CÁLCULO VECTORIAL

1. ESCALARES Y VECTORES

1.1.-MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Existen magnitudes físicas cuyas cantidades pueden ser expresadas mediante un número y una unidad. Otras, en cambio, requieren una indicación adicional: la dirección y el sentido.

- **Magnitud escalar**: Una magnitud física es escalar cuando queda completamente determinada por el número que expresa su medida (escalar), expresado en alguna unidad conveniente. Por ejemplo: temperatura, tiempo, masa, carga eléctrica, potencial eléctrico, energía, etc.

- **Magnitud vectorial**: Una magnitud física es vectorial cuando en su determinación necesitamos, además de un número (módulo), una dirección y un sentido. Esta clase de magnitud recibe el nombre de vector. Por ejemplo: fuerza, velocidad, momento, intensidad del campo eléctrico, etc.

Un vector está determinado por cuatro elementos:

(1) *Origen:* Es el punto de aplicación del vector.
(2) *Dirección:* La misma que tiene la recta sobre la cual está el vector (directriz).
(3) *Sentido:* Uno de los dos posibles que define su dirección, representado por la cabeza de la flecha.
(4) *Módulo:* Valor numérico de la magnitud que representa, expresado por la longitud del vector.

1.2.- CLASIFICACIÓN DE LOS VECTORES

De acuerdo con sus características podemos considerar tres tipos de vectores:

- **Vectores ligados**: Son aquellos vectores con su punto de aplicación perfectamente definido, así como su dirección y sentido.

- **Vectores deslizantes**: Son vectores que se pueden desplazar sobre la recta en que se encuentran, siendo su punto de aplicación cualquier punto de ella.

- **Vectores libres**: Son vectores que se pueden trasladar paralelamente a sí mismos a cualquier punto del espacio.

Así mismo, cuando un vector expresa un sentido de giro se denomina **vector axial**, en el caso contrario **vector polar**.

A. Beléndez, J. G. Bernabeu, C. Pastor, "Magnitudes, vectores y campos", Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-88.511 (1988).

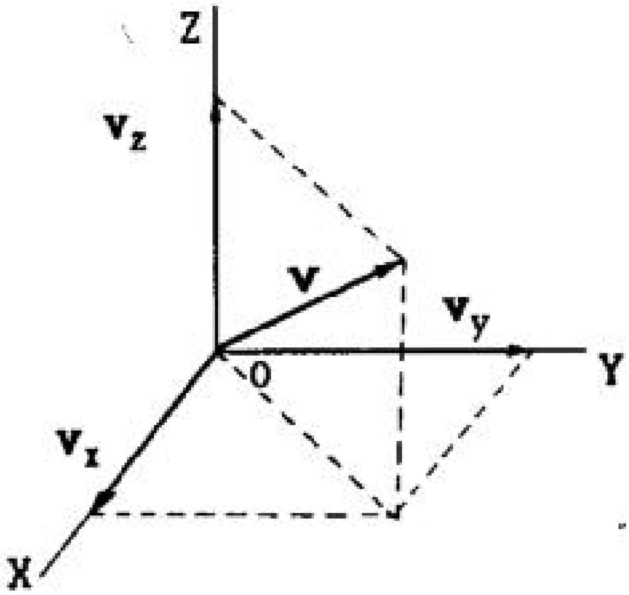
2. COMPONENTES Y COSENOS DIRECTORES

2.1.- COMPONENTES DE UN VECTOR

Dado un sistema de ejes cartesianos XYZ, podemos descomponer un vector **v** en la suma de tres vectores perpendiculares entre sí, cada uno sobre uno de estos ejes.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_X + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_Z$$

Para cada una de estas tres direcciones podemos definir un **vector unitario** (de módulo unidad), **i** según el eje X, **j** según el eje Y, **k** según el eje Z. Entonces:



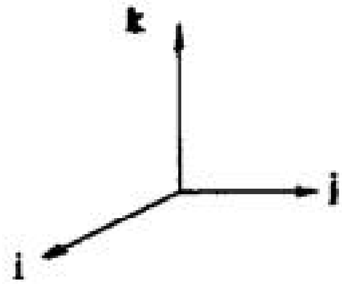
$$\mathbf{v}_X = v_X\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_y = v_y\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_Z = v_Z\,\mathbf{k}$$

Según lo cual, la expresión general del vector **v**, en función de los vectores unitarios **i**, **j**, **k**, será:

$$\mathbf{v} = v_X\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_Z\,\mathbf{k}$$



A los escalares v_X , v_y, v_Z se les llama *componentes cartesianas del vector* **v**:

$$\mathbf{v} = (v_X, v_y, v_Z)$$

El módulo del vector **v**, |**v**| , viene dado por su distancia euclídea, es decir:

$$|\,v\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

El vector unitario en la dirección de **v**, al que llamamos **u**, viene dado por:

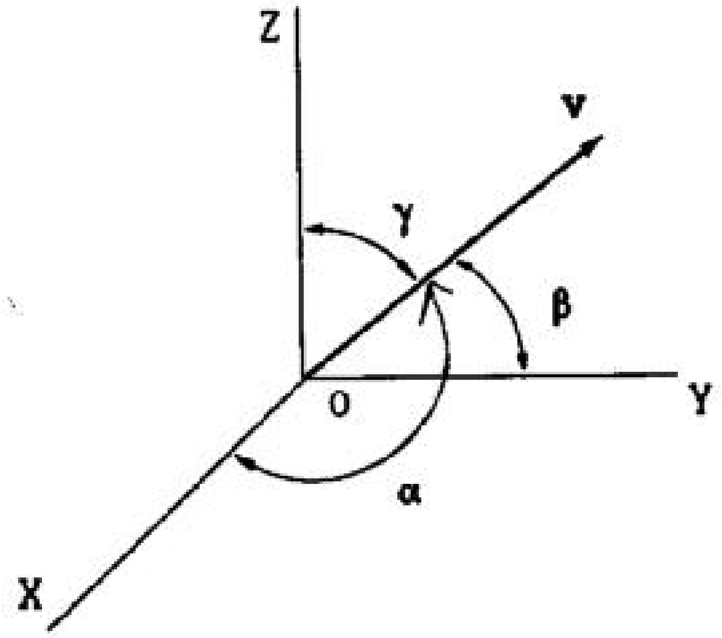
$$u = \frac{v}{|\,v\,|}$$

A. Beléndez, J. G. Bernabeu, C. Pastor, "Magnitudes, vectores y campos", Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-88.511 (1988).

2.2.- COSENOS DIRECTORES

Para determinar la dirección del vector **v** hay que conocer los ángulos α, β, γ que forma, respectivamente, el vector **v** con los ejes coordenados XYZ. A sus cosenos se les llama cosenos directores del vector **v**:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|} \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{|v|} \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{|v|}$$



Las componentes tienen por valor:

$v_x = |\mathbf{v}| \cos\alpha$

$v_y = |\mathbf{v}| \cos\beta$

$v_z = |\mathbf{v}| \cos\gamma$

Se verifica la relación:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Es decir, la dirección de la recta directriz del vector queda perfectamente determinada con dos cualquiera de los ángulos.

Se deduce de esto que un vector queda determinado de alguna de las maneras siguientes:

-A partir de sus tres componentes.

-A partir del módulo y dos de los ángulos que forma con el sistema de referencia.

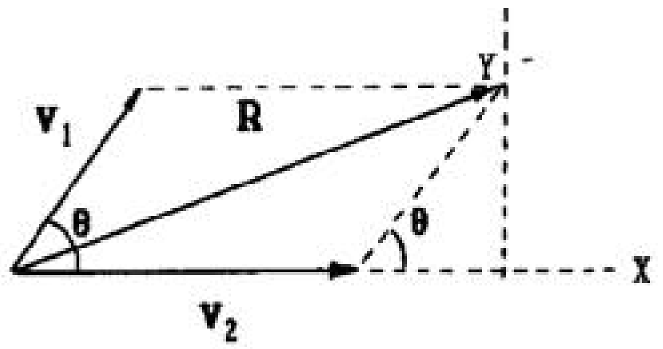
3. OPERACIONES CON VECTORES

3.1.- SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES

- Método gráfico:

Para sumar dos vectores se coloca en el extremo del primero el origen del segundo, el vector suma es el que tiene por origen, el origen del primero, y por extremo, el extremo del segundo.

- Método analítico:



$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{R}$$

De la figura se tiene:

$$R_X = V_2 + V_1 \cos\theta$$
$$R_y = V_1 \operatorname{sen}\theta$$

luego, el módulo de **R** será:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{V_2^2 + V_1^2\cos^2\theta + 2V_1V_2\cos\theta + V_1^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

con lo cual

$$R \equiv |\mathbf{R}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$$

- Componentes:

En componentes, sean los vectores **A** y **B** escritos en función de sus componentes cartesianas

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \qquad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

entonces, los vectores suma, **S**, y diferencia, **D**, se escriben:

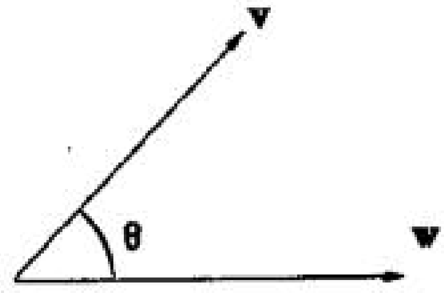
$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

A. Beléndez, J. G. Bernabeu, C. Pastor, "Magnitudes, vectores y campos", Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-88.511 (1988).

3.2.- PRODUCTO ESCALAR

Se define el producto escalar de dos vectores **v** y **w** , y se representa por **v.w**, como la cantidad escalar



$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\theta$$

Donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

Si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$ implica que:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 0 \qquad \text{ó bien} \qquad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \;\; (\alpha = 90°)$$

El producto escalar de dos vectores no es otra cosa que el producto del módulo de un vector por la proyección del otro sobre éste.

Se verifican las relaciones:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$$

En función de sus componentes, el producto escalar se escribe:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

La expresión analítica del producto escalar permite calcular el ángulo que forman los dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{v\ w}{|v|\,|w|}$$

3.3.- PRODUCTO VECTORIAL

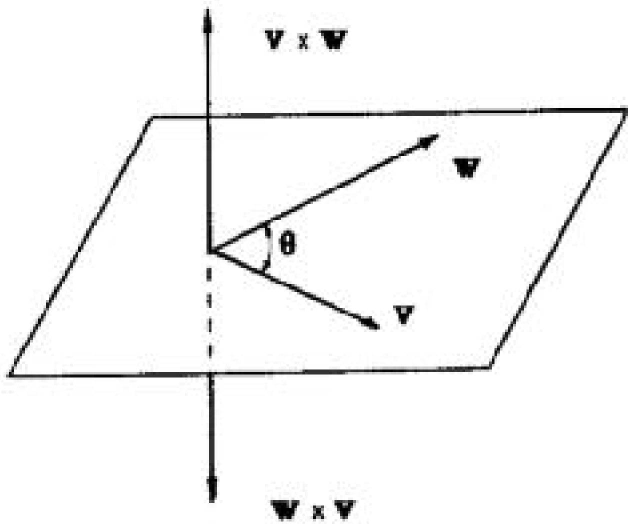
Se define el producto vectorial de dos vectores **v** y **w,** y se representa por **v** x **w,** como el vector perpendicular al plano determinado por **v** y **w** en la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha que ha sido rotado de **v** hacia **w**, por el camino más corto. Su módulo es

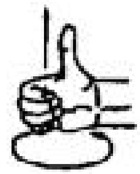
$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \operatorname{sen} \theta$$

siendo θ el ángulo que forman los dos vectores.

Si $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$, entonces:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = 0 \qquad \text{ó bien} \qquad |\mathbf{v}| \,//\, |\mathbf{w}| \quad (\theta = 0° \text{ ó } \theta = 180°)$$





Si **v** y **w** vienen en función de sus componentes y teniendo en cuenta las relaciones:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

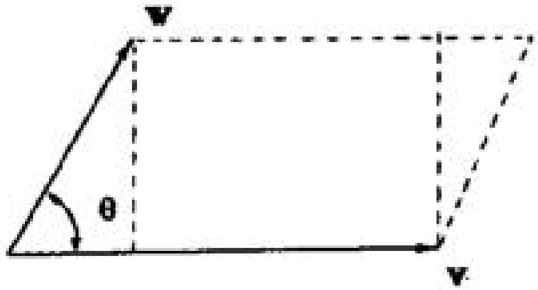
podemos escribir el producto vectorial en forma de determinante:

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo formado por los vectores **v** y **w**:

$$\text{Area} = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \operatorname{sen} \theta$$

A. Beléndez, J. G. Bernabeu, C. Pastor, "Magnitudes, vectores y campos", Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-88.511 (1988).



El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo, ya que:

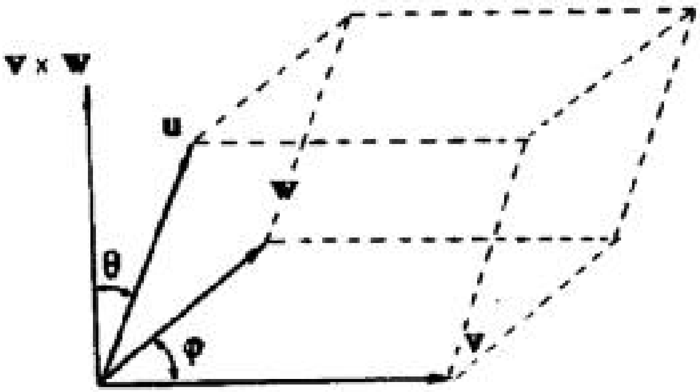
$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = - \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

3.4.- PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES (TRIPLE)

El producto mixto de tres vectores es un escalar, cuyo valor se obtiene haciendo el producto escalar de un vector, por un producto vectorial de dos vectores. En función de sus componentes, para los vectores **u**, **v** y **w**:

$$u\ (v \times w) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

que nos da el volumen del paralelepípedo de aristas | **u** | , | **v** | y | **w** |:



$$|\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,| = |\,\mathbf{u}\,|\,|\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}\,| \cos\theta = |\,\mathbf{u}\,|\,|\,\mathbf{v}\,|\,|\,\mathbf{w}\,| \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

A. Beléndez, J. G. Bernabeu, C. Pastor, "Magnitudes, vectores y campos", Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-88.511 (1988).

3.5.- DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Se define el doble producto vectorial de tres vectores **u**, **v** y **w**, mediante

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

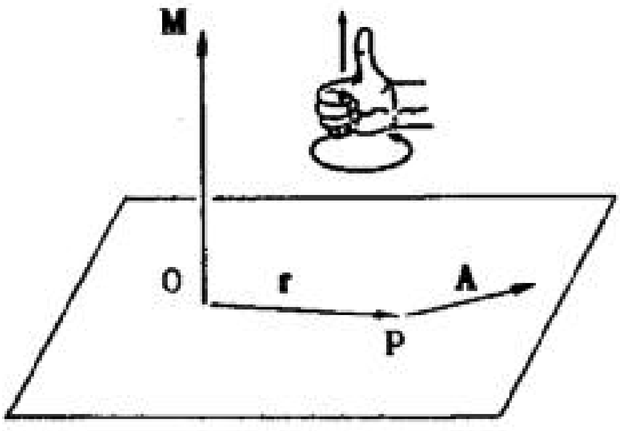
que da como resultado un vector contenido en el plano definido por **v** y **w**.

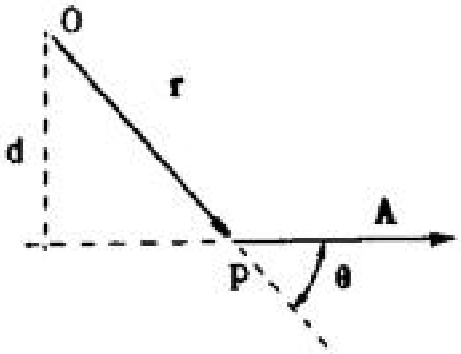
3.6.- <u>MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO</u>

El momento de un vector **A** respecto a un punto O se define como el vector **M**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathrm{OP} \times \mathbf{A}$$

siendo **r** el vector cuyo origen está en el punto O y su extremo en el origen del vector **A**.





En módulo:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{A}| = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{A}| \operatorname{sen}\theta = d\cdot|\mathbf{A}|$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores **r** y **A**.

A. Beléndez, J. G. Bernabeu, C. Pastor, "Magnitudes, vectores y campos", Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-88.511 (1988).