EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES

Ana Maria S. Luz (anamluz@uol.com.br - bolsista PIBIC/CNPQ) e Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa (fjulio@ufpa.br - orientador), Departamento de Matemática, CCEN - UFPA

Resumo. Daremos inicialmente uma breve introdução sobre a teoria das equações diferenciais. Apresentaremos algumas noções preliminares ao estudo da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Faremos um estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e algumas aplicações destas em outras ciências. Desenvolveremos posteriormente o estudo das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e dos sistemas de equações diferenciais, utilizando o conteúdo discutido em aplicações da Física e da Biologia.

Introdução.

A Teoria das Equações Diferenciais é objeto de intensa atividade de pesquisa pois apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações, além de apresentar diversas ramificações, neste texto abordaremos especificamente as equações diferenciais ordinárias (equações que só apresentam derivadas ordinárias – em relação a uma variável).

Exemplo de Equações Diferenciais Ordinárias:

Equação que governa o decaimento de uma substância radioativa com o tempo R(t), onde k é uma constante conhecida

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \tag{1}$$

Equação que representa a lei de Newton F=ma, se x(t) é a posição no instante t de uma partícula de massa m submetida a uma força f

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{2}$$

Será feito o estudo e análise crítica de diversas aplicações das equações diferenciais Ordinárias oriundas da mecânica, química, biologia, etc., assim como o seu estudo qualitativo, em que se toma a atitude de retirar das equações informações sobre o comportamento de suas soluções, sem aquela preocupação de escrevê-las explicitamente, tal estudo se justifica pelo fato de que o número de equações que podem ser resolvidas em termos de funções elementares, sem a utilização de métodos numéricos, é pequeno. Esse estudo qualitativo das soluções é característico da fase moderna da teoria das equações diferenciais ordinárias, que se define com Poincaré no final no século XIX. Não devemos perder de vista que a teoria qualitativa não elimina o interesse e a importância de se ter informações quantitativas sobre as soluções, o que pode ser obtido pelos métodos descritos na bibliografia deste artigo. Mas como mostraremos, muitas aplicações provenientes de outras ciências, como a Biologia e a Física, necessitam de uma prévia análise qualitativa das equações diferenciais ordinárias que as modelam como forma de se verificar se as soluções estão de acordo com o problema que motivou o modelo.

Noções Preliminares.

Apresentaremos aqui alguns resultados de grande importância pra o desenvolvimento deste artigo.

Teorema 1 (Existência e Unicidade) *Seja $f: \Omega \to \Re$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x,y). Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y: \Omega \to \Re$, seja contínua também. Então, para cada $(x_o, y_o) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_o e uma única função diferenciável $\phi: I \to \Re$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I)*

$$y' = f(x,y) \tag{3}$$

$$y(x_o) = y_o \tag{4}$$

Para a demonstração de tal resultado nós utilizamos o *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, conhecido também como o *Princípio da Contração*: *"Seja C um espaço métrico completo. Suponha que $\Phi: C \to C$ é uma contração, isto é, existe uma constante $0 \le k < 1$, tal que*

$$d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq kd(g_1, g_2).$$

para todos g_1, $g_2 \in C$. Então, existe um e somente um $g \in C$ tal que $g=\Phi(g)$"

Porém devemos primeiro transformar a Equação Diferencial em uma equação integral cuja forma é:

$$y(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(s, y(s))ds \quad .$$

De posse destes resultados, que também podem ser estendidos para sistemas de equações diferenciais ordinárias, desenvolvemos os tópicos a seguir.

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Apresentamos a seguir a forma geral de uma equação diferencial de primeira ordem:

$$f(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

Também podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6}$$

Se a função f das equações (5) e (6) depender linearmente da variável dependente y, então a equação pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{7}$$

e é chamada de equação diferencial linear de primeira ordem. A equação (7) com $g(x) \equiv 0$ é chamada de equação linear homogênea. A solução do P.V.I homogêneo com $y(x_o)=y_o$ é dada por: $y(t) = y_o e^{\int_{x_o}^{x}[-p(s)]ds}$. Usaremos a notação $T(x, x_o) = e^{\int_{x_o}^{x}[-p(s)]ds}$ com o objetivo de simplicar a solução do problema de valor incial (3)-(4) quando f for linear, ou seja, a equação diferencial estiver na forma (7), que é dada pela seguinte expressão:

$$y(t) = T(x, x_o)y_o + \int_{x_o}^{x} T(x, s)g(s)ds \, . \tag{8}$$

Essa fórmula é chamada de *fórmula de variação das constantes*.

Equações diferenciais da forma:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, g(y) \neq 0 \tag{9}$$

onde $y' = \frac{d}{dx}$ denota a derivada da função y em relação à variável independente x, são chamadas de separáveis.

Utilizando o conteúdo desenvolvido até esse ponto para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem analisaremos as seguintes aplicações:

Crescimento de tumores. Tem sido observado experimentalmente que micro-organismos que se reproduzem de forma a ocorrer a "sua duplicação" ("mitose"), como as bactérias, tem sua taxa de crescimento proporcional ao volume de células divididas em um dado momento. Denotando por $V(t)$ o volume de células divididas no tempo t. Então,

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V$$

para alguma constante positiva λ. A solução é

$$V(t) = V_o e^{\lambda(t - t_o)}$$

onde V_o é o volume de células divididas no tempo inicial t_o. Então o volume de células divididas cresce exponencialmente com o tempo, ou seja $V(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, o que é impossível de ser mantido para sempre, temos, então, um modelo de natureza razoável que tem melhor aplicabilidade em intervalos delimitados de tempo.

Por outro lado, o crescimento de tumores sólidos não é exponencial em relação ao tempo. Através de pesquisas verificou-se que uma boa aproximação de V(t) que melhor se adequa aos dados obtidos da análise de vários tumores sólidos e dada pela equação

$$V(t) = V_o \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\left(1 - \exp(-\alpha\, t)\right)\right) \tag{10}$$

onde exp(x)=e^x, λ e α são constantes positivas. A equação (10) é conhecida como uma relação de Gompertizian. A análise desta equação nos informa que o tumor cresce mais e mais lentamente com o passar do tempo e que o limite do volume de células divididas é aproximadamente: $V_o e^{\lambda/\alpha}$.

Modelo de epidemia. Analisaremos um modelo simplificado para propagação de uma doença. Na construção do modelo que analisaremos, foram feitas as seguintes hipóteses: **1)** Uma fração x de uma determinada população tem uma doença infecciosa, então uma fração $S= (1\text{-}x)$ não a tem. **2)** Os membros desta população podem encontra-se livremente (ao acaso). **3)** A taxa de aumento de x é proporcional a x e S. Em conseqüência destas hipóteses, temos que o modelo é dado pela equação

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x)\,,$$

onde r é uma constante positiva. Esta é uma equação diferencial ordinária separável, resolvendo-se a equação:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x)$$

$$rt = \int \frac{1}{x(1 - x)}dx$$

$$rt = \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{1 - x}dx$$

$$rt = \log x - \log(1 - x) + c$$

$$rt = \log\left(\frac{x}{1 - x}\right) + c$$

$$e^{rt} = \frac{x}{1 - x}e^{c}$$

$$x1 - x = ke^{rt},\ k = e^{-c}$$

$$x = \frac{1}{(1/k)e^{-rt} + 1}.$$

Aplicando a condição inicial $x(0)=x_o$, obtemos

$$x = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x_o}\right)e^{-rt}},$$

que apresenta $x\to1$, quando $t\to\infty$. Isto quer dizer que mais cedo ou mais tarde cada pessoa vai contrair a doença, não uimportando quantas pessoas estavam infectadas inicilamente, a menos que a condição inicial x_o seja igual a 0 (zero), pois neste caso teríamos x=0 para todo t. Felizmente, este modelo é deveras simplificado, e não leva em consideração, por exemplo, a possibilidade de que as pessoas infectadas possam ser isoladas ou que se recuperem da doença ficando sadias.

Equações Diferenciais ordinárias de Segunda Ordem.
Uma Equação Diferencial de Segunda Ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{11}$$

Dizemos que a equação (11) é linear quando a função f é linear em y e em suas derivadas, isto é quando

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y \tag{12}$$

onde p,q e $g:(a,b) \to \Re$ são funções contínuas e derivadas num intervalo aberto *(a,b)*.
Podemos escrever a equação (12) da forma:

$$y''(x) + py'(x) + q(x)y = g(x) \tag{13}$$

Um problema de valor inicial é constituído por (13) e um par de condições iniciais da forma

$$y(x_o)=y_o, \qquad y'(x_o)=v_o \tag{14}$$

onde $x_o \in (a,b)$ e y_o e v_o são valores dados.

Teorema 2: *Se p, q e g são funções contínuas em (a,b) então o problema de valor inicial (13)-(14) tem uma e somente uma solução definida em todo o intervalo (a,b).*

Quando na equação (13) $g \equiv 0$ temos a equação homôgenea

$$y''(x) + py'(x) + q(x)y = 0 \tag{15}$$

A respeito das soluções da equação homôgenea temos o seguinte teorema.

Teorema 3 (Princípio da Superposição): *Se φ_1 e φ_2 forem duas soluções da equação diferencial (15) então qualquer função da forma*

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \tag{16}$$

onde α_1 e α_2 são constantes arbitrárias é a solução da equação diferencial (15).

Definição 1:

(i) *Duas funções $\varphi_1, \varphi_2 : (a,b) \to \Re$ são linearmente dependentes (L.D) se existe uma constante k tal que $\varphi_2(x) = k\varphi_1(x),\ \forall x \in (a,b)$*

(ii) *Duas funções $\varphi_1, \varphi_2 : (a,b) \to \Re$ são linearmente independentes (L.I) se a condição $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$*

Definição 2: *Dadas duas funções diferenciáveis $\varphi_1, \varphi_2 : (a,b) \to \Re$, o determinante*

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) \end{vmatrix} \tag{17}$$

é chamado o Wronskiano das funções φ_1 e φ_2.

Teorema 4::*Se φ_1 e φ_2 são duas soluções particulares da equação linear homogênea*

$$y''+ p(x)y'+ q(x)y=0$$

num intervalo (a,b), e se num ponto $x_o \in (a,b)$, o Wronskiano das duas soluções é diferente de zero, então o Wronskiano será diferente de zero em qualquer outro ponto no intervalo (a,b) e as soluções serão linearmente independentes no intervalo.

Teorema 5: *Sejam $\psi_1\psi_2 : (a,b) \to \Re$ duas soluções L.I de (15). Então qualquer solução φ de (15) é da forma*

$$\varphi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \tag{18}$$

com α_1 e α_2 constantes escolhidas convenientemente.

Pode-se concluir destes resultados que o espaço das soluções das equações diferenciais de segunda ordem lineares homogêneas tem dimensão 2.

Os dois resultados seguintes descrevem a estrutura das soluções das equações não homogêneas (equações da forma da equação (13)) e proporcionam a base para a construção da sua solução geral.

Teorema 6: *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem duas soluções da equação não homogênea (13), então a diferença $y_1(x)-y_2(x)$ é solução da equação homogênea correspondente (15). Se além disso ψ_1 e ψ_2 constituírem um conjunto fundamental de soluções (isto é, constituem a base do espaço das soluções) da equação (13) então*

$$y_1(x)-y_2(x)=\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2 \tag{19}$$

onde α_1 e α_2 são constantes determinadas.

Teorema 7: *A solução geral da equação não homogênea (13) pode ser escrita na forma*

$$y(x)=\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2+y_p(x) \tag{20}$$

onde ψ_1 e ψ_2 constituem um conjunto fundamental de soluções (isto é, constituem a base do espaço das soluções) da equação homogênea correspondente e α_1 e α_2 são constantes arbitrárias e y_p é uma solução particular da equação não homogênea

Para a obtenção da solução particular pode-se utilizar o método da variação dos parâmetros assim como o método de redução da ordem da equação diferencial, método dos coeficientes a determinar e o método pra obtenção de soluções de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Todos estes métodos podem ser encontrados na bibliografia deste artigo.

Utilizando o conteúdo desenvolvido até esse ponto para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem analisaremos a seguintes aplicação:

Oscilador Harmônico. O oscilador harmônico é o modelo matemático para o movimento retílineo de uma particula sujeita a uma força atratora para a origem e com magnitude igual a um múltiplo k (constante positiva) da distância a origem:

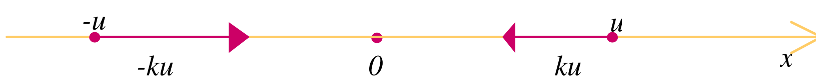


Figura 1.

Designando por m a massa da partícula, a 2ª lei de Newton nos dá $mu''=-ku$ ou seja

$$mu''+ku=0 \tag{21}$$

que é a equação do *oscilador harmônico simples.* Fazendo $w_o^2=k/m$, tem-se que a solução geral da equação (21) é dada por

$$u(t)=c_1\cos w_o t+c_2 sen w_o t \tag{22}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias que podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial da partícula, $u(0)=u_o$, e sua velocidade inicial, $u'(0)=v_o$. Assim de (22) temos $c_1=u_o$, Derivando (22) e fazendo $t=0$ obtemos $c_2w_o=v_o$. Logo (22) pode ser escrito como

$$u(t)=u_o\cos w_o t+\frac{v_o}{w_o}sen w_o t. \tag{23}$$

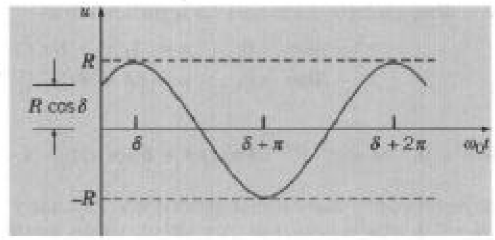
Agora definimos as constantes R e δ pelas expressões

$$R=+\sqrt{u_o^{\ 2}+\left(\frac{v_o}{w_o}\right)^2},\ \cos\delta=\frac{u_o}{R}\ \ e\ \ sen\delta=\frac{v_o}{Rw_o} \tag{24}$$

com a restrição $0\le\delta<2\pi$. Usando (23) e (24) obtemos

$$u(t)=R\cos(w_o t-\delta). \tag{25}$$

O gráfico a seguir descreve o comportamento da solução da equação diferencial (21).



Movimento harmônico simples: $u = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

Figura 2

Se no oscilador houver a presença de uma força resistiva proporcional à velocidade, a 2ª lei de Newton nos dá *mu”=-ku -γux’ , onde* γ é uma constante positiva, ou seja

mu” + γu’+ku=0,

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido.* Esta é um equaçào diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. O discriminate do polinômio caracterísico desta equação é dado por

$$\Delta = \frac{\gamma^2 - 4km}{m^2}.$$

Classifica-se o tipo de amortecimento de acordo com o sinal do discriminante, para Δ>0 tem-se o amortecomento forte, para Δ=0 o amortecomento é dito crítico e para Δ<0 tem-se o amortecimento oscilatório. Neste último caso, a solução geral é dada por

$$u(t) = e^{-\gamma/2m}[c_1 \cos \mu t + c_2 sen \mu t],\ \mu = +\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}.$$

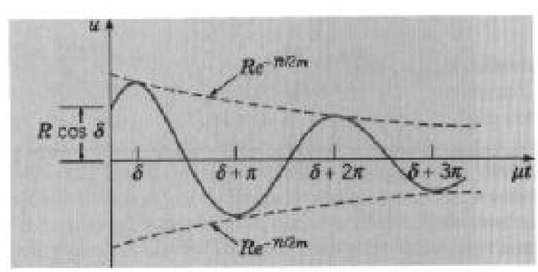
Definimos as constantes R e δ como no caso do oscilador harmônico simples

$$R = +\sqrt{c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2}},\ \cos\delta = \frac{c_1}{R}\ \ e\ \ sen\delta = \frac{c_2}{R}.$$

Obtemos

$$u(t) = \mathrm{Re}^{-\gamma/2m} \cos(\mu t - \delta). \qquad (26)$$

Analisando a equação (26) observa-se que *u(t)*→0 quando *t*→∞. neste caso, entretanto, o movimento é oscilatório, mas a amplitude ($\mathrm{Re}^{-\gamma/2m}$) de decresce exponencialmente, como pode ser observado no gráfico a seguir;



Oscilação amortecida: $u = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta)$.

Figura 3

Suponhamos agora que há uma força externa atuando na partícula, força essa que independe da posição e da velocidade da partícula, mas que pode variar com o tempo. Neste caso, a lei de Newton nos dá: *mu”=-ku-γu+F(t),* ou seja

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t) \qquad (27)$$

que é a equação do *oscilador harmônico amortecido e forçado.* Vamos tratar apenas o caso em que a força externa é periódica tipo co-seno. O procedimento é análogo no caso de um seno. A equação (27) se torna

$$u''+2vu'+w_o^{\,2}u = E_o \cos wt, \quad v = \frac{\gamma}{2m} \; e \; w_o^{\,2} = \frac{k}{m} \; . \tag{28}$$

A solução geral de (27) é dada por

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t)$$

sendo $u_h(t)$ a solução da equação homôgenea correspondente a (28) que é a equação do oscilador harmônico amortecido logo

$$u_h(t) = \mathrm{Re}^{-\gamma/2m}\cos(\mu t - \delta\,).$$

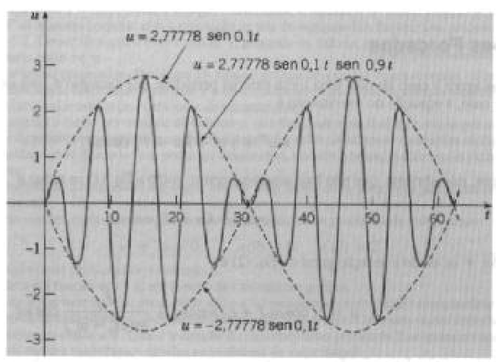
Uma solução particular de (28) é dada por

$$u_p(t) = \frac{2E_o}{w_o^{\,2}-w^2}\, sen\frac{(w_o-w)t}{2}\, sen\frac{(w_o+w)t}{2}$$

Quando v=0, $u_h(t)$ é a solução da equação diferencial do oscilador harmônico simples logo

$$u_h(t) = R\cos(w_o t - \delta\,)\,.$$

Para $v = 0 \; e \; w \neq w_o$ em (28), mas w_o praticamente igual a w, temos o fenômeno chamado de *batimento*. A nomeclatura *batimento* vem da Acústica: cada nota musical tem uma freqüência própria (w_o representa esta freqüência também chamada freqüência natural); quando uma nota básica e a nota correspondente do instrumento musical são tocadas simultaneamente, haverá batimento caso suas frequ6encias defiram ligeiramente. Afinar o instrumento significa ajustá-lo de modo a evitar batimentos. O gráfico a segui descreve o comportamento da solução geral $u(t)$ quando ocorre esse fenômeno.



Batimento; solução de $u'' + u = 0{,}5\cos 0{,}8t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$; $u = 2{,}77778$ sen $0{,}1t$ sen $0{,}9t$

Figura 4

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias. Um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é um conjunto de n equações diferenciais, com uma variável independente *t* e n variáveis dependentes $x_1,x_2,\ldots,x_n$, que podem ser escritas da seguinte forma

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n',t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n',t)$$

$$\ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n',t)$$

onde $F_1, F_2, ..., F_n$ são quaisquer funções de (2n + 1) variáveis reais, que definem o sistema. Não são considerados sistemas de equações de ordem superior a 1, devido a que se alguma das equações diferencias for de ordem superior, poderá ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem.

Sistemas na forma:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

são denominados sistemas *autônomos no plano*, pois f e g não dependem explicitamente da variável (tempo) t. As soluções $(x(t), y(t))$ são curvas parametrizadas no plano de fases (x,y) denominadas *órbitas.*

Pode-se escrever equações diferenciais de segunda ordem qua não dependam explicitamente da variável t na forma de sistemas autônomos, como no caso da equação deferencial que modela o **pêndulo simples**. O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m fixada na extremidade inferior de um fio inextensível (idealmente sem massa) de comprimento l, cuja extremidade superior está fixada. Supondo-se que o movimento se dê em um plano vertical. Designando por o ângulo do fio com a vertical.

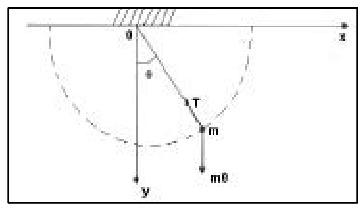


Figura 5

Usando a lei de Newton temos:

$$mx'' = -Tsen\theta \quad e \quad my'' = mg - T\cos\theta \ .$$

Como $x = lsen\theta$ e $y = lcos\theta$ através de manipulações algébricas obtemos

$$l\theta'' + gsen\theta = 0 \tag{29}$$

que é a equação do pêndulo. Podemos escrevê-la na forma do sistema autônomo

$$\begin{cases} \theta' = y \\ y' = -\dfrac{g}{l} sen\theta \end{cases} . \tag{30}$$

Uma linearização da equação (29) pode ser conseguida, substituindo-se senθ por θ, o que necessariamnete restringe sua aplicabilidade ao caso de pequenas oscilações θ. A equação (29) se torna:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{31}$$

que é, então um modelo matemático para representar o fenômeno das pequenas oscilações do pêndulo. A equação (31) é do tipo do oscilador harmônico simples. Sua solução é:

$$\theta(t) = R\cos(w_o t - \delta)$$

e que diz que as oscilações são periódicas de amplitude R e freqüência circular $w_o = \sqrt{g/l}$.

Uma aplicação interessante dos sistemas autônomos é o **modelo predador-presa,** que é um modelo para predação (fator biótico que pode servir como regulador do tamanho de populações). A predação é a destruição violenta de um indivíduo por outro. O organismo predador alimenta-se de uma presa que lhe serve como fonte de energia. O modelo que iremos analisar considera a predação especificamente entre duas espécies, uma espécie (o predador) alimenta-se de outra espécie (a presa), enquanto esta última vive de outra fonte de alimento Como exemplo temos: no pantanal mato-grossense os jacarés que se alimentam das piranhas, ou nos rios da amazônia o tucunaré que também se alimenta das piranhas ou outros peixes carnívoros, ou ainda no contexto amazônico as onças que se alimentam de roedores e animais herbívoros e as lontras e ariranhas comedores de peixes e pequenas aves. Deve-se ressaltar que um modelo que envolve somente duas espécies não pode descrever, na sua integridade, as complicadas relações alimentares entre as espécies que existem na natureza, mas nos serve para um singelo entendimento do fenômeno. Vamos indicar por x e y, respectivamente, as populações da presa e do predador, num instante t. Ao se construir o modelo da interação das duas espécies, foram feitas as seguintes hipóteses.

1) Na ausência da predador, a presa cresce a uma taxa proporcional à população presente; então $dx/dt=ax$, $a>0$, quando $y=0$ (equação que apresenta as mesmas conclusões obtidas para o crescimento de tumores). **2)** Na ausência da presa, o predador desaparece; então $dy/dt=-cy$, $c>0$, quando $x=0$. **3)** O número de encontro do predador com a presa é proporcional ao produto das respectivas populações. Cada encontro tende a promover o crescimento do predador e inibir o crescimento da presa. Assim a taxa de crescimento do predador é acrescida por uma parcela da forma γxy, enquanto a taxa de crescimento de presa é diminuída por uma parcela $-\alpha xy$, onde γ é um coeficiente que mede a habilidade predatória da espécie y e α mede a susceptibilidade da espécie x às açõs predatórias, α e γ são constantes positivas.

Em conseqüência destas hipóteses, temos que o modelo é representado pelas equações

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha\, xy = x(a - \alpha\, y) \\ dy/dt &= -cy + \gamma\, xy = y(-c + \gamma\, x) \end{aligned} \tag{32}$$

As constantes a,c, α e γ são todas positivas; a e c são a taxa de crescimento da presa e a taxa de mortalidade do predador respectivamente, α e γ são medidas dos efeitos da interação entre as duas espécies. As equações (32) são conhecidas como equações de lotka-Volterra. Foram desenvolvidas em artigos por Lotka, biofísico americano, em 1925 e por volterra, matemático italiano, 1926. Apesar dessas equações apresentarem simplicidade elas descrevem uma ampla classe de problemas. Por exemplo no Pantanal do Mato-grosso vive a onça pintada, predador que se alimenta do gado encontrado nas fazendas e de outros animais herbívoros como a anta, o cervo-do-pantanal e a capivara; devido aos ataques ao gado, a onça recebe feroz perseguição por parte dos fazendeiros do Pantanal; entretanto com a morte das onças (predador), há aumento das populações de herbívoros, o que está de acordo com as hipteses do modelo.

O Sistema (32) apresenta dois pontos críticos, ou seja, pontos (x,y) tal que

$$\begin{aligned} x(a - \alpha y) &= 0 \\ y(-c + \gamma x) &= 0 \end{aligned},$$

(0,0) e (c/γ, a/α). As equações a seguir valem para as trajetórias que ficam próximas do ponto crítico (c/γ, a/α).

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K \cos\left(\sqrt{ac}\,t + \phi\right) \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K sen\left(\sqrt{ac}\,t + \phi\right) \end{aligned}.$$

Como podemos perceber, o período independe da amplitude das oscilações das populações de predador e presa (desde que elas não sejam “grandes”) e é igual a $T = 2\pi / \sqrt{ac}$. Isto quer dizer que o período depende apenas das taxas de crescimento das populações. A figura a seguir expressa as variaçòes das populações do predador e da presa, com o tempo no sistema (32) para a=1, α=0,5, c=0,75 e γ=0,25. Observamos que a oscilação do predador segue a oscilação da presa. Principiando-se em um estado no qual as duas populações, do predador e da presa, são relativamente pequenas, a população da presa cresce, inicialmente, em virtude da pequena ação predatória. Então, os predadores, com alimentação abundante, aumentam de população. Isto provoca maior ação predatória e a população da presa tende a diminuir. Finalmente, com o suprimento de alimento diminuído, a população do predador também diminui e o sistema retorna ao estado original.

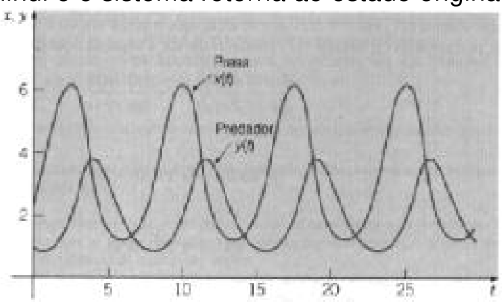


Figura 6

Considerações Finais.

Uma vez que neste artigo foram desenvolvidos resultados teóricos básicos das equações diferenciais ordinárias, pode-se perceber que na análise das aplicações provenientes de outras ciências, a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias mostra-se um instrumento de grande importância, pois permite que se verifique previamente se a equação matemática utilizada para modelar o problema em questão realmente se adequa ao fenômeno descrito pelo modelo.

Bibliografia.

1. ACHESON, D. *From Calculus to Chaos*: an introduction to dynamics. New York:Oxford University Press, 1997.
2. BOYCE, W. E.; DIPRIMA R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
3. BRANCO, Samuel Murgel. O desafio amazônico. 16 ed. rev. e ampl. São Paulo: Moderna, 1995. Coleção polêmica.
4. BRAUN, Martin *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 1975.
5. FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1997.
6. MARCONDES, Ayrton César; LAMMOGLIA, Domingos Ângelo. *Biologia ciência da vida.* São Paulo: Atual, 1994.