MATEMATICAS 3 Y 4

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Derivable y derivada

Consulta el siguiente material audiovisual:
https://www.youtube.com/watch?v=-91UZ9S19Oo

Sean II un intervalo abierto de los reales, aa un punto de II y sea la función

f:I→Rf:I→R

Entonces, decimos que ff es **derivable** en el punto aa si existe el siguiente límite y, en tal caso, a su valor lo denotamos por f′(a)f′(a):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Nota: los dos límites anteriores son equivalentes.

Decimos que ff es **derivable** en II si lo es en todos los puntos del intervalo II.

Llamamos **derivada** de ff a la función f′(x)f′(x) siendo x∈I

Derivadas elementales

Llamamos **derivadas elementales** o **inmediatas** a las derivadas de funciones elementales (por ejemplo, la función constante, potencia, coseno, exponencial, logaritmo, etc.).

Las funciones más complejas se pueden escribir como composición de funciones elementales. Podremos derivar estas funciones más complejas utilizando las **reglas de derivación**, la **regla de la cadena** y las **derivadas elementales**.

Las derivadas elementales se calculan con la propia definición de derivada (calculando el límite) y las escribimos en una tabla (Tabla de derivadas elementales) para utilizarlas al derivar las funciones más complejas.

Veamos dos ejemplos del cálculo de derivadas a partir de su definición:

Ejemplo 1: derivada de la función constante.

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

Mostrar límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} 0 = 0$$

REGLAS DE DERIVACION Y DERIVADAS INMEDIATAS

$f = f(x),\quad g = g(x),\ \frac{\partial}{\partial x}f(x) = f',\quad \frac{\partial}{\partial x}g(x) = g'$
$\frac{\partial}{\partial x}(f+g) = f' + g'$
$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f}{g}) = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
$\frac{\partial}{\partial x}(f^g) = (g' ln(f) + \frac{1}{f} f' g) f^g$

Función	Derivada respecto de x
ax	a
a^x	$a^x ln(a)$
x^m	$m \cdot x^{m-1}$
e^x	e^x
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$log_a(x)$	$\frac{1}{x ln(a)}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x) = 1 + tg^2(x)$
$cotg(x)$	$\frac{-1}{sin^2(x)} = -cosec^2(x) = -1 - cotg^2(x)$
$sec(x)$	$\frac{sin(x)}{cos^2(x)} = sec(x)tg(x)$
$cosec(x)$	$\frac{-cos(x)}{sin^2(x)} = -cosec(x)cotg(x)$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arccotg(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$arcsec(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$arcsec(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = sinh(x)$
$sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = cosh(x)$

Nota: Cuando x sea una función $f(x)$, en la derivada escribimos $f(x)$ en vez de x y multiplicamos el resultado por $f'(x)$
Por ejemplo, la derivada de $sin(x^2)$ es $cos(x^2) \cdot 2x$

Propiedades y Reglas de derivación

Una de las más importantes propiedades es la relación entre derivabilidad y continuidad:

Si ff **es derivable en el punto** aa**, entonces** ff **es continua en** aa**.**

demostración

Como la función es derivable en aa,

$$\exists f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) =$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Luego la función es continuida en aa.

REGLAS DE DERIVACIÓN:

1. **Derivada de la inversa:** Sea ff derivable en el punto aa tal que la derivada en dicho punto no se anula, esto es, f′(a)≠0f′(a)≠0, y existe la inversa de ff en un entorno de f(a)f(a), entonces

$$(f^{-1})'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}$$

demostración

Calculamos el límite:

$$(f^{-1})'\big(f(a)\big) =$$

$$= \lim_{h \to f(a)} \frac{f^{-1}(h) - f^{-1}\big(f(a)\big)}{h - f(a)} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{f^{-1}\big(f(h)\big) - f^{-1}\big(f(a)\big)}{f(h) - f(a)} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{h - a}{f(h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

2. **Derivada del producto por una constante:** Sea ff derivable en aa y sea kk una constante, entonces

$$(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$$

demostración

Calculamos el límite:

$$(k \cdot f)'(a) =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{(k \cdot f)(h) - (k \cdot f)(a)}{h - a} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{k \cdot f(h) - k \cdot f(a)}{h - a} =$$

$$= k \cdot f'(a)$$

3. **Derivada de la suma de dos funciones:** Sean ff y gg dos funciones derivables en aa, entonces

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$

Omitimos la demostración por su inmediatez.

4. **Derivada del producto de funciones:** Sean ff y gg dos funciones derivables en aa, entonces,

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

demostración

Calculamos el límite:

$$(f \cdot g)'(a) =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{(f \cdot g)(h) - (f \cdot g)(a)}{h - a} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{f(h)g(h) - f(a)g(a)}{h - a} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{g(a)\big(f(h) - f(a)\big) + f(h)\big(g(h) - g(a)\big)}{h - a} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{f(h) - f(a)}{h - a} g(a) + f(h) \frac{g(h) - g(a)}{h - a} =$$

$$= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

5. **Derivada del cociente de funciones:** Sean ff y gg funciones derivables en aa siendo g(a)≠0g(a)≠0, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$$

demostración

Podemos expresar el cociente como un producto:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)(a)$$

Vamos a demostrar que la derivada del inverso de gg es

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{\big(g(a)\big)^2} g'(a)$$

Así, aplicando la regla del producto, se obtine el resultado que buscamos.

Calculamos la derivada del inverso:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) =$$

$$= \lim_{h\to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h-a} =$$

$$= \lim_{h\to a} \frac{g(a) - g(h)}{g(a)g(h)(h-a)} =$$

$$= \lim_{h\to a} -\frac{1}{g(a)g(h)} \cdot \frac{g(h) - g(a)}{(h-a)} =$$

$$= -\frac{1}{\left(g(a)\right)^2} g'(a)$$

Regla de la cadena

La regla de la cadena es un teorema de gran importancia por su aplicación. Este resultado es el que nos permite calcular la derivada de la composición de funciones.

Regla de la cadena: Sean ff y gg dos funciones tales que ff es derivable en aa y gg es derivable en f(a)f(a), entonces

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$$

demostración

Suponemos que ff no es constante y que ff y gg son derivables en aa y en f(a)f(a), respectivamente.

Aplicando la definición de límite a la composición de ff y gg:

$$(g\circ f)'(a)=\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)x-a=(g\circ f)'(a)=\lim x\to a(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)x-a=$$

$$=\lim_{x\to a}g(f(x))-g(f(a))x-a==\lim x\to ag(f(x))-g(f(a))x-a=$$

$$=\lim_{x\to a}g(f(x))-g(f(a))x-a\cdot f(x)-f(a)f(x)-f(a)==\lim x\to ag(f(x))-g(f(a))x-a\cdot f(x)-f(a)f(x)-f(a)=$$

=limx→ag(f(x))−g(f(a))f(x)−f(a)·f(x)−f(a)x−a==limx→ag(f(x))−g(f(a))f(x)−f(a)·f(x)−f(a)x−a=

=g′(f(a))·f′(a)=g′(f(a))·f′(a)

Veamos un sencillo ejemplo de su aplicación:

Calcular la derivada de la función f(x)=sin(x2)f(x)=sin(x2) con el límite de la definición de la derivada sería una tarea más o menos tediosa que podemos evitar.

La función f es composición de las funciones h(x)=sin(x)h(x)=sin(x) y g(x)=x2g(x)=x2:

f(x)=(h∘g)(x)=h(g(x))f(x)=(h∘g)(x)=h(g(x))

Las derivadas de las funciones implicadas son h′(x)=cos(x)h′(x)=cos(x) y g′(x)=2xg′(x)=2x.

Aplicamos la regla de la cadena:

f′(x)=h′(g(x))·g′(x)=f′(x)=h′(g(x))·g′(x)=

=cos(x2)·2x

Recordamos que, formalmente, la derivada de una función es un límite. Sin embargo, como la mayoría de las funciones son una composición de funciones más simples, podemos aplicar reglas para calcular la derivada sin necesidad de límites.

Ejemplo:

Sea la función

$$f(x) = \cos(1 + x^2)$$

Esta función tiene un coseno y una suma de una constante y una potencia.

Para hallar la derivada de una función compuesta por otras funciones (como la anterior), aplicamos las reglas de derivación, de la cadena y las derivadas básicas (tabla de derivadas). De este modo, evitamos aplicar la definición formal de derivada, que es mucho más complicado.

ACTIVIDADES

1.- REALIZA LA TRANSCRIPCION DE LOS TEMAS

2.- INVESTIGA EN QUE PODEMOS UTILIZAR LAS DERIVADAS EN LA VIDA COTIDIANA O EN LO LABORAL

3.- REALIZA 3 EJEMPLOS DE DERIVADAS

4.- REALIZA 3 EJERCICIOS DE DERIVADAS Y 1 DE EL METODO EN CADENA