

Computación cuántica con iones atrapados

Juan José García-Ripoll
Física Teórica I, UCM

Estas notas incluyen un resumen de los detalles “técnicos” de las clases sobre iones atrapados y computación cuántica, junto con cinco ejercicios fáciles (**P1-P5**) y tres opcionales (**P6-P8**).

I. OPERACIONES SOBRE UN ION

Actuando con un láser sobre un ion atrapado, somos capaces de inducir una dinámica en los estados internos del ion. El caso resonante es aquél en el que la frecuencia del láser, ω_l , está próxima a la diferencia de energía entre el estado fundamental, $|0\rangle$, y el primer excitado, $|1\rangle$, del ion, ω_{01} . Supongamos que el Hamiltoniano efectivo para el átomo se puede escribir entonces como

$$H_{\text{eff}} = \frac{I}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \frac{\delta}{2}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|), \quad (1)$$

donde I es proporcional a la intensidad del láser, y $\delta = \omega_{01} - \omega_l$, el “detuning” es controlable.

P1: Integrar la ecuación de evolución de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt}U(t) = HU(t), \quad U(0) = \mathbb{I}, \quad (2)$$

suponiendo que los parámetros I y δ son constantes. Pista: $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \|\vec{n}\|^2$.

P2: Demostrar que es posible realizar cualquier rotación de un único qubit combinando dos o más secuencias de distintos valores de los parámetros I, δ .

II. MODOS NORMALES

Consideramos el ejemplo de dos iones en una trampa de Paul con simetría cilíndrica. Cuando el confinamiento transversal es muy fuerte, podemos suponer que los iones se mueven en una dimensión y denotar su posición y momento por una coordenada real, p_i, x_i , con $i = 1, 2$. El Hamiltoniano que describe a los iones es de la forma

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x_i^2 \right] + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x_2 - x_1|}. \quad (3)$$

P3: Encontrar la situación de equilibrio

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \right)_{x_i=x_i^{(0)}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

y estimar la separación de los iones $|x_1^{(0)} - x_2^{(0)}|$.

P4: Expandiendo alrededor de las posiciones de equilibrio, $x_i := x_i^{(0)} + \delta x_i$, desarrollar el Hamiltoniano anterior hasta segundo orden en δx_i y reexpresarlo en término de las variables

$$P := \frac{\hbar}{d_{cm}}(p_1 + p_2), \quad (5)$$

$$p := \frac{\hbar}{d_{rel}} \frac{1}{2}(p_1 - p_2), \quad (6)$$

$$R := d_{cm}(\delta x_1 + \delta x_2)/2, \quad (7)$$

$$r := d_{rel}(\delta x_1 - \delta x_2). \quad (8)$$

Las constantes deben escogerse para que el Hamiltoniano final tenga la forma

$$H = \hbar\omega_{cm} \frac{1}{2}(P^2 + R^2) + \hbar\omega_{rel} \frac{1}{2}(p^2 + r^2). \quad (9)$$

Relacionar ω_{cm} , ω_{rel} con la frecuencia de la trampa, ω . Estimar los valores de la distancia de equilibrio, $|x_1^{(0)} - x_2^{(0)}|$, y de los desplazamiento típicos, d_{cm} y d_{rel} , para un átomo $^{40}\text{Ca}^+$ en una trampa de $\omega = 2\pi \times 20\text{MHz}$.

P5: Estudiar las correcciones de tercer orden al Hamiltoniano. Usando los parámetros experimentales anteriores, de qué orden de magnitud tiene que ser el desplazamiento del ion δx_i para que esas correcciones sean comparables a las de segundo orden?

III. PUERTA LÓGICA DE FASE (OPCIONAL)

Seguimos con el ejemplo de dos átomos en una trampa. Introducimos una fuerza dependiente del estado interno del ion e ignoramos el modo ω_{rel} . El Hamiltoniano efectivo tiene la forma

$$H = \hbar\omega \frac{1}{2}(P^2 + R^2) + f(t)R(\sigma_1^z + \sigma_2^z). \quad (10)$$

En término de los operadores de Fock $a := \frac{1}{\sqrt{2}}(R + iP)$ y $a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(R - iP)$, el Hamiltoniano anterior se reduce a

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{\sqrt{2}}f(t)(a + a^\dagger)(\sigma_1^z + \sigma_2^z). \quad (11)$$

Deseamos estudiar la evolución del estado de los qubits, esto es, de la matriz densidad que resulta de ignorar los grados de libertad del movimiento

$$\rho_{qubit}(t) := \text{tr}_{vib}\rho(t). \quad (12)$$

Usando el conjunto de operadores $\sigma^\alpha := \{\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z, \mathbb{I}\}$ la matriz densidad de dos qubits se puede escribir de dos formas:

$$\rho_{qubit}(t) = \sum_{\alpha, \alpha'=1,2,3,4} \text{tr}\{\sigma_1^\alpha \otimes \sigma_2^{\alpha'} \rho(t)\} \sigma_1^\alpha(0) \otimes \sigma_2^{\alpha'}(0) \quad (13)$$

$$= \sum_{\alpha, \alpha'=1,2,3,4} \text{tr}\{\sigma_1^\alpha \otimes \sigma_2^{\alpha'} \rho(0)\} \tilde{\sigma}_1^\alpha(t) \otimes \tilde{\sigma}_2^{\alpha'}(t). \quad (14)$$

En el primer caso estudiamos la evolución del operador densidad total de acuerdo con la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}\rho = [H, \rho], \quad (15)$$

mientras que en el segundo estudiamos la evolución de los operadores de acuerdo con las ecuaciones de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_i^\alpha := [\tilde{\sigma}_i^\alpha, \tilde{H}], \quad \tilde{\sigma}_i^\alpha(0) = \sigma_i^\alpha, \quad (16)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{a} := [\tilde{a}, \tilde{H}], \quad \tilde{a}(0) = a \quad (17)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{a}^\dagger := [\tilde{a}^\dagger, \tilde{H}], \quad \tilde{a}^\dagger(0) = a^\dagger \quad (18)$$

con la condición inicial $\tilde{\sigma}_i^\alpha(0) := \sigma_i^\alpha$ y el Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$\tilde{H} := \hbar\omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + f(t)(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger)(\tilde{\sigma}_1^z + \tilde{\sigma}_2^z)/\sqrt{2}. \quad (19)$$

Puesto que las relaciones de conmutación de los operadores en imagen de Heisenberg ($\tilde{a}, \tilde{\sigma}$) son las mismas que las de los operadores originales entre sí, es fácil encontrar las ecuaciones de evolución

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{a} = \hbar\omega \tilde{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}f(t)(\tilde{\sigma}_1^z + \tilde{\sigma}_2^z), \quad (20)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_i^x = \frac{1}{\sqrt{2}}f(t)(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger)(-2i\tilde{\sigma}_i^y) \quad (21)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_i^y = \frac{1}{\sqrt{2}}f(t)(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger)(+2i\tilde{\sigma}_i^x) \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_i^z = \frac{d}{dt}\tilde{\mathbb{I}}_i = 0. \quad (23)$$

Las dos últimas ecuaciones nos dicen que la magnetización en la dirección Z es una cantidad conservada,

$$\tilde{\sigma}_i^z(t) = \sigma_i^z. \quad (24)$$

Utilizando ésto, podemos integrar la primera ecuación

$$\tilde{a}(t) = e^{-i\omega t} a(0) - i \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} \int_0^t e^{-i\omega(t-\tau)} f(\tau) \times (\sigma_1^z + \sigma_2^z). \quad (25)$$

Se requiere un poco más de trabajo para demostrar que, si se satisface la relación

$$\int_0^t e^{-i\omega\tau} f(\tau) d\tau = 0, \quad (26)$$

entonces los operadores momento angular $\tilde{\sigma}^\pm := (\tilde{\sigma}^x \pm i\tilde{\sigma}^y)/2$ evolucionan de acuerdo con

$$\tilde{\sigma}_i^\pm(t) = e^{i\phi(\sigma_1^z + \sigma_2^z)} \sigma_i^\pm. \quad (27)$$

P6: Dada las ecuaciones (24) y (27), deducir qué transformación sufre la matriz densidad ρ_{qubit} . Se trata de un a puerta lógica universal?

P7: Obtener la fase ϕ como función de la fuerza aplicada $f(t)$.

P8: En una trampa de iones se puede conseguir una puerta lógica de fase mucho más complicada. Si hay N iones en la trampa, ajustando la dependencia temporal de los láseres que actúan sobre los átomos, es posible realizar la transformación unitaria

$$U = \exp \left(i\phi \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_k^z \sigma_j^z \right). \quad (28)$$

Encontrad el ángulo ϕ y las transformaciones locales U_1 y U_2 , para convertir el estado $|0\rangle^{\otimes N} = |0, 0, \dots, 0\rangle$ en un gato de Schrödinger o estado GHZ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}) = U_1^{\otimes N} U U_2^{\otimes N} |0\rangle^{\otimes N}. \quad (29)$$