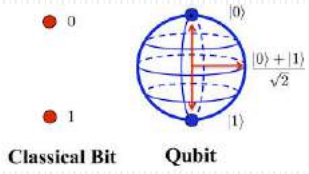
Algoritmos Cuánticos

Alfonsa García, Francisco García[1] y Jesús García[1]
[1]Grupo de investigación en Información y Computación Cuántica (GIICC)



Algoritmos cuánticos

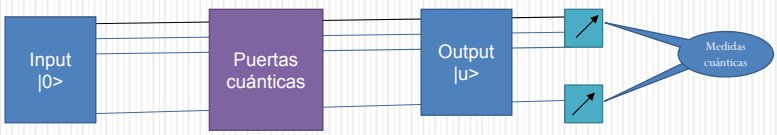
1. Introducción
2. Primeros algoritmos cuánticos
   2.1 Problema de Deutsch
   2.2 Problema de Deutsch-Jozsa
   2.3 Problema de Simon
3. Búsqueda no estructurada. Algoritmo de Grover
4. Transformada Cuántica de Fourier
5. Algoritmo de Shor

1. Introducción

- Un algoritmo es un proceso encaminado a realizar una tarea específica.
- Con frecuencia, las etapas de un algoritmo se pueden concretar en la evaluación de una función sobre distintos parámetros de entrada.
- El paralelismo cuántico permite evaluar una función simultáneamente sobre todas las posibles cadenas de n bits.
- El problema es que la información queda "oculta" en las amplitudes del estado cuántico resultante, y para acceder a ella se requiere una medición cuántica, que destruye parte de la información.

Algoritmos cuánticos→ circuitos

- Un algoritmo cuántico se representa por un circuito que evoluciona de izquierda a derecha.
- El estado de entrada suele ser un n-qubit en estado |0> y las medidas cuánticas se hacen a la salida del circuito.



2. Primeros algoritmos cuánticos

2.1 Problema de Deutsch (ver si una función booleana de una variable es constante)
2.2 Problema de Deutsch-Jozsa (ver si una función booleana de n variables es balanceada)
2.3 Problema de Simon (determinar el periodo de una función f: $(Z_2)^n \rightarrow (Z_2)^n$)

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

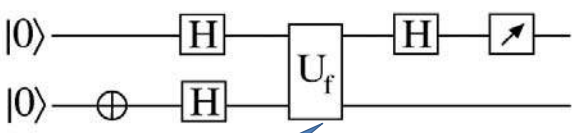
2.1 Problema de Deutsch

Dada una función booleana f: {0,1}→{0,1}, se trata de ver si es constante (f(0)=f(1)) o no evaluándola una sola vez

Recordemos que la función f se implementa con la puerta cuántica:

$$U_f\left(|k\rangle \otimes |j\rangle\right) = |k\rangle \otimes |j \oplus f(k)\rangle$$

Resolución del problema:



Una sola evaluación

Si al medir se obtiene 0 la función es constante

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

2.2. Problema de Deutsch- Jozsa

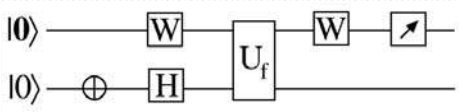
Dada f: $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ se trata de ver si es constante o balanceada con el menor número de evaluaciones de f

Computación clásica: Hay que evaluar f sobre la mitad más 1 de todas las posibles cadenas de n bits $\rightarrow 2^{n-1}+1$ evaluaciones

Para hacerlo cuánticamente, de nuevo usamos:

$$U_f\left(|k\rangle \otimes |j\rangle\right) = |k\rangle \otimes |j \oplus f(k)\rangle$$

Pero ahora $|k\rangle$ es un n-qubit



Si al medir el n-qubit se obtiene 0, la función es constante, si se obtiene un resultado distinto de 0 es balanceada.

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

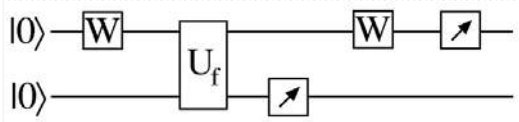
2.3. Problema de Simon

Dada $f: Z_2^n \rightarrow Z_2^n$, periódica de periodo $T \in Z_2^n$ y 2 a 1, se trata de determinar T con el menor número posible de evaluaciones.

Computación clásica: $2^{n-1}+1$ evaluaciones

Algoritmo cuántico:

1. Inicializar el $2n$-qubit $\Psi = |0\rangle \otimes |0\rangle$.
2. Aplicar la transformada de Walsh-Hadamard W_n a los n primeros qubits.
3. Aplicar U_f.
4. Medir los n últimos qubits: $j_1, \ldots, j_n$ (resultado $j = j_1 \ldots j_n$).
5. Aplicar de nuevo W_n a los n primeros qubits.
6. Medir los n primeros qubits: $k_1, \ldots, k_n$. Devolver $k = k_1 \ldots k_n$.



Ganancia exponencial frente a los algoritmos clásicos

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

Seguimiento del algoritmo

$$
\begin{aligned}
|0\rangle \otimes |0\rangle \;&\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{0\le k<2^n} (|k\rangle \otimes |0\rangle) \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{0\le k<2^n} (|k\rangle \otimes |f(k)\rangle) \\
&\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}} (|l\rangle + |l \oplus T\rangle) \otimes |j\rangle \quad (\text{medida } j,\ \Rightarrow\ \{l, l\oplus T\} = f^{-1}(j)) \\
&\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{0\le k<2^n} \left((-1)^{l\cdot k} + (-1)^{(l\oplus T)\cdot k}\right) |k\rangle \otimes |j\rangle \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{0\le k<2^n} (-1)^{l\cdot k} \left(1 + (-1)^{T\cdot k}\right) |k\rangle \otimes |j\rangle \\
&\rightarrow\; k \quad \text{tal que} \quad T\cdot k = 0
\end{aligned}
$$

Obtenemos una ecuación lineal homogénea ***en*** Z_2, $T{\cdot}k{=}0$, con n incógnitas. Hay que repetir el algoritmo hasta tener un sistema de rango n-1. La solución no nula del sistema será el periodo de la función

3. Búsqueda no estructurada

- Problema de búsqueda no estructurada: Hallar x en un conjunto de N posibles soluciones (no ordenadas) tal que la sentencia P sea cierta.
- Ejemplo de búsqueda no estructurada: Encontrar en una guía telefónica el titular de un número concreto.
- Se puede formular como buscar el entero x, entre 0 y N-1, de modo que para una función booleana f, sea f(x)=1.
- Computación clásica→ complejidad O(N)

La idea es evaluar f simultáneamente sobre los N números enteros.

Completando la lista si es preciso, supondremos $N=2^n$ y tendremos 2^n cadenas de n bits de las que sólo una verifica f(x)=1.

Algoritmo cuántico de Grover (1996)

- El algoritmo de Grover resuelve el problema de búsqueda no estructurada en una lista de N datos, con solución única, con $O(N^{1/2})$ evaluaciones.
- Se aprovecha el paralelismo cuántico para evaluar simultáneamente f sobre todos los posibles x de [0,N-1], construyendo, con la transformación de Walsh-Hadamard, el estado:

$$\psi = W_n(|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}|x\rangle$$

Después se va modificando este estado de modo que se incremente la probabilidad de que al medir se obtenga el x tal que f(x)=1

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

Descripción del algoritmo

Paso 1: A partir de una lista de $N=2^n$ datos (x=0..N-1), de modo que solo 1 verifica f(x)=1, se construye el estado superposición de todas las palabras de n bits: $W_n(|0\rangle)$

Paso 2 (Oráculo): Cambio de signo en la amplitud de los x tales que f(x)=1

$$U(|x\rangle) = (-1)^{f(x)}|x\rangle$$

Se implementa por medio de:

$$U_f(|x\rangle \otimes |b\rangle) = |x\rangle \otimes |b \oplus f(x)\rangle \quad \text{con} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Paso 3 (Inversión sobre el promedio): Si A es el promedio de las amplitudes, se transforma

$$\sum_{x=0}^{N-1} a_x|x\rangle \quad \text{en} \quad \sum_{x=0}^{N-1}(2A - a_x)|x\rangle$$

Se implementa con:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{N}-1 & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N}-1 & \cdots & \frac{2}{N} \\ \cdots & & & \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N}-1 \end{pmatrix}$$

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

Un ejemplo:

Partimos de una lista de 64 elementos de la que sólo 1 (x_s) satisface $f(x_s)=1$. Construimos

$$W_n(|0\rangle)=\frac{1}{8}\sum_{x=0}^{63}|x\rangle$$

Tras cambiar el signo de la amplitud x_s el promedio de amplitudes es: $A=(63\frac{1}{8}-\frac{1}{8})/64\approx 0.12109$

Con la inversión en el promedio la nueva amplitud de x_s es:

$$2A+\frac{1}{8}\approx 0.367817$$

Todas las demás amplitudes quedan en 0.117187. Por tanto la probabilidad de obtener x_s al medir es la más alta.
Si repetimos el proceso 6 veces, el coeficiente de x_s es 0.998291 y la probabilidad de que al medir se obtenga la solución es 0.998291^2.

Complejidad del algoritmo de Grover

Para una probabilidad de fallo<1/*N* → número de iteraciones $O(\sqrt{N})$

Coste de implementación de $G=W_nRW_n$

$R=2|0><0|-I$

R es una matriz con todos sus elementos iguales a 0, salvo R_{11}=2, que se puede implementar con log(N) puertas de Toffoly

Coste de W_n →log(N)

Complejidad total del algoritmo: $O(\sqrt{N}\log(N))$

4. Transformada Cuántica de Fourier

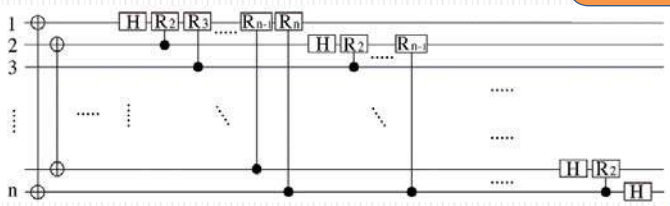
La transformada cuántica de Fourier (QFT) es una transformación unitaria sobre H_n, que para un n-qubit $|j\rangle$, con $0 \le j < n$, se define:

Sobre el n-qubit |0> actúa igual de la transformación de Walsh-Hadamard

$$F_n|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=0}^{Q-1} e^{2\pi i j k/Q} |k\rangle \qquad Q=2^n$$

Shor (1996) introdujo un algoritmo cuántico para calcular la transformada de Fourier con $O(\log^2(Q))$ puertas cuánticas elementales

El cálculo clásico de la transformada discreta de Fourier, de una lista de tamaño Q, requiere Q^2 operaciones o Qlog(Q) si se usa el algoritmo FFT



GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa

La QFT y el periodo de una función

Si f es una función entera y periódica de periodo T su QFT se anula en todos los elementos del dominio salvo en los múltiplos de la frecuencia w tal que $wT=Q$

Esta propiedad permite obtener la frecuencia, y por tanto el período, de la función f.

$$F_n\left(\sum_{j=0}^{Q-1} f_j|j\rangle\right) = \sum_{k=0}^{T-1} \widehat{f_{wk}}|wk\rangle$$

Se aplica la QFT a f y se miden todos los qubits→ se obtiene wk, tal que 0≤k<T y tomamos w'=mcd(wk,Q), que será múltiplo de w.

Aplicación: El problema de factorización se puede reducir al cálculo del período de una función entera y para ello se puede usar la QFT

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa

5. Algoritmo de Shor

La dificultad computacional de resolver el problema de la factorización de enteros es la base del criptosistema RSA. El **algoritmo de Shor** es un algoritmo cuántico que permite factorizar un número *N* en tiempo O(poly(log (N)))

Dado N impar y con al menos dos factores primos, el problema de encontrar un factor primo de *N* se puede reducir al de encontrar el orden de un entero positivo *a* tal que mcd(*a*,*N*)=1. Es decir encontrar *t* tal que $a^t \equiv 1 \bmod N$

Algoritmo para obtener un factor propio de N:

1. Elegir aleatoriamente *a* entre 1 y *N*-1
2. Si mcd(*a*,*N*)≠1, devolver mcd(*a*,*N*)
3. Determinar *t*, tal que $a^t \equiv 1 \bmod N$
4. Si *t* es impar devolver fallo
5. Si mcd($a^{t/2}+1$,*N*) ≠*N*, devolver mcd($a^{t/2}+1$,*N*)
6. Devolver fallo

Este es el paso costoso y equivale a calcular el periodo de $f(k)=a^k \bmod N$

Si el algoritmo no falla devuelve un factor propio de N

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

Ejemplo

Supongamos que se quiere factorizar el número N=77

1. Elegimos un número entre 0 y 76. Por ejemplo 3.
2. Como mcd(3,77)=1, seguimos el proceso.
3. El orden de 3, en el grupo de unidades módulo 77 es 30, porque $3^{30} \bmod 77 = 1$
4. Salida: mcd(3^{15}+1, 77)=7

7 es un factor propio de 77

El paso 3, equivale a hallar el periodo de la función f(k)=3^k mod 77, es la parte del algoritmo en la que Shor propuso usar computación cuántica

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

Algoritmo de Shor usando la QFT

Notación: Se busca un factor propio de N.
Se toma n tal que $N^2 \leq 2^n < 2N^2$, m tal que $N \leq 2^m < 2N$ y $Q=2^n$.

Algoritmo:

1. Elegir aleatoriamente a entre 1 y N-1
2. Si mcd(a,N)≠1, **devolver** mcd(a,N).
3. Determinar el período T de la función $f(k)=a^k$ mod N:
   (a) Inicializar el (n,m)-qubit: $|0\rangle \otimes |0\rangle$
   (b) Aplicar la QFT, F_n al primer registro.
   (c) Aplicar el operador U_f asociado a la función f.
   (d) Aplicar nuevamente F_n al primer registro.
   (e) Obtener la medida k y calcular la fracción continua de k/Q
   (f) Tomar como posibles valores de T los denominadores de las convergentes de la fracción continua.
4. Para cada T, hacer:
   (a) Si T es impar **devolver** fallo.
   (b) Si T es par y mcd($a^{t/2}+1$,N) ≠N, **devolver** mcd($a^{t/2}+1$,N)
   (c) En otro caso **devolver** fallo

Para conseguir una probabilidad de acierto independiente de T y de N es suficiente repetir el algoritmo O(loglog(N))

GIEMATIC Grupo de Innovación Educativa E.U. Informática Dpto. Matemática Aplicada

Ejemplo

Supongamos que se quiere factorizar el número N=15

Datos: n=8 , m=4, $Q=2^n$= 256

1. Elegimos un número aleatorio entre 1 y 14. Por ejemplo 13.
2. Como mcd(13,15)=1, seguimos el proceso.
3. Tomamos el (*8,4*)-qubit: $|0\rangle \otimes |0\rangle$
   (b) Aplicamos, F_n al primer registro→ $\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{255} |j\rangle \otimes |0\rangle$
   (c) Aplicamos U_f → $\frac{1}{16}\sum_{j=0}^{255} |j\rangle \otimes |f(j)\rangle$
   (d) Aplicamos F_n al primer registro→
   $$\frac{1}{256}\sum_{k=0}^{255} |k\rangle \otimes |A(k)\rangle, \quad A(k) = \sum_{j=0}^{255} e^{2\pi jk/Q} |f(j)\rangle$$
   (e) Supongamos que al medir el primer registro se obtiene k =*192,* consideramos la fracción continua $\frac{192}{256} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$
   (f) Como las convergentes son 1/1 y ¾, tomamos T=4.
4. Salida→ mcd(13^2+1, 15)=5

Complejidad del Algoritmo de Shor

1. Aritmética básica→ $O(\log^3(N))$
2. Elección aleatoria de un número entre 1 y N-1→ $O(\log(N))$
3. Transformada cuántica de Fourier $O(\log^2(N))$
4. Exponenciación modular cuántica U_f→ $O(\log^3(N))$
5. Medida cuántica del primer registro→ $O(\log(N))$

El algoritmo de Shor es polinomial respecto al número de dígitos de N