráfica de la función raíz cuadrada es fácil ver que

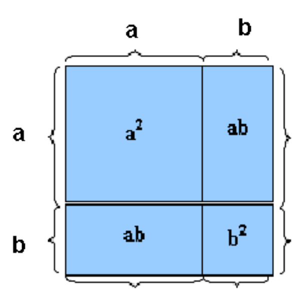
$$\begin{gathered} 5 < \sqrt{32} < 6 \\ \Rightarrow \sqrt{32} = 5 + \alpha; 0 < \alpha < 1 \\ \Rightarrow 32 = 25 + 10\alpha + \alpha^2 \\ \therefore \alpha^2 + 10\alpha - 7 = 0;\ 0 < \alpha^2 < \alpha < 1 \end{gathered}$$

Sin pérdida de generalidad, despreciando el valor de alfa al cuadrado, obtenemos:

$$\alpha = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Por lo tanto, una primera aproximación a la raíz cuadrada de 32 es 5+0,7=5,7.

Geométricamente se observa que el área de la región cuadrada "grande" equivale a la suma de las áreas de las regiones interiores:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Lo cual implica $a + b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ Si la longitud del lado b es pequeña, entonces b^2 tiende a 0 haciendo h = 2ab:

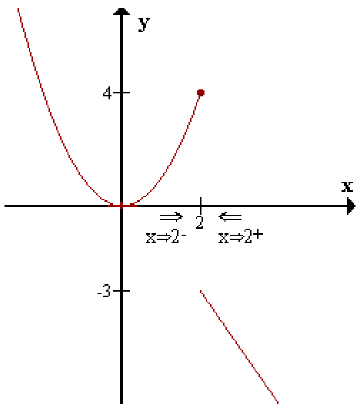
$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}$$

En nuestro ejemplo:

Si a = 5; h=7: $\sqrt{5^2 + 7} \quad \approx \; 5 + \frac{7}{2(5)} \quad => \; \sqrt{32} \; \approx 5{,}7$

Ejemplos:

F (x) = x2 si x <= 2
-2x + 1 si x > 2



limx->2-f(x)=4
limx->2+f(x)=-3
No existe limx->2f(x)

Vamos a averiguar por aproximación la raíz cuadrada de un número que sabemos que es un cuadrado perfecto y, por tanto, su solución es un número natural.

$$\sqrt[2]{3.136}$$

- El resultado es un número de dos cifras pues al separar en grupos de dos cifras desde las unidades se obtienen dos grupos: 31.36.
- ¿Entre qué dos números se encuentra?

Entre 50 y 60 pues
502 = 2.500 < 3.136
602 = 3.600 > 3.136

- Como sabemos que el resultado es exacto, la solución será 54 o 56 pues el radicando acaba en 6.
- Elevamos al cuadrado los dos “candidatos”:

542 = 2.916
562 = 3.136

- Ya hemos obtenido la solución

$$\sqrt[2]{3.136} = 56$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Resuelve las siguientes aproximaciones:

a) Resolver la raíz cuadrada de **264** por aproximación
b) Aproxime con diferenciales el valor de $\sqrt{402}$
*c) Aproxime con diferenciales la raíz cúbica de **28***

1.7. Autoevaluación

Instrucciones: Estima tu nivel de logro de los siguientes desempeños y escribe qué debes hace para mejorarlo.

Necesito ayuda (**1**)	Lo puedo hacer solo (**2**)	Lo puedo enseñar a otros (**3**)

Desempeños	1	2	3	Para mejorar mi desempeño debo:
Calculo e interpreto el concepto de la diferencial, como el producto de la				

derivada por la diferencial de la variable independiente.				
Logro realizar los procesos de derivación con la ayuda de tablas de derivación sin errores.				
Resuelvo correctamente un problema con la ayuda de la derivada en los casos de dilatación térmica o cualquier otro de naturaleza variacional, que aproxime a la naturaleza de la diferencial.				
Represento gráficamente la aplicación de las diferenciales en la resolución de problemas.				
Interpreto las gráficas de aplicación de las diferenciales en la resolución de problemas.				
Calculo e interpreto incremento de una función de los diversos ejemplos proporcionados, a partir de su determinación de su diferencial.				
Aplico la diferencial para determinar el incremento de una función presente en el resultado en situaciones reales.				
Represento correctamente la función que permita la solución de un ejemplo práctico.				

1.8. Fuentes bibliográficas

- Cano Giraldo, J. M. (2012). La definición del concepto de función bajo el concepto de la enseñanza. Trabajo de investigación para optar el título de Magister en educación Matemática, 1(1), 01- 74. Recuperado de: http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7497/1/JhonyCano_2012_conceptofuncion.pdf

- Purcell, E. J. (2007). Cálculo diferencial e integral. La derivada, 1(2), 520. Recuperado de: https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo.pdf

- Patricia Ibáñez Carrasco, G. G. (2008). Matemáticas VI, Cálculo Integral. México, D.F.: Cengage Learning S.A. de C.V.

- Hernández, E. (2016). Cálculo Diferencial e Integral, con Aplicaciones. *Revista Digital Matematicas Educacion e Internet*, 286-291.

1.9. Orientación para el estudio

1.9.1. Motivación hacia el aprendizaje

Con las palabras que se ofrecen a continuación completa la sopa de letras de los temas, conceptos y personajes que estarán presentes en el curso de Cálculo Integral. Puedes ver este desafío también en la siguiente liga:

1- Fracciones parciales
2- Área bajo la curva
3- Infinitesimal
4- Antiderivada
5- Diferencial
6- Indefinida
7- Constante
8- Sumatoria
9- Primitiva
10- Derivada
11- Integral
12- Leibniz
13 -Riemann
14- Newton

M	V	O	R	L	E	I	B	N	I	Z	H	Q	P	L	D	X	K	H	E	G
T	A	K	D	I	N	F	I	N	I	T	E	S	I	M	A	L	A	F	V	F
S	R	Q	I	A	S	C	L	R	Y	S	V	S	I	M	K	I	I	J	N	V
F	E	W	F	D	P	I	Y	K	G	E	P	U	A	W	V	N	B	M	K	J
A	A	E	E	A	P	T	J	E	D	L	S	O	L	K	W	T	O	D	E	T
N	B	W	R	V	K	W	X	H	N	A	Q	N	T	X	N	E	W	A	C	X
P	A	N	E	I	E	C	E	M	A	I	K	R	E	N	J	G	T	S	X	K
N	J	O	N	R	O	G	T	K	A	C	Y	P	F	E	W	R	T	W	U	F
N	O	I	C	E	B	N	N	C	F	R	N	K	K	W	U	A	Q	X	M	H
A	L	T	I	D	V	X	A	P	P	A	U	W	F	T	W	L	V	Q	O	Y
M	A	Y	A	I	E	S	T	I	Q	P	V	M	M	O	E	H	B	W	C	E
E	C	E	L	T	H	U	S	G	Q	S	I	D	U	N	D	D	Y	P	C	I
I	U	Y	O	N	N	M	N	W	H	E	C	I	N	H	A	X	S	L	H	V
R	R	N	X	A	X	A	O	B	V	N	T	A	F	F	O	E	Y	X	A	T
B	V	M	X	S	L	T	C	J	D	O	B	V	G	G	Q	P	D	M	D	B
J	A	S	J	R	F	O	S	S	U	I	N	D	E	F	I	N	I	D	A	M
M	M	O	W	Y	B	R	R	J	Y	C	S	H	Y	Q	X	B	I	M	V	K
P	P	Y	Y	O	N	I	P	O	J	C	C	P	K	U	B	F	I	W	I	A
Q	C	F	T	D	K	A	C	P	K	A	N	E	W	M	M	U	O	C	R	N
Y	L	X	F	O	O	R	P	Y	E	R	C	Y	M	O	G	S	R	U	E	U
P	R	I	M	I	T	I	V	A	V	F	B	C	R	I	Q	L	M	P	D	B

1.9.2. Técnicas, hábitos de estudio y estrategias de aprendizaje

¿Qué hay que hacer para ser matemático?

Un poquito de paciencia

Lo primero que hay que tener es paciencia. Por muchas razones, pero sobre todo porque las matemáticas requieren pensar, y eso exige tranquilidad y concentración. Todos sabemos que las ideas rara vez se presentan de repente, suelen ser fruto de horas de reflexión. Y las matemáticas se van entendiendo de modo gradual. Luego, como en cualquier estudio hace falta mucha curiosidad no conforme con lo primero que se te ocurre: plantearse siempre por qué pasa esto y aquello, y qué sucede si cambio por aquí y por allá.

El estudio de las matemáticas es largo, pero cuanto más se sabe de matemáticas más ganas vienen de saber aún más.

¡De cabeza!

Todos podrán pensar matemáticamente y trabajar aplicando sus conocimientos matemáticos, bien en la propia investigación matemática, o en empresas de todo tipo (haciendo los horarios de trenes, regulando el tráfico de la ciudad, diseñando cómo cortar patrones para aprovechar al máximo la tela, haciendo controles de calidad en procesos de fabricación, resolviendo problemas de robots, estudiando la economía de mercado, etcétera). ¡La vida de un matemático es una aventura apasionante! (o casi).

Desarrollo de la memoria

Si lo que se quiere es potenciar la capacidad de memorizar es aconsejable estar atento a lo siguiente: -Mejorar la percepción defectuosa- intentar que en el aprendizaje intervengan todos los sentidos consiguiendo la máxima atención y concentración.

Organización y planificación

Evidentemente, para el estudio de las matemáticas es necesario una buena organización y una correcta planificación. Para ello, es necesario que antes de que los estudiantes afronten la realización de los ejercicios y problemas hayan estudiado la parte de teoría, y tengan los contenidos suficientemente claros.

Preparación de exámenes

En cuanto a la preparación de exámenes es fácil siempre y cuando ya esté realizado todo el trabajo previo. Bastaría con saber mantener la concentración y la tranquilidad a la hora de enfrentarse al examen para poder poner en práctica todo lo trabajado con anterioridad. Para ello, es importante conocer la fecha con la suficiente antelación, y así haber realizado una buena programación. Otro aspecto a tener en cuenta es la realización de simulacros, es decir, tratar de enfrentarse al examen, previamente, bien con ejercicios del tipo del examen, bien con exámenes de cursos anteriores. De esta forma, el estudiante estará habituado al examen y a la forma de enfrentarse a él.

1.10. Recursos didácticos

- Tablas de derivación https://www.slideshare.net/AnyHernandez7/tabla-de-derivadas-1
- Calculadora de derivadas: https://es.symbolab.com/solver
- Interpretación geométrica de diferencial https://www.youtube.com/watch?v=dq8zOO87Urs&t=19s
- Calculadora de representación geométrica de la diferencial https://www.geogebra.org/m/TK7T6hj6
- Aplicaciones de la diferencial https://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/soldifer/soldiferHTML/diferencial.htm
- Incremento de una función https://www.youtube.com/watch?v=VEfbwAR6kYQ
- Aplicación: Khan Academy
- Aproximaciones de una raíz https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/diferencial-aproximacion-incremento/
- Video de aproximaciones de una raíz https://www.youtube.com/watch?v=mWFoEkz0tSM

1.11. Evaluación

1.- Representa de forma gráfica los siguientes incisos:

a) una función para del volumen de un cubo
b) evalúa un incremento de 0.5 cm, cuando la función está x=3
c) colorea de rojo el área de dy
d) colorea de azul el área del Δy

2.- Representa de forma gráfica Δy, dy para $y = x^2 + 2x$, cuando la función está en x= 2 y presenta un incremento de Δx=0.5

3.- Si una placa de metal cuadrada los lados miden 40 cm antes de someterse a altas temperaturas y luego por efecto de la dilatación térmica la longitud de sus lados crece 0.08 cm. Determina ¿cuál será el incremento del área que experimenta la placa por efecto de la dilatación? Realiza los procesos con métodos aritméticos y con diferenciales para comparar los resultados.

4.- Determina la diferencial de la expresión f(x) = 5 $\sqrt[6]{x^7}$

5.- Determina la diferencial de la expresión f(x) = 2 cos 5 x

6.- Emplea diferenciales para obtener el valor aproximado de los siguientes ejercicios:

a)$\sqrt{87}$

b) Un paralelepípedo rectangular cuya atura es de 5cm tiene por base un cuadrado cuyo lado es igual a 4cm. ¿Cuánto aumentará el volumen del paralelepípedo si el lado de la base se alarga a 0.01cm?

c) De cada cara de un bloque cúbico de madera se obtiene una capa de 0.5 cm de espesor. Si el bloque tenía originalmente 10 cm de arista, aproximadamente ¿Cuánto va a decrecer el volumen a causa del proceso?

Bloque 2. Integrales Indefinidas

2.1. Introducción

En matemáticas existen operaciones inversas, por ejemplo: la suma como el inverso de la resta; la multiplicación como la inversa de la división, etc. por lo que para la derivada lo contrario es la antiderivada o también llamada función primitiva de una función f(x) es otra función F(x) cuya derivada es f(x) y cuya diferencial es f(x) dx.

El conjunto de todas las funciones primitivas de una función f(x) se denomina integral indefinida de f(x) dx.

2.2. Objetivos

2.2.1. Objetivo general

Usa las distintas formas de obtener la integral indefinida a través del conocimiento de las integrales de funciones para solucionar creativamente situaciones reales o hipotéticas presentes en su entorno.

2.2.2. Objetivos específicos

- Emplear la definición de la integral indefinida como un proceso inverso de la derivada.
- Identificar la definición de la integral indefinida como una herramienta para el cálculo.
- Determinar la constante de integración mediante condiciones iniciales.
- Reconocer la antiderivada y la familia de primitivas que se generan al resolver la integral indefinida.
- Identificar la utilidad de la integral y la derivada como procesos contrarios de comprobación mutua que dan origen a los teoremas fundamentales del cálculo.

2.3. Competencias Genéricas Disciplinares

Competencias a desarrollar en el Bloque			
Claves	**Genéricas**	**Claves**	**Disciplinares**
CG 1.1	Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	**CDEM 1**	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CG 4.1	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	**CDEM 2**	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicados a diferentes enfoques.
CG 5.1	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objeto.		

2.4. Secuencias

<table>
<tr><th colspan="4">Elementos integradores a desarrollar en el Bloque</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Interdisciplinariedad</td><td rowspan="2">Ecología y Medio Ambiente.</td><td>Eje Transversal</td><td>Tema de eje Transversal</td></tr>
<tr><td>Social</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto Semestre.</td><td>Ambiental</td></tr>
<tr><td>Salud</td></tr>
<tr><td>Habilidades Lectoras.</td></tr>
</table>

2.5. Conceptos claves

- Antiderivada: Una función F(x) es una antiderivada de f (x), si la derivada de F(x) es igual a f (x). Matemáticamente: $\int f(x)dx$ = F(x) ⇒ F' (x) = f (x).
- Integral indefinida: Es el proceso de determinación de todas las antiderivadas de una función dada. En Cálculo una integral es el resultado de la integración de una función. El símbolo de integral es: ∫, y la expresión: $\int f(x)dx$ = F(x) +C se lee: «La integral de la función f (x) respecto de x es igual a la función F(x) más una constante».
- Constante de integración: es una cantidad independiente de la variable de integración.
- Integrales indefinidas de tipo algebraicas, trigonométricas y exponenciales: procedimiento esencialmente de prueba y error, para lo que existen las tablas de integración las cuales se le conocen como integrales inmediatas.

2.6. Actividades de aprendizaje

2.6.1. Definición de integral indefinida

Para representar la integral se emplea el símbolo ∫ que tiene su origen en la inicial de la palabra suma y se representa como

$$F(x) = f(x)dx$$

Donde F(X) es la primitiva o antiderivada de f(x) y f(x) es el integrando. De modo que la integral indefinida se escribe como

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde C se denomina constante de integración, es una cantidad independiente de la variable de integración.

Ejemplo:

Como una función primitiva de $4x^3dx = x^4$entonces podemos escribir:

$$\int 4x^3dx = x^4 + C$$

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$y = x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2$
$y = x^2 + 5$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2 + 5$
$y = x^2 - 32$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2 - 32$
$y = x^2 - 3/4$	$\frac{dy}{dx} = 2x$	$dy = 2xdx$	$\int 2xdx = x^2 - \frac{3}{4}$

Generalizando de acuerdo con la tabla anterior se obtiene:

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

Determinación de la constante

El cálculo del valor de la constante de integración se puede obtener a partir de la expresión diferencial que se va a integrar y de un punto determinado que se presenta en las condiciones iniciales del problema. A continuación, vamos a ver ejemplos de lo antes mencionado:

Ejemplo 1.- Halla el valor de la constante de integración y la función f(x) de la expresión diferencial $f'(x) = 6x^2 - 2x$ en el punto (2,3).

Solución:

Si la derivada de f(x) es $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x$

Entonces la diferencial es $dy = (6x^2 - 2x)dx$

Y si a esta diferencial le colocamos signos de integral a cada uno de sus términos:

$$\int dy = \int 6x^2dx - \int 2xdx$$
$$y = 6\int x^2dx - 2\int xdx$$
$$y = \frac{6x^3}{3} - 2x^2 + C$$
$$y = 2x^3 - x^2 + C$$

Sustituyendo los valores:

$$3 = 2(2)^3 - (2)^2 + C$$

Resolviendo operaciones y despejando:

$$C = -9$$

Sustituyendo en la función tenemos que:

$$y = 2x^3 - x^2 - 9$$

Por lo que el resultado de la constante de integración es -9 y la función original es:

$$y = 2x^3 - x^2 - 9$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura. En equipo de tres integrantes resuelvan los siguientes ejercicios de antiderivadas y expresen sus conclusiones **(15 min)**:

a) $f(x) = x^3 + 4$
b) $f(x) = x^3 - 2$
c) $f(x) = x^3 + 9$
d) $f(x) = x^3 - 1000$

Actividad de fortalecimiento. En parejas completen el siguiente cuadro **(20 min).**

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$\boldsymbol{y = x^3}$			
	$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 4x^2}$		
		$\boldsymbol{dy = 6x^3dx}$	
			$\boldsymbol{\int 5\,x^2dx = \frac{5x^3}{3} - 15}$
$\boldsymbol{y = 2x^2 - 3x}$			
		$\boldsymbol{dt = 5xdx}$	

Actividad de cierre

En parejas resuelvan el siguiente ejercicio: Alex lanza una pelota hacia arriba desde una altura de 2m sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 5m/s. De la física se sabe que la velocidad respecto al tiempo está determinada por la función $v(t) = v_0 - gt$, donde g= 9.8m/s^2 con los datos que tenemos: $v(t) = 5 - 9.8t$ en m/s. Encuentra s(t) la función que da la altura de la pelota al tiempo t **(15 min).**

2.6.2. Integrales de funciones

Muchos de los fenómenos tienen comportamientos que pueden ser periódicos, es decir, que se repiten o tienen formas definidas durante un determinado tiempo como lo puede ser el movimiento de los astros, el giro de un motor, las señales eléctricas; pero también pueden existir fenómenos que pueden tener comportamientos variados, como el caso de las infecciones por virus o bacterias, por ello el análisis requiere de observar sus formas para aproximar el estudio a una ecuación matemática. En este espacio podrás conocer los procesos para determinar la antiderivada o primitiva de funciones algebraicas, trigonométricas y exponenciales, pero antes vamos a recordarlas.

Actividad Diagnóstica

Responde cada una de las preguntas de acuerdo con lo que recuerdes de tus cursos anteriores (20 minutos).

Escribe en la línea el tipo de función que observas (algebraica, trigonométrica, logarítmicas o exponencial).

a) f(x)= $-7x^4 + 5x + 6$ ________________
b) f(x)= cos (2x) _______________
c) f(x) = log (x) ______________________
d) f(x) = $-4e^{2x}$ __________________
e) f(x) = $3x^8$ _________________
f) f(x) = 2^x ______________

A continuación, veremos las propiedades básicas de las integrales indefinidas con algunos ejemplos aplicados a funciones algebraicas. Será necesario que tengas las tablas de integración a la mano para que vayas desarrollando tu aprendizaje.

En esta liga puedes encontrar **tablas de integración** inmediata con algunos ejemplos, es necesario que lo descargues e imprimas para tenerlos a la mano.
https://www.slideshare.net/naniddd/tabla-de-integrales-inmediatas-27860967

2.6.2.1. Integración de funciones algebraicas

Ejemplo1. Determina la primitiva o antiderivada que se genera al realizar la integración de las siguientes funciones usando las tablas de integrales indefinidas inmediatas que descargaste:

a) $\int 6dx$ Solución

Buscando en las tablas vemos

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
TIPOS	INTEGRAL	EJEMPLO
	$\int dx = x$	$\int dx = x$
	$\int a dx = ax$	$\int 3dx = 3x$

El a= 6
∫ 6dx = **6x + C** es la primitiva.

Comprobación: Si derivamos 6x obtenemos 6(1) x^{1-1} = 6
De esta forma vemos que la derivación es contraria a la integración.

Ejemplo2. Determina la primitiva o antiderivada que se genera al realizar la integración de las siguientes funciones:

b) $\int (6x^4 - \frac{7}{\sqrt[5]{x}})dx$ Solución;

Para poder resolver este tipo de problemas donde existan dos expresiones a integrar, vamos a utilizar las siguientes propiedades:

Propiedades de la integral indefinida

1. Propiedad de linealidad: La **integral de una suma** de funciones es igual a la **suma de las integrales** de esas funciones.

$$\int[f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

2. La **integral del producto de una constante** por una función es igual a la **constante por la integral** de la función.

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

La primera propiedad establece que se pueden sumar o restar las funciones a integrar, por ello las podemos tratar como integrales separadas.

$\int (6x^4 - \frac{7}{\sqrt[5]{x}})dx$ se puede descomponer en dos integrales independientes,

$\int 6x^4 dx - \int \frac{7}{\sqrt[5]{x}} dx$ y realizar las integrales separadas.

La segunda propiedad establece que se saque la constante que se encuentra multiplicando a la integral,

$\int 6x^4 dx = 6 \int x^4 dx$ ahora sí, ya nos podemos ir a las tablas de integración y buscar cuál es la fórmula que se asemeja a ésta.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
TIPOS	**INTEGRAL**	**EJEMPLO**
	$\int dx = x$	$\int dx = x$
	$\int a dx = ax$	$\int 3dx = 3x$
Potencial	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int 5.x^3 dx = \frac{5.x^{3+1}}{3+1} = \frac{5.x^4}{4}$
	$\int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\int 2.(2x+5)^4 dx = \frac{(2x+5)^5}{5}$

$$6 \int x^4 dx$$

Aquí vemos que n= 4, por ello resolvemos

$6 \int x^4 dx = 6\left(\frac{x^{4+1}}{4+1}\right) = 6\left(\frac{x^5}{5}\right) + c$

Ahora hacemos lo propio para la segunda parte de la integral marcada con azul.

$-\int \frac{7}{\sqrt[5]{x}} dx$ sacamos la constante 7 del signo de la integral.

$-\int \frac{7}{\sqrt[5]{x}} dx = -7 \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$ ahora buscamos en la tabla de integral la que se parezca a esta o ***hacer el cambio de exponente radical a exponente fraccionario.***

$-7 \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = -7 \int \frac{1}{x^{1/5}} dx = -7 \int x^{-1/5} dx$ ahora sí, ya podemos buscar en tabla la integración correspondiente.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
TIPOS	**INTEGRAL**	**EJEMPLO**
	$\int dx = x$	$\int dx = x$
	$\int a dx = ax$	$\int 3dx = 3x$
Potencial	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int 5.x^3 dx = \frac{5.x^{3+1}}{3+1} = \frac{5.x^4}{4}$
	$\int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\int 2.(2x+5)^4 dx = \frac{(2x+5)^5}{5}$

$-7 \int x^{-1/5} dx$ ahora n = -1/5

$-7 \int x^{-1/5} dx = -7\left(\frac{x^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1}\right) = -7\left(\frac{x^{4/5}}{4/5}\right) = -\frac{35\ x^{4/5}}{4} + c$

Luego entonces,

$\int \left(6x^4 - \frac{7}{\sqrt[5]{x}}\right) dx = 6\left(\frac{x^5}{5}\right) - \frac{35\ x^{4/5}}{4} + c$

Comprobación con derivación: si derivamos la primitiva o antiderivada (amarilla) encontraremos la función original.

Si derivamos $6\left(\frac{x^5}{5}\right) - \frac{35\ x^{4/5}}{4} + c$

$6\left(\frac{x^5}{5}\right) = 6\,(5)\,\frac{x^{5-1}}{5} = 6\,x^4$

$-\frac{35\ x^{4/5}}{4}$ $= -\frac{35\,(\frac{4}{5})\,x^{\frac{4}{5}-1}}{4}$ $= -7\ x^{-1/5}$ $= -\frac{7}{\sqrt[5]{x}}$

De esta forma vemos que la derivación es contraria a la integración.

2.6.2.2. Integración de funciones trigonométricas

Ejemplo 4. Determina la primitiva o antiderivada que se genera al realizar la integración de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\int -\frac{4}{7}\cos x\ dx$

Solución: seguimos los pasos anteriores, observamos la función a integrar, luego comparamos con la de la tabla, procedemos a integrar y posteriormente comprobamos con la derivación de la primitiva que resulta.

Seno	$\int senx\ dx = -cosx$	$\int 7.senx\ dx = -7.cosx$
	$\int u'.senu\ dx = -cosu$	$\int 6.sen6x\ dx = -cos6x$
Coseno	$\int cosx\ dx = senx$	$\int 6.cosx\ dx = 6.senx$
	$\int u'.cosu\ dx = senu$	$\int 6x.cos3x^2\ dx = sen3x^2$

$\int -\frac{4}{7}\cos x\ dx = -\frac{4}{7}\int \cos x\ dx = -\frac{4}{7}\ \boldsymbol{sen\ x + C}$

Comprobamos derivando la primitiva $-\frac{4}{7}\ \boldsymbol{sen\ x + C}$

Sacamos la constante $-\frac{4}{7}$ ***y derivamos a la función senx***

Así $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{7}\ \boldsymbol{cos\ x}$ o mejor aún dy **=** $-\frac{4}{7}$ **cos x dx**

De esta forma, vemos que la derivación es contraria a la integración y que nuestra integración es correcta.

Ejemplo 5. Determina la primitiva o antiderivada que se genera al realizar la integración de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\int 12\,x^2\cos 4x^3\,dx$

Solución: Seguimos con el proceso comparamos la integral con la de la tabla, resolvemos y comprobamos con derivación, en la tabla se observa que

Seno	$\int senx\ dx = -cosx$	$\int 7.senx\ dx = -7.cosx$
	$\int u'.senu\ dx = -cosu$	$\int 6.sen6x\ dx = -cos6x$
Coseno	$\int cosx\ dx = senx$	$\int 6.cosx\ dx = 6.senx$
	$\int u'.cosu\ dx = senu$	$\int 6x.cos3x^2\ dx = sen3x^2$

Observa que si u= $4x^3$ entonces la derivada u´= $12x^2$, ahora sí, ya podemos resolver aplicando

a) $\int 12\,x^2\cos 4x^3\,dx = \int$ u´ $\cos u\,dx$ =***sen u*** ; por lo tanto, la primitiva es
$\int 12\,x^2\cos 4x^3\,dx = \boldsymbol{sen\ 4x^3}$**+ C**

Comprobamos: si derivamos la primitiva $sen\ 4x^3$+ C

Aplicando la regla de la cadena para $\frac{dy}{dx}\ \boldsymbol{sen\ 4x^3 = 12\ x^2 \cos 4x^3}$

2.6.2.3. Integración de funciones exponenciales

Ejemplo 6. Determina la primitiva o antiderivada que se genera al realizar la integración de las siguientes funciones exponencial:

a) $\int 4^x dx$

Solución: Vean la función que nos ofrecen para integrar, la comparamos con la tabla

Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = lnx$	$\int \frac{4}{x} dx = 4.lnx$
	$\int \frac{u'}{u} dx = lnu$	$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = ln(x^2+5)$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int 2.e^x dx = 2.e^x$
	$\int u'.e^u dx = e^u$	$\int 5.e^{5x+1} dx = e^{5x+1}$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna}$	$\int 3.5^x dx = \frac{3.5^x}{ln5}$
	$\int u'.a^u dx = \frac{a^u}{lna}$	$\int 2x.4^{x^2} dx = \frac{4^{x^2}}{ln4}$

Podemos decir entonces que,

$$\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

Comprobamos: ahora hay que derivar la primitiva $\frac{4^x}{\ln 4}$ + C

Solución: Sacamos la constante $\frac{1}{\ln 4}\ 4^x$ y ahora derivamos $\frac{d}{dx}(4^x) = 4^x \ln(4)$

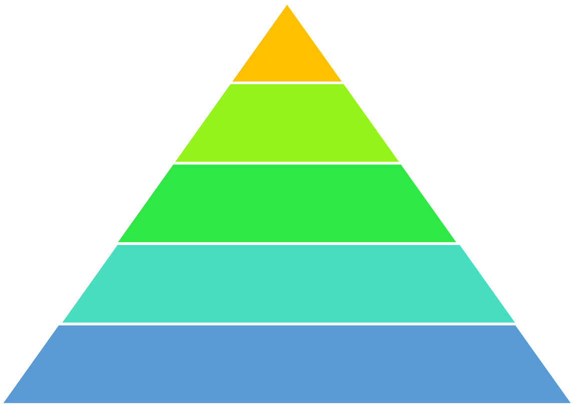
$$\frac{1}{\ln 4}\ (\ 4^x \ln(4))\ =\ 4^x$$

De esta forma vemos que la derivación es contraria a la integración.

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura. De acuerdo con la información de las actividades de aprendizaje del tema de la integral indefinida de funciones algebraicas, trigonométricas y exponenciales, contesta y compara en un foro con tus compañeros las respuestas (40 minutos).

1. **Ordena de manera secuencial la pirámide, lo que harías para encontrar la primitiva o antiderivada de una función.**



a) Obtener la integral y comprobar con derivación
b) Ir a tablas y comparar la función a integrar con las tablas
c) Observar el tipo de función a integrar (polinómica, trigonométrica, etc.)
d) Aplicar los procesos de integración, respetando propiedades
e) Sustituir la función que tienes con los de la tabla.

2. **Determina la antiderivada de las siguientes funciones algebraicas, usando las tablas de integración y las propiedades correspondientes, envía tus propuestas a tu maestro para su revisión.**

a) $\int 4x \ dx$
b) $\int 7x^5 \ dx$
c) $\int (x^2 + 7x^5)dx$
d) $\int (-3x + \sqrt[5]{x})dx$
e) $\int (\frac{4}{9x^6} + \frac{7}{\sqrt[3]{x^8}})dx$

Actividad de fortalecimiento

En parejas resuelvan los siguientes ejercicios, incluyendo la fórmula de la tabla que emplean, los procesos y la comprobación **(30 minutos)**.

1. **Determina la integral indefinida de las siguientes funciones trigonométricas usando las tablas de integración y las propiedades correspondientes, pide apoyo a tu docente en las dudas que se te presenten.**

a) $\int 5x^4 sen\ x^5 dx$
b) $\int 3\ tan\ x\ dx$
c) $\int -9\ cos 4x\ dx$
d) $\int -sen\ 5x\ dx$
e) $\int tan^2 x\ dx$

2. **Determina la integral indefinida de las siguientes funciones exponenciales usando las tablas de integración y las propiedades correspondientes.**

a) $\int e^x$ dx
b) $\int \frac{1}{e^x}$ dx
c) $\int 6e^x$ dx

Actividad de cierre

En parejas resuelvan los siguientes problemas: determina la antiderivada de las siguientes funciones, cuida comprobar realizando la derivación a la primitiva que encuentres **(30 minutos)**.

$a)\ \int (5x^2 + \frac{7}{x^5})dx$

$b)\ \int (\frac{6}{8}\sqrt[3]{x^7} - 4^x\ )dx$

$c)\ \int (\tan 5x -\ 7x^3)dx$

$d)\ \int (\frac{5}{x} + \frac{6}{2}\sqrt[4]{x})dx$

$e)\ \int sen^2\ x\ dx$

2.7. Autoevaluación

Instrucciones: Estima tu nivel de logro de los siguientes desempeños y escribe qué debes hace para mejorarlo.

Necesito ayuda (**1**) — Lo puedo hacer solo (**2**) — Lo puedo enseñar a otros (**3**)

Desempeños	1	2	3	Para mejorar mi desempeño debo:
Calculo e interpreto la antiderivada de cada una de las funciones presentadas.				
Aplico la diferencial para determinar la antiderivada.				
Interpreto correctamente el significado físico de la función que permita identificar la constante de integración, en la solución de un ejemplo práctico.				
Identifico las funciones algebraicas, exponenciales y trigonométricas.				
Aplico las reglas y las fórmulas de integración adecuadamente mediante el uso de tablas de integración.				
Comprendo y aplico correctamente los procesos de integración y derivación para comprobar mis resultados obtenidos.				

2.8. Fuentes bibliográficas

- Patricia Ibáñez Carrasco, G. G. (2008). Matemáticas VI, Cálculo Integral. México, D.F.: Cengage Learning S.A. de C.V.
- Heranz, C. A. (2004). *Póngame un kilo de matemáticas.* España: SM.
- Cano Giraldo, J. M. (2012). La definición del concepto de función bajo el concepto de la enseñanza. Trabajo de investigación para optar el título de Magister en educación Matemática, 1(1), 01- 74. Recuperado de: http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7497/1/JhonyCano_2012_conceptofuncion.pdf
- Purcell, E. J. (2007). Cálculo diferencial e integral. La derivada, 1(2), 520. Recuperado de: https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo.pdf

2.9. Orientación para el estudio

Organizo mi tiempo y actividades

Organizar el tiempo no es la meta. Organizar el tiempo es la herramienta para alcanzar tus metas.

De hecho, la cuestión no es "cómo organizarme", sino cómo organizar mi tiempo para alcanzar la meta que tengo. Mi meta de salir de deudas, crecer mi negocio, terminar mi proyecto, o cualquiera otra meta que tengas.

Te compartiré un proceso de cinco pasos que te ayudará a establecer tus prioridades y ser más efectivo en cumplirlas. A este método lo llamaremos PAOPA, y es posible que ya hagas uso de ello, aunque no te has dado cuenta. PAOPA representa cinco pasos:

1. Piensa
2. Anota
3. Organiza
4. Planifica
5. Acciona

El primer paso es Pensar. Porque todo empieza con tener ideas. En nuestra mente todo está en círculo - pensamos en las cosas que tenemos que hacer: necesito limpiar la casa, necesito hacer compras, necesito pagar mi deuda, necesito. Cada pensamiento regresa, y regresa, hasta que termines esta actividad.

El problema es que la capacidad de nuestro cerebro es limitada y podemos pensar tan solo de dos a tres cosas a la vez - cocinando, cuidando un niño, viendo la novela, es la realidad de muchas mujeres.

Mi esposo dice que no es capaz de pensar y hacer a la vez más que una cosa. Y es la realidad de los hombres.

Pero, sin importar si eres un hombre o una mujer esto no es suficiente, porque todos tenemos estos pensamientos:

- No te dejan enfocarte en terminar esta cosa que estás actualmente haciendo,
- Tampoco dejan que nuevos pensamientos, tal vez ideas brillantes, vengan a tu mente.

Por lo tanto, necesitas limpiar tu mente, y es el segundo paso, anotar.

El segundo paso, anota todos estos pensamientos que tienes. De esta manera lograrás dos cosas:

- Limpias tu mente de pensamientos - y como resultado tu mente está tranquila, te sientes en paz y haces espacio para nuevas ideas.
- Te aseguras de que no vas a olvidar algo importante.

Pero, cuidado: para que esto suceda tu mente necesita confiar que realizarás las actividades que anotaste.

Para tener tus notas siempre cuando las necesitas te recomiendo anotarlas en una aplicación que tendrás contigo en tu computadora y celular. Escribir en una hoja de papel es también una opción, sin embargo, hay algo importante que debes hacer con tus notas. ¡Organizarlas!

El tercer paso es organizar tus notas, y es mucho más fácil hacerlo en una aplicación. Nosotros hacemos uso de Nozbe, una simple y a la vez muy poderosa aplicación para manejar las tareas. Es donde anotamos los pensamientos, y después los organizamos.

Sin importar qué herramienta eliges, debes desarrollar un simple sistema. Por ejemplo, dividir tus notas en tres cajas:

- Caja de proyectos - es donde agrupas las tareas de cada proyecto, puedes añadir información más detallada y establecer la fecha.
- Lista de comprobación - para organizar todo lo que no tiene fecha fija y es posible anotarlo en pocas palabras.
- Bloc de notas - donde guardas todo lo demás, todos los pensamientos y notas de varios temas, que no quedan en ninguna otra caja. Para esta actividad nosotros usamos la aplicación Evernote.

El cuarto paso es planificar. Una vez que organizas tus notas, vas a planificar.

Revisa tus tareas, establece fechas, cuando quieres cumplirlas, y también establece las prioridades para el próximo día.

Para mí, establecer las prioridades es el punto clave, y creo que debemos hacerlo cada día. Cada noche o cada mañana dedica unos minutos para revisar tus notas y establecer tareas que piensas hacer entre las próximas 24 horas. Si lo terminas, te queda solo una cosa más que hacer: Accionar.

El quinto paso es accionar. Ya sabes, QUÉ quieres hacer, CUÁNDO quieres hacerlo, y CÓMO hacerlo porque lo tienes todo organizado y anotado.

Entonces, ¿qué esperas? Toma la acción y enfócate en la primera de las prioridades de tu lista. Una vez que termines con ella elimínala de la lista y haz la siguiente.

¡Felicidades por ser una persona que hace cosas que te acercan a lograr tus metas!

Si nunca has seguido este proceso no te preocupes si te toma unos días para poner en práctica estos cinco pasos. Te aseguro que vale la pena desarrollar este hábito, porque con este proceso de administrar el tiempo serás capaz de enfocarte en lo que de verdad importa, y pronto verás los resultados.

Video de cómo organizar mi tiempo y actividades: https://www.youtube.com/watch?v=uC9pUPfK1K4&t=193s

2.10. Recursos didácticos

- Fortalecer el tema de integral indefinida o antiderivada, para su mayor comprensión https://www.youtube.com/watch?v=fFloMKNFACY
- conceptos básicos del tema http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf
- Aplicación Khan Academy
- Tablas de integración: https://www.slideshare.net/naniddd/tabla-de-integrales-inmediatas-27860967
- Videos de integración inmediata https://www.youtube.com/playlist?list=PL7ClXEAj-egeol2YE45XZGd5tdxZw1vKP

Tablas de integración indefinidas

Tabla de integrales

FORMAS ELEMENTALES

1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2 $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$

3 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4 $\int e^u\,du = e^u + C$

5 $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8 $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9 $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10 $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11 $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12 $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13 $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14 $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15 $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17 $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18 $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

19 $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

20 $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

21 $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

22 $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

23 $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

24 $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

25 $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

26 $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

27 $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

28 $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

29 $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

30 $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

31 $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

32 $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

33 $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

34 $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

35 $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du \quad \text{si } n \neq 1$

36 $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du \quad \text{si } n \neq 1$

37 $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du \quad \text{si } n \neq 1$

38 $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du \quad \text{si } n \neq 1$

39a $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\, du \quad \text{si } n \neq -m$

39b $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du \quad \text{si } m \neq -n$

40 $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

41 $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

FORMAS QUE INCLUYEN $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

44 $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

45 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

46 $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$

47 $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

48 $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

49 $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

50 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$

51 $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

52 $\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

53 $\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$

FORMAS QUE INCLUYEN $\sqrt{a^2 - u^2}$

54 $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

55 $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

56 $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

57 $\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

58 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

59 $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

60 $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

61 $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

62 $\int (a^2 - u^2)^{3/2}\, du = \frac{u}{8}(5a^2 - 2u^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

FORMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

63 $\int ue^u\,du = (u-1)e^u + C$

64 $\int u^n e^u\,du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u du$

65 $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

66 $\int u^n \ln u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\ln u - \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

67 $\int e^{au}\,\mathrm{sen}\,bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\,\mathrm{sen}\,bu - b\cos bu) + C$

68 $\int e^{au}\cos bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\,\mathrm{sen}\,bu) + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

69 $\int \mathrm{sen}^{-1}u\,du = u\,\mathrm{sen}^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C$

70 $\int \tan^{-1}u\,du = u\tan^{-1}u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

71 $\int \sec^{-1}u\,du = u\sec^{-1}u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$

72 $\int u\,\mathrm{sen}^{-1}u\,du = \dfrac{1}{4}(2u^2-1)\mathrm{sen}^{-1}u + \dfrac{u}{4}\sqrt{1-u^2} + C$

73 $\int u\tan^{-1}u\,du = \dfrac{1}{2}(u^2+1)\tan^{-1}u - \dfrac{u}{2} + C$

74 $\int u\sec^{-1}u\,du = \dfrac{u^2}{2}\sec^{-1}u - \dfrac{1}{2}\sqrt{u^2-1} + C$

75 $\int u^n\,\mathrm{sen}^{-1}u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\mathrm{sen}^{-1}u - \dfrac{1}{n+1}\int\dfrac{u^{n+1}}{\sqrt{1-u^2}}du \quad \text{si } n \neq -1$

76 $\int u^n\tan^{-1}u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\tan^{-1}u - \dfrac{1}{n+1}\int\dfrac{u^{n+1}}{1+u^2}du \quad \text{si } n \neq -1$

77 $\int u^n\sec^{-1}u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\sec^{-1}u - \dfrac{1}{n+1}\int\dfrac{u^n}{\sqrt{u^2-1}}du \quad \text{si } n \neq -1$

2.11. Evaluación

1.- Escribe la familia de antiderivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 6x$
b) $f(x) = 7x^6$
c) $f(x) = 4x^3$

2.- ¿Qué función tiene a f(x) =2x como derivada?

3.- ¿Será esa la única función o hay otras que tienen a f(x)=2x como derivada?

4.- Calcula las siguientes integrales algebraicas:

a. $\int 4dx$

b. $\int (3x^2 - 5x + \pi)dx$

c. $\int \left(\frac{2}{3}\sqrt{t} + \sqrt[3]{t^2}\right)dt$

5.- Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

a. $\int (\tan^2\theta + \cot^2\theta)d\theta$

b. $\int \dfrac{\mathrm{sen}^2 t - \cot t}{\mathrm{sen}\,t}dt$

6.- Calcula las siguientes integrales exponenciales:

a. $\int (e^{2x}+1)^{-4} e^{2x} dx$

Bloque 3. Métodos de Integración

3.1. Introducción

La integración de una función no siempre se puede calcular con la regla básica estudiada en el Bloque 2 Integral Indefinida, en el tema integrales de funciones. Para calcular la integral de funciones más complejas o no inmediatas se utiliza métodos de integración. En el Bloque 3 Métodos de Integración estudiaremos dos de estos métodos llamados integración por partes e integración por fracciones parciales.

En el contenido comenzamos con los objetivos a alcanzar del Bloque 3 Métodos de Integración, para los estudiantes, seguido de la teoría, ejemplos, actividades de aprendizaje correspondiente. Para complementar tenemos las fuentes bibliográficas y recursos didácticos que permite al estudiante poder profundizar en los temas. Por último, tenemos una actividad de autoevaluación y evaluación como herramienta de los estudiantes para valorar sus conocimientos obtenidos al finalizar el curso.

Dentro del contenido del bloque se recomienda actividades de orientación para el estudio en temas de organización del tiempo y actividades de aprendizaje, desarrollo de técnicas, hábitos de estudio, estrategias de aprendizaje, motivación y aprendizaje profundo; que les permite desarrollar habilidades de estudio que facilitan el aprendizaje en cualquier asignatura.

3.2. Objetivos

3.2.1. Objetivo general

Emplea distintos métodos de integración para la solución de una integral no inmediata que se relacionen con la situación de su contexto, coadyuvando en el desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo.

3.2.2. Objetivos específicos

- Conocer las condiciones básicas para el uso de la integración por partes.
- Identificar la fórmula de la integración por partes y los elementos que la componen.
- Conocer y replicar el procedimiento de la integración por partes.
- Conocer qué son las integrales por fracciones parciales.
- Comprender que caso de integrales por fracciones parciales debo aplicar para cada función racional.
- Replicar los procedimientos para determinar las integrales de funciones racionales.

3.3. Competencias Genéricas Disciplinares

Competencias a desarrollar en el Bloque			
Claves	**Genéricas**	**Claves**	**Disciplinares**
CG 4.1	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	**CDEM 1**	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CG 5.1	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objeto.	**CDEM 2**	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicados a diferentes enfoques.
CG 8.3	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.		

3.4. Secuencias

Elementos integradores a desarrollar en el Bloque			
Interdisciplinariedad	Ecología y Medio Ambiente.	**Eje Transversal**	**Tema de eje Transversal**
		Social	
	Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto Semestre.	Ambiental	
		Salud	
		Habilidades Lectoras.	

3.5. Conceptos claves

- **Integración por partes**: es una técnica que se utiliza para expresar una integral en otra expresión que se puede determinar más fácilmente.
- **Integración por fracciones parciales**: es una técnica que se utiliza para descomponer o dividir una fracción racional que se pueda integrar más fácilmente.

3.6. Actividades de aprendizaje

3.6.1. Integración por partes

La integración por partes, que considerándola de forma abreviada podríamos darla a conocer como

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Cabe señalar que, las condiciones básicas para el uso de este método son las siguientes:

- La sección escogida como dv ha de ser fácil de integrar
- La parte ∫v · du debe ser más sencilla de la original ∫u · dv

Este método sugiere que en el integrando escojamos dos partes, una será u que debemos derivar para hallar du y la otra parte será dv la cual al integrarla se obtendrá v. Con esto, el resultado de la integral original es el producto u · v menos la integración del producto v · du.

En caso de que la integral que surja con v · du requiera una adecuación más para ser integrada, se puede utilizar de nuevo la integración por partes sobre ella. A continuación, vamos a visualizar ejemplos de la integración por partes:

Ejemplo 1

$$\int 3x \operatorname{sen} x \, dx$$

Si $u = 3x$ entonces $du = 3\,dx$

Si $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ entonces $v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

$$\begin{aligned} \int 3x \operatorname{sen} x \, dx &= 3x(-\cos x) - \int -\cos x \cdot 3 \, dx \\ &= -3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Si $u = \ln x$ entonces $du = \frac{dx}{x}$

Si $dv = x^2 \, dx$ entonces $v = \frac{x^3}{3}$

Luego:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9} x^3 + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$\int x^2 e^{3x}\, dx$$

Si $u = x^2$ entonces $du = 2x\, dx$. Si $dv = e^{3x}\, dx$ entonces $v = \int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{3}$

Luego:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x}\, dx &= x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot 2x\, dx \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\, dx\end{aligned}$$

ahora $u = x, du = dx$ y $dv = e^{3x}\, dx$ y $v = \frac{1}{3}e^{3x}\, dx$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x}\, dx &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\, dx\right] \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\, dx\right] \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{27}x e^{3x} + C\end{aligned}$$

Actividad de apertura

Forma equipos de cuatro estudiantes para encontrar los elementos de la fórmula de integración por partes (u, dv, du, v), de las siguientes funciones (15 min):

a) $\int x^2 \ln x dx$
b) $\int x \cos 2x\, dx$
c) $\int x^2 e^x dx$
d) $\int sec^3 x dx$
e) $\int (x+1)^2 e^x dx$

Actividad de fortalecimiento

En parejas, calculen las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes (30 min):

a) $\int x^2 \ln x dx$
b) $\int x \cos 2x\, dx$
c) $\int x^2 e^x dx$
d) $\int sec^3 x dx$
e) $\int (x+1)^2 e^x dx$

Actividad de fortalecimiento

Trabaja de forma individual para calcular las integrales de las siguientes funciones (30 min):

a) $\int 2x \ln dx$
b) $\int \ln 5x dx$
c) $\int e^x \cos x dx$
d) $\int e^x (7+2x) dx$

e) $\int x \tan x dx$

Actividad de cierre

Trabajen en equipos de tres estudiantes para calcular las integrales de las siguientes funciones (40 min):

a) $\int x^3 \ln x$

b) $\int (4x^2 - 3x + 1) \cos x \, dx$

c) $\int e^x \sin x \, dx$

Al final, uno(a) de los estudiantes pase al pizarrón a resolver uno de los ejercicios explicando el procedimiento.

3.6.2. Integración por fracciones parciales

Una función racional está formada por el cociente de dos funciones polinómicas con exponentes enteros (no negativos ni fraccionarios), es decir tienen la forma siguiente:

$$F(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$$

Es decir,

$$F(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0}$$

El grado de un polinomio está dado por el exponente de mayor valor de la variable.

Una fracción racional puede ser propia o impropia. Una fracción es impropia si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador, caso contrario, la fracción es propia.

El método que más adelante se explicará funciona con fracciones racionales propias, de tal manera que, si se tiene una fracción racional impropia, es necesario hacer la división del polinomio para poder trabajar con la fracción propia.

Por ejemplo, la siguiente fracción impropia se convierte en la siguiente fracción propia al hacer la división correspondiente.

$$\frac{x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^3 - 2x + 2} = x^2 + 6 - \frac{4x^2 - 13x + 7}{x^3 - 2x + 2}$$

Los dos primeros términos x2 y 6 son fáciles de integrar y el problema se reduce a integrar la fracción restante.

Antes de aplicar el método es necesario descomponer el denominador en factores simples de manera que se aplique alguno de los siguientes casos:

Caso 1. Factores lineales distintos. A cada factor lineal ax+b, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{A}{ax + b}$$

siendo A una constante a determinar".

Caso 2. Factores lineales iguales. A cada factor lineal ax+b que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

siendo A1, A2, … An constantes a determinar

Caso 3. Factores cuadráticos distintos. A cada factor cuadrático reducible ax2+bx+c que figure en el denominador de una fracción propia, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

siendo A y B constantes a determinar.

Caso 4. Factores cuadráticos iguales. A cada factor cuadrático irreducible, ax2+bx+c, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

siendo A y B constantes a determinar.

Ejemplos:

a) Determina la integral de la siguiente función:

$$\int\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}ds$$

a. El denominador factorizado quedará de la siguiente manera:

$$s^3+s^2-6s=s(s+3)(s-2).$$

De aquí las que las fracciones parciales pertenecen al caso 1, es decir:

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s-2}.$$

Ordenando los factores de esta igualdad obtendremos una serie de ecuaciones como sigue:

$$s+1=\tfrac{As(s+3)(s-2)}{s}+\tfrac{Bs(s+3)(s-2)}{s+3}+\tfrac{Cs(s+3)(s-2)}{s-2}$$
$$s+1=A(s+3)(s-2)+Bs(s-2)+Cs(s+3)$$
$$s+1=(A+B+C)s^2+(A-2B+3C)s+(-6A).$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-2B+3C=1 \\ -6A=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema presentado se obtienen los valores de las constantes $A=-\frac{1}{6}$, $B=-\frac{2}{15}$ y $C=\frac{3}{10}$, y así las fracciones quedarán en este orden:

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}=\frac{-\frac{1}{6}}{s}+\frac{-\frac{2}{15}}{s+3}+\frac{\frac{3}{10}}{s-2}.$$

La integración consecuente es:

$$\int\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}ds=-\frac{1}{6}\int\frac{ds}{s}-\frac{2}{15}\int\frac{ds}{s+3}+\frac{3}{10}\int\frac{ds}{s-2}=-\frac{1}{6}\ln|s|-\frac{2}{15}\ln|s+3|+\frac{3}{10}\ln|s-2|+C.$$

b) Determina la integral de la siguiente función:

$$\int\frac{t^4-t^3-t-1}{t^3-t^2}dt$$

b. Se presenta una fracción impropia que al dividir nos arroja el resultado siguiente:

$$\frac{t^4-t^3-t-1}{t^3-t^2}=t-\frac{t+1}{t^3-t^2}$$

La porción a trabajar e fracciones parciales consta de $\frac{t+1}{t^3-t^2}$ con factorización del denominador $t^3 - t^2 = t^2(t - 1)$ que nos recae en el caso 2.

$$\frac{t+1}{t^3-t^2}=\frac{t+1}{t^2(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-1}.$$

Que arroja la igualdad $t + 1 = At(t - 1) + B(t - 1) + Ct^2$ y de aquí se forma el sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=1 \\ -B=1 \end{cases}$$

Dándonos las soluciones $A = -2$, $B = -1$ y $C = 2$. Confirmando que el integrando se puede separar en fracciones parciales:

$$\int\frac{t^4-t^3-t-1}{t^3-t^2}dt=\int\left[t-\frac{t+1}{t^2(t-1)}\right]dt=\int\left[t-\left(\frac{-2}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t-1}\right)\right]dt=\int t\,dt+2\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t^2}-2\int\frac{dt}{t-1}.$$

Resolviendo cada integral con los métodos ya vistos se concluye que:

$$\int\frac{t^4-t^3-t-1}{t^3-t^2}dt=\int t\,dt+2\int\frac{dt}{t}+\int\frac{dt}{t^2}-2\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{2}t^2+2\ln|t|-t-2\ln|t-1|+C.$$

c) Determina la integral de la siguiente función:

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$$

c. Factorizando el denominador se tiene que $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$, notando que se trata claramente del caso 3. Entonces:

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Agrupando esta igualdad se deduce el sistema:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+D=1 \\ 2A+C=1 \\ 2B+D=2 \end{cases}$$

Cuyo resultado es $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ y $D = 0$. Con esto la integral se transforma en:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{x}{x^2+2}dx.$$

Tomando los medios de integración vistos concluimos lo que se presenta a continuación:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + C.$$

d) Determina la integral de la siguiente función:

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$$

d. Para este inciso del caso 4 tenemos:

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3}.$$

Al realizar las operaciones pertinentes llegaremos a un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ 4A+C=4 \\ 4B+D=-4 \\ 4A+2C+E=8 \\ 4B+2D+F=-4 \end{cases}$$

Donde los valores alcanzados por este sistema son: $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 4$ y $F = 0$. Así que nuestra integral será:

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx = \int \frac{x-1}{x^2+2}dx + \int \frac{4x}{\left(x^2+2\right)^3}dx.$$

Ordenándolas apropiadamente podremos integrar cada una de estas fracciones parciales:

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} + 2\int (x^2+2)^{-3}\, 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - (x^2+2)^{-2} + C.$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura

Trabaja en equipo de dos para realiza un mapa conceptual o mental del tema de integración por fracciones parciales, con ejemplos y mencionando los siguientes subtemas: definición de fracciones parciales, fracciones racionales propias e impropias, caso 1, 2, 3 y 4 **(20 min).**

Actividad de fortalecimiento

Trabaja en equipo de dos para identificar a que caso (factores lineales distintos, factores lineales repetidos, factores cuadráticos distintos o factores cuadráticos repetidos) pertenece cada función de fracciones del siguiente cuadro **(25 min):**

$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$	
$\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 6}$	
$\int \frac{x + 3}{x^2 - 4x + 4} dx$	
$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$	
$\int \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} dx$	
$\int \frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x + 5)(x - 3)^2} dx$	
$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$	
$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx$	
$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx$	
$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$	
$\int \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2(x + 1)^3} dx$	
$\int \frac{7x + 1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx$	

Actividad de cierre

De forma individual resuelve las siguientes integrales:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx$$

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$$

$$\int \frac{2dx}{2x^2+5x+2}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^3-x^2-2x}dx$$

$$\int \frac{3x^2}{x^2+x-6}dx$$

3.7. Autoevaluación

Instrucciones: Estima tu nivel de logro de los siguientes desempeños y escribe qué debes hacer para mejorarlo.

Necesito ayuda (**1**) — Lo puedo hacer solo (**2**) — Lo puedo enseñar a otros (**3**)

Desempeños	1	2	3	Para mejorar mi desempeño debo:
Comprendo las condiciones de cuando debo aplicar la integración por partes.				
Identifico la fórmula y elemento de la fórmula de integración por partes.				
Aplico de forma correcta el procedimiento de la integración por partes.				
Conozco cuales son las integrales por fracciones parciales.				
Comprendo las condiciones de cuándo debo aplicar en cada caso de integración por fracciones parciales.				
Aplico de forma correcta el procedimiento de la integración por fracciones parciales.				

3.8. Fuentes bibliográficas

- Escalante, L. (2020). Cálculo Integral. Guanajuato, Mexico: Book Mart.
- Hernández, E. (2016). Cálculo Diferencial e Integral, con Aplicaciones. Revista Digital Matematicas Educacion e Internet, 286-291.
  - Araujo, F. (2018). Calculo Integral.Cuenca, Ecuador: Universitaria Abya-Yala.

3.9. Orientación para el estudio

3.9.1. Gestión del tiempo y organización de nuestras actividades

Si tienes realmente más tareas en tu rutina diaria de las que puedes abarcar, entonces estás organizando mal tu agenda. Puede que haya un problema a la hora de decir que no, a la hora de calcular el tiempo que te llevará cada cosa, de asumir responsabilidades que podrías delegar o que no son tuyas, de poner límites, o de pedir ayuda. Si más bien el problema es que no encuentras hueco para cosas que consideras importantes, que haces mucho, pero sientes que no avanzas, que estás siempre ocupado, pero no eres productivo, o que pierdes el tiempo y no sabes en qué, etc. Entonces puede que haya varios hábitos que modificar para optimizar el uso de tu tiempo.

1. **Autoanálisis. ¿Cómo gasto mi tiempo?**

Revisa tu día a día, las actividades que realizas y las cosas que consumen tu tiempo, toma nota de ello. Puedes incluso (y te recomiendo) utilizar herramientas para hacerlo, la aplicación aTimeLogger o en contexto más laboral la aplicación Toggl. Te ayudará a tener una buena base sobre la que trabajar tu organización.

2. **Evitar y eliminar distractores**

Mi primer consejo es eliminar el multitask y los distractores. Nuestro cerebro no tiene capacidad para procesar en paralelo: sino que va saltando su atención de una actividad a otra. Cuando las interrupciones son frecuentes o vamos saltando de una cosa a otra en poco tiempo, no conseguimos profundizar ni focalizarnos en ninguna. Hemos de entrenar nuestro "Focus" (por cierto, este es el título de un libro estupendo de Daniel Goleman, si no lo has leído te lo recomiendo Focus (Ensayo))

Elimina las interrupciones: Procura trabajar de forma continuada y en una sola cosa a la vez. Si estás escribiendo un informe, no atiendas llamadas ni mires el *e-mail*. Las interrupciones rompen la concentración y tardamos en volver a conectar, nos hacen más lentos, cometemos más errores, y además nos generan ansiedad.

Es imposible en algunos contextos eliminar las interrupciones por completo, pero hemos de tener un método para evitar todas las que podamos:

Consultar el *e-mail*, mensajes (personales y de trabajo) sólo en momentos concretos y cuando sabemos que podremos responder (y no cada vez que recibimos uno). De nada me sirve leer un *e-mail* de un cliente a las 23h, o ver un mensaje de un amigo justo antes de entrar en la ducha. No te preocupes por "¿y si es algo urgente?" de ser así llamarán varias veces o buscarán la forma de contactarte.

Cuando precisamos concentrarnos comunicar que no queremos ser interrumpidos para que los demás lo tengan en cuenta.

No empieces varias cosas a la vez. Si por ejemplo en el trabajo te piden una nueva tarea importante mientras estás haciendo una cosa, toma nota para ponerte con ello en cuanto acabes. Repito: Una cosa a la vez. Si estás cocinando no dejes lo que estás haciendo "un momento" para irte a regar las plantas porque las ves algo mustias, y además escribir un WhatsApp a tu hija, una cosa a la vez. Si no te da tiempo de empezar y acabar algo, define mejor el tiempo o hasta dónde lo harás (por ejemplo: "voy a planchar lo que me dé tiempo en media hora"." Voy a estudiar el temario de Biología de 16 a 17.30", "voy a leer el primer capítulo", etc.).

En el trabajo establece unas horas para recibir llamadas, y consultar *e-mails*. También puedes comentar a los demás tus horarios para que lo tengan en cuenta ("llámame preferentemente a tal hora que suelo estar más disponible", o "consulto los e-mails a mediodía y a media tarde").

Por supuesto si necesitas concentrarte en algo elimina posibles interferencias: fuera móvil, redes sociales, internet, etc. Puedes incluso impedirte tú mismo la entrada a determinadas Webs y aplicaciones utilizando otros programas y Apps como Self Control, o Focus, entre otros que podrás encontrar. También puedes quitar el sonido a las notificaciones de móvil, apagar la tele, o si se acerca tu amigo a charlar comunícale amablemente que estás ocupado y que si no le importa hablarán luego.

¿Te cuesta mantenerte concentrado? Puedes recurrir a técnicas como Pomodoro o practicar ejercicios de atención plena o mindfuldness para entrenarte a concentrar tu atención.

Organiza tu entorno: procura que tanto tu casa como tu espacio de trabajo estén limpios y ordenados, el orden de nuestro entorno físico ayuda al orden mental.

3. Diferenciar lo urgente de lo importante:

¿Recuerdas el cuento de las piedras y el frasco? ¿Cuáles son tus piedras grandes? ¿Qué cosas son importantes o prioritarias? ¿Familia, salud, amigos, una actividad que te hace disfrutar, inquietudes intelectuales?

Muchas veces estamos llenos de pequeñas cosas urgentes (arenilla) que no nos deja lugar para lo realmente importante. Hacemos mil cosas y tenemos la sensación de no haber hecho nada. Haz una lista de tus "piedras grandes", de las cosas que son importantes en tu vida. Luego tradúcelo en acciones concretas que puedas incorporar en tu día a día (por ejemplo: llamar a mi padre cada martes a las 20h, ir a clase de yoga el sábado a las 10h, jugar media hora con mi hijo al llegar a casa del trabajo, quedar para tomar un café con mi amiga Marta, dedicar el domingo de 20 a 21 a escribir poesía en mi libreta).

4. Busca un método para organizarte, lleva agenda. Planifica

Si, puede parecer muy obvio, pero no lo es: la planificación es fundamental. Planifica por escrito. Muchas veces confiamos en nuestra mente para todo y no recurrimos a soportes externos, mal. No satures la "Ram" de tu cerebro con listas de tareas, usa herramientas externas: aplicaciones, agendas, calendarios, etc. Tanto para lo profesional como para lo personal. Hay métodos como el GTD (Get Things Done) que pueden darte pautas de organización, o puedes buscar tu propio método: pero aprende a planificarte a corto, medio y largo plazo; y a no confiar solamente en tu "cabeza". Lleva agenda, planificadores, listas, calendarios, etc. Puede ser difícil al principio si no tienes el hábito de hacerlo, pero puedes aprenderlo e incorporarlo en tu día a día.

Tanto de las actividades que precisas realizar en tu día a día, como de tus ideas, proyectos a largo plazo, películas que te han recomendado, lugares que te gustaría visitar, libros que leer, objetivos personales, etc.

Por ejemplo: Tener una lista de películas recomendadas y echarle un vistazo cuando decidas pasar una noche de cine facilita las cosas. O ir desarrollando una idea que se te ha ocurrido de un nuevo proyecto en una libreta y juntar toda la información al respecto para plantearte el llevarla a cabo y cómo, evita que esa idea se pierda y facilita que puedas desarrollarla y concretarla mejor.

Se trata de conseguir un buen equilibrio entre planificación e improvisación: ordenar y planificar tu día a día, tu ocio, tus ideas, pero sin ser rígido.

5. A la hora de apuntar las tareas en tu agenda o planificador ten en cuenta:

¿Cuáles son las actividades o tareas más importantes y cuáles las rutinarias?

Divide las tareas grandes o a largo plazo en pequeños pasos hasta llegar a tareas que puedas ir colocando en tu agenda diaria. (Por ejemplo: "preparar la fiesta de cumpleaños de Ana" se traduce en acciones como comprar globos, buscar receta de tarta y comprar los ingredientes, hacer las invitaciones, enviarlas, etc.)

¿Qué quieres acabar hoy?

¿Cuánto tiempo te llevará cada cosa? ten en cuenta incluso un margen de imprevistos o tiempos de desplazamiento.

¿Cuál es tu mejor momento del día? Hay horas del día en las que rendimos más, tenemos más energía, y otras en las que no. Ten en cuenta tu nivel de energía a la hora de asignar las tareas en tu agenda.

Traduce tus objetivos en acciones concretas para llevar a cabo (Por ejemplo: "Ponerme en forma" se puede traducir en: "salir a correr 20min por la mañana lunes, miércoles y viernes", "ir a patinar el domingo", "Hacer la lista de la compra del sábado priorizando fruta, verdura y productos saludables")

6. Revisa. Detecta problemas y busca soluciones

Pensamiento irracional. Personalmente me gustan las planificaciones y revisiones semanales, pero lo importante es ir haciéndolo cada poco tiempo: revisa tu agenda y evalúa "cómo fue la semana". ¿Has cumplido todo lo que te has propuesto? ¿Hay cosas para las que no has "encontrado hueco"? ¿Qué ha pasado?

Puedes de esta manera detectar problemas y solventarlos:

- ¿Llené la agenda con demasiadas cosas para este día?
- ¿Definí mal los objetivos?
- ¿Tuve falta de motivación? ¿Me puse excusas para no hacerlo?
- ¿No tenía energía o no conseguía concentrarme?
- ¿Prioricé otras cosas que no estaban en la agenda o me distraje?
- ¿Me llevó más tiempo del previsto?
- ¿Algún imprevisto?

Esta revisión hará que la planificación de la semana siguiente sea mejor, y que puedas trabajar los problemas que te hayan impedido cumplir tus objetivos.

7. Cambia los "Tengo" por "Quiero"

Como he comentado en varias ocasiones, la forma que tenemos de contarnos a nosotros mismos las cosas determina cómo las vivimos emocionalmente. Si hay una palabra que quite energía esa es “Tengo”– Si planifico mi día usando este imperativo es probable que acabe agobiada y desmotivada:

- ” Hoy TENGO que, esto y lo otro, y TENGO que…” ufff ya de solo pensarlo me pesa.

Sin embargo, cuando usamos otras palabras como “me gustaría”, “quiero”, “elijo”, “prefiero”, la sensación es diferente.

- “Hoy TENGO que ir al gimnasio” Vs “Hoy ME ENCANTARÍA ir al gimnasio”
- “Hoy TENGO que terminar el informe” Vs “Hoy QUIERO terminar el informe”

¿Se siente diferente verdad?

3.10. Recursos didácticos

- Video integración por partes https://www.youtube.com/watch?v=93kW5colCAU&t=352s
- Calculadora de integrales https://es.symbolab.com/solver/indefinite-integral-calculator
- Libro de cálculo integral http://galois.azc.uam.mx/mate/LIBROS/matematicas3.pdf
- Video de integraciones por fracciones parciales https://www.youtube.com/watch?v=6pFmUh41jsQ

3.11. Evaluación

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) Menciona las condiciones que debe presentar una función para poder aplicar la integración por partes.

b) Coloca en los paréntesis los números que les corresponden de los elementos de la integración por partes, tomando en cuenta que la función a integrar es:

$$\int \mathbf{3x\,sen\,xdx}$$

( ) sen x dx	1. U
( ) 3 dx	2. V
( ) – cos x	3. du
( ) 3x	4. dv

c) Calcula la integral de la siguiente función:

$$\int \mathbf{5x^2\,sen\,xdx}$$

d) Calcula la integral de la siguiente función:

$$\int \mathbf{9x^2 \ln x\, dx}$$

e) Calcula la integral de la siguiente función: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

f) Calcula la integral de la siguiente función: $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$

Bloque 4. Integral Definida y Aplicaciones

4.1. Introducción

¿Te has preguntado cómo se mide el área de una montaña o la cantidad de agua que contiene un océano? En este bloque utilizarás diversas técnicas para realizar cálculos mediante el uso de la suma de Riemann, la integral definida, áreas entre curvas y a determinar volúmenes mediante herramientas de análisis del cálculo integral.

El conocimiento de las matemáticas modernas se ha logrado a la continuidad de los estudios de diferentes personajes, en este caso Gauss y Riemann relacionaron sus ideas de la sumatoria y la geometría para calcular áreas que se generan bajo una curva, dando de paso un apoyo al cálculo integral y a incontables áreas del conocimiento de la física moderna.

La suma de Riemann ayuda a calcular el área bajo una curva mediante un proceso ingenioso de aproximación que consiste en sumar las áreas de un número infinito de rectángulos. También la suma de Riemann ayuda a definir la integral definida.

La integral definida es una herramienta poderosa y útil con la que cuenta el cálculo integral, calcula el área bajo la curva. Una integral definida se emplea si se desea obtener la integral de un intervalo cerrado, se requiere restar la integral indefinida evaluada en el límite superior del intervalo menos la evaluada en el límite inferior del intervalo. Con este procedimiento se estaría obteniendo el área bajo la curva en una forma exacta.

Otra de las aplicaciones de la integral definida es realizar el cálculo del volumen de sólidos en revolución, utilizando el mismo principio del cálculo de área bajo la curva. De forma general la aplicación de la integral definida nos permite calcular el área o volumen de forma práctica de objetos con formas irregulares o tamaños inimaginables.

4.2. Objetivos

4.2.1. Objetivo general

Utiliza la integral definida y diversos procesos de integración para resolver situaciones reales o hipotéticas del medio que lo rodea, favoreciendo la construcción de nuevos conocimientos al afrontar los retos que se le presentan.

4.2.2. Objetivos específicos

- Emplea las propiedades de la sumatoria en la solución de sucesiones.
- Aplica la suma de Riemann para aproximar el cálculo de áreas bajo la curva.
- Emplea la definición de la integral definida como un proceso para el cálculo de área bajo la curva.
- Identifica la definición de la integral definida como una herramienta para el cálculo.
- Aplica la integral definida para el cálculo del área entre curvas.
- Aplica la integral definida para el cálculo de volumen de un sólido de revolución.

4.3. Competencias Genéricas Disciplinares

Competencias a desarrollar en el Bloque			
Claves	**Genéricas**	**Claves**	**Disciplinares**
CG 4.1	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	**CDEM 1**	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CG 5.1	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objeto.	**CDEM 2**	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicados a diferentes enfoques.
CG 5.6	Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.	**CDEM 4**	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variaciones, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
CG 7.3	Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	**CDEM 8**	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
CG 8.3	Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.		

4.4. Secuencias

Elementos integradores a desarrollar en el Bloque			
Interdisciplinariedad	Ecología y Medio Ambiente.	**Eje Transversal**	**Tema de eje Transversal**
		Social	
	Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto Semestre.	Ambiental	
		Salud	
		Habilidades Lectoras.	

4.5. Conceptos claves

- **Suma de Riemann**: se entiende como una sucesión de sumas, donde la letra i es el valor con el cual comienza la suma, n es el valor donde termina la suma.

$$\sum_{i=1}^{n} Xi$$

- **Integral indefinida:** la integral definida de una función y = f (x) es un escalar, definido por

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Área entre curvas**: es el área de la región R limitada por las gráficas de y = f (x), y = g (x), x = a, x = b.
- **Sólido de revolución**: el sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de y = f (x), el eje (x) y las gráficas de x = a y x = b. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo.

4.6. Actividades de aprendizaje

4.6.1. Área bajo la curva

4.6.1.1. Suma de Riemann

Muchos de los conocimientos desarrollados por los matemáticos vienen por la armonía de sus predecesores, en este caso, la Gauss y Riemann contribuyeron en mucho al desarrollo de las matemáticas modernas, entre las que se destacan la teoría de números, el cálculo integral, la estadística, geometría y muchas aplicaciones de nuestra vida moderna.

Vamos a ver en este caso como se utiliza la sumatoria, la cual es representada por la letra mayúscula sigma Σ. En forma general, la sumatoria puede entenderse como una sucesión de sumas, donde la letra i es el valor con el cual comienza la suma, n es el valor donde termina la suma, la expresión x_i es el término a sumar.

$$\sum_{i=1}^{n} Xi$$

La expresión se lee: "sumatoria de x sub-i desde i=1 hasta n"

Algunas propiedades de la sumatoria:

a) $\sum_{i=m}^{n} k = (n - m + 1)\, k$

b) $\sum_{i=m}^{n} k(xi) \;=\; k \;\; \sum_{i=m}^{n} xi$

c) $\sum_{i=m}^{n}(xi + yi) = \sum_{i=m}^{n} xi \;+ \sum_{i=m}^{n} yi$

Algunas fórmulas de las sumatorias:

1) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

2) $\sum_{i=1}^{n} k = k \cdot n$

3) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$

Ejemplos:

Ejemplo 1. Determina la suma de las siguientes expresiones:

$$\sum_{i=1}^{4} 6$$

Solución:

$\sum_{i=1}^{4} 6$ = 6+6+6+6 = **24**

Comprobamos con la fórmula de la propiedad.

$$\sum_{i=m}^{n} k = (n-m+1)\,k$$

Como m=1, n= 4, k= 6 entonces (4-1+1) 6 = (4) 6 = **24**

Vamos a ver la utilidad de la suma de Riemann en el cálculo de áreas, supongamos que tuviéramos un terreno de esta forma y quisiéramos determinar su área.

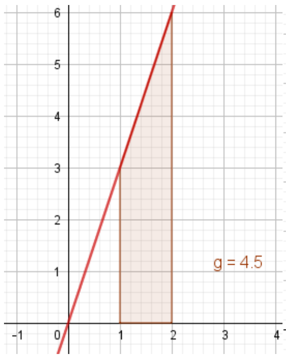


Figura 1

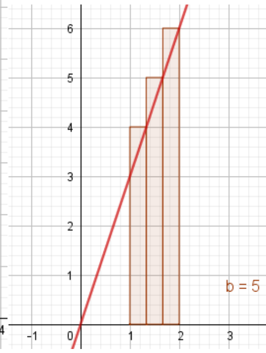


figura 2

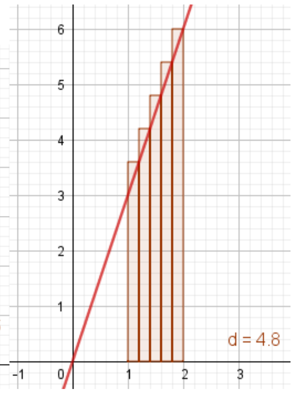


figura 3

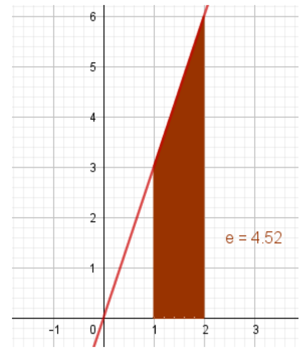


figura 4

En la figura 1 se aprecia el cálculo del área utilizando la integral definida que verás más adelante, en la figura 2, 3 y 4 se aprecia el uso de la suma de Riemann en la cual se utilizaron 3, 5 y 100 rectángulos respectivamente, para aproximar el área que tiene el terreno. Nota que la figura 1 y la 4 tienen gran aproximación en el valor del área que existe bajo esta función. Vamos a ver a continuación como se utiliza la suma de Riemann para el cálculo de áreas.

De manera más formal el cálculo de áreas usando la suma de Riemann la podemos establecer como el límite de la sumatoria de las áreas de los infinitos rectángulos que se utilicen, su expresión es:

$$\boxed{A_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta_x \cdot f(x_i)}$$

At= será el valor del área total.

El valor de Δ_x es el ancho del rectángulo y se calcula con la fórmula siguiente $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$, donde b es el límite izquierdo, a es el límite derecho y n es número de rectángulos.

Las coordenadas xi se determina con la fórmula $xi = a + i\Delta_x$

Con *f(xi)* determinamos las alturas de los triángulos.

De manera que la multiplicación de $\Delta_x \cdot f(x_i)$ da como resultado el área individual Ai de cada triángulo. El límite de estas áreas infinitas será el área bajo la curva.

Ejemplo 2. Determina el área bajo la curva de la expresión f(x)= 8x + 7, en el intervalo de x= 1 a x= 5, aplicando las sumas de Riemann 5 rectángulos de aproximación.

Solución: La idea en este caso es trazar infinitos rectángulos en el intervalo de 1 a 5, para ello requerimos saber el ancho de cada rectángulo y el área que poseen, para luego hacer la sumatoria de cada una de ellas y determinar el área total, vamos por pasos.

a) El ancho del rectángulo se logra con la expresión $\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$

b) Ahora calculamos las coordenadas de las alturas con la fórmula
$xi = a + i\Delta_x = 1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$ entonces $xi = 1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$

c) Vamos a calcular ahora las alturas de los rectángulos f(xi), para ello sustituimos los valores de xi en la ecuación original.

$f(xi) = \ 8\,xi + 7$, pero si observamos el paso b) el valor de $xi = 1 + i\ (\frac{4}{n})$

$$f(xi) = \ 8\left(\ 1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right) + 7 = 8\ + i\left(\frac{32}{n}\right)) + 7 = \ \ 15 + i\left(\frac{32}{n}\right)$$

d) Ahora vamos hallar las áreas individuales $Ai = \Delta_x \cdot f(x_i)$

$Ai\ = \ \frac{4}{n} \cdot \left[15 + i\left(\frac{32}{n}\right)\right] = \frac{60}{n} + \ i\left(\frac{128}{n^2}\right)$

e) Vamos hacer la sumatoria de cada una de las áreas individuales

$$At\ = \ \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{60}{n} + \ i\left(\frac{128}{n^2}\right)\right\}$$

f) Resolvemos la sumatoria aplicando las propiedades

$\sum_{i=1}^{n}\frac{60}{n}\ \ + \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{128}{n^2}\ \ = \ \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} 60\ \ + \frac{128}{n^2}\ \sum_{i=1}^{n} i\ \ = \frac{1}{n}\ (n - 1 + 1)60$

$\frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} 60\ = \frac{1}{n}\ (n - 1 + 1)60\ \ = 60$

$\frac{128}{n^2}\ \sum_{i=1}^{n} i\ = \ \frac{128}{n^2}\ (\frac{n(n+1)}{2}) = \ \frac{64}{n}(n + 1) = 64 + \frac{64}{n}$

Por último, resolvemos el límite de la sumatoria.

$$\boxed{At\ = \ \lim_{n\to\infty}(\ 60 + 64 + \frac{64}{n}) = 124\ \ u^2}$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura

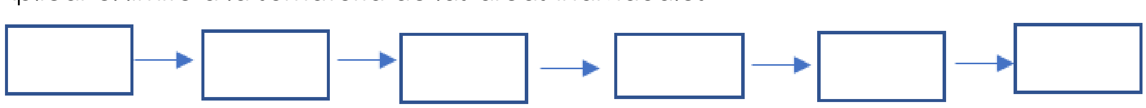
En equipo de tres integrantes determinen la suma de las siguientes expresiones empleando las propiedades y fórmulas de las sumatorias **(20 min)**:

e) $\sum_{i=1}^{6} 3i$
f) $\sum_{i=3}^{9} 5i$
g) $\sum_{i=2}^{7} i^2$
h) $\sum_{i=2}^{4} 7i^3$

Actividad de fortalecimiento

Reunidos en parejas organicen los pasos secuenciales que se sugieren aplicar para determinar el valor del área bajo la curva aplicando la suma de Riemann **(10 min)**:

a) Calcular las coordenadas de la altura xi
b) Sustituimos xi en la función original y con eso hallamos la altura f(xi)
c) Determinar el ancho del rectángulo Δ_x
d) Sumar las áreas individuales siguiendo las propiedades de las sumatorias
e) Determinar las áreas individuales
f) Aplicar el límite a la sumatoria de las áreas individuales



Actividad de fortalecimiento

Reunidos en parejas, determinen el área bajo la curva aplicando los pasos de la suma de Riemann para las siguientes funciones **(40 min)**:

a) Determina la suma de Riemann para la siguiente función f(x) = 6x – 5 en el intervalo de x =2 a x= 6
b) Compara tus resultados obtenidos con la calculadora GeoGebra aplicando el comando: *Integral (6x - 5, 2, 6)*

Actividad de cierre

En parejas resuelvan el siguiente ejercicio **(15 min)**:

a) Determina la suma de Riemann para la siguiente función f(x) = 4x + 3 en el intervalo de x=-2 a X=4
b) Compara tus resultados obtenidos con la calculadora GeoGebra aplicando el comando: *Integral (4x +3, -2, 4)*

4.6.1.2. Integral definida

El teorema fundamental del cálculo señala:

Si una función *f* es continua en un intervalo [*a, b*] entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una función tal que F(x)= f(x) para toda x en el intervalo [*a, b*].

Podemos iniciar con el cálculo de áreas y volúmenes empleando la integral definida, la cual nos representa el área bajo la curva o más bien entre la curva y el eje.

Es importante comprobar que las curvas que delimitan el área realmente sean funciones de la variable de integración *y*.

Hay que considerar que la integral y área no son lo mismo, por lo que se debe recordar que una integral realmente es un "área con signo".

Ejemplo:

Calcula el área limitada por $f(x) = -x^2 + 4$ en un intervalo de [-1, 1]:

$$A = \int_{-1}^{1}(-x^2 + 4)dx$$

$$A = \frac{-x^3}{3} + 4x\Big]_{-1}^{1}$$

$$A = \left[\frac{-1^3}{3} + 4(1)\right] - \left[\frac{-(-1)^3}{3} + 4(-1)\right]$$

$$A = \left[\frac{-1}{3} + 4\right] - \left[\frac{1}{3} - 4\right]$$

$$A = \frac{22}{3}$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura: En equipo de tres integrantes resuelvan los siguientes ejercicios de integrales definidas y expresen sus conclusiones **(10 min)**:

1) $\int_{-1}^{1}(4x^3 + 5x^2 - x + 1)dx$
2) $\int_{-1}^{1}(3x^2 + x + 1)dx$
3) $\int_{-2}^{3}(x^2 + 5x + 1)dx$

Actividad de fortalecimiento: En parejas resuelvan lo siguiente **(20 min)**:

1) $\int_{-5}^{5} 5dx$

2) $\int_{-1}^{3} xdx$

3) $\int_{-3}^{3} (2x+3)dx$

4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} x^3 dx$

5) Calcular la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con una velocidad constante de 3m/s, durante los primeros 6 segundos de movimiento.

Actividad de cierre

En parejas resuelvan el siguiente ejercicio **(20 min).**

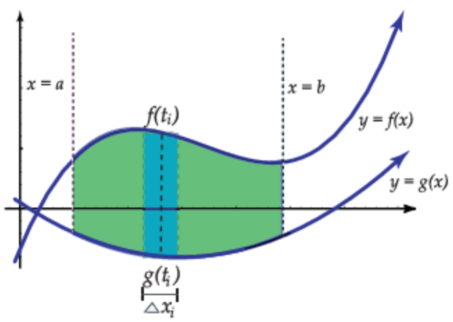
Calcular el espacio recorrido por un cuerpo con movimiento rectilíneo y cuya velocidad la describe la función:

$$v(t) = -2t^2 + 2t + 1$$

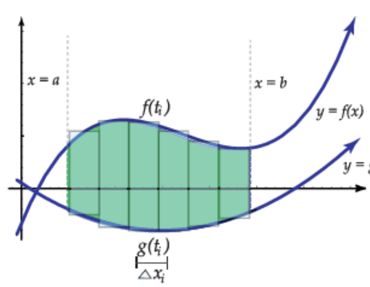
Nota: para encontrar el valor máximo y mínimo es necesario el uso de la fórmula general, debido a que es una ecuación cuadrática.

4.6.1.3. Área entre curvas

Sean f y g dos funciones con dominio en el intervalo [a,b], tales que f(x) ≥ g(x) para x ∈ [a,b]. Vamos a determinar cuál es el área de la región R limitada por las gráficas de y = f (x), y = g (x), x = a, x = b que se muestra a continuación:



Construimos un conjunto de rectángulos tales que la suma de sus áreas sea una aproximación al área.

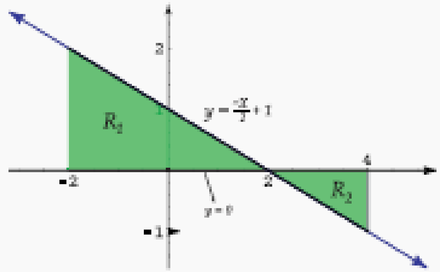


Entendiendo que la medición del área entre curvas se realiza a través de la suma de un conjunto de rectángulos que conforman el área formada por y = f(x), y = g(x), x = a y x = b, cuyos sensores es Δx_i y $f(t_i)$ obtenemos la siguiente formula:

$$A = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Ejemplos:

a) Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = \frac{-x}{2} + 1$, y = 0, x = -2, x = 4



La recta con ecuación $y = \frac{-x}{2} + 1$ interseca al eje x en el punto $(2,0)$.

Note que la región R está formada por dos partes, las regiones R_1 y R_2, por lo que el área de R = área de R_1 + área de R_2.

La región R_1 está limitada superiormente por la gráfica de $y = \frac{-x}{2} + 1$, inferiormente por la de $y = 0$, lateralmente por la de $x = -2$ y $x = 2$.

Luego:

$$\begin{aligned} \text{área de } R_1 &= \int_{-2}^{2} \left(\frac{-x}{2} + 1 - 0 \right) dx \\ &= \left(\frac{-x^2}{4} + x \right) \Big|_{-2}^{2} \\ &= 4 \, (u.l.)^2 \end{aligned}$$

La región R_2 está limitada superiormente por la gráfica de $y = 0$, inferiormente por la de $y = \frac{-x}{2} + 1$, lateralmente por la de $x = 2$ y $x = 4$.

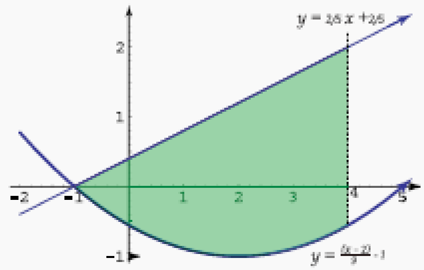
Luego:

$$\begin{aligned} \text{área de } R_2 &= \int_{2}^{4} \left[0 - \left(\frac{-x}{2} + 1 \right) \right] dx \\ &= \int_{2}^{4} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4} - x \right) \Big|_{2}^{4} \\ &= 1 \, (u.l.)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área de R es igual a: $4 + 1 = 5 \, (u.l.)^2$.

b) Hallar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones: $y = \frac{(x-2)^2}{9} - 1$, $y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$, x = 4

Solución: Graficamente se tiene:



Note que las gráficas de $y=\frac{(x-2)^2}{9}-1$, $y=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}$ se intersecan en el punto $(-1,0)$. En este caso, el área del i–ésimo rectángulo es:

$$\left[\left(\frac{2}{5}t_i+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{(t_i-2)^2}{9}-1\right)\right]\cdot\Delta x_i$$

y la suma de aproximación está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2}{5}t_i+\frac{2}{5}-\left[\frac{(t_i-2)^2}{9}-1\right]\right\}\cdot\Delta x_i$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{4}\left[\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}-\frac{(x-2)^2}{9}+1\right]dx \\ &= \left[\frac{x^2}{5}+\frac{2}{5}x-\frac{(x-2)^3}{27}+x\right]\Big|_{-1}^{4} = \frac{16}{5}+\frac{8}{5}-\frac{8}{27}+4-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+\frac{27}{27}-1\right) = \frac{235}{27}\,(u.l.)^2 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura

Trabaja en equipo de dos para encontrar el área entre las curvas $y=6-x^2$ y la recta $y=x$ **(30 min).**

Actividad de fortalecimiento

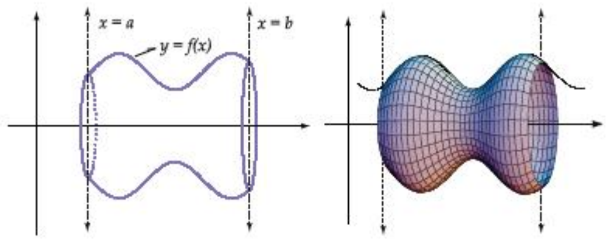
Trabaja de forma individual para encontrar el área comprendida entre las curvas $y=\sqrt{x+1}$ y la recta $y=x-1$ **(30 min).**

Actividad de cierre

Trabaja de forma individual para resolver el siguiente ejercicio: Un carpintero requiere determinar el área de una pieza que delimitan las funciones $y=-x$ y $y=2+x^2$. Realiza el gráfico correspondiente y halla el área que delimitan las funciones **(30 min).**

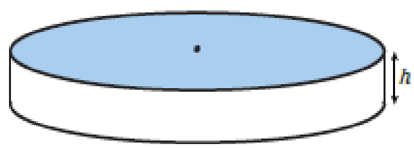
4.6.2. Volumen de un sólido de revolución

Recibe el nombre de sólido de revolución, el sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de y = f (x), el eje (x) y las gráficas de x = a y x = b. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo. Como podemos observar en la siguiente figura:

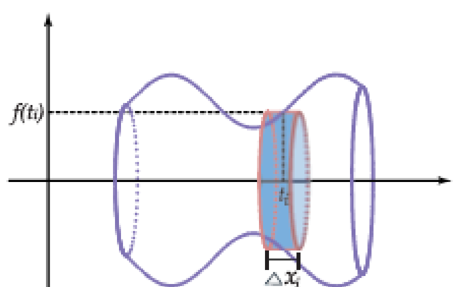


Para determinar el volumen de este tipo de sólidos seguiremos un procedimiento similar al utilizado para el área de una región, aproximando el “volumen” de un sólido de revolución por medio de una suma de volúmenes de sólidos más elementales en los que el volumen ya ha sido definido.

Vamos a considerar discos o cilindros circulares como los sólidos elementales, asumiendo que el volumen de un disco circular es, por definición, el producto del área A de la base por el espesor h (o altura).



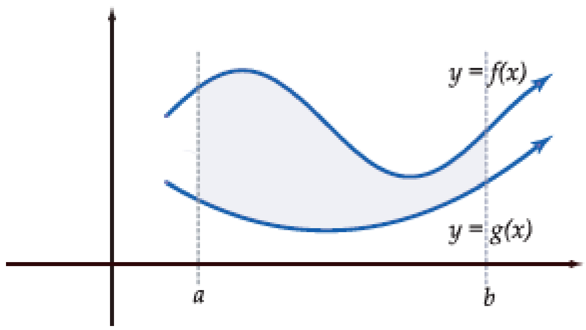
Consideremos ahora los n discos circulares que existen, contienen un sólido de revolución cuyos sensores son Δx1, Δx2, …, Δxi, …, Δxn, y cuyas bases tienen radios f (t1), f (t2), …, f (ti), . . ., f (tn). Como podemos observar en la siguiente figura:



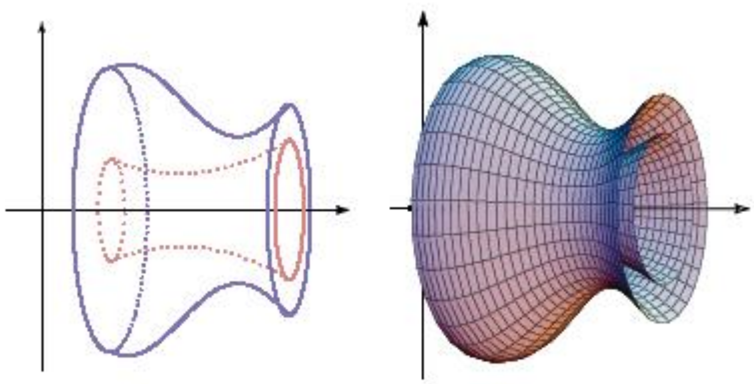
Entendiendo que la medición del volumen de un sólido de revolución se realiza a través de la suma de los discos o cilindros (el volumen esta dado por el producto del área A de la base por el espesor h = $\pi r^2 * h$) que conforman una función cuyos sensores es Δx_i y $f(t_i)$ obtenemos la siguiente formula:

$$V = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$

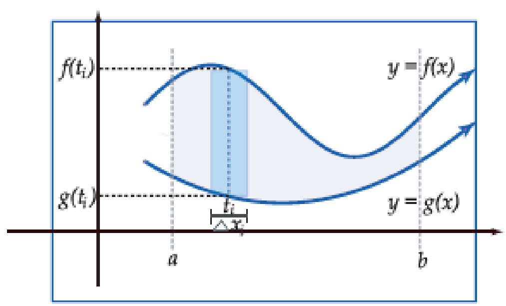
Consideremos ahora dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado [a,b], tales que f (x) ¸ g (x) para x [a,b]. Como podemos observar en las siguientes figuras:



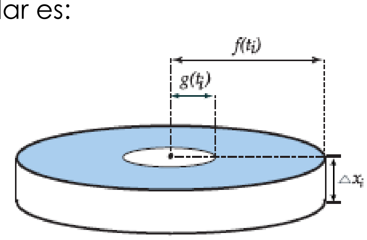
Deseamos determinar el volumen V del sólido de revolución generado al girar la región R alrededor del eje x (note que en este caso no giramos la región R alrededor de una de sus fronteras). El sólido generado se muestra en la siguiente figura:



Se muestra a continuación el i - ésimo rectángulo y el i - ésimo anillo circular generado al rotar aquel alrededor del eje x. Observemos bien que el volumen que deseamos calcular es el volumen de la f(x) – g(x)



Luego, el área del anillo circular es:

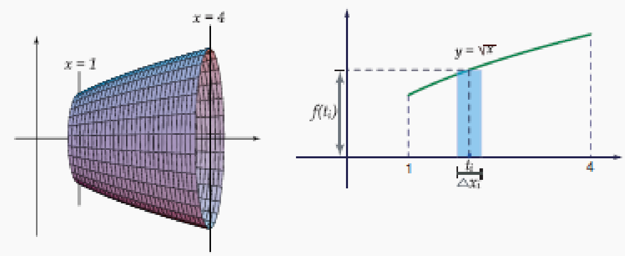


Entendiendo que la medición del volumen de un sólido de revolución ahora dos funciones f y g, se realiza a través de la suma de los anillos o arandelas (el volumen está dado por el área de la f(x) menos g(x) por la altura = $\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$) que conforman una función cuyos sensores son Δx_i, $f(t_i)$ y $g(t_i)$, obtenemos la siguiente formula:

$$V = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

Ejemplos:

Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de y = $\sqrt{x}$, y = 0, x = 1, x = 4.

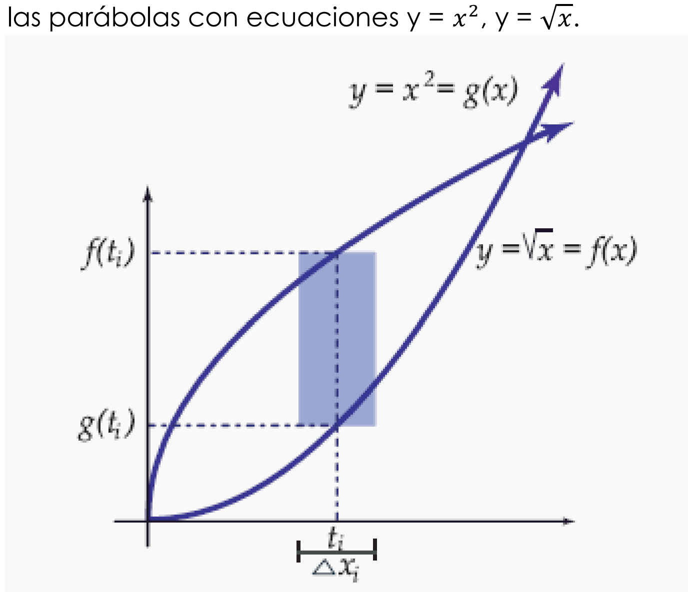


Observe, en la figura de la derecha, i–ésimo rectángulo que al rotar alrededor del eje x genera un disco circular en forma de cilindro circular recto.

El volumen del sólido está dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi x\, dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 \\ &= 8\pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{15}{2}\pi\,(u.l.)^3 \end{aligned}$$

Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones y = x^2, y = $\sqrt{x}$.



Luego, el volumen del sólido de revolución está dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right]dx \\
&= \pi\int\left(x-x^4\right)dx \\
&= \pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-0 \\
&= \frac{3}{10}\pi\,(u.l.)^3
\end{aligned}
$$

ACTIVIDADES DEL TEMA

Actividad de apertura

Contesta las siguientes preguntas **(30 min)**:

1. ¿Explica con tus palabras que es un sólido de revolución? Realiza un dibujo para ejemplificar.
2. ¿Por qué se utiliza discos o cilindros para medir el volumen de revolución?
3. ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de revolución de una función?
4. Menciona tres diferencias entre el cálculo del volumen revolucionario de una función y con dos funciones.
5. ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de revolución con dos funciones?

Actividad de fortalecimiento

Halla el volumen de revolución de una función **(50 min):**

1. Hallar el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de y = 2 - x, x = 0, x = 2 gira alrededor del eje x.
2. Hallar el volumen engendrado cuando la superficie limitada por la curva y = $4x^2$, y las rectas con ecuaciones x = 0, x = 3, gira en torno al eje x.
3. Hallar el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de x = $-2y^2$, y = 0, y = 2 gira alrededor del eje y.

Actividad de fortalecimiento

Halla el volumen de revolución de dos funciones **(50 min)**:

1. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
2. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $x = 2y$, $x = y^2$.
3. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = \sqrt{8x}$, $y = x^2$.

Actividad de cierre

Investiga e ilustra una forma de aplicación en la vida diaria de uso del volumen de revolución **(30 min).**

4.7. Autoevaluación

Instrucciones: Estima tu nivel de logro de los siguientes desempeños y escribe que debes hacer para mejorarlo.

Necesito ayuda (**1**) Lo puedo hacer solo (**2**) Lo puedo enseñar a otros (**3**)

Desempeños	1	2	3	Para mejorar mi desempeño debo:
Interpreto y calculo correctamente las propiedades de la sumatoria.				
Reconozco y aplico correctamente cada uno de los pasos para determinar el área bajo la curva a través de la suma de Riemann.				
Reconozco la suma de Riemann como una comprobación a la integral indefinida y utilizo la tecnología para determinar el área bajo la curva.				
Calculo e interpreto la integral de cada una de las funciones presentadas.				
Aplico la integral definida.				
Interpreto correctamente el significado físico de la función que permita identificar la integral definida, en la solución de un ejemplo práctico.				
Aplico la integral definida para el cálculo del área entre curvas.				
Aplico la integral definida para el cálculo de volumen de un sólido de revolución.				

4.8. Fuentes bibliográficas

- Purcell, E. J. (2007). Cálculo diferencial e integral. La derivada, 1(2), 520. Recuperado de: https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo.pdf
- Hernández, E. (2016). Cálculo Diferencial e Integral, con Aplicaciones. *Revista Digital Matematicas Educacion e Internet*, 286-291.
- COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA. (2011). *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL* 2. SONORA: PRELIMINARES.

- Patricia Ibáñez Carrasco, G. G. (2008). *Matemáticas VI, Cálculo Integral.* México, D.F.: Cengage Learning S.A. de C.V.

4.9. Orientación para el estudio

Descubre en la lectura extraída de la liga https://www.um.es/acc/riemann-y-la-relatividad/ las aportaciones de estos matemáticos y comenta sobre la importancia de la continuidad de los estudios.

RIEMANN Y LA RELATIVIDAD por el Prof. Dr. D. Pascual Lucas Saorín, académico de número.

Este año se conmemora el centenario del "año milagroso" de Einstein, aquél no tan lejano 1905 en el que puso las bases de la física moderna con su archiconocida teoría de la relatividad (coincidencias de la vida, también hace 50 años que Einstein murió). Sin embargo, en esta columna no vamos a hablar de este tema, y no porque carezca de importancia, pues es sin duda uno de los hitos científicos más sobresalientes del último Siglo, sino porque ya han sido muchos los foros en los que se ha disertado sobre la cuestión. Hoy quiero hablar de las matemáticas que hay detrás de la teoría de la relatividad, de esas matemáticas sin las cuales Einstein no hubiera podido desarrollar su teoría. Obtener resultados matemáticos no es demasiado difícil; basta con utilizar las hipótesis suficientes que nos permitan llegar a la demostración deseada. Conseguir buenos resultados matemáticos, a partir de unas pocas, pero bien seleccionadas hipótesis, ya es una tarea que requiere de matemáticos serios y rigurosos. Sin embargo, introducir nuevos conceptos y probar resultados que dejen una huella indeleble en la historia de las matemáticas, y cuya presencia se adivine en múltiples campos de la ciencia matemática, es algo que sólo está al alcance de unos escogidos, los que forman parte del "Olimpo de las Matemáticas".

Entre éstos se encuentra, sin duda, Bernhard RIEMANN (1826- 1866). Hijo de un pastor luterano, Riemann ingresó a los 19 años en la Universidad de Gotinga para estudiar filosofía y teología; sin embargo, su verdadera vocación eran las matemáticas. Tal era su pasión que su padre no tuvo más remedio que permitirle estudiar matemáticas, renunciando definitivamente a los estudios teológicos. La nueva teoría geométrica que expuso en su famosa disertación le permite situarse, merecidamente, entre los padres de la concepción relativista del mundo. Su concepto de espacio intrínsecamente curvo, cuya curvatura es independiente de cómo dicho espacio está inmerso en el espacio euclídeo, es una idea central para entender la estructura del Universo como espacio-tiempo. La geometría de Riemann es no euclídea en un sentido mucho más amplio que el considerado por los matemáticos anteriores, incluyendo a Lobachevsky y Gauss, que son considerados, junto con Bolyai, los padres de las geometrías no euclídeas. Pero ésta es otra historia que tendrá su sitio en otra columna. Por cierto, y hablando de aniversarios, este año se conmemora el 150 aniversario de la muerte de Karl F. Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos.

4.10. Recursos didácticos

Vídeo de las Propiedades básicas de las sumatorias https://www.youtube.com/watch?v=rZGiatp1NTg
Video de Fundamentos de la suma de Riemann https://www.youtube.com/watch?v=a46ADrzl8y4
Cálculo de integral definida https://www.youtube.com/watch?v=wuI5MFhvgsY
Área entre curvas: https://www.youtube.com/watch?v=0hs3v3lilT8
Volumen de un sólido de revolución usando discos https://www.youtube.com/watch?v=HqVsHjxKJmo
Volumen de un sólido de revolución usando arandelas https://www.youtube.com/watch?v=SKZ9cP_NGEM&t=642s
Calculadora de área entre curvas y volumen https://es.symbolab.com/solver/area-between-curves-calculator

4.11. Evaluación

1.- Determina la sumatoria que resulta de

$$\sum_{i=1}^{4}(5i+6i^2)$$

$a)$ 50 $b)$ 130 $c)$ 230 $d)$ 380

2.- Determina el área bajo la curva mediante el método de la suma de Riemann y comprobando por Geogebra tus resultados para la función siguiente f(x) = $7x^2$ en el intervalo de x=1 a X=5.

$a)\ 83.13\ u^2$ $b)\ 289.33\ u^2$ $c)\ 28.13\ u^2$ $d)\ 133.33u^2$

3.- Encuentra el área de la siguiente integral definida:

$$\int_1^2 x^3dx$$

4.- Encuentra el área de la siguiente integral definida:

$$\int_1^4 (x^2+4x+5)dx$$

5.- Encuentre el área entre las curvas $y=6-x^2$ y la recta y=x

6.- Encontrar el área comprendida entre las curvas $y=\sqrt{x+1}$ y la recta $y=x-1$
7.- Hallar el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de y = x/2, x = 1, x = 5 gira alrededor del eje x

8.-Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje x, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y=-x$, $y=-x^2$