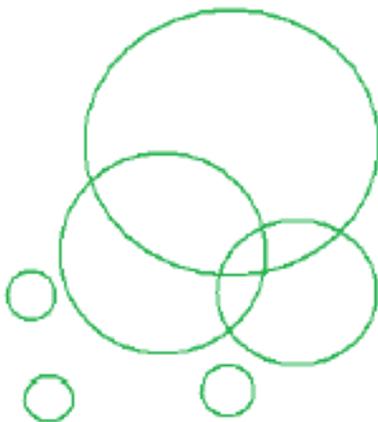


# Topografía Analítica

---

GILBERTO GOMEZ GOMEZ  
GONZALO JIMENEZ CLEVES



# **INTRODUCCIÓN A LA TOPOGRAFÍA ANALÍTICA**

**Sexta Edición**

**Gilberto Gómez Gómez  
Gonzalo Jiménez Cleves**

 **UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO**  
2008

[gcleves@uniquindio.edu.co](mailto:gcleves@uniquindio.edu.co)  
[gcleves@gmail.com](mailto:gcleves@gmail.com)

# **INTRODUCCIÓN A LA TOPOGRAFÍA ANALÍTICA**

**Gilberto Gómez Gómez**

Topógrafo Geodesta UQ  
Esp. Levantamientos integrados ITC Hol.  
Esp. Fotogrametría ITC Hol.

**Gonzalo Jiménez Cleves**

Topógrafo U. Q.  
Esp. Computación para la Docencia UQ. – UAN  
Msc Ingeniería de Sistemas U. del Valle

Este libro esta dedicado  
A  
Los profesionales de  
La Topografía

## PREFACIO

Se tratan en este libro temas de los cuales se tiene un conocimiento básico lo que permite profundizar en ellos, pero debido a la deficiencia de bibliografía hace difícil satisfacer este deseo. Esperamos cumplir nuestro propósito y llegar al nivel adecuado que debe tener la topografía para que se distinga claramente la ciencia del ejercicio de manejar un instrumento.

# AGRADECIMIENTO

Los autores desean expresar su agradecimiento por facilitar material, subgerencias, asistencia, a los siguientes profesores del programa de Topografía de la Universidad el Quindío Jairo Díaz Jurado, José Joaquín Vila, Carlos Alberto Hurtado, y de la Universidad del Valle Francisco Hernández. Además de los estudiantes de las Universidades del Quindío y Valle.



---

# TABLA DE CONTENIDO

---

<b>1. GENERALIDADES</b> .....	3
<b>1.1 TOPOGRAFÍA</b> .....	3
<b>1.2 DEFINICIÓN DE TOPOGRAFÍA DE LA FIG</b> .....	4
<b>1.3 GEOMÁTICA</b> .....	5
<b>1.4 CRONOLOGÍA DE LA HISTORIA DE LA TOPOGRAFÍA</b> .....	5
<b>1.5 CODIGO DE ETICA DEL TOPOGRAFO</b> .....	7
<b>2. TEORIA DE ERRORES</b> .....	9
<b>2.1. ERROR</b> .....	9
<b>2.2. MODELO ESTOCASTICO Y FUNCIONAL</b> .....	10
<b>2.3 ERRORES GROSEROS</b> .....	11
<b>2.4. CAUSAS DE LOS ERRORES</b> .....	11
2.4.1. Errores Naturales .....	11
2.4.2. Errores Instrumentales .....	11
2.4.3. Errores Personales.....	12
<b>2.5. TIPOS DE ERRORES</b> .....	12
2.5.1. Errores Sistemáticos .....	12
2.5.2. Errores Aleatorios.....	12
<b>2.6. OBERVACIONES</b> .....	12
<b>2.7. FUNCIONES DE PROBABILIDAD</b> .....	13
2.7.1 El valor más probable.....	20
2.7.2 Desviación Estándar.....	21
2.7.3 Error máximo .....	22
<b>2.8 COVARIANZA</b> .....	23
<b>2.9. PRECISION Y EXACTITUD</b> .....	24
2.9.1 Precisión.....	24
2.9.2. Exactitud.....	25
2.9.3. Sensibilidad .....	27
<b>2.10. ELIPSE DE ERROR</b> .....	27
<b>2.11. PROPAGACION DEL ERROR</b> .....	28
<b>2.12. USOS DEL ERROR MEDIO CUADRATICO</b> .....	31
2.12.1 Error de la serie .....	31
2.12.2 Error de la media.....	32
2.12.3. Error de área .....	33
<b>2.13. ERRORES Y PESOS</b> .....	33
2.13.1. Media ponderada.....	34
2.13.2. Error de la media ponderada.....	34
<b>2.14. MÍNIMOS CUADRADOS</b> .....	36
<b>3. DISEÑO DE ESPECIFICACIONES</b> .....	39
<b>3.1. MEDIDAS LINEALES</b> .....	40
<b>3.2. MEDICIÓN DIRECTA DE DISTANCIAS</b> .....	40
3.2.1. Hilo invar.....	41
<b>3.3 MEDICION INDIRECTA DE DISTANCIAS</b> .....	42
3.3.1. Telémetro.....	42
3.3.2. Taquimetría.....	42
3.3.3. Mira base (invar).....	44
<b>3.4. MEDICION ELECTRONICA DE DISTANCIAS (EDM)</b> .....	46
3.4.1. Fuentes de error en mediciones con EDM.....	48
3.4.2. Estación semi-total .....	48
3.4.3. Estación total .....	48
3.4.4. Corrección offset .....	48
<b>3.5. DISEÑO Y EVALUACION DE POLIGONALES</b> .....	49

3.5.1 Resolución angular .....	49
3.5.2. Fuentes de error en la medición de los ángulos horizontales .....	51
3.5.3. Error angular .....	53
3.5.4. Tolerancia angular en una poligonal .....	54
<b>3.6. POLIGONOMETRIA .....</b>	<b>55</b>
3.6.1. Relación entre el desplazamiento lateral y los errores angulares de la poligonal .....	59
3.6.2. Método ángulo distancia - diseño .....	64
3.6.3. Método ángulo distancia - evaluación .....	65
<b>3.7. CONCEPTOS BÁSICOS DE NIVELACIÓN .....</b>	<b>67</b>
3.7.1. Fuentes de error .....	67
<b>3.8. GPS .....</b>	<b>75</b>
3.8.1. Modalidades de medición .....	76
3.8.2. Errores .....	76
<b>3.9 NORMAS ALTA-ASCM .....</b>	<b>77</b>
<b>4. INSTRUMENTOS TOPOGRAFICOS .....</b>	<b>80</b>
<b>4.1. GIROSCOPIO .....</b>	<b>80</b>
<b>4.2. 3D LÁSER SCANNER .....</b>	<b>81</b>
4.2.1. Escáner Láser CYRAX .....	81
4.2.2. Escáner Láser Leica HDS3000 .....	82
4.2.3. Aplicaciones .....	83
<b>4.3. Accesorios .....</b>	<b>84</b>

# 1. GENERALIDADES

## 1.1 TOPOGRAFÍA

La topografía es una ciencia aplicada que a partir de principios, métodos y con la ayuda de instrumentos permite *representar* gráficamente las formas naturales y artificiales que se encuentran sobre una parte de la superficie terrestre, como también *determinar* la posición relativa o absoluta de puntos sobre la Tierra.

Los procedimientos destinados a lograr la representación gráfica se denominan *levantamiento topográfico* y al producto se le conoce como *plano*, el cual contiene la proyección de los puntos de terreno sobre un plano horizontal, ofreciendo una visión en planta del sitio levantado. El levantamiento consiste en la *toma* o captura de los datos que conducirán a la elaboración de un plano

Así mismo, a partir de los diseños, contenidos en planos para la construcción de las obras civiles en general, se realiza la *localización* o materialización del proyecto en terreno. La localización consiste en *ubicar* en el sitio todos los puntos que hacen posible la construcción de una obra de ingeniería

Estas dos operaciones, el levantamiento y la localización, se basan en la determinación de la posición de los puntos en el espacio a partir de ángulos y distancias para lo cual la topografía utiliza cuatro principios:

- La superficie a estudiar es plana y su marco de referencia es un plano horizontal.
- Las proyecciones de los puntos de una superficie son paralelas
- La distancia más corta entre dos puntos es una línea recta.
- El ángulo formado por la intersección de dos líneas es un ángulo plano.

El topógrafo en la actualidad enfrenta el reto de realizar estudios topográficos y como parte de ellos los levantamientos topográficos para cumplir las expectativas del mercado.

A continuación se presenta las definiciones de topografía por parte de la FIG (Federación Internacional de geómetras, entiéndase geómetras como topógrafos) y Geomática por diferentes universidades en el mundo.

La topografía es una profesión con un campo extenso. Hay muchos tipos diferentes de agrimensores y / o topógrafos, cada uno que tiene sus propios métodos específicos y aplicaciones. Es a menudo difícil para explicar qué es exactamente la topografía; tal vez la mejor definición es la federación Internacional de geómetras.

## 1.2 DEFINICIÓN DE TOPOGRAFÍA DE LA FIG

Un topógrafo es una persona profesional con calificadas condiciones académicas y la especialización técnica para practicar la ciencia de la medición; además de planear y evaluar, la información geográfica relacionada; Usar esta información con el propósito de planear y llevar a cabo la administración de los recursos naturales y propender el avance y desarrollo de tales practica.

La práctica de la profesión de topografía puede involucrar uno o más de las actividades que pueden ocurrir, sobre o debajo de la superficie de la tierra o el mar y puede llevarse a cabo en asociación con otros profesionales.

1. La determinación del tamaño y forma de la tierra y la medida de todos los datos necesarios para definir el tamaño, posición, la forma y contorno de cualquier parte de la superficie de la tierra.

2. El posicionamiento de objetos en el espacio y el posicionamiento y supervisión de rasgos físicos, estructuras diseñadas en, sobre o debajo de la superficie de la tierra.

3. La determinación de la posición de los límites de público o privados, incluyendo límites nacionales e internacionales, y el registro de estas tierras con las autoridades apropiadas.

4. El diseño, establecimiento y administración de tierras y sistemas de información geográficos y la colección, almacenamiento, análisis y dirección de datos dentro de esos sistemas.

5. El estudio del medio ambiente natural y social, la medida de tierra, recursos marinos y el uso de los datos en el planeamiento de desarrollo en áreas urbanas y rurales

6. La planificación, desarrollo y el re desarrollo de la propiedad, siendo urbano o rural y siendo terreno o edificaciones.

7. Los avalúos y la dirección de propiedad, si es urbano o rural y si es tierra o edificios.

8. La planificación, medida y dirección de trabajos de la construcción, incluso la estimación de costos.

9. La producción de planos, mapas, archivos, mapas e informes.

### 1.3 GEOMATICA

Geomática comprende la ciencia, la ingeniería y el arte empleada en la captura y manejo de información geográficamente referenciada. La información geográfica juega un papel protagónico en actividades tales como monitoreo ambiental, manejo de recursos terrestres y marinos, transacciones de bienes raíces, monitoreo de presas, campos petrolíferos, minas, navegación aérea, marítima y fluvial, oceanografía y turismo

La Geomática estudia además de topografía fundamental y conocimiento en tenencia de las tierras, en la Ingeniería Geomática se estudia: Sistemas de Información Geográfica, Sistemas de Posicionamiento Global, programación, Cartografía, hidrografía, detección remota, fotogrametría, modelamiento de superficies, campo gravitatorio, gerencia de proyectos.

### 1.4 CRONOLOGÍA DE LA HISTORIA DE LA TOPOGRAFÍA

FECHA	SUCESO
3000 a C	Los Babilonios y egipcios usaban cuerdas o cadenas para medir
2500 a C	Los Chinos elaboran la Brújula
1400 a C	Se Inicia los trabajos Topográficos en Egipto
560 a C	Anaximandro introdujo la Gnomon
150 a C	Ptolomeo describió el cuadrante
120 a C	Se Crea la Dioptra
1220	Leonardo de pisa describe el cuadrante
1300	Levi Ben Gerson da a conocer el mecanismo para la medida indirecta (ángulo paralítico)
1542	El matemático Portugués Pedro Núñez dio a conocer un procedimiento para estimar una parte fraccionaria de un intervalo del limbo.
1571	El matemático y topógrafo Ingles Leonard Digges describe el " Teodolito"
1576	Josua Habernel Fabrica el Goniometro
1593	El matemático Clavius dio a conocer la teoría del nonio
1607	Lippershey, Diseña y construye el telescopio
1610	Aaron Rathbone Elabora la cadena de agrimensor
1620	El Ingles Edmond Gunter diseño una cadena de 66 pies de largo que tenia 100 eslabones
1631	El Francés Pierre Vernier, Invento el Vernier
1639	El astrónomo Ingles William Gascoigne establece el principio de la taquimetría que significa "medición rápida"
1659	El Holandés Huygens. Construyo el micrómetro simple para el ocular
1662	El marques de Malasia en Bolonia inventa los retículos de hilos.
1664	El Danés Drander, Construyo la primera retícula de cristal con líneas finas grabadas en el y lo aplico en la medición de distancias
1666	El matemático y físico Francés Thévenot, inventa el nivel de aire.
1674	El Profesor Montanari de la Universidad de Bolonia inventa el primer distanciometro de antejo
1729	El topógrafo Holandés Cruquius, introduce las curvas de nivel
1730	El Ingles Hadley y el norteamericano Godfrey idearon el sextante.
1732	El astrónomo y topógrafo Norteamericano David Rittenhouse. Fabrica el primer telescopio topográfico
1740	Aparece la primera escuadra doble construida por Adams
1757	Dollond crea el primer objetivo.

1765	Entra al mercado la plancheta
1771	El Escocés James Watt, Construye el taquímetro
1778	El Ingles Willian Green, establece el principio de estadía, describió el método de estadía
1785	Ramsden produjo el teodolito telescópico de tres pies.
1791	Adams, construye la escuadra de espejos
1799	Francia implanta el sistema métrico decimal
1804	Richenbach introdujo el teodolito repetidor
1810	Richenbach añadió los hilos estadimetricos
1830	Nathaniel Bowditch. Crea la regla de la brújula o Bowditch para la compensación de poligonales
1830	Adrien Bortaloue crea la mira parlante
1830	El Norteamericano Draper y Young trabajando independientemente desarrollan un instrumento llamado transito
1842	El físico Austriaco Cristian Doppler formula el principio que lleva su nombre, "Doppler"
1846	Carl Zeiss, monta su taller
1850	Fundan el taller Fennel
1860	El físico francés Foucault, Inventa el Giroscopio
1862	Aparece el Theo 10 Carl Zeiss
1883	Se Crea el Titulo de Ingeniero Topógrafo
1890	Hammer fabrica el taquímetro autoreductor
1890	Ronagli y Urbani usaron la placa móvil de vidrio de doble graduación
1892	Salmoiraghi construye el taquímetro con un microscopio de estima.
1900	Aparecen teodolitos provistos de círculo vertical
1915	En Newlyn. Inglaterra. Cornwall determina el nivel del mar. Denominado Datum Ordnance
1920	Enrique Wild Fabrica el círculo graduado sobre cristal
1926	Michelson determino que la velocidad de la luz era igual a 299796 km/s
1929	Se sugiere la medición de distancias, por medio de la luz
1936	Los Rusos Fabrican el primer distanciometro electro-óptico
1936	Willian Burt, Inventa la brújula con antejo solar
1939	Aparece el DKM3 Kern
1945	Aparecen los niveles automáticos
1946	Es fabricado el nivel automático, por el Ruso Stodolkjewich
1948	El físico sueco Dr. Erik Bergstrand, crea el Geodimetro (tipo electro óptico)
1948	La Asociación Internacional de Geodesia definió los errores accidentales y sistemáticos en nivelación
1950	Fabrican el transito T2 Wild Heerburg
1950	Elaboran el nivel Ni 02 Carl Zeiss
1950	Fabrican El transito Theo 002 Carl Zeiss
1956	Askania fabrica el compensador para el limbo vertical
1957	En Sudáfrica el Dr. T. L. Wadley, desarrolla el prototipo del telurómetro
1958	Cubic Corporation de San Diego, fabrica el "electrotape"
1960	La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas establece el sistema internacional de unidades
1973	A partir del Efecto Doppler, se desarrolla el sistema Transit, predecesor del GPS.

## 1.5 CODIGO DE ETICA DEL TOPOGRAFO<sup>1</sup>

La posesión más importante de un individuo es su reputación sin mancha. Ninguna cantidad de dinero, fama o conocimiento puede sustituirla. Ser una persona confiable, trabajadora preocupada por el aprendizaje de su profesión llevara al éxito.

1. El topógrafo no debe anteponer valores monetarios u otros valores. Aun cuando parezca difícil aplicar esto a casos particulares, simplemente significa que el topógrafo nunca debe recomendar a un cliente un curso de acción con base en la remuneración económica que recibirá por el mismo.
2. Durante su trabajo, el topógrafo puede llegar a conocer información que podría ser en detrimento del cliente si se revela a otros. La responsabilidad del topógrafo hacia el cliente va mas allá del trabajo inmediato, por lo que no debe revelar información privada que concierne al cliente sin su autorización.
3. En relación con la reputación de la profesión, el topógrafo debe evitar hablar mal de otros topógrafos para no deteriorar la imagen pública de la profesión. Esto no significa que no exista tiempo y lugar para hacer evaluación honesta de otros topógrafos. Un topógrafo está mejor capacitado para juzgar el trabajo de un colega que cualquier otro, sea abogado, juez, o una persona común.
4. En relación con la posición de la profesión, el topógrafo no debe asociarse profesionalmente con topógrafos que no se apegan a las normas de la práctica ética que se explicó en esta sección. Más aún, el topógrafo no debe formar parte de ninguna sociedad, corporación o grupo que propicie un comportamiento no ético. El topógrafo debe asumir la responsabilidad completa de su trabajo.
5. El topógrafo debe mostrar humildad para reconocer que necesita ayuda externa en la solución de un problema particular.
6. El topógrafo reconocerá y admitirá sus propios errores.
7. Cuando el topógrafo, trabaja por un salario en un determinado trabajo, no ejecutará otras labores que actúen en detrimento, de su trabajo principal. Además, no utilizará este trabajo para competir deslealmente con topógrafos de la práctica privada.
8. El topógrafo no aceptará efectuar trabajos gratuitos (excepto los trabajos de servicio comunitario), ya que estará restando oportunidades de empleo a la profesión.
9. El topógrafo no se promoverá de manera exagerada con alabanzas propias o de cualquier otra forma que vaya en detrimento de la dignidad de la profesión.
10. El topógrafo tiene la obligación de elevar la eficiencia de la profesión cooperando en el intercambio de información y experiencia con otros topógrafos y estudiantes, contribuyendo en el trabajo de las sociedades de topografía y haciendo lo posible para incrementar el conocimiento público de la topografía.

---

<sup>1</sup> McCormac Jack. Topografía. Limusa Wiley. México 2004

11. El topógrafo motivará a sus empleados para que continúen con su educación, asistan y participen en reuniones profesionales y obtengan su registro. El topógrafo hará todo lo posible para proporcionar oportunidades de avance en el desarrollo profesional de los topógrafos bajo su supervisión.
12. El topógrafo no revisará el trabajo de, otro topógrafo sin su conocimiento o consentimiento, a menos que el trabajo haya sido terminado y el otro topógrafo haya sido remunerado por el mismo.
13. El topógrafo estará siempre preocupado por la seguridad y bienestar de sus empleados y de la sociedad.
14. El topógrafo se apegará a las leyes de registro del estado.

**Fecha Clave:** Día Nacional del Topógrafo el 24 de Junio.

# 2. TEORIA DE ERRORES

Realizar mediciones es el trabajo del Topógrafo. ¿Que calidad debe tener esas mediciones? Se ha dicho y escrito mucho sobre el tema, aparece en 1809 cuando Gauss inició el estudio de la teoría de errores y en 1810 Laplace, que había considerado anteriormente el tema, completó el desarrollo de esta teoría. Las tareas fundamentales de esta teoría son: El establecimiento de los criterios indicados y la elaboración de procedimientos para su obtención y estimación. Es consenso general que una medición debe ser tan buena como que cantidad de errores posea, por esto hablemos de que es error.

## 2.1. ERROR

Es la diferencia entre el valor observado o calculado y su valor verdadero o teórico.

$$E = V_m - V_v \quad (2.1)$$

V<sub>m</sub>: Valor medido  
V<sub>v</sub>: Valor verdadero  
E : Error

En la teoría de las mediciones uno de los postulados es la existencia de un valor verdadero de la magnitud a medir y que sea preferencialmente constante. Pero en la topografía se desconocen los valores verdaderos (V<sub>v</sub>) de las magnitudes. En general los valores que reemplazan el valor verdadero son: variables y casuales.

La teoría de las mediciones parte del supuesto de que el objeto a medir posee un modelo en el cual los parámetros del mismo son medibles o cuantificables.

Un modelo matemático cuyos parámetros son determinables y cuantificables, además debe ser el más cercano a la realidad del objeto.

Además este modelo representa la relación cualitativa ideal entre las características del objeto, las características cualitativas de este se expresan a través de los parámetros medibles del modelo.

El modelo del objeto debe satisfacer la estabilidad de los parámetros en el momento de las mediciones, en otras palabras los parámetros del modelo deben ser constantes en el momento de su determinación.

El error que surge como resultado de la incoherencia del modelo objeto de la medición (modelo inadecuado) debe ser menor que el error de la medición, de aquí se deduce que la medición con una precisión dada de antemano puede ser realizada solamente cuando la característica medible del objeto se encuentra en concordancia con los parámetros desconocidos del modelo del objeto. Este parámetro será el valor verdadero de la magnitud medida. A las magnitudes variables y casuales se les

determinan los parámetros que no son ni casuales ni variables, por ejemplo, la media (valor más probable).

Aumentando el número de observaciones se puede elevar la precisión de la medición hasta cierto límite es decir que el modelo corresponda al fenómeno estudiado.

El tratamiento de los errores (compensación) depende mucho del tipo de medición, así pues se plantea las siguientes:

- A. Mediciones de igual precisión (homogéneas): Son aquellas mediciones en las cuales los resultados se obtienen con la misma confiabilidad, como resultado de unas condiciones iguales u homogéneas; las cuales determinan su precisión; ninguna de las mediciones es de mejor calidad que las otras.
- B. Mediciones de diferente precisión (heterogéneas): Son Aquellas en las que los resultados son de diferente calidad y se valorarán con un número especial llamado peso (este concepto se tratará mas adelante)
- C. Mediciones independientes: Son aquellas en las cuales es característica la ausencia de cualquier relación entre las medidas
- D. Mediciones dependientes: Son aquellos en las cuales existe una relación.

Según el esquema de medición suelen ser:

- A. Necesarias: Aquellas que directamente determinan una magnitud desconocida.

Ejemplo: Determinar la suma de los ángulos internos de un triángulo, para tal efecto es suficiente conocer dos ángulos.

- B. Redundantes: Son aquellas que exceden los necesarios.

Ejemplo: medir todos los ángulos de un triángulo

Puede afirmarse incondicionalmente que:

1. Ninguna medida es exacta
2. Toda medida tiene errores
3. El valor verdadero de una medida nunca se conoce
4. El error exacto que se encuentra en cualquier medida siempre será desconocido.

## **2.2. MODELO ESTOCASTICO Y FUNCIONAL**

En Topografía rara vez las mediciones (observaciones) se usan directamente como la información requerida. Normalmente: se miden direcciones, longitudes con lo que obtiene posiciones, áreas y volúmenes.

Para obtener, esto necesitamos una "formula" que denominamos "modelo matemático", en otras palabras la información obtenida "las observaciones" se

procesan a través del modelo para llegar a los resultados requeridos. El modelo matemático describe la situación física, esta compuesto de dos partes:

### **Modelo Funcional**

### **Modelo Estocástico**

El modelo estocástico es la parte del modelo matemático que describe las propiedades estadísticas de los elementos relacionados con el modelo funcional.

El modelo del funcional describe las características geométricas o físicas del problema de estudio.

Por ejemplo la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$  (modelo funcional) las propiedades estadísticas de cada ángulo observado (modelo estocástico)

## **2.3 ERRORES GROSEROS**

En la medición, las palabras error y equivocación (Blunders, errores groseros, errores graves) tiene connotaciones completamente distintas. Una equivocación implica descuido por parte del que efectúa la medida. Puede haber leído la escala incorrectamente. Puede que no haya colocado el instrumento de medida en exactamente el mismo lugar cuando eso era lo debiera haber hecho. Puede que haya anotado las lecturas incorrectamente. Tales equivocaciones pueden, normalmente, evitarse siendo extraordinariamente cuidadoso. Sin embargo, el elemento humano constituye la inevitable ligera variación que se produce cuando se repite una medición.

## **2.4. CAUSAS DE LOS ERRORES**

### **2.4.1. Errores Naturales**

Son los ocasionados por los fenómenos naturales, como la temperatura, el viento, la humedad, la refracción, y la declinación magnética.

### **2.4.2. Errores Instrumentales**

Son los provocados por las imperfecciones que haya en la construcción y ajuste o por el posterior mantenimiento.

### 2.4.3. Errores Personales

Son los que nacen de las limitaciones de los sentidos del hombre como son el oído, la vista y el tacto.

## 2.5. TIPOS DE ERRORES

### 2.5.1. Errores Sistemáticos

También conocidos como errores acumulativos, se comportan de acuerdo a leyes de física susceptibles de ser modelados matemáticamente, por lo que su magnitud puede calcularse y su efecto eliminarse.

Estos errores poseen signo positivo o negativo.

En algunos casos la magnitud de errores sistemáticos es tan pequeña que se confunde con los errores aleatorios, realizándose un tratamiento equivocado al manejo de estos errores.

### 2.5.2. Errores Aleatorios

También llamados errores accidentales o casuales. Son los que permanecen en la medida pero no conocemos su valor, obedecen a las leyes de las probabilidades y son ajenos a la voluntad o habilidad del observador.

La magnitud y el signo de estos errores es casual, no se pueden calcular, por lo tanto es imposible eliminarlos. Se les conoce por esto como errores compensables porque tienden a anularse entre sí en una serie de medidas. Estos errores solo se pueden tratar.

Los signos algebraicos de los errores aleatorios dependen por completo del azar y no hay forma alguna de calcularse.

Son los que permanecen después de haber eliminado los errores sistemáticos y las equivocaciones.

El tamaño de este error puede reducirse por refinamiento del equipo empleado y de los procedimientos aplicados. En muchos casos la palabra error se refiere este.

## 2.6. OBERVACIONES

El resultado de las observaciones (medidas) esta compuesto por los siguientes elementos:

$$O = Vv + G + S + A \quad (2.2)$$

- O : Observación
- Vv : Valor verdadero
- G : Errores groseros (Equivocaciones)
- S : Errores sistemáticos
- A : Errores aleatorios

Los errores groseros y los sistemáticos se eliminan, después del análisis apropiado y corrección, sólo el Valor Verdadero y el error accidental debe permanecer:

$$O = Vv + A \quad (2.3)$$

A partir de lo anterior se puede se pueden establecer los siguientes principios:

- Los errores groseros se eliminan completamente
- Los errores sistemáticos se corrigen
- Los errores accidentales se minimizan

## 2.7. FUNCIONES DE PROBABILIDAD

En al mayoría de los casos las magnitudes se relacionan al tipo de magnitudes continuas. Para estas el conjunto de valores probables es finito, continuamente llena el intervalo del eje numérico. La función de distribución  $F(x)$  de variable aleatoria y no continua  $X$  para cualquier  $x$  es continua y casi en todas posee su derivada  $F'(X)$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x) \geq 0 \quad (2.4)$$

La función  $F'(x) = f(x)$  es llamada función de densidad de la distribución o ley diferencial de distribución ver Fig. 1 a diferencia la ley de distribución integral  $F(x)$  ver Fig. 2

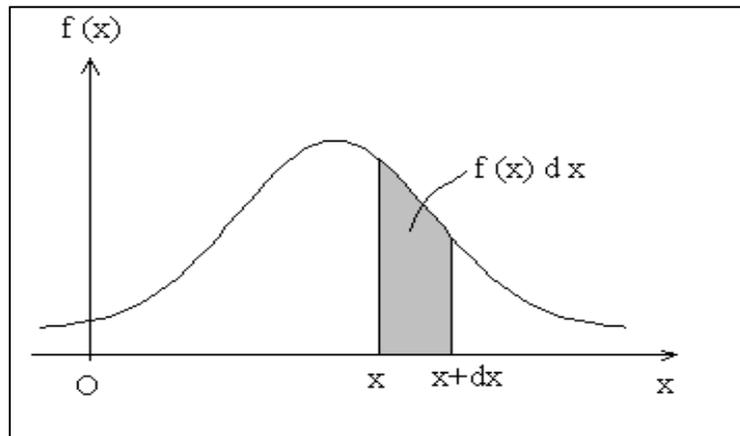


Fig. 1 Función de densidad de la probabilidad de distribución continua.

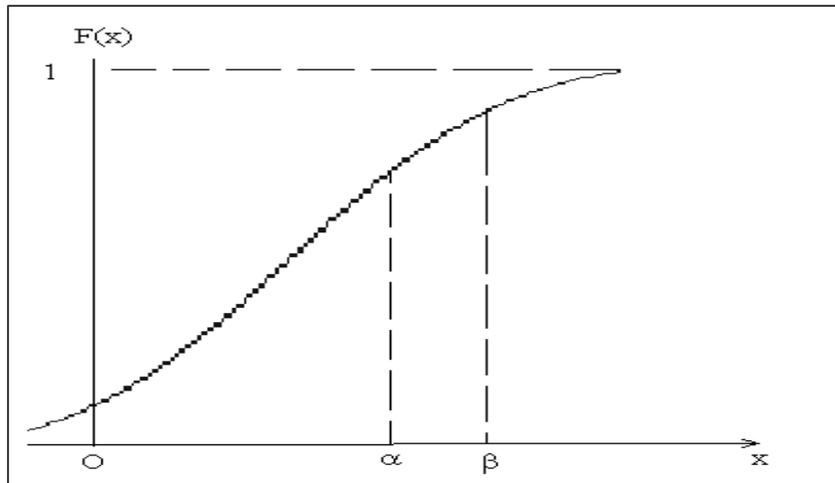


Fig. 2 Función de probabilidad de distribución continua

La gráfica de la función  $f(x)$  es la curva de distribución, la magnitud

$$f(x)dx \approx P(x < X < x + dx) \quad (2.5)$$

Es llamado elemento de probabilidad este muestra que la probabilidad de cada valor por separado de una variable aleatoria continua es igual a cero.

La principal condición de la ley de distribución es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (2.6)$$

Es decir el área bajo la curva en el Fig. 1 es igual a 1 las formas integral y diferencial de la ley de distribución están correlacionadas así:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (2.7)$$

La probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria en el intervalo de  $\alpha$  a  $\beta$ , Fig. 2 se expresa con la formula.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) \quad (2.8)$$

La esperanza matemática o el valor promedio de una variable aleatoria continua X se determina así:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.9)$$

Se encuentra casos cuando la variable aleatoria continua en algunos puntos posee interrupciones esta magnitud lleva el nombre de magnitud desplazada.

Para ella la función de distribución F(x) es continua hacia la izquierda Fig. 3. La esperanza matemática de la variable aleatoria desplazada se compone de dos partes una discreta y otra continua es decir:

$$M(X) = M(X)_d + M(X)_c \quad (2.10)$$

El valor de M(X)d se calcula de acuerdo a la formula

$$M(X) = m_x = \sum_i x_i p_i \quad (2.11)$$

De acuerdo a los puntos de interrupción o discontinuidad y el valor de M(X)c de acuerdo a la formula 2.11 de todos los segmentos de continuidad.

La dispersión de una variable aleatoria continua y su correspondiente error medio cuadrático se calcula así:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx;$$
$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} \quad (2.12)$$

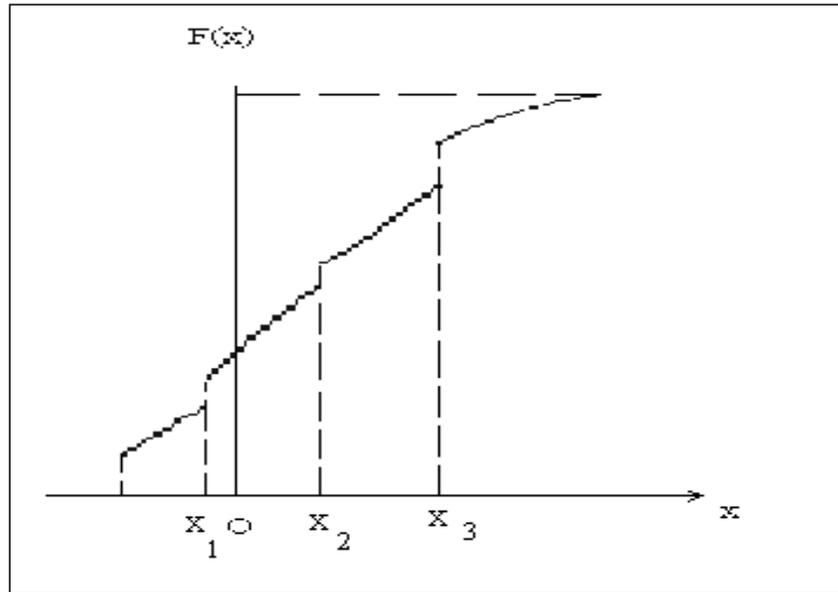


Fig 3. Función de distribución de tipo despedazada

La derivada de las características mostradas anteriormente en el coeficiente de variación.

$$v_x = \sigma / m_x \quad (2.13)$$

La característica numérica de una variable aleatoria continua es también los momentos inicial y central K- décimo orden.

$$\alpha_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (2.14)$$

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx \quad (2.15)$$

La formula integral adquiere si forma de la probabilidad completa.

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A/x) f(x) dx \quad (2.16)$$

En donde  $P(A/x) = P[A/X = x]$  es la probabilidad condicional del evento A durante la hipótesis  $(X = x)$  esta formula análoga de Bayes es la siguiente:

$$f_A(x) = f(x)P(A/x) / \int_{-\infty}^{\infty} P(a/x)f(x)dx \quad (2.17)$$

En donde  $f_A(x)$  es la densidad condicional de distribución de la magnitud teniendo en cuenta la aparición del evento A. La formula completa de la esperanza matemática es:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} M(X/y)f(y)dy \quad (2.18)$$

En donde X es cualquier variable aleatoria Y es cualquier variable aleatoria continua,  $M(X/y)$  es la esperanza matemática condicional bajo la condición Y toma el valor de y.

De las más frecuentes distribuciones de las variables aleatorias la mas importante es la distribución normal (Gauss) en ella están basados las mas importantes teoremas de la teoría de las probabilidades, los principios fundamentales de la teoría de errores de medición y el método de los mínimos cuadrados.

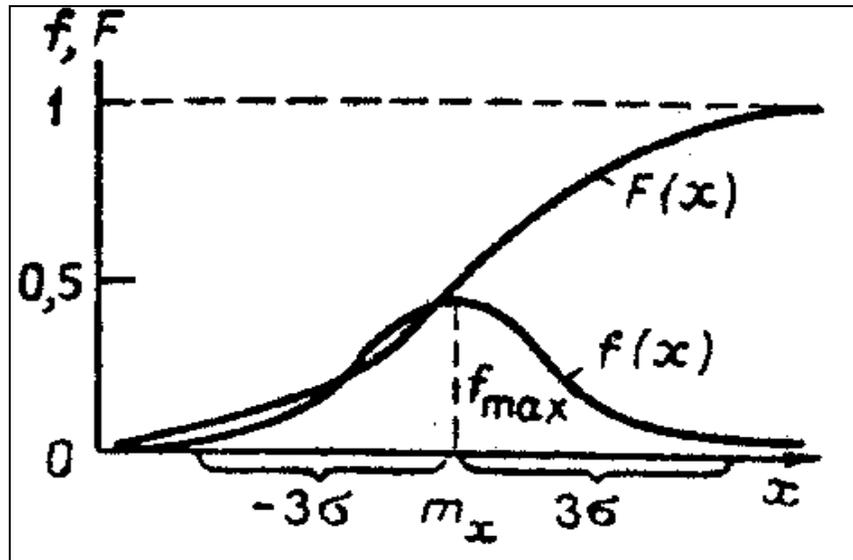


Fig. 4. Correlación entre la densidad y la función de distribución normal

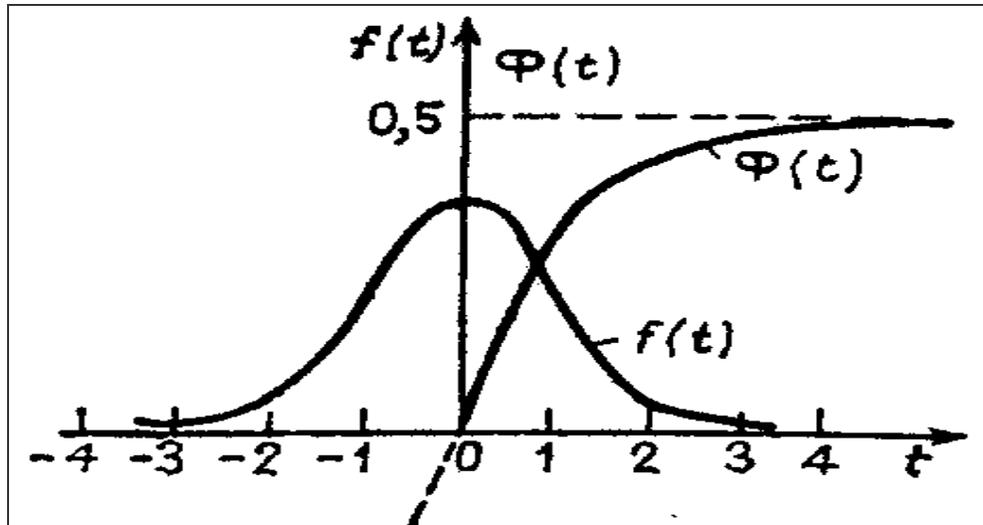


Fig. 5. Curva de Gauss y la función de Laplace

La distribución normal es límite para muchas otras distribuciones. La función de densidad de la distribución normal toma la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_x)^2 / 2\sigma_x^2} \quad (2.19)$$

En donde  $-\infty < x < \infty$ ;  $m_x$  es el parámetro de disposición – Esperanza matemática;  $\sigma_x$  es el parámetro de la escala - Ems.

La función  $f(x)$  es simétrica Fig. 4, la probabilidad de ocurrencia de la distribución normal de una variable aleatoria  $X$  en el intervalo  $(\alpha, \beta)$  se determina de acuerdo a diferencia de los valores  $F(x)$  en los puntos  $\beta$  y  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} P(\alpha < x < \beta) &= f(\beta) - F(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\beta - m_x / \sigma_x \sqrt{2}}{\sigma_x \sqrt{2}}} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\alpha - m_x / \sigma_x \sqrt{2}}{\sigma_x \sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{\beta - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}} \right) - \Phi \left( \frac{\alpha - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}} \right) \right] \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$t = \frac{x - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}$$

En donde  $t$  es la variable aleatoria para la cual  $m_t = 0$ ;  $\sigma_t = 1$  (Existen tablas), la densidad normal  $f(t)$ ;  $\Phi(t)$  la función de Laplace la cual posee las características;  $\Phi(0) = 0$ ;  $\Phi(-t) = -\Phi(t)$ ;  $\Phi(\infty) = 0,5$ ; el valor de  $\Phi(t)$  esta tabulado para  $t$  de 0 a 4 o puede ser calculada por:

$$\Phi(t) = 0.798 \left( t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \dots \right) \quad (2.21)$$

En Particular  $\Phi(4) = 0.49997 \approx 0.5$  significa para  $t > 4$   $\Phi(t) = 0.5$  Fig. 5.

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(t) \quad (2.22)$$

Dado el intervalo de confiabilidad. Determinar la probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria de este intervalo teniendo en cuenta que:

$$P(|x - m_x| < t\sigma_x) = 2\Phi(t) \quad (2.23)$$

y suponiendo los valores confiables  $t = 1, 2, 3$  hallamos

$$m_x \pm \sigma_x \quad P(m_x - \sigma_x < x < m_x + \sigma_x) = \Phi(1) = 0.68298;$$

$$m_x \pm 2\sigma_x \quad P(m_x - 2\sigma_x < x < m_x + 2\sigma_x) = \Phi(2) = 0.95450;$$

$$m_x \pm 3\sigma_x \quad P(m_x - 3\sigma_x < x < m_x + 3\sigma_x) = \Phi(3) = 0.99730;$$

De este modo el 99.73 % de todos los valores de la variable aleatoria  $X$  ocurren el intervalo  $m_x \pm 3\sigma_x$ ; esta situación es conocida en la teoría de probabilidad bajo el nombre de ley de los tres sigmas.

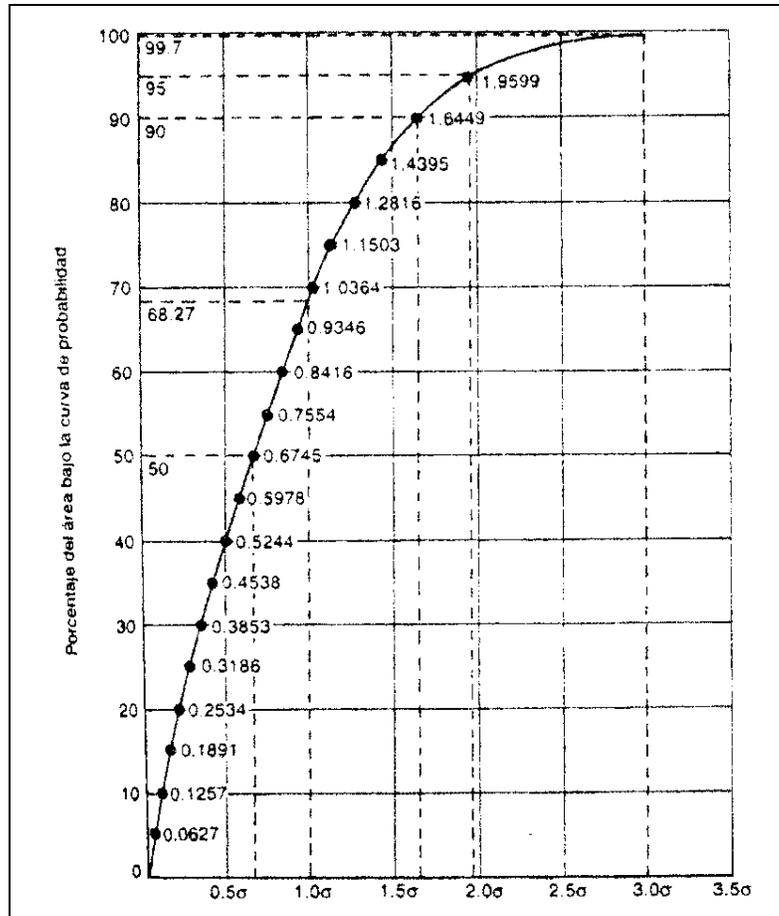


Fig. 6, Relación entre el error y el porcentaje del área bajo la curva de probabilidad.

## 2.7.1 El valor más probable

Tomando la variable aleatoria  $x$  distribuida en forma discreta, se tiene los siguientes valores posibles  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . La función de probabilidad de  $x$  estará dada por  $P(x_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$ . La suma pesada de todos los valores posibles, donde los pesos son las probabilidades correspondientes, se llama esperanza matemática o valor esperado de  $x$ , representada por  $E[x]$ :

$$E[x] = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \quad (2.24)$$

$E[x]$  es también la media de  $x$ , comúnmente representada por  $\mu$ .

$$E[x] = \mu \quad (2.25)$$

Con el valor de  $E[x]$ , o  $\mu$ , localiza en el centroide de la distribución de probabilidad, por lo que se le llama también valor más probable (Vmp), su valor puede ser positivo, negativo o cero.

El error detectable de cualquier medición en particular es el grado en que se desvía o aparta del promedio la cantidad. Este error, o desviación, suele recibir el nombre de residuo.

## 2.7.2 Desviación Estándar

Aunque las curvas tienen forma un poco diferente entre sí, el área bajo la curva es la misma. Existen algunas diferencias significativas en cuanto a la dispersión de sus errores; es decir, difieren sus amplitudes de abscisas. La magnitud de la dispersión es un índice de la disgregación de las medidas. La desviación estándar (que a menudo se llama error estándar, error) y la varianza, son términos estadísticos que se emplean para expresar la precisión de grupos de medidas. La ecuación que da el valor numérico de la varianza es:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] \quad (2.26)$$

Desarrollando el binomio y después de alguna manipulación algebraica se llega a la expresión:

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 \quad (2.27)$$

La desviación estándar  $\sigma$ , es igual a la raíz cuadrada de la varianza.

Es el principal criterio de precisión de la magnitud de un valor medido o calculado. En calidad de característica de precisión una sola medición homogénea se toma el Emc (error medio Cuadrático).

De acuerdo a las desviaciones  $V_i$  de los resultados,  $n$  mediciones homogéneas con respecto a la media aritmética, es decir con base en los errores más probables; se calcula con la fórmula de Bessel.

$$Emc = \sigma = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}} \quad (2.28)$$

Dependiendo de la cantidad de datos se puede utilizar  $n$  o  $n-1$ , como denominador de la expresión dentro del radical, cuando la muestra es menor a 30 datos se emplea el denominador  $n-1$  que es insesgado. Es decir cuando se emplea  $n$  el cálculo se aproxima al valor más probable por debajo y viceversa.

El valor del error medio cuadrático del mismo error medio cuadrático depende del número de mediciones  $n$ .

$$\sigma_{Emc} = \frac{Emc}{\sqrt{2n}} \quad (2.29)$$

El valor  $\sigma$  caracteriza la esperanza, para juzgar sobre la precisión de las mediciones.

### 2.7.3 Error máximo

(TOLERANCIA) Este error nos marca una barrera en las medidas realizadas, que usaremos para desechar los valores superiores a la misma y considerarlos como groseros. Este error se llama también tolerancia. Suele adoptarse que:

$$E_{\max} = T = t \cdot Emc \quad (2.30)$$

Se usa para valorar la precisión de las mediciones en topografía y geodesia el Emc debido a que este tiene en cuenta la influencia de errores grandes y a su vez está relacionado con las tolerancias de las precisiones de las mediciones:

Probabilidad

$$T \leq 3 \cdot Emc \quad 99.73 \% \quad (2.31)$$

$$T \leq 2,5 \cdot Emc \quad 99.00 \% \quad (2.32)$$

$$T \leq 2 \cdot Emc \quad 95.00 \% \quad (2.33)$$

$$T \leq Emc \quad 68.27 \% \quad (2.34)$$

Estos valores se emplean cuando la muestra es mayor que 10.

Las tolerancias (2.31) y (2.32) se emplean en la práctica para el control de las mediciones topográfico - geodésicas, en la investigación de equipos y levantamientos especiales (mapas base).

Las otras dos formas se emplean en topografía de minas, durante el procesamiento de la información de prospección, cálculo de reservas de material y en el modelamiento de la superficie del yacimiento. Para ciertos trabajos topográficos, el valor de  $t$  está dado por condiciones especiales.

Ejemplo.

Se midió una longitud con una cinta de 30 m, obteniéndose los siguientes resultados 60,87; 60,84; 60,87 60,84; 60,84; 60,85; 60,86; 60,85; 60,86; 60,85. Determinar el valor más probable, el error medio cuadrático, el grado de precisión, el error de la media, E90 y E95.

Solución:

$$V_{mp} = \mu = 60.85$$

$$Emc = \sigma = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}} = 0.012$$

$$G_p = 1/V_{mp} / \sigma = 1/60.85/0.012 = 1/5071$$

$$Em = \sigma / \sqrt{n} = 0.012 / \sqrt{10} = 0.004$$

$$E_{90} = \sigma \cdot 1.6449 = 0.02$$

$$E_{95} = \sigma \cdot 1.9599 = 0.023$$

## 2.8 COVARIANZA

Cuando analizábamos las variables unidimensionales considerábamos, entre otras medidas importantes, la media y la varianza. La covarianza es una medida de dispersión que representa el grado de variabilidad entre  $x_i$  y  $y_i$ .  $S_{xy}$  o  $m_{xy}$ . Se define como la media del producto de las desviaciones respecto a las medias aritméticas

Si observamos con atención los términos

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^k f_i(x_i - \bar{x}) - (x_i - \bar{x}) \quad (2.35)$$

$$S_y^2 = \sum_{j=1}^k f_j(y_j - \bar{y}) - (y_j - \bar{y}) \quad (2.36)$$

Vemos que las cantidades  $(x_i - \bar{x})$  y  $(y_j - \bar{y})$  van al cuadrado y por lo tanto no pueden ser negativas.

La covarianza  $S_{xy}$ , es una manera de generalizar la varianza t se define como:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p f_{ij}(x_i - \bar{x}) - (y_j - \bar{y}) \quad (2.35)$$

Como se ve, la fórmula es muy parecida a las varianzas, Es sencillo comprobar que se verifica la siguiente expresión de  $S_{xy}$ , más útil en la práctica.

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p f_{ij} x_i y_j - \bar{x}\bar{y} \quad (2.36)$$

Si las observaciones no están ordenadas en una tabla de doble entrada, entonces se obtiene:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.37)$$

o lo que es lo mismo

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \quad (2.38)$$

## 2.9. PRECISION Y EXACTITUD

Para muchas personas, exactitud y precisión es la misma cosa: para alguien involucrado en las medidas, los dos términos deben tener significados muy diferentes. La medida, por su naturaleza, es inexacta; la magnitud de esa "inexactitud" es el error. Esto es distinto de una equivocación que es un error grande, y por consiguiente un error que puede descubrirse y corregirse. Una equivocación es un error real en la aplicación de una medida, como leer mal un instrumento. El error es inherente a la medida, e incorpora tales cosas como la precisión y la exactitud. Quizás la manera más fácil de ilustrar la diferencia entre la exactitud y la precisión es usar la analogía de un tirador a quien la "verdad" representa el tiro al blanco.

### 2.9.1 Precisión

El grado de refinamiento en la ejecución de una medida, o el grado de perfección en los instrumentos y métodos obteniendo un resultado. Una indicación de la uniformidad o reproductibilidad de un resultado. La precisión relaciona a la calidad de un manejo por el que un resultado se obtiene, y es distinguido de exactitud que relaciona a la calidad del resultado. En la Fig. 7, el tirador ha logrado una uniformidad, aunque es inexacto.

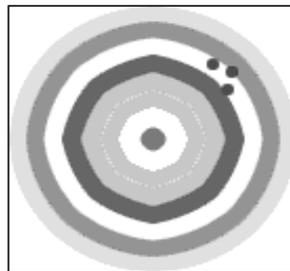


Fig. 7: Precisión

## 2.9.2. Exactitud

Es el grado de conformidad con una norma (la "verdad"). La Exactitud relaciona a la calidad de un resultado, y se distingue de la precisión que relaciona la calidad del funcionamiento por el que el resultado se obtiene. En la Fig. 8, el tirador se ha acercado la "verdad", aunque sin gran precisión. Puede ser que el tirador necesitará cambiar el equipo o la metodología, si se requiere un grado de precisión mayor, cuando él ha alcanzado las limitaciones asociadas con su equipo y metodología.

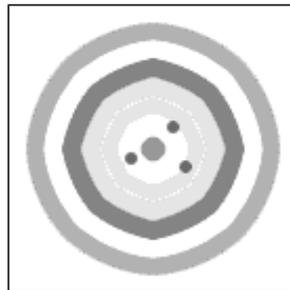


Fig. 8: Exactitud

Fig. 9 representa resultados que indican exactitud y precisión. Difiere de Fig. 7 en que el tirador ha hecho uno de los ajustes sistemáticos que fueron indicados por su logro de precisión sin la exactitud. El grado de precisión no ha cambiado, pero su conformidad con la "verdad" ha mejorado los resultados que obtuvo en Fig. 7.

Si el tirador de Fig. 8 determina que sus resultados no son adecuados para la tarea, él no tiene ninguna opción para cambiar su metodología o equipo. Él ya ha llegado a las limitaciones éstos.

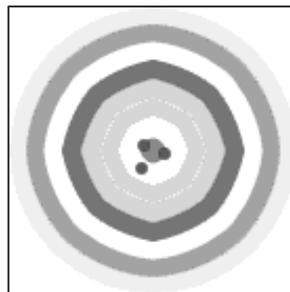


Fig. 9: Exactitud con Precisión

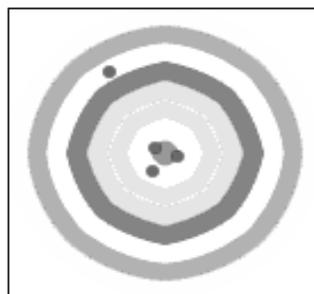


Fig. 10: Precisión con equivocaciones

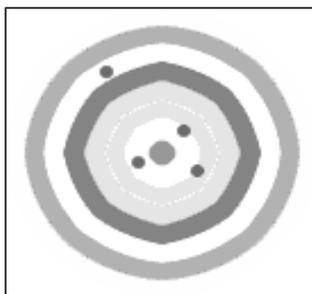


Fig. 11: Exactitud con equivocación

Un beneficio adicional puede ser obtenido usando una metodología que rinde gran precisión. El análisis de resultados obtenidos de técnicas que rinden un grado alto de precisión hará el descubrimiento de equivocaciones más fácil. En las Fig. 10 y Fig. 11, nosotros hemos introducido una equivocación en los resultados asociados con exactitud y con la precisión. Dado el grado de precisión representado en la Fig. 10, es fácil descubrir la equivocación. Sería fácil analizar los resultados representó en la Fig. 11, y pasa por alto la equivocación. Sin un grado alto de precisión, la equivocación puede ser no detectada y no corregida, por eso afectando la exactitud global.

La necesidad de mayor precisión lleva normalmente a costos mayores. Para obtener un grado más alto de precisión, puede ser necesario usar equipo o una metodología sofisticada y más tiempo. Qué metodología el topógrafo debe determinar y se necesita para lograr la precisión y la exactitud requerida para un trabajo.

Veamos estos conceptos representados estadísticamente:

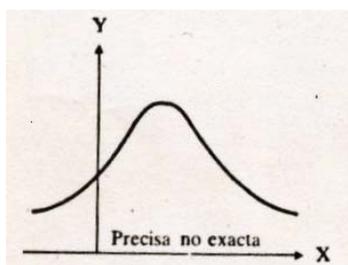


Fig.12

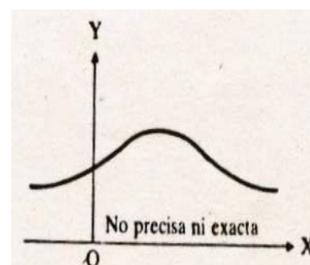


Fig. 13

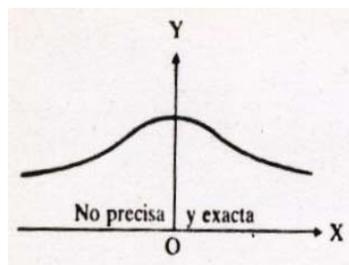


Fig. 14

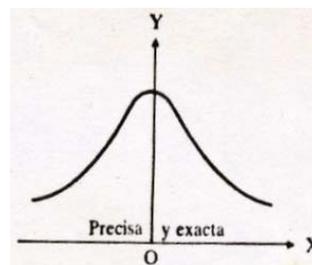


Fig. 15

La exactitud está diciendo la verdad. . . La precisión está contando la misma historia una y otra vez.

**Yiding Wang**

### 2.9.3. Sensibilidad

Se entiende por sensibilidad, la habilidad de un instrumento para detectar variaciones pequeñas de la magnitud a medir

### 2.10. ELIPSE DE ERROR

La desviación normal o varianza son medidas de precisión para el un caso unidimensional de un ángulo o una distancia, por ejemplo. En el caso de dos los problemas dimensionales, como la posición horizontal de un punto, que la elipse del error puede establecerse alrededor del punto para designar regiones de precisión o de probabilidades diferentes. La orientación relativo de la elipse en el sistema de ejes de x, y (depende de la correlación entre x y y). Si ellos no tiene correlación, las ejes de la elipse serán paralelas a x y y. Si las dos coordenadas son de precisión igual o  $\sigma_x = \sigma_y$ , la elipse se convierte en un círculo.

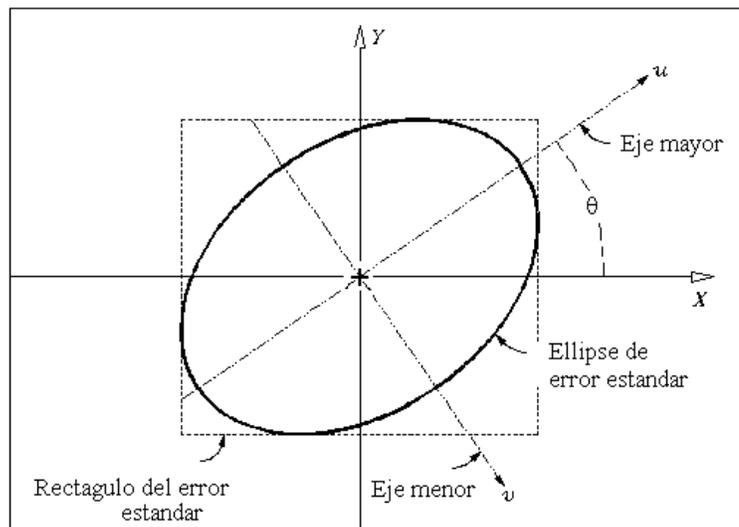


Fig 16. Elipse de error

Considerado el caso general donde la matriz de la covarianza para la posición de punto P se da como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Se calcula los semi ejes de la elipse correspondiente de la manera siguiente. Primero, con un polinomio de segundo grado (llamado el polinomio característico) es el conjunto a usar los elementos de  $\Sigma$  como:

$$\lambda^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\lambda + (\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0 \quad (2.40)$$

Las dos raíces  $\lambda_1, \lambda_2$  de formula 40 (qué se denomina el valor de  $\Sigma$ ) se calcula y sus raíces cuadradas son los semi ejes mayor y menor de la elipse de error de estándar, como muestra en Fig 16. La orientación de elipse es determinada calculando  $\theta$  entre el eje de x y el eje del mayor.

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (2.41)$$

El cuadrante de  $2\theta$  es determinado por  $\sin 2\theta$  este es igual a  $\sigma_{xy}$ , y  $\cos 2\theta$  tienen la misma forma como es  $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ . Considerando que en el caso unidimensional, la probabilidad de caída dentro de  $+\sigma$  y  $-\sigma$  tiene 0.6827, la probabilidad de falla dentro de la elipse de error es 0.3935. De una manera similar a construir intervalos de caída con probabilidad dada como en el caso unidimensional, pueden establecerse elipses del tamaño diferentes, cada uno con una probabilidad dada. Debe ser obvio que a más grande el tamaño de la elipse del error, más grande es la probabilidad.

En el caso de tres dimensiones, donde la posición horizontal así como la elevación del punto está comprometida, la región de precisión se vuelve un elipsoide.

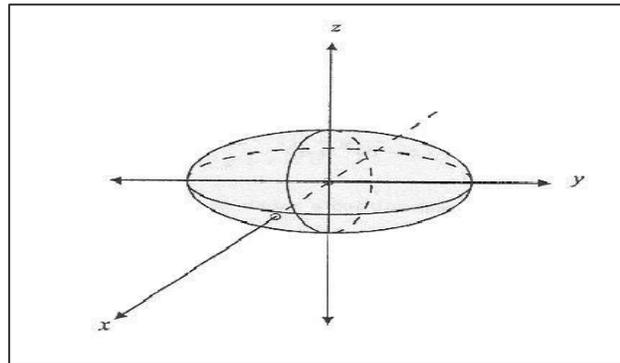


Fig. 17. Elipsoide

Los conceptos de elipse del error y elipsoide del error son bastante útiles estableciendo regiones de confianza sobre los puntos determinados por técnicas topográficas. Estas regiones son medidas de la fiabilidad como un medio de establecer especificaciones.

## 2.11. PROPAGACION DEL ERROR

Nuestra discusión se ha concentrado hasta ahora en tener las observaciones o medidas de variables aleatoria de interés y evaluar sus medios y medidas de su precisión. No siempre es verdad en la práctica que las medidas directas de las cantidades son necesarias y están disponibles. Por consiguiente, es una cuestión importante para mostrar cómo obtener la precisión de una cantidad o cantidades calcular la medida a través de las relaciones matemáticas conocidas. Por ejemplo, en

nivelación trigonométrica uno mide la distancia inclinada  $s$  y el ángulo de inclinación  $\beta$  y calcula la altura  $h$  del  $h = s \sin \beta$ . La pregunta es ahora: Si  $\sigma_s$  y  $\sigma_\beta$  son conocidos, cómo calculamos nosotros el  $\sigma_h$ ?

La técnica de "propagación del error" Realmente, puede ser mejor los términos la propagación de variaciones y covarianza. El caso general de propagación puede expresarse como sigue. Permita  $y$  ser un conjunto (vector) de cantidades de  $m$  cada uno de los cuales son una función de otro conjunto (vector)  $x$  de  $n$  variables aleatorias. Dado  $\sigma_{xy}$  a la matriz de la covarianza (o matriz del cofactor  $Q_{yy}$ ) para las nuevas cantidades y puede evaluarse de la siguiente forma:

$$\Sigma_{yy} = J_{yx} \Sigma_{xx} J_{yx}^t \quad (2.42)$$

o

$$Q_{yy} = j_{yx} Q_{xx} J_{yx}^t \quad (2.43)$$

Donde  $J_{yx}$  es  $m \times n$  y se llama la matriz del Jacobian, o el derivado parcial de  $y$  con respecto a  $x$ , con los elementos siguientes:

$$J_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Formula (2.42) o (2.43) es bastante general ya que se consideran funciones múltiples en términos de varias variables  $y$ , más importante, ninguna restricción se impone en la estructura de la matriz de la covarianza dada  $\sigma_{xx}$ . Por consiguiente, las variables aleatorias dadas podrían ser en general de precisión desigual y puso en correlación, para que los  $\sigma_{xy}$  fueran una matriz completa. De las relaciones de la propagación generales de formula (2.42) podrían obtenerse varias relaciones. Primero considere el caso de función única y luego de varios ( $n$ ) variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que no tiene correlación y con variables  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ , respectivamente. Formula (2.43) llega a ser:

$$\sigma_y^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

o

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2 \quad (2.47)$$

Por supuesto, si las variables  $x_i$  en correlación,  $\Sigma_{xx}$  en formula (2.45) no fuese una matriz diagonal, y formula (2.46) el incluiría el producto términos un todo las combinaciones. En semejante caso sería imprudente escribir la forma extendida de formula (2.46) pero en cambio trabaja directamente con la forma de la matriz.

Note que formula (2.42) a través de (2.46) se da en términos de variación y covarianza de las distribuciones. Sin embargo, desde que los tales parámetros son raramente conocidos en práctica, las ecuaciones aplican igualmente usando ejemplos variancias y covarianzas.

*Ejemplo.*

Calcular la elipse de error (semi eje mayor, menor y orientación) de la posición del punto M, que fue localizado con los siguientes datos  $D = 80$  m,  $\sigma_D = 0.24$  y un acimut  $(\alpha) = 37^\circ$ ,  $\sigma_\alpha = 0^\circ 01'$

Solución:

$$P_p = x = r \text{ Sen } \alpha$$

$$P_m = y = r \text{ Cos } \alpha$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \text{ Cos } \alpha & \text{Sen } \alpha \\ -r \text{ Sen } \alpha & \text{Cos } \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63.8908408 & 0.6018150 \\ -48.1452018 & 0.7986355 \end{bmatrix}$$

La matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2.908 \times 10^{-4})^2 & 0 \\ 0 & 0.24^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.46 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0.576 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (2.42)

$$\sum_{yy} = \begin{bmatrix} 63.8908408 & 0.6018150 \\ -48.1452018 & 0.7986355 \end{bmatrix}^x \begin{bmatrix} 8.46 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0.576 \end{bmatrix}^x \begin{bmatrix} 63.8908408 & -48.1452018 \\ 0.6018150 & 0.7986355 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{yy} = \begin{bmatrix} 0.02120698 & 0.0274241 \\ 0.0274241 & 0.3693446 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - (0.02120698 + 0.3693446)\lambda + (0.02120698)(0.3693446) - (0.0274241)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 0.05814144\lambda + 3.1187 \times 10^{-5} = 0$$

$$\lambda_1 = 0.0576$$

$$\lambda_2 = 0.0005$$

Semi ejes

$$a = \sqrt{\lambda_1} = 0.24$$

$$b = \sqrt{\lambda_2} = 0.07$$

La orientación

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} = \frac{2(0.0274241)}{0.02120698 - 0.3693446} = \frac{0.0548482}{-0.01572748}$$

$$2\theta = \arctan 3.4874 = 74^\circ$$

$$\theta = 37^\circ 00' 00''$$

## 2.12. USOS DEL ERROR MEDIO CUADRATICO

### 2.12.1 Error de la serie

A veces se toma una serie de datos catalogados de igual precisión, como los ángulos de una poligonal resultando cada magnitud con su respectivo error. Al error total de la

suma de todas las cantidades obtenidas de una serie de esta naturaleza se le llama error de la serie y se designa por  $E_s$ . Si las mediciones son homogéneas se puede considerar que el error  $E$  en cada magnitud es igual, entonces se puede aplicar la siguiente fórmula.

$$E_{suma} = \sqrt{E_a^2 + E_b^2 + E_c^2 + \dots} = E\sqrt{n} \quad (2.48)$$

## 2.12.2 Error de la media

Se ha establecido que el valor más probable de un grupo de mediciones repetidas es la media aritmética, y que la propia media está sujeta a error y la característica de la precisión es el error medio cuadrático.

Sin embargo, en muchos tipos de levantamientos se usa comúnmente el error de la media, puede encontrarse por la relación.

$$E_m = \frac{E_{suma}}{n} \quad (2.49)$$

De lo cual depende:

$$E_m = \frac{E\sqrt{n}}{n} = \frac{E}{\sqrt{n}} \quad (2.50)$$

En donde  $E$  es el error específico de una sola medida,  $E_m$  un error específico de la media y  $n$  número de observaciones.

$$E_m = \frac{Emc}{\sqrt{n}} \quad (2.51)$$

El error de la media se emplea para valorar la calidad del error medio cuadrático.

*Ejemplo.*

Se va a determinar con una cinta de 20 m una distancia de 200 m con un error no mayor de  $\pm 0,02$  m, se desea calcular la exactitud debe medirse cada longitud de 20 m, para garantizar de que el error no exceda el límite permitido.

$$E_s = E\sqrt{n}$$

$$E = E_s \sqrt{n} = 0,02 / \sqrt{10} = 0,006m$$

### 2.12.3. Error de área

#### Cuadrado

Un terreno cuadrado de lado a y error ea calculamos el error con la siguiente formula.

$$e_{\text{cuadrado}} = 2ae_a \quad (2.52)$$

#### Rectángulo

Un terreno rectangular de lados a y b con sus correspondientes errores ea y eb, podemos obtener el error de área, de la siguiente forma:

$$e_{\text{área}} = \sqrt{a^2 e_b^2 + b^2 e_a^2} \quad (2.53)$$

### Error en el volumen

Para la estimación del error de un volumen se debe tener los siguientes datos:

L: Largo	eL: error del largo
A: Ancho	ea : error del ancho
P: Profundidad	Ep: error en la profundidad

Para ello utilizamos la siguiente formula:

$$e_{\text{volumen}} = \sqrt{(AP)^2 e_L + (LP)^2 e_a + (LA)^2 e_P} \quad (2.54)$$

## 2.13. ERRORES Y PESOS

Pesos, son aquellos factores numéricos que caracterizan la precisión de los resultados de las mediciones heterogéneas (de diferente precisión) y se emplean en el procesamiento conjunto de estas mediciones o de magnitudes de diferente género, el peso se acostumbra asignar como un número positivo inversamente proporcional al cuadrado de su error medio cuadrático.

$$P_i = \frac{\mu^2}{Emc^2} \quad (2.55)$$

Como  $m$  es un valor teórico de la magnitud real que se desconoce, entonces el grado de confiabilidad de los resultados de una o varias mediciones heterogéneas, se expresa de la siguiente forma:

$$P = \frac{c}{Emc^2} \quad (2.56)$$

$C$  : es un número cualquiera entero constante de unidades igual al  $Emc$ , si las magnitudes son del mismo género, en caso contrario no posee unidades.

### 2.13.1. Media ponderada

Es la media aritmética de los valores heterogéneos o de diferente precisión de cualquier magnitud, calculados teniendo en cuenta los pesos de éstos resultados.

Si  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , son resultados heterogéneos y  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , sus pesos respectivos, entonces la media ponderada se halla por la siguiente formula:

$$M_p = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots + x_n P_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N} = \frac{\sum xP}{\sum P} \quad (2.57)$$

### 2.13.2. Error de la media ponderada

Para valorar la confiabilidad del cálculo de la media ponderada se emplea el criterio de error de la media ponderada y se calcula así:

$$E_p = \sqrt{\frac{\sum(Pv^2)}{(\sum P)(n-1)}} \quad (2.58)$$

En función de los pesos determinamos las correcciones:

$$C_i = -\frac{\frac{e_c}{P_i}}{\sum_{j=1}^2 (1/P_j)} \quad (2.59)$$

ec : Error de cierre

*Ejemplo*

Los tres ángulos de un triángulo se midieron obteniéndose los siguientes datos:

	A	B	C
Vmp	39° 33'	50°09'	90°17'
$\sigma$	02'	1'	3'
P	1/4	1	1/9

Error

$$e = 180^\circ - (39^\circ 33' + 50^\circ 09' + 90^\circ 17') = 000^\circ 01'$$

Empleando la Ecuación (2.59)

$$C1 = 0,29 = 000^\circ 00'$$

$$C2 = 0.07 = 000^\circ 00'$$

$$C3 = 0.62 = 000^\circ 01'$$

Los ángulos A y B no tiene corrección, el ángulo C =  $90^\circ 17' + 000^\circ 01' = 90^\circ 18'$

*Ejemplo*

Un ángulo se mide por dos observadores obteniéndose los siguientes resultados.

	Vmp	$\sigma$
A	21° 14'	2'
B	21° 13'	1'

Calcular el error y su valor más probable

Solución

Pesos

$$P_a = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P_b = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Media ponderada

$$mp = \frac{\frac{1}{4} \times 14' + 1 \times 13'}{\frac{1}{4} + 1} = 13',2 = 13'$$

$$E_p = \sqrt{\frac{0,25}{(1,25)(1)}}$$

$$E_p = \sqrt{\frac{\sum(Pv^2)}{(\sum P)(n-1)}} = 0',45$$

## 2.14. MÍNIMOS CUADRADOS

Es un método de ajuste que se emplea en muchas disciplinas, entre ellas la topografía, para obtener los valores más probables de una serie de medidas.

Consiste en adoptar como valor más probable el que haga:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \text{mínimo} \quad (2.60)$$

Podemos comprobar como la media aritmética cumple la condición de minimizar los cuadrados.

En topografía las ecuaciones no son lineales, sino cuadráticas, cúbicas y otras, por lo que para aplicar la condición de mínimos cuadrados será necesario linealizarlas utilizando los desarrollos en una serie de Taylor. Una ardua tarea que realizan con total garantía los programas informáticos.

Ejercicios
------------

1- Se midió una longitud con una cinta de 20 m, obteniéndose los siguientes resultados: 149,85; 149,87; 149,80; 149,91; 149,90; 149,83; 149,92; 149,78; 149,77; 149,82. Determinar el valor más probable de la longitud medida, error medio cuadrático (Emc), grado de precisión (Gp), máxima desviación, mínima desviación, desviación media.

2- Se midió un ángulo con cinta utilizando el método del seno, (brazo 5 m) y se obtuvieron los siguientes resultados de la cuerda (m): 4,70; 4,72; 4,71; 4,68. Determinar el valor del ángulo utilizando el valor promedio de la cuerda, Emc, E(0).

3- Se miden 3 ángulos de un triángulo con los siguientes resultados:

A: 39° 17' 12"	B: 50° 33' 17"	C: 90° 09' 32"
13"	18"	31"
14"	16"	30"
	15"	29"
		33"

Calcule valor promedio de cada ángulo e indique cual es el mejor.

4- Se miden independientemente tres distancias adyacentes a lo largo de una línea, y se obtuvieron los siguientes datos:  $x(1) = 73,25$ ;  $e(1) = \pm 0,05$ ;  $x(2) = 85,17$ ;  $e(2) = \pm 0,03$ ;  $x(3) = 37,16$ ;  $e(3) = \pm 0,02$ ; Determinar la distancia total y su error.

5- Calcular el error de área de un predio cuadrado de lado 40 m y de error  $\pm 0,02$  m

6. Calcular el error de área de una parcela rectangular de lados 40 y 35 m con los siguientes errores  $\pm 0,21$ ,  $\pm 0,18$  respectivamente

7- Un ángulo AOB es medido varias veces por diferentes observadores:

Observadores	Angulo	Observaciones
1	62° 27' 38"	3
2	62° 27' 41"	5
3	62° 27' 26"	4
4	62° 27' 39"	1

Determinar: la media y su error.

8- Una distancia L se divide en tres tramos L1, L2 y L3. Cada tramo se mide 2 veces en las mismas condiciones empleando una cinta de acero de 50m longitud nominal.

L1	L2	L3
417,35	358,08	199,82
417,32	358,11	199,73

Calcular la longitud L con su error medio cuadrático.

9- Se midieron los ángulos de un cuadrilátero:

A: 99° 57'	B: 75° 02'	C: 135° 30'	D: 49° 28'
58'	01'	31'	27'
	05'	36'	26'
	74° 58'	30'	24'

Calcular: valor más probable de cada ángulo, error de la media, Emc; ajustar el cuadrilátero.

10- Estacionado en un punto G, se visan los vértices P5, P6, P7 y se miden los ángulos.

P5 G P6	P6 G P7	P5 G P7
033° 14' 28"	011° 12' 15"	044° 26' 44"
25"	14"	45"
24"	18"	46"
26"	16"	46"
27"	13"	44"

Calcular los pesos y realizar el ajuste de los ángulos.

11- Entre dos puntos BM - 14 y BM - 15 se siguen 4 itinerarios diferentes. Calcular el valor más probable de la elevación del BM - 15 a partir de los siguientes datos:

L(1) = 5,30 Km, elev(1)= 3,723; L(2) = 7,88 Km, elev(2)= 3,714; L(3) = 6,28 Km, elev(3)= 3,719; L(4) = 4,36 Km, elev(4) =3,721; elev BM - 14 = 125,04 m.

12- Un ángulo AOD, esta formado por tres ángulos AOB, BOC y COD. Los cuatro ángulos se miden independientemente con estos resultados:

AOD: 174° 34' 45"	e = ± 3"
AOB: 13° 25' 04"	e = ± 4"
BOC: 83° 42' 46"	e = ± 1"
COD: 77° 27' 02"	e = ± 4"

Encontrar los valores ajustados de los ángulos.

13- Las especificaciones para medir los ángulos de una poligonal de 23 lados limitan el error angular (tolerancia) a 53". ¿ Con que exactitud deberá medirse cada ángulo.

14- Determinar y elaborar las gráficas de las elipses de error (semi eje mayor, menor y orientación) de la posición del punto M, que fue localizado con los siguientes datos D = 100 m,  $\sigma_D$  con los siguientes datos (10 cm., 5 cm., 1 cm. 0.5 cm) y un acimut ( $\alpha$ ) = 40°,  $\sigma_\alpha=0^\circ 00' 05''$

# 3. DISEÑO DE ESPECIFICACIONES

Es bien conocida la frase " El mejor topógrafo no es aquel que realiza las mediciones mas precisas, sino el que es capaz de seleccionar y aplicar el grado apropiado de precisión que se requiere para el propósito"<sup>2</sup>.

En nuestro país hasta ahora las especificaciones de topografía y geodesia son tomadas de las empleadas en otros países de muy diferente topografía y estado del desarrollo de estas ciencias.

Otro tipo de especificaciones provienen de criterios personales sin ningún fundamento técnico.

Pero en realidad existe las metodologías y criterios irrefutables del porque de las exigencias y tolerancias de los trabajos, fuera del deseo personal. En los temas tratados partimos del punto de referencia de los resultados de las mediciones con respecto a un valor probable lo cual nos con lleva a hablar de normas y especificaciones basadas en la precisión y fundamentalmente bajo las leyes de la estadística matemática y probabilística.

Como ejemplo vemos la siguiente grafica que nos ilustra una comparación sobre precisiones entre la topografía clásica y los sistemas de topografía satelital. Elementos fundamentales de la topografía actual. Esta precisiones pueden mejorar debido ha avances tecnológicos.

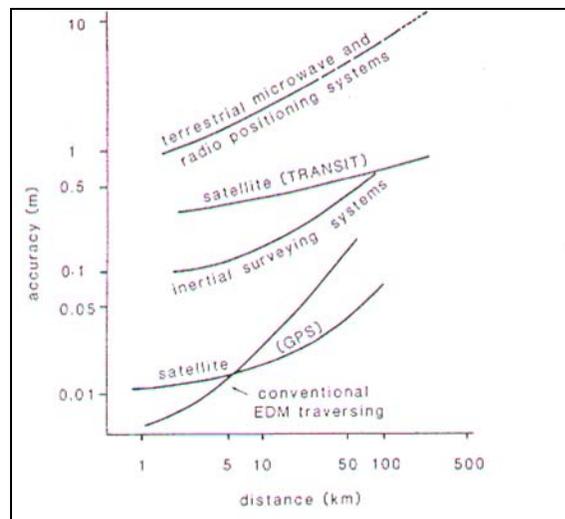


Fig. 1

Para iniciar el estudio de diseño de especificaciones analizaremos las precisiones de los métodos e instrumentos en forma individual y posteriormente los procedimientos en los que se involucran estos, a demás de las especificaciones diseñadas a nivel mundial, tanto para la realización de trabajos topográficos como su evaluación.

<sup>2</sup> Fundamentos de Topografía. Schimdt y Rayner

### 3.1. MEDIDAS LINEALES

La distancia entre dos puntos se puede obtener por métodos directos o indirectos. La medición directa de una distancia exige recorrerla y adaptar sobre ella la unidad de medida a utilizar. Esto es, para determinar la distancia entre los puntos A y B se debe superponer tantas veces el metro como sea necesario hasta cubrir la separación entre los puntos. La medición indirecta, por el contrario no necesita recorrer la separación entre los dos puntos A y B, sino que obtiene la distancia bien sea por medio de analogías geométricas, trigonométricos o por diferencia de tiempo.

### 3.2. MEDICIÓN DIRECTA DE DISTANCIAS

La medición directa de distancias se puede realizar a pasos, con un odómetro o con la cinta métrica.

La medición realizada a pasos requiere que la persona conozca previamente la longitud de cada paso para así, una vez recorrida la separación entre dos puntos pueda obtener la distancia al multiplicar el número de pasos por el valor en metros de cada paso. Se puede esperar una precisión de  $1 / 100$  a  $1 / 200$  de acuerdo al terreno.

El odómetro es un dispositivo que cuenta el número de giros de la llanta de un vehículo cualquiera, de manera que se obtiene la distancia recorrida multiplicando la circunferencia de la llanta por el número de giros registrados. Se puede esperar una precisión de  $1 / 200$  con una mayor precisión en superficies lisas y planas.

Para la realización de las mediciones con el metro, generalmente se utilizan cintas que tienen longitudes de 10, 20, 30, ó 50 metros, graduadas en metros, decímetros, centímetros y milímetros. Estas cintas pueden ser de acero, fibra de vidrio o tela. La distancia con la cinta métrica, entre dos puntos, se obtiene sumando las medidas parciales realizadas para cubrir la separación entre ellos.

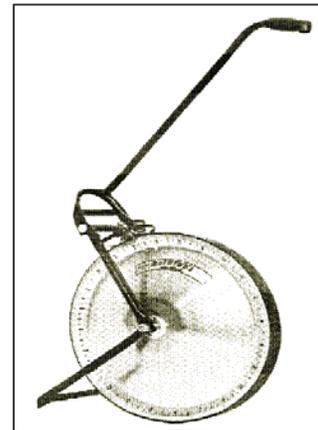


Fig. 2. Odómetro

De métodos anteriores el que ofrece mayor precisión es el de la cinta métrica, por lo cual se examinará con mayor detenimiento a continuación.

#### 3.2.1 MEDICIÓN DE DISTANCIAS CON CINTA MÉTRICA

El proceso de medición con la cinta es una operación sencilla que sin embargo involucra equipos adicionales, personas y métodos. Cuando la medición que se

requiere es de poca precisión, los equipos adicionales requeridos pueden ser, dos plomadas y varios jalones



Fig. 3. Cinta

El error accidental de algunas cintas son los siguientes, para su tratamiento se empleara la formula de error de la serie vista en el capitulo anterior, la siguiente tabla

Tipo	Error	Temperatura	Tensión
Fibra de vidrio	10 m $\pm$ 2 mm	20° C	2 kg.
acero	10 m $\pm$ 1 mm	20° C	5 kg.

Tabla 13

Cuando no se posee los errores suministrados por el fabricante se emplea la formulas empíricas del profesor Lörber.

$$e = 0,00032L + 0,0022\sqrt{L} \quad (3.1)$$

$$e = 0,00032L + 0,0078\sqrt{L} \quad (3.2)$$

La formula 3.1 se utiliza para terrenos fáciles, y la 3.2 para terrenos difíciles.

### 3.2.1. Hilo invar

Hasta mediados de los años 50 cuando aparece los distanciometros electrónicos la medición de las líneas de poligonales se realizaban con la ayuda de estos equipos. En la actualidad estos equipos se emplean para la medición de bases y comparadores de campo, para hallar los patrones de control de los distanciometros electrónicos, puesto que dependiendo de las condiciones se puede lograr precisiones de 1/30000 a 1/100000.

El origen de la palabra invar es del griego invar que significa inamovible o indeformable.

El poco uso de este instrumento en el país mas que a una consideración obsoleta del equipo es debido a que con el transcurso del tiempo, el hilo invar se deforma y el único para introducirles correcciones con el patrón métrico internacional (longitud de

<sup>3</sup> Para cintas fabricadas por BMI.

onda del átomo de kriptón 86) que es llevado acabo por entidades de metrologia estatales que en nuestro país como tal no existe.

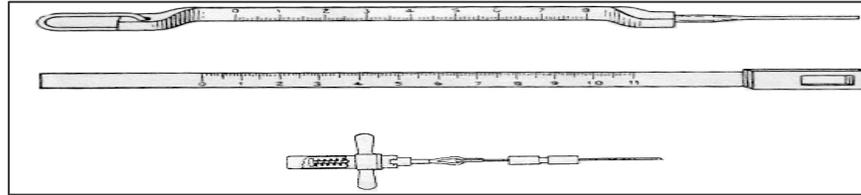


Fig. 4

### 3.3 MEDICION INDIRECTA DE DISTANCIAS

Cuando el instrumento de medida no es posible de aplicarlo directamente, por lo tanto se determina la distancia mediante una relación con un patrón, para esto se emplea los conocimientos de geometría y trigonometría.

#### 3.3.1. Telémetro

Instrumento óptico para medir la longitud de la visual dirigida a un objeto (medición a distancia). El instrumento empleado es un telémetro (semejante al de las cámaras fotográficas) de imagen partida o coincidencia; viene provisto de una escala en donde se puede leer directamente la distancia. La precisión obtenida en las distancias determinadas con éste instrumento es 1/300 a 1/500.

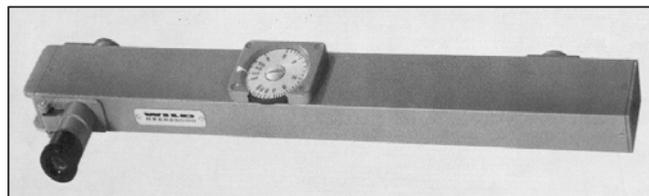


Fig. 5. Telémetro

#### 3.3.2. Taquimetría

Es el método con el que se puede determinar la DH y DE de una manera rápida y con la precisión adecuada para muchos propósitos.

El procedimiento requiere el empleo de:

- Mira vertical.
- Tránsito taquimétrico.

El Tránsito se denomina taquimétrico por estar provisto de retículos taquimétricos o de mira, para el caso, horizontales

Procedimiento: El principio de medición consiste en leer los valores interceptados sobre la mira por los dos retículos estadimétricos superior (s) e inferior (i), cuando ésta se sostiene verticalmente en uno de los extremos de la línea a medir, estando el tránsito ubicado en el otro extremo. La distancia horizontal (DH) está dada por la fórmula:

Para el caso de ángulo vertical

$$DH = K S \cos^2 \alpha \quad (3.3)$$

Para el caso de ángulo cenital

$$DH = K S \sen^2 z \quad (3.4)$$

La diferencia de nivel

$$DE = \frac{1}{2} * k * s * \sen 2 \alpha = \frac{1}{2} * k * s * \sen 2 z \quad (3.5)$$

El valor K que aparece en las fórmulas corresponde a la constante diastimométrica o constante de multiplicación del taquímetro, éste valor regularmente es 100.

- DH = Distancia horizontal
- DE = Diferencia en elevación
- eDH = Error en Distancia Horizontal
- eDE = Error en Diferencia de Elevación
- s = Diferencia de hilos
- em = Error en la lectura de la mira
- k = Constante de multiplicación del taquímetro
- $\alpha$  = ángulo vertical
- z = ángulo cenital

El modelo de error está determinado para

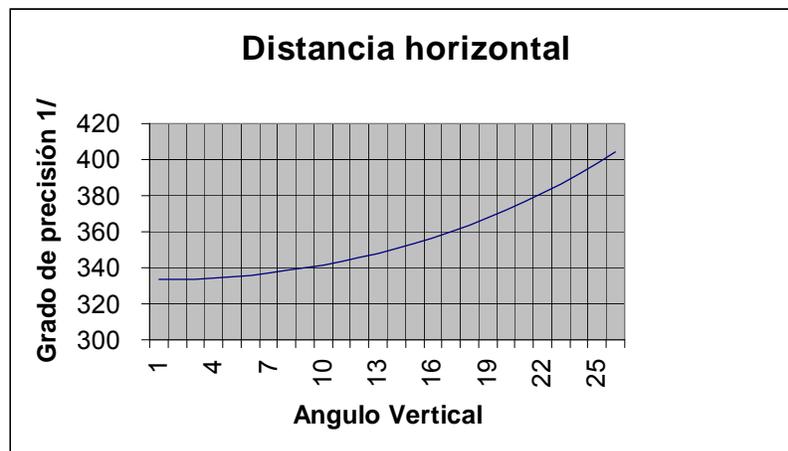
$$e_{DH} = \sqrt{e_m^2 \cdot k^2 \cdot \cos^4 \alpha + e_\alpha^2 \cdot k^2 \cdot S^2 \cdot \sen^2 2\alpha} \quad (3.6)$$

$$e_{DE} = \sqrt{e_m^2 \cdot 1/4 \cdot k^2 \cdot \sen^2 2\alpha + e_\alpha^2 \cdot k^2 \cdot S^2 \cdot \cos^2 2\alpha} \quad (3.7)$$

Para las siguientes gráficas se tomo el error en la mira de 3 mm ( $e_m = 1 * 2.5 \approx 3$ ) y la constante del aparato igual a 100 y error medio cuadrático angular de 30".

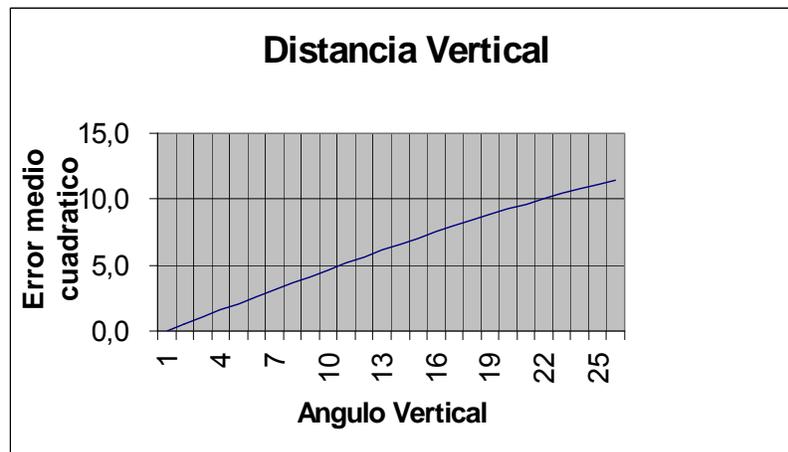
Fig. 6

Fig. 7



Consideraciones Generales

1. Las distancias menores de 25 m la constante (K) tiene variaciones.
2. No se deben realizar lecturas en la mira menores de 1 m ya que el suelo produce



refracción.

3. Las consideraciones para la distancia máxima de lectura de la mira son iguales que para los niveles, con algunos cambios en lecturas al cm.

### 3.3.3. Mira base (invar)

La estadía base de 2 metros es un instrumento práctico y elegante para la medición rápida y segura de distancias. Permite traspasar sin dificultades terrenos inclinados, impracticables o también labrados, evitando daños en los cultivos. Midiendo con un teodolito al segundo, el ángulo paraláctico horizontal entre dos signos de puntería dispuestos en una distancia de exactamente 2 m en la estadía, se obtiene, la distancia horizontal expresada en metros, independientemente de la forma del terreno situado entre los dos extremos.

La medición de distancias con la estadía se basa en la fórmula trigonométrica siguiente:

$$DH = \frac{b}{2} \cdot ctg \frac{\alpha}{2}$$

(3.13)

DH : Distancia horizontal buscada  
b : La base 2 m (distancia entre los dos signos)  
 $\alpha$  : El ángulo paraláctico horizontal.

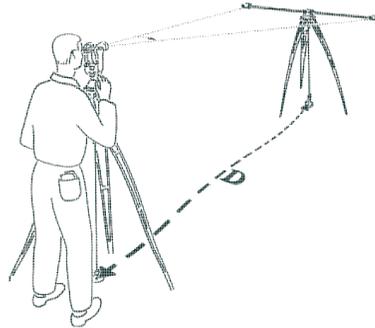


Fig. 12

### 3.3.3.1 Precisión de la medición de distancias

La exactitud de la distancia ópticamente medida depende no sólo de la precisión de la estadía de 2 m, sino también de la precisión de la medición del ángulo paraláctico. En el siguiente cálculo se supone una precisión angular de 1" y se puede aún mejorarse aumentando las series de los ángulos medidos. Mediante la diferenciación de la formula anterior se puede deducir la ley de los errores para la distancia, obteniendo como resultado el error medio (desviación Standard).

Para:

$$e_{MB} = \frac{DH^2}{b} \cdot m_{\alpha} \quad (3.14)$$

ma : Error medio de la medición angular  
DH : Distancia horizontal  
b : longitud de la base  
Emc<sub>MB</sub>: Error medio de la distancia

2

Para EMC<sub>MB</sub> ( en mm) y DH ( en m) resulta

$$e_{MB} = \frac{DH^2}{412,53} \quad (3.15)$$

### 3.4. MEDICION ELECTRONICA DE DISTANCIAS (EDM)

Distanciometro es el instrumento que registra el tiempo de desplazamiento de la onda electromagnética y con base en la velocidad calculada por métodos indirectos con la ayuda del valor de la velocidad de la luz en el vacío, se puede calcular la distancia recorrida por la onda.

$$D = \frac{V \cdot t}{2} \quad (3.16)$$

D: distancia  
V: Velocidad  
t: Tiempo

De acuerdo al proceso físico de la onda se distingue los siguientes métodos de medición.

a. Temporal o de impulso: El cual emplea una emisión en forma de impulsos en donde se mide directamente el tiempo de propagación del impulso.

b. Interferencia: Es aquel que emplea una emisión continua sin modular y registra el resultado de la interferencia directa de la onda de apoyo y la onda reflejada.

c. Fase: Emplea una emisión continua o un impulso con una señal armónica, modula o una emisión continúa sin modular en donde se mide la diferencia de fases.

d. Frecuencia: emplea una emisión continua o un impulso modulado y se mide diferencia de las frecuencias instantáneas de las ondas emitidas y recibidas.

La precisión esta dada por la siguiente expresión:

$$e_{EDM} = \sqrt{e^2 + (ppm \cdot D)^2} \cdot 4 \quad (3.17)$$

$e_{EDM}$ : error  
e : Error medio cuadrático  
ppm: Partes Por Millón  
D : Distancia Horizontal (Km)

Los distanciometros se clasifican en tres

1. Corto alcance menor 3 Km
2. Medio alcance de 3 a 12 Km
3. Largo alcance mayores de 12 Km

La siguiente figura muestra la precisión para un instrumento de las siguientes características  $e = \pm 5 \text{ mm} + 3 \text{ ppm}$  (partes por millón)

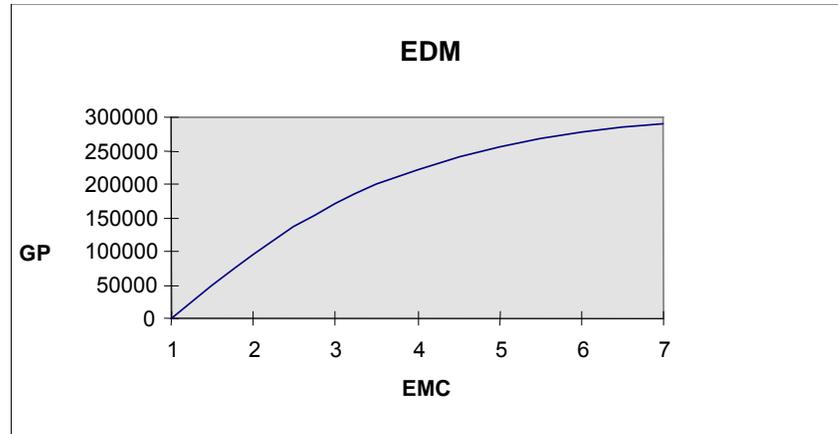


Fig. 15

La fórmula 3.18 analiza el fenómeno particular de la medición de una distancia, para elaborar un modelo más real debemos tener en cuenta otros errores que modifican la precisión a obtener como son los errores de centrado del instrumento y el error de centrado del prisma o prismas.

Por esto la fórmula quedaría de la siguiente forma, esto está fundamentado en la teoría sobre error de la suma.

$$e_{EDM} = \sqrt{e_i^2 + e_p^2 + e^2 + (ppm \cdot D)^2} \quad (3.18)$$

$e_i$  : Error de centrado del instrumento

$e_p$  : Error de centrado del prisma

#### Ejemplo

Calcular el error en la medida de una distancia de 1250.40 m con una estación total que posee las siguientes características ( $\pm 5 \text{ mm} + 10 \text{ ppm}$ ), con un error de centrado de la estación de  $\pm 1 \text{ mm}$  y el error de centrado del prisma  $\pm 3 \text{ mm}$ .

$$e_{EDM} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2 + (10 \times 1250.4)^2}$$

$$e_{EDM} = \sqrt{1 + 9 + 25 + 15635}$$

$$e_{EDM} = 138.3 \text{ mm}$$

### 3.4.1. Fuentes de error en mediciones con EDM

- Corrección meteorológica
- Error de cero o constante del equipo
- La constante del prima.

### 3.4.2. Estación semi-total

Es el resultado de la combinación de un equipo de medida angular generalmente óptico mecánico, acoplado a un distanciómetro electro óptico.

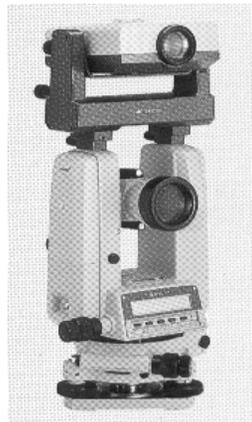


Fig. 13. Estación semitotal



Fig. 14. Estación total

### 3.4.3. Estación total

Es un instrumento topográfico de última generación, que integra en un solo equipo, medición electrónica de distancias y ángulos, comunicaciones internas que permiten la transferencia de datos a un procesador interno o externo y que es capaz de realizar múltiples tareas de medición, guardando datos y cálculos en tiempo real.

### 3.4.4. Corrección offset

En la determinación de la distancia horizontal con una estación semi total, es preciso tener en cuenta los errores que se pueden producir por a falta de paralelismo entre las visuales distanciométricas y las angulares.

$D'$ : Distancia visual angular  
 $V$ : Valor del ángulo vertical  
 $D$ : Distancia medida en el EDM  
 $HI$ : Diferencia de altura entre aparatos  
 $Dr$ : Distancia reducida

$$Dr = D' \cdot \text{Sen } V \quad (3.19)$$

$$D' = HI \cdot \text{Cos } V + \sqrt{D^2 - (HI \cdot \text{Sen } V)^2} \quad (3.20)$$

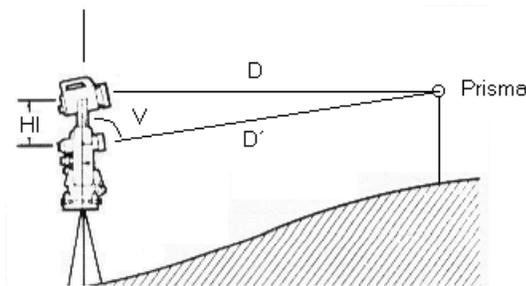


Fig. 16

Esta corrección se hace necesaria cuando el distanciometro y el teodolito son de diferente marca, o cuando se le esta acoplado un distanciometro a un teodolito viejo.

### 3.5. DISEÑO Y EVALUACION DE POLIGONALES

#### 3.5.1 Resolución angular

Es la distancia a la cual puedo medir los cambios en el circulo horizontal y se define como:

$S$ : Desplazamiento  
 $\theta$ : Lectura a estima  
 $L$ : Longitud

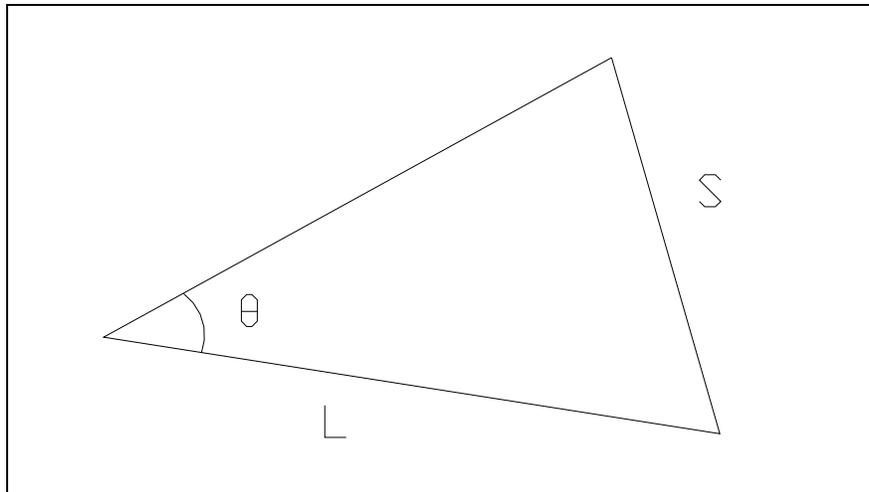


Fig. 19

$$S = L \cdot \theta \quad (3.21)$$

$$L = S / \theta \quad (3.22)$$

Esta relación es valida para los valores de  $\theta$  muy pequeños.

La siguiente tabla nos muestra la distancia a la cual se perciben un centímetro de desplazamiento de acuerdo a la lectura estima del círculo.

Grupo	Marca	Modelo	L.E.	S
I	Wild	TO5		68,75
	Wild	TO	30"	
	Kern	KOS	30"	
	Zeiss	THEO 80	30"	
	Topcon	AG-30B	30"	
II	Wild	T1	6"	343,77 412,53
	Wild	T16 RDS	6"	
	Wild	K1M K1S	6"	
	Kern	DT-05	6"	
	Kern	DT-5	6"	
	Topcon		5"	
	Leitz		5"	
III	Zeiss	Elta 3	2"	1031,32
	Wild	TC 1600	1,5"	1375,10
	Wild	T2	1"	2062,65
	Nikon	DTM-A5LG	1"	10313,24
	Wild	T3	0,2"	

Tabla 2

### 3.5.2. Fuentes de error en la medición de los ángulos horizontales

Durante la toma del dato se presenta los siguientes errores:

1. En la colocación de las señales de puntería (Ej: jalones, plomadas, miras, señales, torres) también denominado error de reducción (sr)



Fig X Plomada láser

2. En el centrado del instrumento (sc)

Precisión del centrado de acuerdo al instrumento	mm
Plomada ordinaria	6
Bastón	3
Plomada óptica	2
Centrado forzado	0,1
Plomada Láser	

Tabla 3<sup>4</sup>

3. Instrumentos (si)
4. Medio externo (sme)
5. En la medición misma (sm)
6. En los datos de partida (sd)

Debido a que existe un modelo matemático que permite manejar los resultados de las mediciones de una manera más cercana a la realidad, ya no se hace necesario calcular la magnitud real de cada uno de los errores sino minimizarlos para su tratamiento.

En poligonometría se considera que los trabajos estarán organizados de tal manera que los desplazamientos longitudinales y laterales son iguales es decir:

---

<sup>4</sup> Tomada de Project Surveying. P. Richardus assisted by J. S. Allman

5

$$\sigma_L^2 = \sigma_{Tr}^2 = \frac{\sigma_i^2}{2} \quad (3.23)$$

En donde sTr desplazamiento transversal, sL desplazamiento longitudinal.

Se considera que en sTr influyen las fuentes de error angulares y en el longitudinal los errores en la distancia; aceptando el carácter independiente de influencia en las fuentes de errores en la medición de los ángulos sobre el desplazamiento lateral se puede decir:

6

$$\sigma_{Tr}^2 = \sigma_r^2 + \sigma_c^2 + \sigma_i^2 + \sigma_m^2 + \sigma_{me}^2 + \sigma_d^2 \quad (3.24)$$

Además considerando que las mediciones son homogéneas o de igual precisión, es decir que los errores influyen igualmente o equitativamente podemos decir:

7

$$\sigma = \sigma_r = \sigma_c = \sigma_i = \sigma_m = \sigma_{me} = \sigma_d \quad (3.25)$$

8

$$\sigma_{Tr}^2 = 6 \cdot \sigma^2 \quad (3.26)$$

De donde

9

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{Tr}^2}{6}; \quad \sigma = \frac{\sigma_{Tr}}{\sqrt{6}} \quad (3.27)$$

El error longitudinal (sL) es debido a los errores cometidos en la medición de los lados de la poligonal, sea cual fuere el método y el equipo empleado.

Entonces se dice que:

10

$$\sigma_L^2 = n \cdot \sigma_s^2 \quad (3.28)$$

n: numero de lados

ss : error en la medición de cada lado

Basándonos en las fórmulas anteriores podemos hallar las tolerancias máximas permisibles.

11

$$\frac{Ec_T}{L} = \frac{1}{T \cdot \sqrt{12}} \quad (3.29)$$

$E_{CT}$  : Error de cierre teórico

### 3.5.3. Error angular

Partiendo del supuesto de que el error de cierre planimétrico del último punto de una poligonal depende tanto del desplazamiento longitudinal, como lateral en el presente párrafo se tratará el error lateral que está influenciado por la precisión en la medición angular.

En la medición de un ángulo en una poligonal influyen los siguientes errores:

#### 1. Error en la medición de un ángulo.

Depende del error de lectura y del error de estima o apreciación del equipo.

$$m_m = \sqrt{\frac{I}{n} (m_l^2 + m_o^2)} \quad (3.30)$$

12

$m_l$  : Error de lectura

$m_o$  : Error de observación (estima)

$$m_l = \frac{60''}{A} \quad (3.31)$$

13

$$m_o = \frac{I}{2} \beta \quad (3.32)$$

14

A : Aumentos

$\beta$  : Mínima lectura directa.

#### 2. Error de reducción

Es el error causado por la incorrecta colocación del equipo de referencia para puntería.

$$m_r = \frac{\rho \cdot e}{D} \sqrt{2} \quad (3.33)$$

15

e : Es el elemento lineal de desplazamiento del instrumento de puntería con respecto a su verdadera posición. Este valor es igual a dos veces el error de centrado, ver tabla 3.

#### 3. Error de centrado.

Es el error que surge de la correcta colocación del equipo sobre el vértice real.

$$m_c = \frac{\rho \cdot 2 \cdot e}{D} \quad (3.34)$$

16

$m_c$  : Error de centrado.

#### 4. Error instrumental

Es aquel causado por las limitaciones en la fabricación de las partes óptico - mecánicas. Viene especificado por el fabricante.

$m_{inst}$  : Error instrumental.

#### 5. Error del medio externo.

Son todos aquellos errores causados por las condiciones ambientales del lugar donde se desarrollan las mediciones.

Debido a que se están considerando mediciones homogéneas este valor equivale a  $1/4 (m_m + m_r + m_{inst})$

$m_e$  : Error del medio externo.

#### 6. Error total angular.

$$m_\beta = \sqrt{m_m^2 + m_r^2 + m_q^2 + m_{inst}^2 + m_e^2} \quad (3.35)$$

### 3.5.4. Tolerancia angular en una poligonal

Es costumbre en nuestro medio determinar la tolerancia de la siguiente manera:

$$\text{Tolerancia} = \pm LD \cdot N \quad (3.36)$$

LD: Lectura directa

N : numero de estaciones

Esta expresión no se debe usar ya que asume que el error depende solamente de los errores sistemáticos cuando el error depende no solamente de esta clase sino también de los errores casuales, instrumentales y los ocasionados por el medio externo.

a. Precisión media: En función del error de la serie, tomando el error total angular.

$$18 \quad T = \pm m_{\beta} \cdot 2,5 \cdot \sqrt{n} \quad (3.37)$$

b. Alta precisión: Similar al tratamiento anterior, pero se toma el error medio cuadrático del instrumento.

$$19 \quad T = \pm E_{mc} \cdot 2,5 \cdot \sqrt{n} \quad (3.38)$$

En algunos instrumentos el  $E_{mc}$  es igual a la lectura directa, por esto las dos tolerancias angulares serían iguales.

En general para estar en esta tolerancia se requiere un cambio de la metodología como puede ser medir los ángulos por repetición o reiteración de acuerdo al instrumento

Ejemplo:

Calcular la tolerancia angular para un polígono de 20 lados, levantado con el tránsito Topcon DT-30 de lectura directa de 30".

$$20 \quad E_{angular} = \pm 30'' \sqrt{20} = 134'',16$$

$$21 \quad Tolerancia = 134'',16 \cdot 2,5 = 335'',4 \approx 335'' = 5'35''$$

### 3.6. POLIGONOMETRIA

El objetivo de la poligonometría, es el de colocar nuevos puntos en aquellas regiones en donde la densidad de la red geodésica nacional no es suficiente y por las condiciones de la zona, no se pueden emplear la triangulación o la trilateración. Además este método es empleado para darle coordenadas (X,Y) a objetos topográficos que deseen ser incluidos en los mapas existentes y puedan servir para trabajos ingenieriles posteriores.

Las redes de densificación, construidas bajo el principio de poligonometría, se dividen de acuerdo a su precisión así: poligonometría de cuarta clase, poligonometría de primer orden y poligonometría de segundo orden.

Las clases de poligonometría según el sistema de medición de distancias, pueden ser: poligonometría telemétrica, poligonometría radiométrica, poligonometría con telémetros ópticos poligonometría paraláctica.

## SIMBOLOGIA

TN - Punto de partida (placa inicial)

Tk - Punto de llegada (placa final)

S1,S2,...,Sn - Distancia de los lados del itinerario

$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$  - Ángulos medidos

AN,Ak - Azimutes inicial y final respectivamente

L - Distancia longitudinal entre los puntos inicial y final

Tnd - Punto nodal, generado por la intersección de varios itinerarios

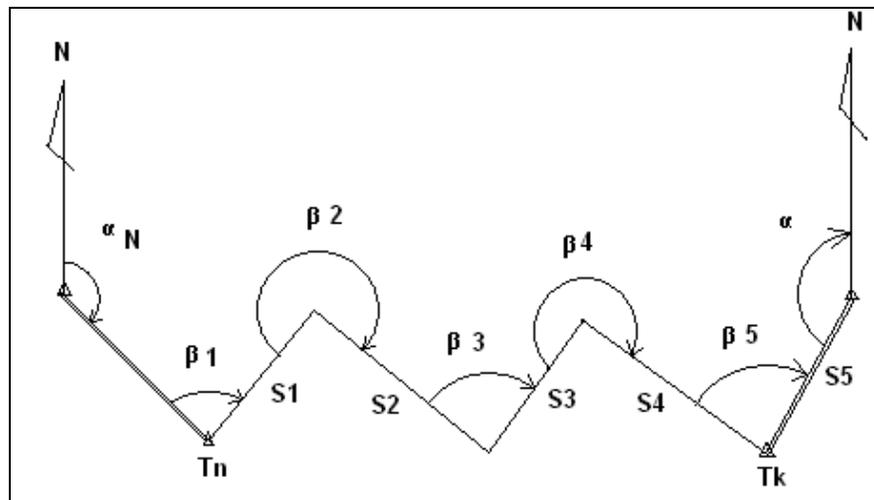


Fig. 20

Nota: En casos aislados, en donde el amarre de los itinerarios a los puntos de la Red Geodésica Nacional, con el empleo de telémetros electrónicos, las distancias de los lados pueden aumentarse en un 30%.

En itinerarios de primer orden, con perímetro igual a 1 km y de segundo orden con perímetro igual a 0.5 km, se permite un error absoluto de  $f_s = 10$  cm.

El número de errores angulares y lineales máximos o cercanos al máximo no debe exceder al 10%.

se permite el aumento de las distancias de los lados de los itinerarios de primer y segundo orden, hasta un 30%, siempre y cuando el tramo total (perímetro) sea mayor a los expresados.

Se deben determinar los azimutes de los lados del itinerario con una precisión de 5-7 segundos cada quince (15) lados y cada 3 km o mas (cierre azimutal. por lo general con observaciones astronómicas).

De acuerdo a su forma las poligonales pueden ser:

1-. Itinerario rectilíneo: son aquellos que cumplen con las siguientes condiciones:

a-. Si los azimutes de las líneas difieren con respecto al azimut de la línea longitudinal L en un valor promedio de 8 grados y un máximo de 24 grados.

b-. Si los vértices de la poligonal caen dentro del espacio limitado por dos paralelas, trazadas con respecto a la perpendicular a la línea L.

22 
$$\eta_o = \pm \frac{1}{24} L \quad (3.39)$$

y un valor máximo

23 
$$\eta_o = \pm \frac{1}{8} L \quad (3.40)$$

c-. Si  $\sum s / L = < 1.3$

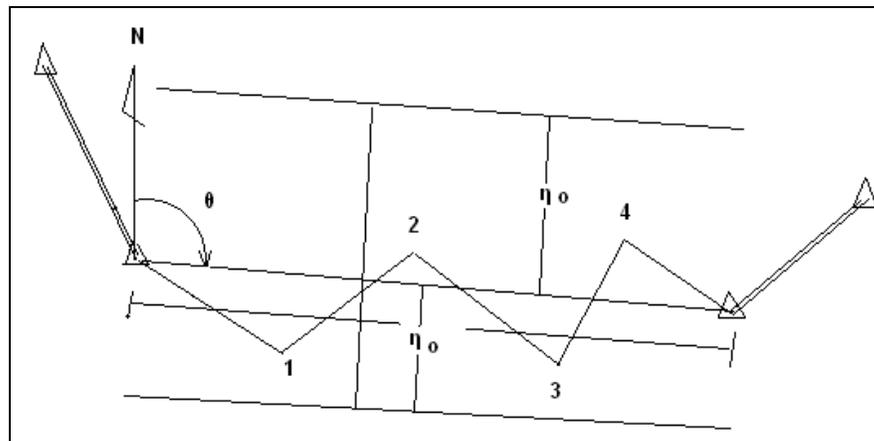


Fig. 21

2-. Itinerario curvilíneo: es aquella poligonal en la que no se cumple si quiera alguna de las tres condiciones anteriores.

3-. Itinerarios cerrados.

#### DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO FINAL DE UNA POLIGONAL

Si la poligonal es rectilínea o cercana a esta forma, el error de desplazamiento se puede desmembrar así ( en general es valido para todo tipo de poligonales)

24

$$f_s^2 = t^2 + u^2 \quad (3.41)$$

Fs - Error de cierre lineal del itinerario (error absoluto)

t - Desplazamiento longitudinal del itinerario

u - Desplazamiento transversal del itinerario

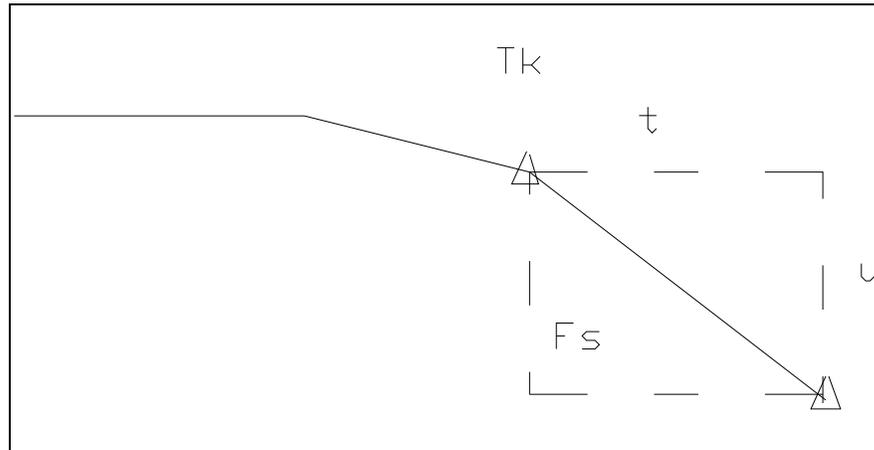


Fig. 22

Podemos afirmar que el error en la posición del último punto de la poligonal depende de los ángulos y distancias medidas.

Sabemos que el error medio cuadrático de una función  $y = x + b$  es igual a la suma de los errores medios cuadráticos de cada una de las incógnitas, es decir:  $m_y = m_x + m_b$ , por consiguiente podemos escribir:

25

$$m_{fs}^2 = m_t^2 + m_u^2 \quad (3.42)$$

Si partimos del supuesto de que la influencia de los errores es equitativa u homogénea, entonces:

26

$$m_t^2 = m_u^2 \quad (3.43)$$

27

$$m_{fs}^2 = 2 m_t^2 = 2 m_u^2 \quad (3.44)$$

Si se conoce  $m_{fs}$ , el error medio cuadrático de la posición del último punto, entonces tenemos que:

$$m_t = \frac{m_{fs}}{\sqrt{2}} \quad (3.45)$$

28

29 
$$m_u = \frac{m_{fs}}{\sqrt{2}} \quad (3.46)$$

Además es conocido que el error máximo permisible se puede obtener de la relación:

30 
$$\frac{f_s \max}{L} = \frac{l}{T} \quad (3.47)$$

### 3.6.1. Relación entre el desplazamiento lateral y los errores angulares de la poligonal

Supongamos que en nuestra poligonal, se produjo el siguiente desplazamiento, claro esta que con fines explicativos exageremos la gráfica, para poder observarlo.

31 
$$d \beta_1 = \frac{\Delta u_1}{ns} \rho$$

32 
$$\Delta u_1 = \frac{d \beta_1 \cdot n \cdot s}{\rho} \quad (3.48)$$

33 
$$\Delta u_1 = \frac{d\beta (n - 1)s}{\rho}$$

⋮

34 
$$\Delta u_n = \frac{d\beta n (s)}{\rho}$$

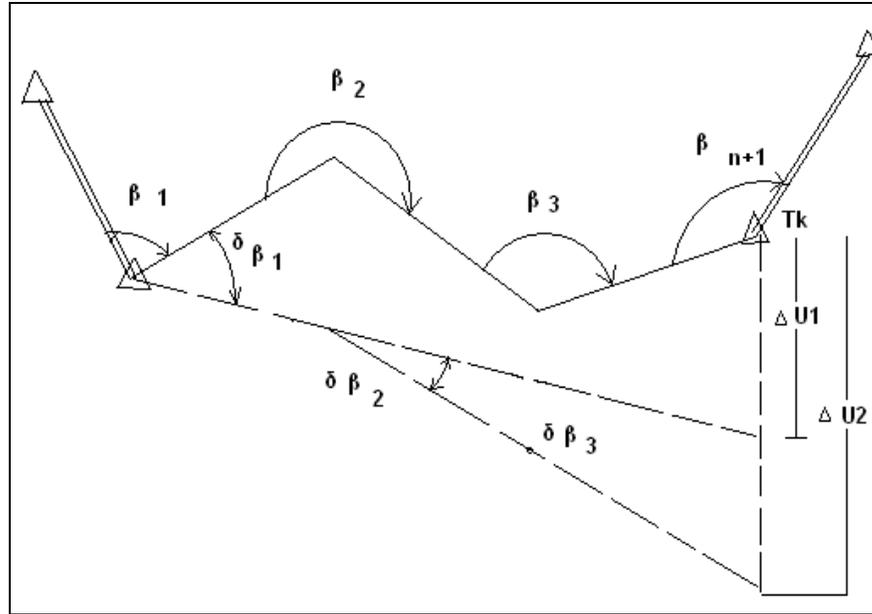


Fig. 23

Por consiguiente el desplazamiento general  $u$  será igual a la suma de todos los desplazamientos parciales  $\Delta u_n$ :

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots + \Delta u_n \quad (3.49)$$

Con base en esto, tenemos:

$$u = \frac{d\beta_1 s n}{\rho} + \frac{d\beta_2 s(n-1)}{\rho} + \dots + \frac{d\beta_n s}{\rho} \quad (3.50)$$

36

Ahora pasamos a los errores medios cuadráticos de la función y considerando que las mediciones fueron de igual precisión (\*), es decir:

$$m_{\beta_1} = m_{\beta_2} = \dots = m_{\beta_n} = m_{\beta} \quad (3.51)$$

37

Entonces tenemos:

$$m_u^2 = \frac{S^2 m_{\beta}^2}{\rho^2} [n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2] \quad (3.52)$$

38

En la ecuación anterior

$[n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\dots+2^2+1^2]$ , es lo mismo que tener  $[1^2+2^2+3^2+\dots+n^2]$ , por consiguiente esta suma puede expresarse así:

$$39 \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3.53)$$

Reemplazando tenemos:

$$40 \quad m_u^2 = \frac{S^2 m_\beta^2}{\rho^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3.54)$$

Multiplicamos la parte derecha de la ecuación por  $n/n$  tenemos:

$$41 \quad m_u^2 = \frac{S^2 m_\beta^2}{\rho^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} \quad (3.55)$$

Pero  $s^2 \cdot n^2=L$ , entonces:

$$42 \quad m_u^2 = \frac{L^2 m_\beta^2}{\rho^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \quad (3.56)$$

Despejamos los paréntesis y dividimos por  $2n$ , tenemos:

$$43 \quad m_u^2 = \frac{L^2 m_\beta^2}{\rho^2} \frac{2n^2+3n+1}{6n} \quad (3.57)$$

$$44 \quad \frac{2n^2+3n+1}{2n} = n + \frac{3}{2} \quad (3.58)$$

$$45 \quad \frac{6n}{2n} = 3 \quad (3.59)$$

$$46 \quad m_u^2 = \frac{L^2 m_\beta^2}{\rho^2} \frac{n+1,5}{3} \quad (3.60)$$

CONCLUSION: El error medio cuadrático del desplazamiento lateral del último punto, depende de la distancia total del polígono, del número de lados y de la precisión en la medición de los ángulos.

Sabemos que:  $m_{fs}^2 = m_t^2 + m_u^2$ , por consiguiente reemplazaremos las fórmulas obtenidas en la expresión anterior, pero antes, es necesario decir que  $m_t$  depende de la medición de los lados del polígono, por eso podemos afirmar que  $m_t^2 = [m_s^2]$ .

47

$$m_{fs}^2 = \frac{M^2}{2} = [m_s^2] + \frac{L^2 m_\beta^2 (n+1,5)}{\rho^2} \quad (3.61)$$

Esta es la formula del error medio cuadrático en la posición del punto final de la poligonal, antes de la compensación. Después de compensados los errores  $f_x, f_y$  tenemos la siguiente forma para la ecuación :

48

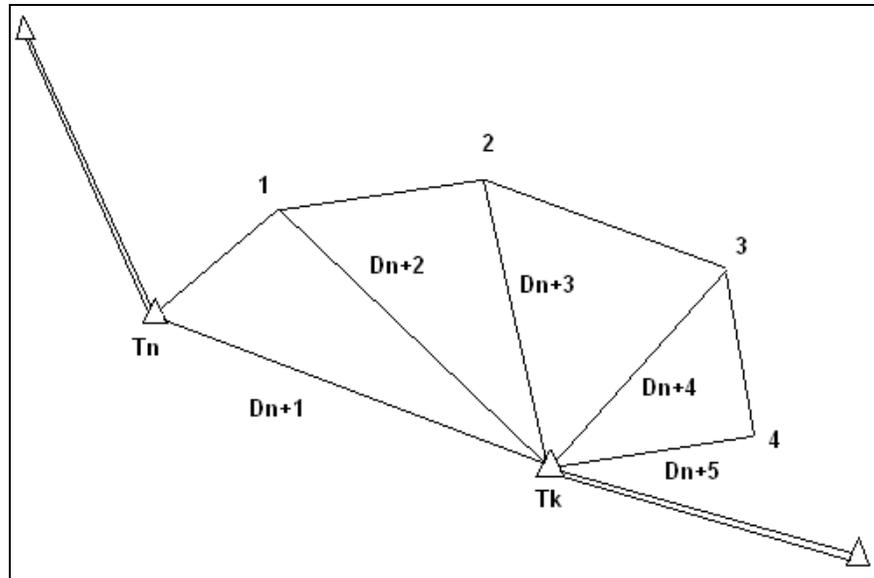
$$M^2 = \frac{[m_s^2]}{2} [m_s^2] + \frac{L^2 m_\beta^2 (n+3)}{\rho^2} \quad (3.62)$$

Para fines prácticos, se emplea la siguiente formula:

49

$$M^2 = [m_s^2]/2 + \frac{M_\beta^2}{\rho^2} [D_{n+1,i}^2] \quad (3.63)$$

$$M^2 = [m_s^2]/2 + \frac{M_\beta^2}{\rho^2} [D_{c.g.i}^2] \quad (3.64)$$



50

Fig. 24

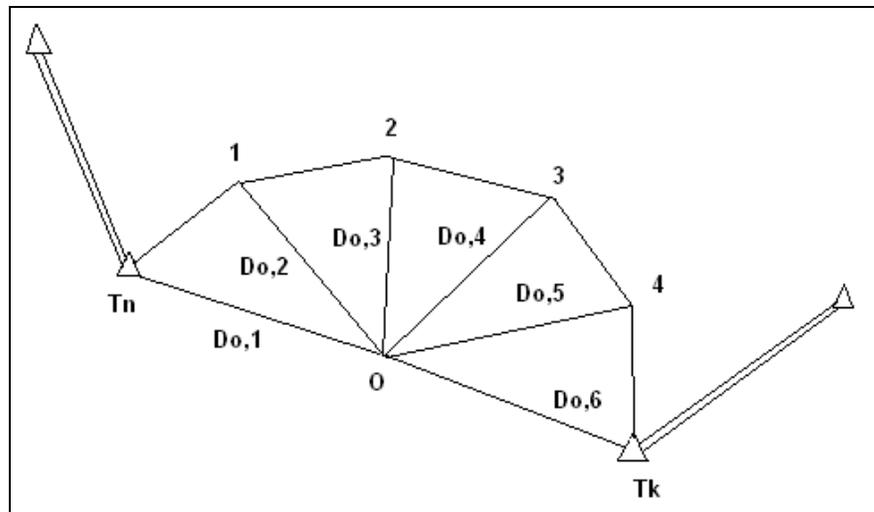


Fig. 25

$D_{n+1,i}$  - Es la distancia desde el punto final  $T_k$  a cada uno de los puntos de la poligonal en km.

$D_{c,g,i}$  - Es la distancia desde el centro de gravedad de la poligonal a cada uno de los puntos de la poligonal, en km.

Estos valores se pueden hallar gráficamente o por medio del empleo de la formula:

$$x_o = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{n+1}, \quad y_o = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} y_i}{n+1} \quad (3.65)$$

51

En otras palabras, el centro de gravedad es la media aritmética de las norte y las este (X y Y)

### 3.6.2. Método ángulo distancia - diseño

Se va a realizar un levantamiento planimétrico (perímetro aproximado 2000 m) con el siguiente instrumento:

Teodolito: Theo 20A

Aumentos: 30 x

$E_{mc\beta} : \pm 3''$

Distancia por taquimetría (estadimetría)

a. Se determina la distancia máxima

$$D_{max} = A \cdot 6 = 30 \cdot 6 = 180 \text{ m}$$

b. Numero de estaciones:

$$n = \frac{\textit{Perimetro}}{D_{max}}$$

$$n = \frac{2000}{180} = 11,11 = 12$$

c. Tolerancia angular (ángulos horarios)

$$T_{\beta} = 2,5 \cdot E_{mc\beta} \cdot \sqrt{n} = 2,5 \cdot 3'' \cdot \sqrt{12} = 25,98 \approx 26''$$

d. Error medio cuadrático lineal (Taquimetría)

$$E_{mcDH} = 0.54 \text{ m}$$

e. Error medio cuadrático del perímetro

$$M_s = 0.54 \sqrt{n} = 0.54 \sqrt{12} = 1.87 \text{ m}$$

f. Error de cierre teórico

$$E_{ct}^2 = \frac{M^2}{2} = [m_s^2] + \frac{Emc_\beta^2 p^2}{\rho^2} \cdot \frac{(n+1.5)}{3}$$

$$E_{ct}^2 = \frac{M^2}{2} = [1.87^2] + \frac{26''^2 \times 4000000}{206265^2} \cdot \frac{(12+1.5)}{3}$$

$$E_{ct}^2 = \frac{M^2}{2} = 3.4969 + 0.2860$$

$$E_{ct}^2 = \frac{M^2}{2} = 3.7829$$

$$E_{ct}^2 = M^2 = 7.5658$$

$$E_{ct}^2 = M = 2.75$$

f. Error relativo o grado de precisión

$$Gp = \frac{1}{\frac{P}{E_c}} = \frac{1}{\frac{2000}{2.75}} = \frac{1}{727}$$

Nota: Este es el grado de precisión o precisión que se exigirá o esperará en este tipo de trabajo.

### 3.6.3. Método ángulo distancia - evaluación

A continuación se presenta un ejemplo de evaluación de un levantamiento realizado, obteniéndose los siguientes datos.

Instrumento

GTS 301 DPG Topcon (estación total)

Emc $\beta$  :  $\pm 2''$

EmcDistancia :  $\pm 2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$

Datos obtenidos en el campo

Línea	Azimut	DH
1-2	138°53'02"	1092.00
2-3	212°37'58"	1046.50
3-4	326°06'14"	737.60
4-5	337°38'00"	414.10
5-1	030°31'04"	818.30

Grado de precisión obtenido:  $Gp = 1/1060$

El grado de precisión puede ser considerado como bueno dependiendo del trabajo a realizar.

Error angular: 08"

a. Numero de estaciones

$n = 5$

Tolerancia angular

$$T_{\beta} = 2.5 \cdot Emc_{\beta} \cdot \sqrt{n} = 2.5 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 11.18 \cong 12''$$

Tolerancia 12": 8" obtenido, la precisión es aceptable

b. Error medio cuadrático en distancia

Línea	$\sigma_{EDM}$
1-2	2.96
2-3	2.89
3-4	2.48
4-5	2.15
5-1	2.58

d. Er  
ror medio  
cuadrátic  
o del  
perímetro

$$Emc_{\beta} = \sqrt{e_{1-2}^2 + e_{2-3}^2 + e_{3-4}^2 + e_{4-5}^2 + e_{5-1}^2}$$

$$Emc_{\beta} = \sqrt{2.96^2 + 2.89^2 + 2.48^2 + 2.15^2 + 2.58^2}$$

EmcP = 5.88 mm = 0.006 m

e. Error de cierre

$$E_{ct}^2 = \frac{M^2}{2} = [m_s^2] + \frac{Emc_{\beta}^2 P^2}{\rho^2} \cdot \frac{(n+3)}{12}$$

$$E_{ct}^2 = M = 0.13 m$$

f. Error relativo o grado de precisión

$$Gp = \frac{1}{\frac{P}{Ec}} = \frac{1}{\frac{4108.5}{0.13}} = \frac{1}{31603}$$

Nota el grado de precisión esperado es muy superior al obtenido, por ello el trabajo debe revisarse. Esto dependería de las exigencias requeridas

### 3.7. CONCEPTOS BÁSICOS DE NIVELACIÓN

NIVELACION: Es la determinación de las alturas de los puntos de la superficie terrestre con respecto a un punto escogido o la superficie del mar.

#### 3.7.1. Fuentes de error

##### 3.7.1.1. Error de observación

Este es el error que depende de: aumento del telescopio, del error de lectura en la mira y el error de redondeo de ese valor, del error de coincidencia de la parábola para las burbujas de contacto (en los niveles con compensador del error del sistema automático), y de la distancia de la visual.

##### 3.7.1.2. Error de aumentos

Es el error causado entre la relación la luz incidente a través del ojo humano y los aumentos del instrumento.

$$E_a = \frac{60''}{A} \quad (3.72)$$

NOTA: 60" es el mínimo ángulo bajo el cual se puede distinguir sin el empleo de sistemas ópticos 2 puntos en el espacio y es llamado ángulo crítico de observación o poder de resolución.

Algunos autores consideran la siguiente tabla para algunos trabajos específicos.

Ordinaria	100"/A a 60"/A
Media	60"/A a 30"/A
Coincidencia	30"/A a 10"/A

Tabla 4

### 3.7.1.3. Error de lectura

Es el error compuesto por el error en la toma del dato y el error del patrón del cual se toma el mismo.

t : mínima división del patrón de medida.

$$E_L = \frac{t}{2} \quad (3.73)$$

### 3.7.1.4. Error de la burbuja

Es aquel error causado por la imprecisión de la burbuja de aire al colocarlo en su centro, además debido a la poca sensibilidad de la misma

$E_u$  : Error de la burbuja.

t : Mínima división de la burbuja.

En ciertos catálogos viene expresado en grados minutos y segundos, o en milímetros.

$$E_u = 0.1 \cdot \tau \quad (3.74)$$

$E_{Bu}$  : Error de colocación de la burbuja.

D : Distancia horizontal.

$$E_{Bu} = \frac{E_u \cdot D}{\rho} \quad (3.75)$$

### 3.7.1.5. Error de lectura debido a la resolución del telescopio

Es la capacidad de distinguir dos objetos a determinada distancia.

$E_r$  : Error de lectura debido a la resolución del telescopio.

$$E_r = \frac{60''}{A \cdot \rho} \cdot D \quad (3.76)$$

### 3.7.1.6. Error de observación de la mira

Es el error de la toma de la lectura a una distancia dada y que depende de la mínima división del patrón graduado y el poder de resolución de instrumento

$t$  : Mínima división de la mira

$$E_{OM} = \left( 0.156 \cdot \frac{D}{A} + 0.040 \cdot t \right) \quad (3.77)$$

### 3.7.1.7. Error en la mínima división de la mira

Es la mitad del error garantizado por el fabricante en la colocación de la mínima división de la escala graduada.

Máx.  $\Delta_{52 EM} = 1 \text{ mm}$  { Dadas por la fabrica para miras al cm }

$$E_d = \frac{\max \Delta_M}{2} = 0.5 \text{ mm}$$

### 3.7.1.8. Errores del medio externo

Son los errores inherentes a las condiciones ambientales donde se realizan la medición.

Se considera que este valor no excede el 15% del error total para nivelaciones de precisión media, el estudio de estos errores se trata en libros de más específicos por sus características especiales. Además porque la finalidad de esta obra es el empleo de los errores en el diseño de la metodología y las especificaciones, mas no la explicación de estos.

### 3.7.1.9. Principales fuentes de error en la nivelación geométrica

En la nivelación geométrica la principal influencia en la precisión es debida a los errores del equipo, del operador y a los errores del medio externo. Como es sabido en la nivelación geométrica el desnivel  $h$  es igual a la diferencia entre los valores de las lecturas de las miras atrás y adelante:

$$h = a - b \quad (3.78)$$

Si  $E_a$  y  $E_b$  son los errores medios cuadráticos en las observaciones totales a las miras entonces el error del desnivel será:

$$E_h = \sqrt{E_a^2 + E_b^2} \quad (3.79)$$

Pero partiendo de que las mediciones son homogéneas entonces  $E_a = E_b = E$ , por consiguiente:

$$E_h = E_{OT} \cdot \sqrt{2} \quad (3.80)$$

Partiendo del supuesto de que las mediciones se comportan bajo el criterio de igual valor de certeza (homogéneas), entonces podemos afirmar que el error total en la observación es igual a: (Aquí podemos ver la aplicación del error de la suma)

$$E_{OT} = \sqrt{E_{BU}^2 + E_{OM}^2 + E_r^2 + E_d^2} \quad (3.81)$$

Con base en esto podemos diseñar las especificaciones de la metodología a emplear y clasificarla según su orden.

$n$  : Numero de armadas.

$$E_{Km} = E_h \sqrt{n} \quad (3.82)$$

Resumiendo para el diseño de una especificación, o en otras palabras para hallar el error de cierre en una nivelación se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Desde el punto de vista estadístico se trabajara con un coeficiente igual a tres (3), cuya esperanza matemática equivale 0.99996 que garantiza una alta precisión con un mínimo de datos.

$$EC_{\max} = Tolerancia = 3 \cdot E_{Km} \cdot \sqrt{L} \text{ km} \quad (3.83)$$

### 3.7.1.10 Nivelación Geométrica

Para la nivelación geométrica se ha descrito los principales fuentes de error para obtener una precisión media que es la utilizada en los trabajos de topografía convencional.

Algunos de estos elementos se emplean para el diseño de especificaciones en otros procedimientos topográficos.

El fundamento del algoritmo de procedimiento es establecer la función del proceso que se esta realizando  $E_j: h = a - b$

Luego enunciar la ley estadística o condiciones bajo las cuales se considera esta sujeto a proceso de medición, es decir bajo que modelo se comporta el proceso de obtención del dato (homogéneo o heterogéneo).

Definimos los errores que están comprometidos en todo el proceso de obtención del dato o resultado.

Finalmente se calcula un error total que es la suma de todos los errores particulares para establecer el mínimo rango dentro del cual los procesos deben arrojar los resultados para poder determinar así el grado de precisión planeado y el obtenido. Pudiendo concluir así el tipo de metodología y equipo a emplear aminorando así el empleo de recursos humanos y técnicos.

#### Ejemplo

Dado el siguiente nivel de precisión diseñar las especificaciones para realizar una nivelación de 1 Km.

Ni 025

Aumentos 25 x

Error medio de una nivelación doble de 1km  $\pm 2.5$  mm

Compensador: margen funcional  $\pm 10'$ . Exactitud de calado: 0,5"

Distancia máxima

$$D_{max} = 2.5 \cdot 25 = 62.5$$

Error de la burbuja

$$E_{Bu} = \frac{P_c \cdot D}{\rho} = \frac{0.5 \times 62500}{206265} = 0.15mm$$

Error de observación de la mira

$$E_r = \frac{60''}{A \cdot \rho} \cdot D = 0.73mm$$

Error en la mínima división de la mira

Ed = 0.5 mm  
Error de observación total

$$E_{OT} = \sqrt{E_{BU}^2 + E_{OM}^2 + E_r^2 + E_d^2}$$

$$EOT = 1.2 \text{ mm}$$

$$E_h = EOT\sqrt{2} = 1.68 \text{ mm}$$

Numero de estaciones del nivel

$$N = 1000 / (2 \times 62.5) = 8$$

Error por kilómetro

$$EKM = 1.68 \sqrt{8} = 4.75 \text{ mm}$$

Tolerancia

$$T = 2.5 \times 4.75$$

$$T = 11.88 \text{ mm}$$

Tolerancia General ( 2.5 mm medio externo)

$$E_c = TG \cdot \sqrt{LKM}$$

$$E_c = 15 \text{ mm} \sqrt{LKM}$$

### 3.7.1.11 La placa plana paralela

El micrómetro de placa plano paralela es un aditamento practico y de fácil manejo para el aumento considerable de precisión.

Sencillamente se enchufa sobre el anteojo del instrumento, cuadra la cruz del retículo sobre un centímetro entero y lee los centímetros, en la mira los milímetros, decimos y según el modelo los centésimos en el micrómetro de la placa plano paralela.

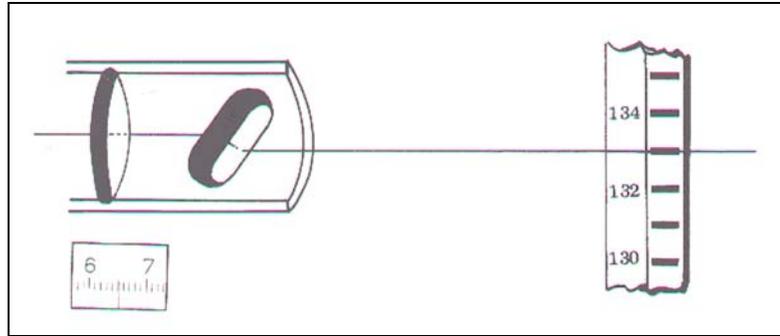


Fig. 31. Esquema de la placa plano paralela

**Lectura de la mira**                    **133.000 cm**  
 Lectura del micrómetro 000.652 cm  
 Lectura total                                133.652 cm

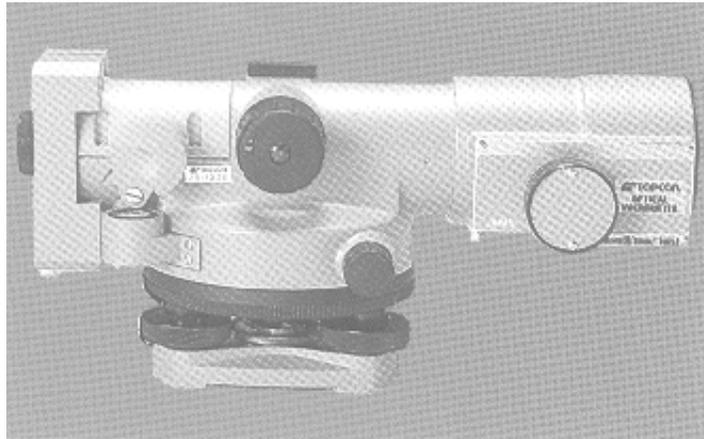


Fig 32. Nivel de precisión y placa plano paralela

#### Error de horizontalidad

Es el error ocasionado, cuando el instrumento no queda geoméricamente vertical al eje horizontal, este error se trasmite casi íntegramente a las visuales.

$$E_h = \frac{1}{20} S \quad (3.84)$$

S: Sensibilidad

## Error de puntería

Es el ángulo formado por la mira o jalón y el hilo vertical del retículo.

$$E_p = \frac{10}{A} \left( 1 + \frac{4A}{100} \right) \quad (3.85)$$

### Ejemplo

Dado el siguiente nivel de precisión diseñar las especificaciones para realizar una nivelación de 1 Km., con un distancia máxima de 40 m.

TS – E1 TOPCON

Aumentos: 42x

1 Km. de doble nivelación  $\pm 0,2$  mm

Sensibilidad del nivel 10"

a. Error de horizontalidad

$$E_h = \frac{1}{20} S = 0.5''$$

b. Error de puntería

$$E_p = \frac{10}{42} \left( 1 + \frac{4 \times 42}{100} \right) = 0.64''$$

c. Error Total

$$E_T = \sqrt{0.5''^2 + 0.81''^2} = 0.64''$$

d. Convirtiendo el error total

$$E_T = \frac{0.81''}{206265} \cdot 40000 = 0.15mm$$

e. Numero de Estaciones

$$N = 1000/40 = 25$$

f. Tolerancia

$$E_{KM} = 0.15\sqrt{25} = 0.75mm$$

### 3.8. GPS

El sistema Global de posicionamiento (GPS) es un sistema satelital basado en señales de radio emitida por una constelación de 21 satélites activos en orbita alrededor de la tierra a una altura de aproximadamente 20000 Km. El sistema permite el cálculo de coordenadas tridimensionales que pueden ser usadas en navegación o mediante el uso adecuados, para determinación de mediciones de precisión.



Fig. 33

En la actualidad se han desarrollado técnicas para lograr exactitud topográfica y geodesia. Estas son conocidas como técnicas diferenciales o métodos de posicionamiento relativo.

### 3.8.1. Modalidades de medición

Ya sea que el tipo de medición sea absoluto o relativo, se consideran dos tipos de modalidad en la toma y procesamiento de mediciones que son: Estática y Cinemática. Como su nombre lo indica, estática denomina a observaciones estacionarias, mientras que la modalidad cinemática implica movimiento. A continuación se presentan algunos tipos de estas modalidades.

**Absoluto Estático:** Esta modalidad es usada cuando se desea posicionamiento de puntos de exactitud moderada, en el orden de 5m a 10 m en este caso el modo de cálculo se realiza posteriormente.

**Absoluto Cinemática:** Es generalmente usado para la determinación de la trayectoria de vehículos en espacio y tiempo con una exactitud de 10m a 100m

**Relativo Estático:** Cuando es usado por fases portadoras, es el método más aplicado en tareas de Geodesia. En esta modalidad lo que se hace es determinar vectores o "líneas – bases" entre dos puntos en los cuales se dejan receptores estacionarios. Las precisiones logrables van desde 1 ppm hasta 0.1 ppm para puntos separados pocos kilómetros.

**Relativo Cinemática:** Como en el método anterior, éste involucra un mínimo de dos receptores, pero uno de ellos estacionario y otro móvil realizando observaciones simultáneas. Las precisiones logrables varían, de acuerdo al tipo de receptor y postprocesamiento, desde el orden de pocos metros hasta centímetros.

### 3.8.2. Errores

Dilución de la precisión (DOP)

Dilución de la precisión Geométrica (GDOP)

$$GDOP = \frac{\sqrt{\sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\lambda}^2 + \sigma_h^2 + C^2 \sigma_{\dot{\alpha}}^2}}{\sigma_o}$$

Dilución de la precisión posición (PDOP)

$$PDOP = \frac{\sqrt{\sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\lambda}^2 + \sigma_h^2}}{\sigma_o}$$

Dilución de la precisión Horizontal

$$HDOP = \frac{\sqrt{\sigma_{\phi}^2 + \sigma_{\lambda}^2}}{\sigma_o}$$

Dilución de la precisión Vertical

$$VDOP = \frac{\sigma_h}{\sigma_o}$$

### 3.9 NORMAS ALTA-ASCM<sup>5</sup>

	Urbano	suburbano	Rural	Montañoso
Lectura directa del instrumento (2)	20"<1">10"	20"<1">10"	20"<1">20"	1"<1">1"
Lectura a estima del instrumento (3)	5"<0.1">NA	10"<0.1">NA	NA	NA
Numero de observaciones por estación (4)	2 D & I	2 D & I	1 D & I	1 D & I
Dispersión de la media D & I no debe exceder (5)	5"<0.1">5"	10"<0.2">10"	20"<0.3">20"	30"<0.5">30"
Cierre angular	10"√N	15"√N	20"√N	30"√N
Cierre lineal (6)	1:15000	1:10000	1:7500	1:5000
Medición de distancias (7)	EDM o doble medición con cinta de acero	EDM o cinta de acero	EDM o cinta de acero	EDM o cinta de acero
Mínima longitud medida (8), (9),(10)	81 m, 153m, 20m	54m, 102m, 14m	40m,76m, 10 m	27m, 51 m, 7m

Nota 2: 10!; Teodolito de micrómetro, <1'> Teodolito de escala, 10" (Negrilla): Teodolito electrónico, 20" (itálica): Teodolito de micrómetro o vernier.

Nota 3: Calculado

Nota 4: D: Directa, I: Inversa

<sup>5</sup> American Land Title Association – American Congress on Surveying & Mapping

Nota 5: Calculo de la dispersión

Nota 6: Error de cierre en distancia

Nota 7: EDM y cinta aplicando todas la correcciones

Nota 8: Error en EDM 5 mm

Nota 9: Cinta calibrada



# 4. INSTRUMENTOS TOPOGRAFICOS

## 4.1. GIROSCOPIO

El giróscopio es un instrumento que se encuentra suspendido y con su eje de giro alineado perpendicularmente a la vertical terrestre. Al girar a gran velocidad se origina un momento angular. A su vez, el movimiento de rotación de la Tierra tiende a desplazar la orientación del giróscopo en un plano horizontal. La ley física de conservación del momento angular hace que el giróscopo se alinee paralelamente al eje de giro terrestre para mantener constante su momento angular. Esta aplicación de una ley de la física permite fabricar una herramienta, para determinar el Norte Geográfico, sin interferencias magnéticas y con gran precisión. Obviamente, es necesario que el giróscopo alcance una velocidad de giro constante, que el rozamiento sea mínimo y la estabilidad de posicionamiento, perpendicular a la vertical terrestre, sea máxima



Fig.

El giróscopo, como cualquier instrumento de medida, es susceptible de sufrir descorrecciones por lo que es necesario verificar el valor de los errores de medición intrínsecos a cada aparato. Para ello, es preciso realizar observaciones astronómicas de determinación del Norte que, comparadas con las observaciones del giróscopo nos permitan la calibración de éste.



Fig.

## 4.2. 3D LÁSER SCANNER

Este sistema de medición en 3D, permite capturar la posición en forma muy precisa (apenas algunas micras) objetos que se encuentran en movimientos, operando con un único sensor. El sistema permite medir hasta 500 posiciones por segundo, se lo emplea para el control periódico de instalaciones y brazos robóticos, es muy cómodo su empleo pues no requiere de trípodes o piezas especiales, e incluso puede ser usado en recintos muy estrechos.

### 4.2.1. Escáner Láser CYRAX

Este es un nuevo y poderoso sistema de medición, que resuelve los problemas de ingeniería y topografía más complejos con una sensible reducción de costos y tiempos de construcción.

Una nube de puntos generada por miles de rayos láser provenientes de un escáner CYRAX 2500, permite visualizar una imagen tridimensional y a color, desde cualquier perspectiva del proyecto.

Cada punto de la nube tiene una posición precisa digitalizada en coordenadas 3D, que se puede utilizar directamente para visualizaciones en 3 dimensiones. O mediciones de punto a punto.

El programa de ajuste y proceso CYCLONE convierte la imagen de la nube de puntos en modelos digitales 3D, dibujos 2D, superficies, volúmenes, perfiles, curvas de nivel, eTc. y exporta a aplicaciones CAD o similares. Asimismo permite la revisión visual de interferencias en 3D.

Para escanear sitios o estructuras completas el equipo CYRAX se puede girar, inclinar y lo desplazar con gran facilidad.



Fig. 140

### Características

Cientos de miles de puntos en 5-15 minutos, Escaneo rápido y con gran resolución de puntos 20,000m3/escaneo (precisión<6mm) 160,000m3/escaneo (a 100m)

Precisión de 6mm a 50m  
Capacidad de resolución <1mm  
Precisión de 2mm en superficies modeladas a 50m  
Punto láser <6mm a 50m

#### **4.2.2. Escáner Láser Leica HDS3000**

Con el Leica HDS 3000, high-definition surveying nunca ha sido tan fácil y familiar para topógrafos y profesionales de la medida. Por ejemplo, utiliza un trípode estándar para su estacionamiento sobre un punto conocido o sobre cualquier otro punto. Los puntos capturados pueden ser alineados de manera precisa a nuestro sistema de coordenadas local para su completa compatibilidad con los diseños de proyecto existentes. La orientación del instrumento y su completa selección del campo de visión, puede ser definida fácil y rápidamente pulsando el nuevo botón QuickScan. Su único diseño de doble ventana nos permite, para una utilización eficiente, la toma de su máximo campo de visión de 360° x 270° sin la re-orientación del instrumento, incluyendo la captura de la cúpula completa de toda la escena. Con la tecnología SmartScan, pueden ser tomadas regiones adicionales con mayor detalle si es necesario. Estas características de HDS3000 no sólo hacen que el láser escáner sea más familiar para los topógrafos, sino también más productivo para todos los profesionales de la medida.



Fig. 141

## Características

Máximo campo de visión 360° x 270°, único diseño de doble ventana  
Totalmente seleccionable tanto campo de visión como de la densidad a escanear  
Cámara digital integrada calibrada para la toma superpuesta de fotos  
Tamaño de punto <6mm a 50m  
Precisión en la posición de <6mm a 50m  
Introducción de Altura de instrumento  
Estacionamiento en punto conocido  
Botón QuickScarn-M para una fácil selección del campo de visión

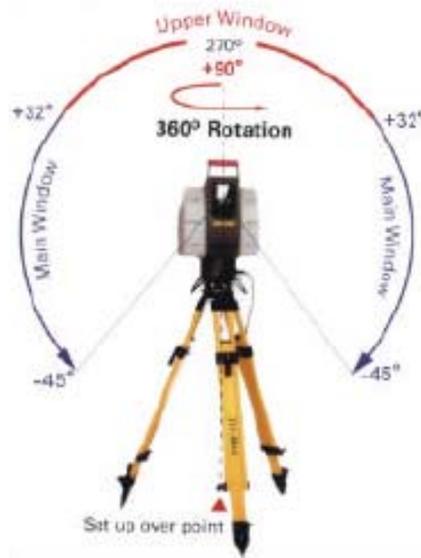


Fig. 142

### 4.2.3. Aplicaciones

- Inspección y control de estructuras: tanques, buques, destilerías, etc.
- Levantamientos e inspecciones en la construcción.
- Estudio de caminos, minería.
- Curvas de nivel, perfiles, superficies y volúmenes.
- Exportación a CAD de imágenes 3D
- Generación de planos dimensionales
- Comprobación visual de interferencias
- Herramientas de diseño conceptual
- Renderizado... y mucho más.



Fig. 143

### 4.3. Accesorios



Fig. X Acodados



fig. X Trípode



Fig. Estacion Robotizada



Fig. Estación y GPS



Fig. X Estación y cámara



Fig. X Prisma de 360



Fig. X Distanciómetro portátil



Fig. Base especial y colimador

# 4

## POLIGONALES Y TRIANGULACION

### 4.1 Introducción

En lugares llanos, boscosos y en donde los procedimientos ocasionan daños ecológicos, donde la densificación de la red de triangulación y trilateración se hace difícil o económicamente no es rentable debido a las condiciones difíciles del terreno (como es el caso de Colombia) se emplea la Poligonación.

### 4.2 Poligonales

Consiste en la determinación de la posición de puntos topográficos o geodésicos mediante el del trazado de líneas quebradas, sobre un lugar determinado (itinerario o poligonal) o el sistema de líneas quebradas entrelazadas (red poligonométrica) en las cuales se miden todos los ángulos y lados consecutivamente.

#### Cronología del trabajo de una poligonal

- En el desarrollo de trabajos que necesiten el uso de poligonales se deben tener en cuenta los pasos del siguiente diagrama.
- La exigencia del error angular esta dada por el orden a clase a la que pertenece y a sus limitantes caracterizados por las posibilidades de los equipos.
- No se debe olvidar que una vez determinado el error angular se debe realizar el ajuste angular.
- El llamado grado de precisión error relativo o errores de cierre, depende del tipo de trabajo y sus requerimientos.
- De acuerdo con la precisión de los ángulos y distancias se debe seleccionar el método de ajuste.

Se recomienda no eludir ningún paso del siguiente diagrama.

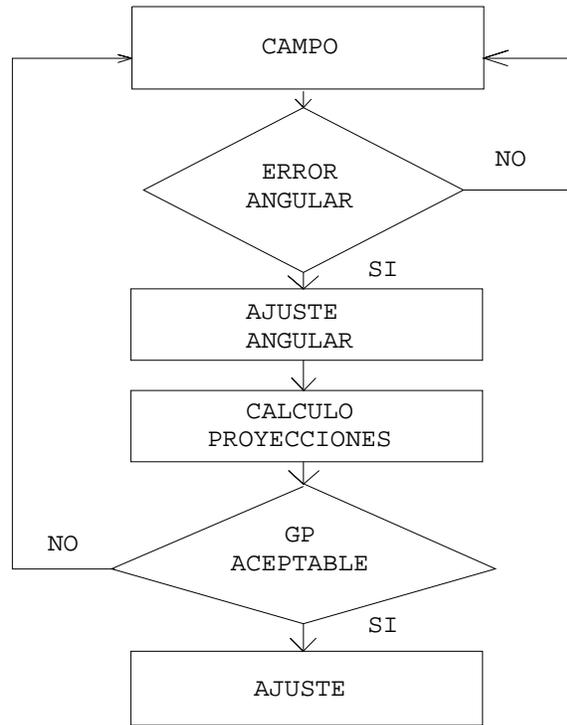


Fig. 1

### 4.3. Clasificación

Según muchos autores existen diversos tipos de clasificación para las poligonales, aquí se plantea una clasificación en función del control.

Es importante que todas las poligonales estén integradas a sistemas topográficos o geodésicos.

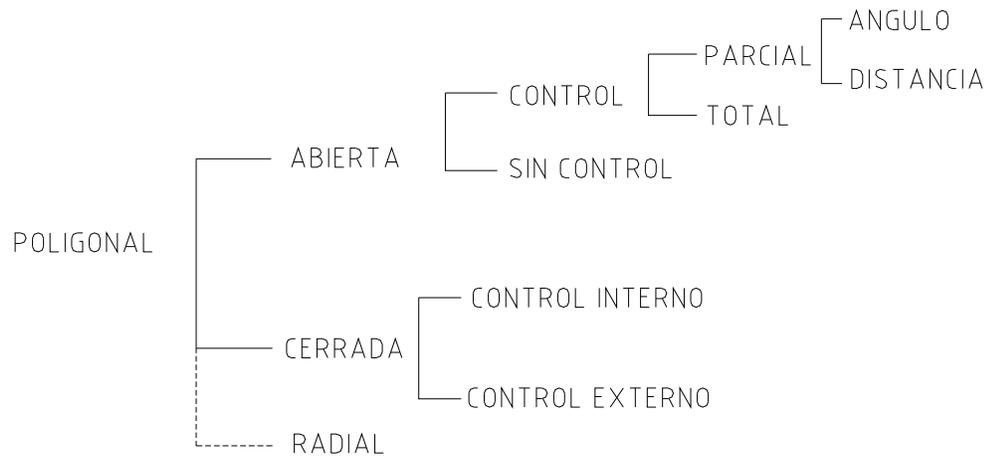


Fig. 2

## Poligonal Abierta

### Control en ángulo

Poligonal en la cual los lados inicial y final poseen orientación, esto permite verificar los ángulos al transportar el ángulo inicial; no se verifica cada ángulo, sólo se detalla al cierre final.

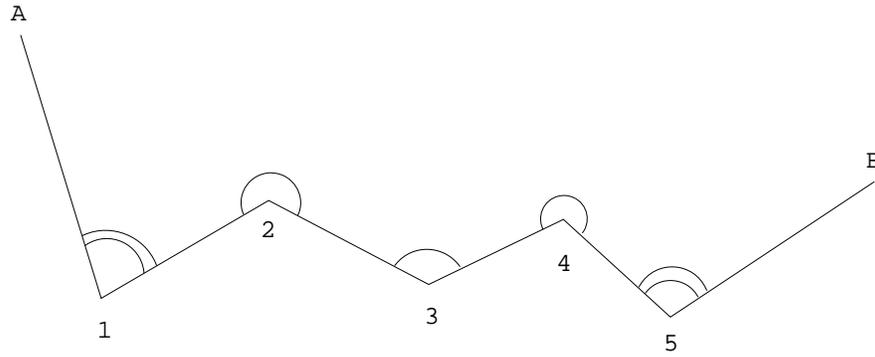


Fig. 3

Otra forma es que los puntos 1 y 6 sean íntervisibles pudiéndose determinar los ángulos  $\beta_{12}$  y  $\beta_{56}$ , no se conoce la distancia 1,6.

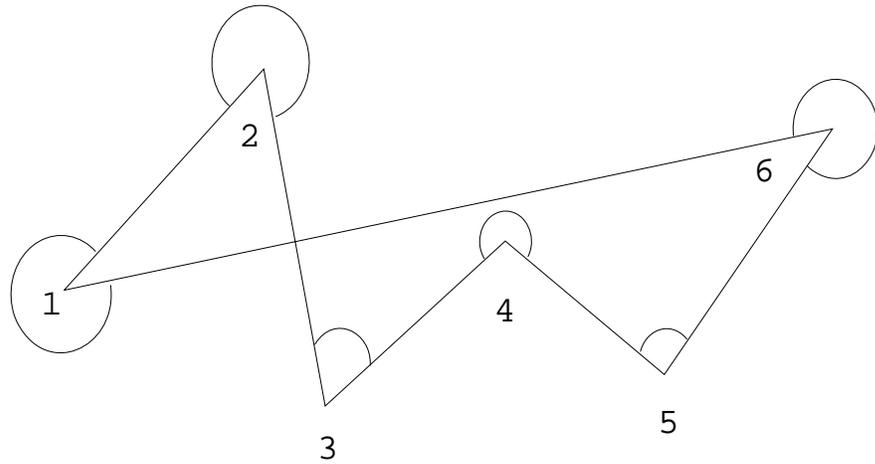


Fig. 4

### Control en distancia

Poligonal cuyos puntos inicial y final tiene coordenadas conocidas; no posee control en ángulo.

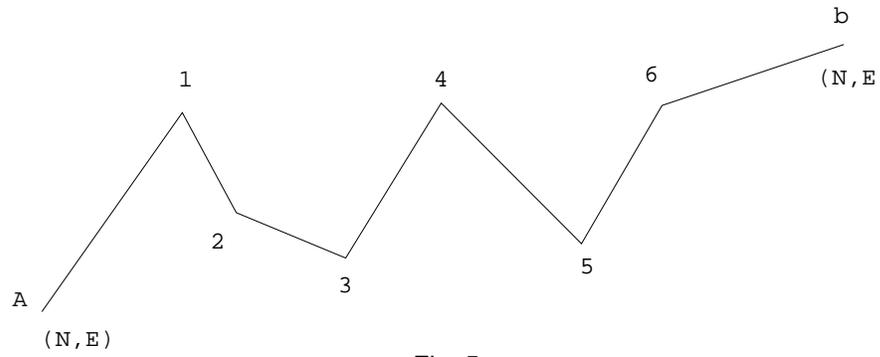


Fig. 5

**Control total**

Es la poligonal que parte de un punto con coordenadas conocidas y orientada a partir de una línea anterior, llega a un punto con coordenadas conocidas y una línea orientada siguiente o sale de una línea conocida y llega a otra línea conocida.

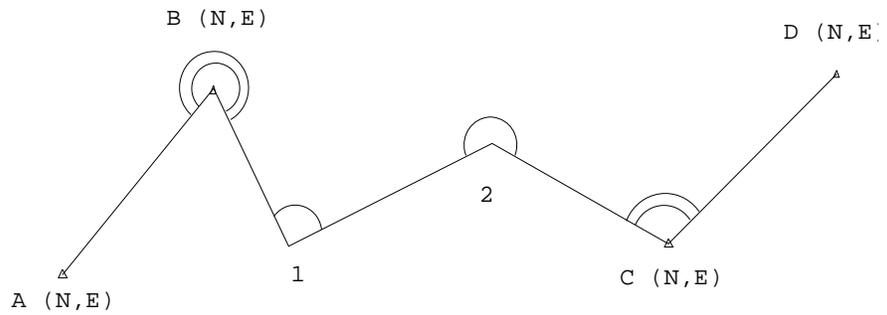


Fig. 6

Posee control en ángulo y distancia.

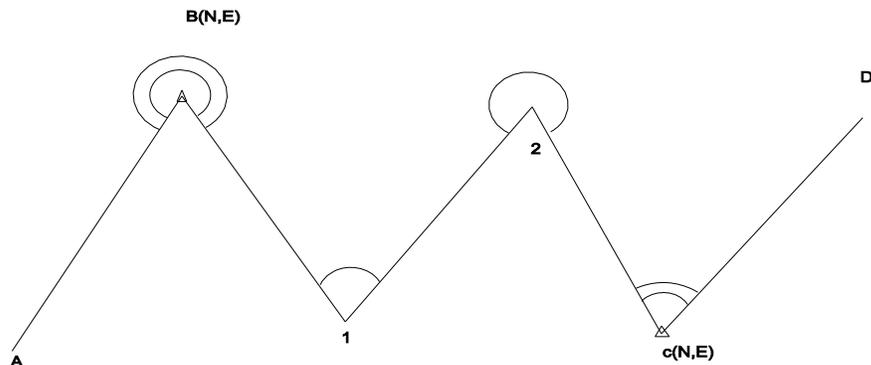


Fig. 7

Se conoce al azimut BA y CD, coordenadas de B y C. Y se desconocen las coordenadas de los puntos A y D. Este tipo de poligonal y la anterior con las que son consideradas geoméricamente abierta y analíticamente cerradas.

También se pueden realizar diversas combinaciones de ellas.

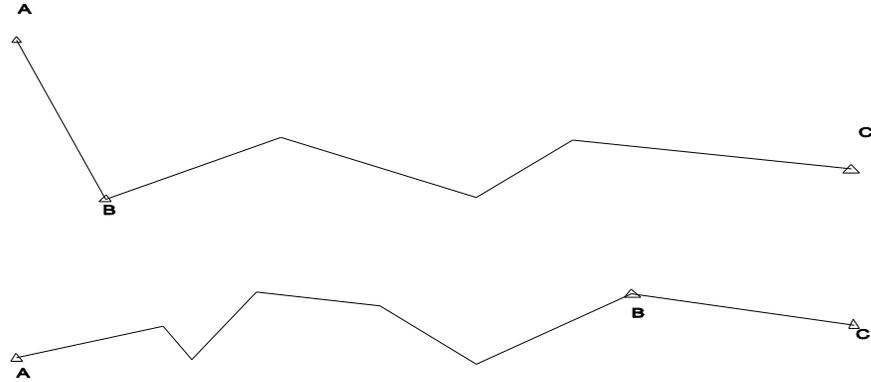


Fig. 8

Sin control

Poligonal que parte de un punto desconocido y llega a otro punto desconocido (Angulo y Distancia). Se comprueba repitiendo el trabajo.

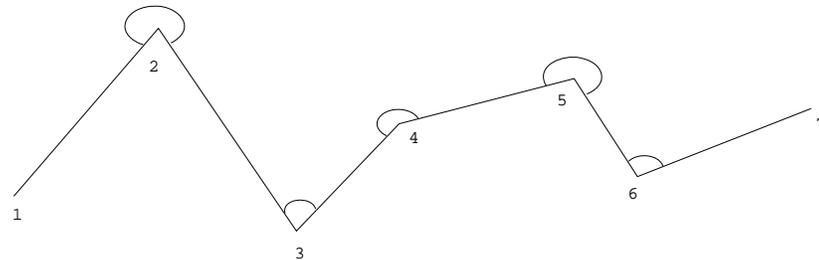


Fig. 9

Se puede realizar una comprobación mediante orientación magnética, instrumental o astronómica de cada una de las líneas.

Poligonal cerrada

Es aquella cuyo punto inicial coincide con el punto final.

Control Interno: Es el control angular entre los lados del polígono, tiene que ver con la geometría de la figura, la poligonal puede cerrar en ángulo y distancia pero no es posible determinar la precisión de errores sistemáticos (por ejemplo asumir una constante K del tránsito diferente a la real)

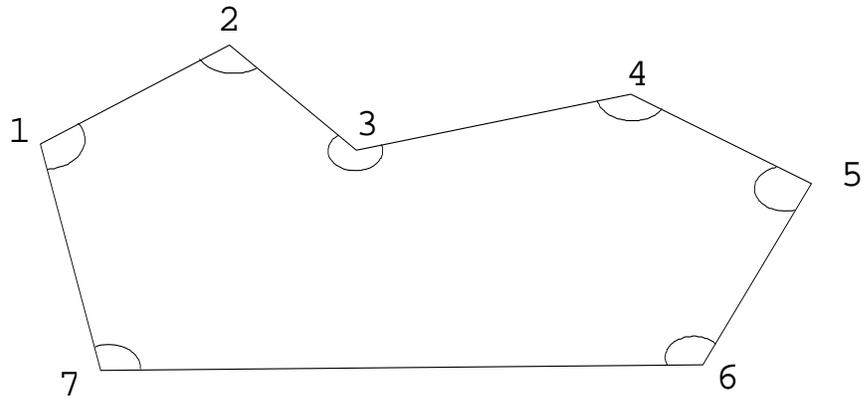


Fig. 10

Control Externo: En este tipo de control al menos dos puntos de la poligonal (lo mas alejado posible) debe se posible contrastarlos con información de otra poligonal, es decir, deben tener coordenadas conocidas, de esta manera además de control, geométrico interno es posible detectar algún error sistemático que afecta el cierre lateral.

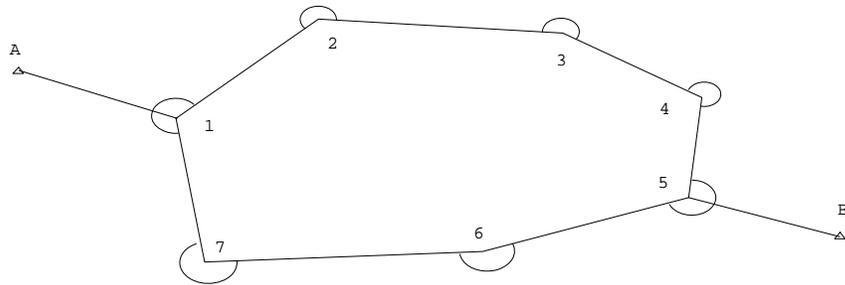


Fig. 11

### Radial

Seudopoligonal formada a partir de un punto estación y cuyos vértices no son ocupados por el instrumento. Existe control angular en la estación por cierre al horizonte pero no posee control de distancias.

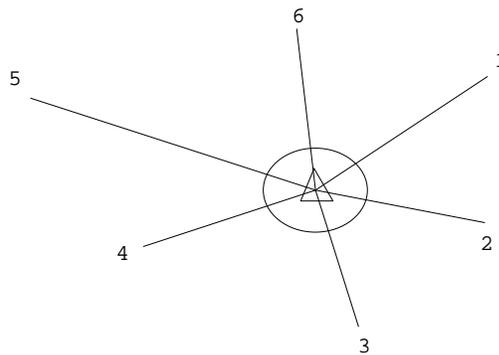


Fig. 12

## Poligonal tridimensional

Línea poligonal abierta o cerrada en la que además de resolver la posición planimétrica de puntos interesa determinar su posición altimétrica, quiere decir esto que a cada punto se le puede asignar tres coordenadas: N, E, h (h: altura, altitud, elevación, cota etc.).

Para la determinación de h se debe partir de un punto de altura conocida o asumida y si la poligonal tiene control vertical (cerrada o ligada) debe satisfacer las especificaciones dadas como en una poligonal planimétrica.

Este tipo de poligonal se puede hacer con tránsito y mira o tránsito y MED; debemos recordar que la determinación de h se hace por nivelación trigonométrica, es decir empleando el tránsito.

En el trabajo de campo se determinan ángulo, distancia y elevación que significa que deben registrar lecturas de círculo horizontal, círculo vertical, distanciómetro o los tres hilos si se emplea mira.

Empleando tránsito y mira la precisión de la nivelación trigonométrica depende de la longitud de las visuales, el cuidado en la lectura de la mira, la magnitud del ángulo vertical y la apreciación del círculo vertical del instrumento (ver modelos de error, levantamiento con mira vertical).

## 4.4 Métodos de levantamiento con tránsito

Notas previas:

- Tránsito repetidor: Tiene dispositivo fijador de ángulos
- Tránsito reiterador: No fija ángulos
- Ceros atrás: Si es con tránsito repetidor se coloca en ceros el círculo horizontal, se fija la lectura y se localiza el punto anterior; si es con tránsito reiterador se localiza el punto y luego se pone en ceros el círculo.
- Barrer el ángulo: Localizar el punto atrás, soltar tornillo de fijación (reiterador) o palanca de fijación (repetidor), localizar punto adelante.
- Los puntos a los que se hace referencia para instalar el tránsito deben estar materializados, es decir, señalados con estaca y puntilla.

Ceros atrás

Procedimiento de campo

Amar el tránsito (centrar y nivelar) en un punto, dirigir la visual al punto anterior en ceros (aconsejable un valor un poco mayor<sup>6</sup>).

En un levantamiento por ceros atrás, se mide en cada vértice de la poligonal el ángulo formado por la línea anterior y la línea siguiente; el ángulo es horario o contra-horario según el sentido de graduación del círculo horizontal (dextrorsum o sinistrorsum).

Para el caso de un poligonal cerrada los ángulos son internos si se recorre en sentido horario y los ángulos son contra-horarios o sentido contra-horario y los ángulos son horarios.

Una poligonal cerrada tiene verificación angular así:

Ángulos internos:

$$\Sigma \text{ Teórica de ángulos internos} = (n-2) 180^\circ \quad (7.1)$$

Ángulos externos:

$$\Sigma \text{ Teórica de ángulos externos} = (n+2) 180^\circ \quad (7.2)$$

Si la poligonal es abierta con control total (corrida entre líneas de dirección conocida):

$$Az \text{ llegada} = Az \text{ salida} + S \text{ ángulos} - (n \cdot 180^\circ) \quad (7.3)$$

Ventajas y desventajas del levantamiento por ceros atrás

Ventajas:

- Al no transitar en el paso de la visual atrás a la visual adelante se elimina la influencia del error por colimación horizontal que pueda tener el instrumento.
- El error por centrado, por punteo tanto atrás como adelante, por lectura del círculo atrás o adelante, es local, esto quiere decir que no se propaga.
- Es fácil una comprobación visual de la magnitud del ángulo medido

Desventajas:

- No se tiene de inmediato la comprobación angular para el caso de una poligonal cerrada o ligada.
- Para el cálculo de coordenadas se deben convertir los ángulos a horarios (contra horario) o azimut

---

<sup>6</sup> Se aconseja que el valor que se señale en el círculo no sea 00°00'00" para evitar un error de índice, que consiste en leer el cero sin que el aparato este realmente en ceros o registrar el valor antes de realmente leerlo.

## Azimut

Nota: Antes de empezar el trabajo con el teodolito se debe conocer la dirección del norte seleccionado: verdadero, magnético o asumido.

### Procedimiento de campo

Armado el tránsito en un punto, dirigir el aparato en ceros, ( $000^{\circ}00'$ ) hacia el norte seleccionado, liberar el movimiento horizontal, dirigir la visual al punto siguiente, es decir barrer el ángulo entre la dirección norte y el punto siguiente.

Trasladar el aparato al punto siguiente, armar, dirigir la visual al punto anterior con el azimut señalado en el círculo horizontal y el telescopio en posición II o inversa, transitar y dirigir la visual al punto siguiente, registrar el valor de la observación. Este proceso se repite en cada punto.

En el levantamiento por azimut se mide el ángulo que cada línea hace con la dirección norte-sur (definición de azimut).

### Ventajas:

- La comprobación angular al terminar el levantamiento es inmediata si necesidad de hacer ninguna operación.
- El ángulo registrado en la cartera de campo se utiliza directamente para el cálculo del cuadro de coordenadas.

### Desventajas:

Por la necesidad de transitar se introduce en el ángulo medido el posible error de colimación horizontal que pueda tener el tránsito.

Nota: Esto puede evitarse utilizando el método del contra-azimut, en que la visual al punto anterior se hace en posición directa con el contra-azimut de la línea señalada en el círculo y por lo tanto no es necesario transitar.

- Por ser el valor del ángulo anterior el que se utiliza para la visual atrás, el error cometido en un punto se propaga desde ese punto hasta el final.

## Deflexiones

Nota: Debe conocerse la dirección de la primera línea.

### Procedimiento de campo:

- Armar el tránsito en un punto, dirigir la visual al punto anterior en ceros ( $000^{\circ}00'$ ) en posición II o invertida, transitar y dirigir la visual al punto siguiente, registrar el valor de la observación. Este proceso se repite exactamente en todos los vértices de la poligonal, ya sea abierta, cerrada o ligada.

En el levantamiento por deflexiones se mide, en cada vértice, el ángulo formado por la línea, con la prolongación de la anterior, hacia la derecha o hacia la izquierda, varía entre ceros y 180° (definición de deflexión).

El dato que se registra en el momento de hacer la observación debe incluir la letra D (Derecha) o I (Izquierda) alternativamente se pueden dejar todos los ángulos izquierdos o derechos según el sentido de la graduación del círculo y determinar el signo posteriormente en la oficina de acuerdo a la expresión:

$$DD + DI = 360^\circ$$

Para valores menores a 180°, la deflexión tiene el sentido de la graduación, Para valores mayores:

$$DD = 360^\circ - \text{Lectura, div. sin.} \quad (7.4)$$

$$DI = 360 - \text{Lectura, div. dex.} \quad (7.5)$$

Ejemplo

Tránsito con división dextrorsum, deflexión en el vértice cinco igual 240°.

$$D(5) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ \text{ I}$$

Ejemplo

Tránsito con división sinistrorsum, deflexión en el vértice ocho igual 195°.

$$D(8) = 360^\circ - 195^\circ = 165^\circ \text{ D}$$

En poligonales cerradas el cierre angular teórico vale:

$$| \sum DD - \sum DI | = 360^\circ$$

En poligonales abiertas el control es:

$$Az \text{ llegada} = Az \text{ salida} + \sum DD - \sum DI = 360^\circ \quad (7.6)$$

Ventajas:

- Para levantamientos longitudinales en los que se calculan curvas horizontales a deflexión en el PI (punto de intersección) es igual al ángulo  $\Delta$  (el formado por los radios en su intersección).

- El error en un vértice no se propaga.

- Es fácil una comprobación visual de la magnitud del ángulo medido.  
Desventajas:

- No se tiene de inmediato la comprobación angular.

## 4.5 Compensación angular

A continuación se presentan los correspondientes métodos de compensación angular de acuerdo al método de campo para la determinaron ángulos y direcciones.

Lo normal en un levantamiento planimétrico, es que se presenten diferencias en los valores de contraste, es decir, coordenadas de salida difieren de las coordenadas de cierre o de llegada, sin importar el cuidado puesto en la realización del trabajo.

Las diferencias mencionadas son lo que conocemos como error de cierre, que en toda medida siempre esta presente y no podemos ignorar.

En todo levantamiento, sin importar su propósito, se deben conocer previamente sus especificaciones y tolerancias permitidas en los errores, estas hacen que al concluir un trabajo el error de cierre (cierre en ángulo o cierre en distancia o en ambos) se compare con el error máximo permitido y si este es menor, el trabajo puede ser compensado, es decir sometido a un método de ajuste.

Los métodos de ajuste para poligonales corridas en topografía, cerradas o ligadas, actúan unos sobre los ángulos: Brújula, Smirnoff y otros sobre las distancias: Tránsito, XY, Crandall.

### Azimutes

El método de azimutes permite determinar el valor de cierre angular.

Para hacer el ajuste por el método de azimutes, se compara la dirección de una línea al final de la poligonal ya sea con respecto a una línea con dirección conocida o la norte en el caso de una poligonal abierta.

En la poligonal cerrada se puede confrontar con respecto a la norte o a la línea de salida.

Línea	Azimut
1-2	079° 12' 24"
2-3	029° 26' 47"
3-4	027° 13' 25"
4-5	345° 19' 30"
5-6	014° 13' 15"
6-7	305° 18' 00"
7-1	180° 25' 53"
1-2	079° 12' 31" control
1-2	079° 12' 31"
1-2	-079° 12' 24"

-----

$$e = +000^{\circ} 00' 07''$$

$$c = -000^{\circ} 00' 07''$$

La diferencia de estos dos ángulos es el error angular.

Dividimos el valor de la corrección por el número de vértices. Corrección por vértices

$$C_p = -07' / 7 = -01'$$

Si los ángulos fueron medidos por ejemplo al minuto no se debe repartir la corrección en segundos, si el error es mayor al número de vértices se corrigen por un mayor valor los ángulos con lados mas cortos, ya que produce menos desplazamiento en la distancia.

Los azimutes se corrigen en forma progresiva, por ello cada corrección es el igual a la anterior mas el valor de la inicial.

Línea	Azimut	Cp
1-2	079° 12' 24"	- 01"
2-3	029° 26' 47"	- 02"
3-4	027° 13' 25"	- 03"
4-5	345° 19' 30"	- 04"
5-6	014° 13' 15"	- 05"
6-7	305° 18' 00"	- 06"
7-1	180° 25' 53"	- 07"

Línea	Azimut corregidos
1-2	079° 12' 23"
2-3	029° 26' 45"
3-4	027° 13' 22"
4-5	345° 19' 26"
5-6	014° 13' 10"
6-7	305° 17' 54"
7-1	180° 26' 46"

#### Deflexiones

El cierre angular de una poligonal cerrada por levantada por deflexiones vale:  $360^{\circ}$

$$|\sum DD - \sum DI| = 360^{\circ}$$

Para una poligonal abierta con azimutes inicial y final de control se debe cumplir la siguiente formula:

$$Az\ inicial + SDD - SDI - 360^{\circ} = Az\ final$$

Se asume que las deflexiones derechas son positivas (+) y se hace la corrección teniendo en cuenta este signo.

Poligonal Abierta

Línea	Deflexión	
A-B	350° 30'	Azimut
A-1	140° 10' D	
1-2	073° 20' I	
2-3	049° 30' D	
3-C	050° 20' D	
C-D	052° 25' I	
C-D	104° 40'	Azimut

Az A-B	350° 30'
S DD	+ 240° 00'
S DI	- 125° 45'
	- 360° 00'
	-----
Az C-D	104° 45'

Az C-D	104° 45'
Az C-D	104° 40'
	-----
e	+ 000° 05'

$$c = - 000° 05' / 5 = - 000° 01'$$

CORREGIDOS

Línea	Deflexión	c	Deflexión
A-1	140° 10' D	-01'	140° 09' D
1-2	073° 20' I	+01'	073° 21' I
2-3	049° 30' D	-01'	049° 29' D
3-C	050° 20' D	-01'	050° 19' D
C-D	052° 25' I	+01'	052° 26' I

Comprobación:

Az A-B	350° 30'	
S DD	+ 239° 57'	
S DI	- 125° 47'	
	- 360° 00'	
	-----	
Az C-D	104° 40'	igual
Az C-D	104° 40'	

## Ángulos horarios

Compensación de una poligonal cerrada.

Punto	Ángulos Horarios
A	55° 29'
B	110° 53'
C	200° 53'
D	53° 37'
E	79° 06'
F	219° 56'
<hr/>	
Suma de los ángulos horarios =	719° 54'
	-
Suma teórica $4 \times 180^\circ =$	720° 00'
<hr/>	
Error angular total =	- 06'
Error angular / punto =	$-06'/6 = -01'$
Corrección / punto =	$-(-01') = +01'$

Punto	Ángulos Horarios
A	55° 29' +01'
B	110° 53' +01'
C	200° 53' +01'
D	53° 37' +01'
E	79° 06' +01'
F	219° 56' +01'

## Ángulos corregidos

Punto	Ángulos Horarios
A	55° 30'
B	110° 54'
C	200° 54'
D	53° 38'
E	79° 07'
F	219° 57'

Suma ángulos corregidos = 720° 00'

## 4.6 Métodos de ajustes rigurosos

### 4.6.1. Método de Crandall

Es método de ajuste de poligonales desarrollado por el profesor C.L. Crandall, basado en el método de mínimos cuadrados.

A. Calculamos las proyecciones meridianas y paralelas (PM, PP).

Determinamos el valor de L2, D2, LD para cada una de las proyecciones.

$$L^2 = \left( \frac{PM^2}{DH} \right) / 100 \quad (7.10)$$

$$D^2 = \left( \frac{PP^2}{DH} \right) / 100 \quad (7.11)$$

$$LD = \left( \frac{PM \cdot PP}{DH} \right) / 100 \quad (7.12)$$

C. Calculamos las constantes A y B (para ellos obtendremos las sumatorias de L2, D2, LD) mediante las siguientes formulas:

$$A = \frac{(\delta PP \cdot \sum LD) - (\delta PM \cdot \sum D^2)}{(\sum L^2 \cdot \sum D^2) - (\sum LD^2)} \quad (7.13)$$

$$B = \frac{(\delta PM \cdot \sum LD) - (\delta PP \cdot \sum L^2)}{(\sum L^2 \cdot \sum D^2) - (\sum LD^2)} \quad (7.14)$$

D. Determino el valor de las correcciones meridiana y paralela.

$$Cm = (L^2 \cdot A) + (LD \cdot B) \quad (7.15)$$

53

$$Cp = (D^2 \cdot B) + (LD \cdot A) \quad (7.16)$$

54

Obtengo las proyecciones corregidas de la siguiente forma:

$$PPC = PP + CP \quad (7.18)$$

$$PMC = PM + CM \quad (7.17)$$

### Ejemplo

Ajuste la siguiente poligonal por el método de Crandall.

Est	AZIMUT	DH
1		
2	000° 00'	48,57
3	036° 53'	96,99
4	033° 54'	70,20
5	114° 32'	43,70
6	215° 29'	68,48
1	221° 22'	147,28

Solución:

Est	AZIMUT	DH	PM	PP	L	D	LD	CPM	CPP	PMC	PPC	NORTE	ESTE
1												1000,00	1000,00
2	000°00'	48,57	48,57	0,00	0,49	0,00	0,01	0,00	0,00	48,57	0,00	1048,57	1000,00
3	036°53'	96,99	77,58	58,21	0,62	0,35	0,01	0,01	-0,01	77,58	58,21	1126,16	1058,21
4	033°54'	70,20	58,27	39,15	0,48	0,22	0,01	0,00	0,00	58,27	39,15	1184,43	1097,35
5	114°32'	43,70	-18,15	39,75	0,08	0,36	0,00	0,00	-0,01	-18,14	39,75	1166,28	1137,10
6	215°29'	68,48	-55,76	-39,75	0,45	0,23	-0,01	0,00	0,00	-55,76	-39,76	1110,53	1097,35
1	221°22'	147,28	-110,53	-97,33	0,83	0,64	-0,01	0,01	-0,01	-110,53	-97,35	1000,00	1000,00

$$\delta: -0,03 \quad 0,04 \quad \Sigma 2,95 \quad 1,80 \quad 0,01$$

$$A = ((0,04 \cdot 0,01) - (-0,03 \cdot 1,80)) / ((2,95 \cdot 1,80) - 0,01) = 0,01$$

$$B = ((0,03 \cdot 0,01) - (-0,04 \cdot 1,80)) / ((2,95 \cdot 1,80) - 0,01) = -0,02$$

## 4.7. Precisión y propagación de errores en poligonales abiertas

En general la exactitud de un poligonal se evalúa básicamente por el error de cierre resultante. Este cierre resultante está en función de la exactitud de la medida de las longitudes y las direcciones de la poligonal (Perímetro). Por consiguiente; la exactitud relativa está basada en el error de cierre y la longitud de la poligonal.

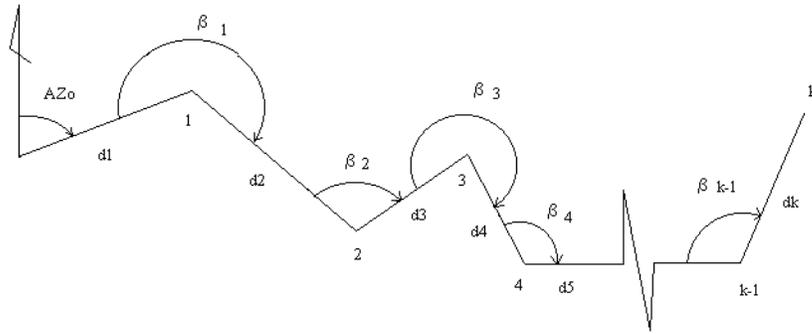


Fig. 14

Aunque el error de cierre de una poligonal es una indicación de calidad global este no produce información sobre la precisión de la situación de puntos determinados mediante esta. Por consiguiente analizaremos la técnica de propagación de error para determinar la matriz de covarianza para cada punto en la poligonal.

Las coordenadas del punto K se calculan así (ángulos horarios):

$$N_K = N_1 + d_1 \cos(Az_o + \beta_1 + 180^\circ) + d_2 \cos[Az_o + \beta_1 + \beta_2 - (2)(180^\circ) + \dots + d_{k-1} \cos[Az_o + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} - (k-1)180] \quad (7.18)$$

$$E_K = E_1 + d_1 \sen(Az_o + \beta_1 + 180^\circ) + d_2 \sen[Az_o + \beta_1 + \beta_2 - (2)(180^\circ) + \dots + d_{k-1} \sen[Az_o + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} - (k-1)180] \quad (7.19)$$

Coordenadas a partir de azimutes

$$N_K = N_1 + d_1 \cos Az_1 + d_2 \cos Az_2 + \dots + d_{k-1} \cos Az_{k-1} \quad (7.20)$$

$$E_K = E_1 + d_1 \sen Az_1 + d_2 \sen Az_2 + \dots + d_{k-1} \sen Az_{k-1} \quad (7.21)$$

Los procedimientos a emplear son particularmente útiles en el diseño y planeación de una poligonal. Así, los datos de distancia y dirección para una poligonal y los valores estimados para  $\sigma_A$  y  $\sigma_d$  las matrices de covarianzas para el punto de la poligonal especificado.

Matriz de covarianza

$$J' = \begin{bmatrix} \sigma_{E_n}^2 & \sigma_{E_n N_n} \\ \sigma_{E_n N_n} & \sigma_{N_n}^2 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\sigma_{N_k}^2 = \sum_{l=i}^n (E_n - E_i)^2 \sigma_{A_l}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_{i+1} - E_i}{d_1} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 \quad (7.23)$$

$$\sigma_{E_k}^2 = \sum_{i=1}^n (N_n - N_i)^2 \sigma_{A_i}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_{i+1} - N_i}{d_1} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 \quad (7.24)$$

$$\sigma_{EN_k} = - \sum_{i=1}^n (E_n - E_i)(N_n - N_i) \sigma_{A_i}^2 + \sum_{i=1}^n (E_{i+1} - E_i)(N_{i+1} - N_i) \frac{\sigma_{d_i}^2}{d_i^2} \quad (7.25)$$

Los valores de  $\sigma_A$  y  $\sigma_d$ , seleccionados, son aquellos que producen la matriz de covarianza, la elipse de error produce la calidad que satisface o no los estudios propuestos.

Se debe dar énfasis a que la matriz de covarianza se propaga para un punto que usa datos sin ajustar y las desviaciones normales estimadas. No se mantiene una medida correcta de la exactitud de las coordenadas ajustadas para un punto, por ejemplo, si el método que se usara para la propagación del error con coordenadas ajustadas fuera la regla de la brújula, la matriz de covarianza resultante sería incorrecta. Por consiguiente, el procedimiento es de valor primario como una herramienta del diseño de poligonales abiertas. Una medida de legitimidad de la exactitud de un punto ajustado sólo puede ser obtenida por el análisis de la matriz de la covarianza como un producto del ajuste de mínimos cuadrados de la poligonal.

Ejemplo

Dada la siguiente poligonal abierta determinar su elipse de error.

Línea	Azimut	Distancia	Norte	Este
1			1059.89	1092.47
1-2	248°00'45"	346.21	930.27	771.44
2-3	184°53'30"	448.62	483.28	703.18
3-4	098°39'45"	502.74	407.56	1200.19

$\sigma_A : 5''$  y  $\sigma_d : 0.20$  m

$$\sigma_{N_k}^2 = \sum_{l=i}^n (E_n - E_i)^2 \sigma_{A_l}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_{i+1} - E_i}{d_1} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 0.0747m$$

$$\sigma_{E_k}^2 = \sum_{i=1}^n (N_n - N_i)^2 \sigma_{A_i}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{N_{i+1} - N_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 0.0466m$$

$$\sigma_{EN_k} = -\sum_{i=1}^n (E_n - E_i)(N_n - N_i) \sigma_{A_i}^2 + \sum_{i=1}^n (E_{i+1} - E_i)(N_{i+1} - N_i) \frac{\sigma_{d_i}^2}{d_i^2} = 0.0138m$$

$$J^T = \begin{bmatrix} 0.0466 & 0.0138 \\ 0.138 & 0.0747 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - (0.0466 + 0.0747)\lambda + (0.0466 \cdot 0.0747) - (0.0138)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 0.1213\lambda + 0.00348102 - 1.9044 \times 10^{-4} = 0$$

$$\lambda^2 - 0.1213\lambda + 0.00367146 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.0633 \quad \lambda_2 = 0.0580$$

Semi ejes

$$a = \sqrt{0.0633} = 0.25m$$

$$b = \sqrt{0.0580} = 0.24m$$

Orientación de la elipse

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} = \frac{2(0.0138)}{0.0466 - 0.0747} = \frac{0.0276}{-0.0281} = -44^\circ 29' 08''$$

$$\theta = -88^\circ 58' 16'' = 271^\circ 01' 43''$$

#### 4.8. Omisión de Datos

La omisión de datos en una poligonal se puede presentar ocasionalmente al hacer el levantamiento de un polígono, que no es posible tomar todos los datos de campo; o para procesos de simulación e interventoría en trabajos topográficos especiales.

Los casos de omisión son los siguientes:

1. Dirección y distancia de una línea
2. Dirección y distancia de otra línea
3. Dos distancias
4. Dos direcciones

#### 4.8.1. Dirección y distancia de una línea

Línea	Azimut	D.H.	PM	PP
A-B	042°59'	234.60	171.62	159.95
B-C				
C-D	150°22'	175.20	-152.29	86.63
D-E	278°42'	197.80	29.92	-195.52
E-A	347°36'	142.40	139.08	-30.58
		$\delta :$	188.33	20.47

Se calcula la dirección y distancia de la línea faltante, que es simplemente el error de cierre y su orientación.

$$Az_{BC} = \text{arcTan} \frac{20.47}{188.33} = 006^{\circ}12' + 180^{\circ} = 186^{\circ}12'$$

Se le suman 180° porque el error de cierre tiene la orientación contraria a la dirección buscada.

$$D_{BC} = \sqrt{188.33^2 + 20.47^2} = 189.44m$$

Remplazamos estos valores en el cuadro anterior y se obtiene:

Línea	Azimut	D.H.	PM	PP
A-B	042°59'	234.60	171.62	159.95
B-C	186°12'	189.44	-188.33	-20.46
C-D	150°22'	175.20	-152.29	86.63
D-E	278°42'	197.80	29.92	-195.52
E-A	347°36'	142.40	139.08	-30.58
		$\delta :$	0	0.01

#### 4.8.2. Dirección y distancia de otra línea

Línea	azimut	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'			
B-C	211°15'	219.78	- 187.89	-114.02
C-D	143°45'	374.63	- 302.12	221.52
D-E		318.25		
E-A	358°30'	551.40	551.21	- 14.43
		$\delta$ :	61.20	93.07

Se crea una línea auxiliar que llamaremos MN, se Calcula longitud y dirección.

$$D_{mn} = 111.39$$

$$Az_{mn} = 56^\circ 40'$$

Con los datos anteriores como base y los datos conocidos de los lados AB y DE construimos un triángulo.

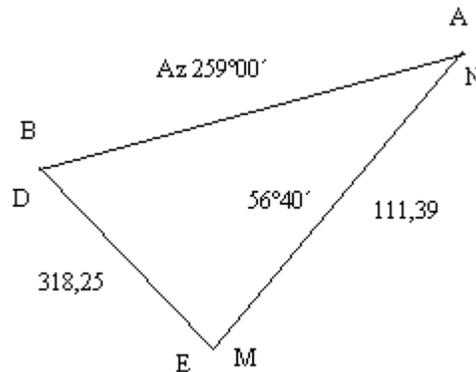


Fig. 15

Resolvemos el triángulo

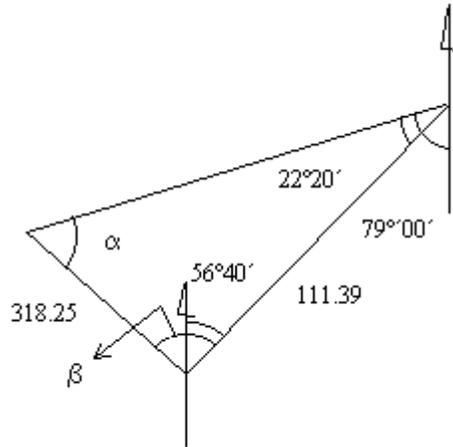


Fig. 16

$$\frac{318.25}{\text{sen}22^{\circ}20'} = \frac{111.39}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \alpha = 007^{\circ}39'$$

$$\alpha + \beta + 22^{\circ}20' = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 180^{\circ} - (22^{\circ}20' + 07^{\circ}39') = 150^{\circ}01'$$

$$\beta = 150^{\circ}01'$$

$$\frac{318.25}{\text{sen}22^{\circ}20'} = \frac{b}{\text{sen}150^{\circ}01'} \Rightarrow b = 418.55 = AB$$

Azimet DE

$$150^{\circ}01' - 56^{\circ}40' = 93^{\circ}21'$$

$$\text{AzDE} = 180^{\circ} - 93^{\circ}21' = 86^{\circ}39'$$

$$\text{AzDE} = 86^{\circ}39' \text{ o } 266^{\circ}39' \quad \text{DDE} = 318.25 \text{ m}$$

$$\text{AzAB} = 259^{\circ}00' \quad \text{AB} = 418.55 \text{ m}$$

Línea	azimet	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'	418.55	-79.86	-410.86
B-C	211°15'	219.78	- 187.89	-114.02
C-D	143°45'	374.63	- 302.12	221.52
D-E	86°39'	318.25	+18.60	317.71
E-A	358°30'	551.40	551.21	- 14.43
		δ:	-0.06	0.08

Estas diferencias se presentan por las aproximaciones en los cálculos.

### 4.8.3. Dos distancias

Línea	azimut	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'	417.26	-79.62	-409.59
B-C	211°15'	219.78	-187.89	-114.02
C-D	143°45'			
D-E	086°45'	318.25	18.04	317.74
E-A	358°30'			
		$\delta$ :	-249.47	-205.87

Calculamos una línea auxiliar que llamaremos MN .

$$D_{mn} = 323.45 \text{ m}$$

$$Az_{mn} = 219^\circ 32'$$

Fórmamos un triángulo con la línea base y los lados CD y EA.

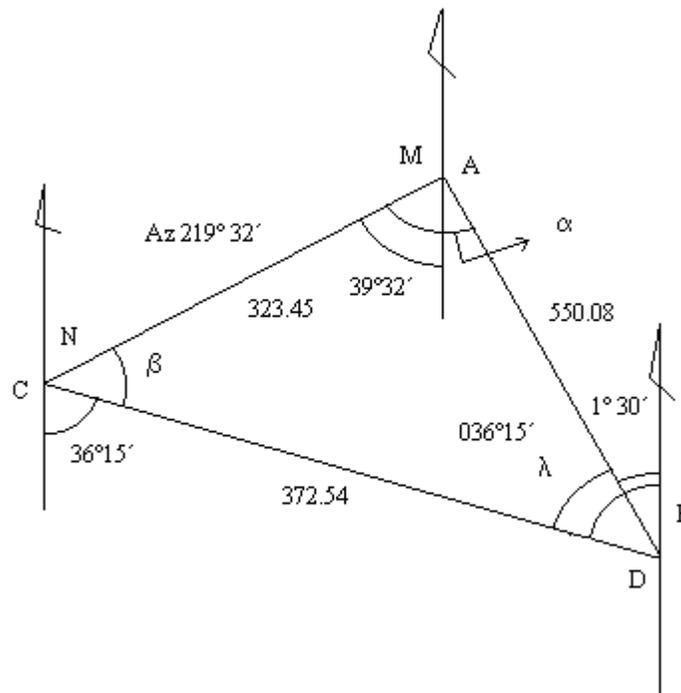


Fig. 17

$$\alpha = 39^\circ 32' - 01^\circ 30' = 41^\circ 02'$$

$$\beta = 180^\circ - 36^\circ 15' - 39^\circ 32' = 104^\circ 13'$$

$$\lambda = 36^\circ 15' - 01^\circ 30' = 34^\circ 45'$$

$$\alpha + \beta + \lambda = 180^\circ$$

$$\frac{323.45}{\text{sen } 34^\circ 45'} = \frac{CD}{\text{sen } 41^\circ 02'} \Rightarrow CD = 372.54 \text{ m}$$

$$\frac{323.45}{\text{sen } 34^\circ 45'} = \frac{EA}{\text{sen } 104^\circ 13'} \Rightarrow EA = 550.08 \text{ m}$$

Se satisface que a mayor ángulo ( $104^\circ 13'$ ), se opone el mayor lado, 550.08 m y a menor ángulo,  $34^\circ 45'$ , se opone al menos lado 323.45 m.

Línea	azimut	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'	417.26	-79.62	-409.59
B-C	211°15'	219.78	- 187.89	-114.02
C-D	143°45'	372.54	-300.43	220.29
D-E	086°45'	318.25	18.04	317.74
E-A	358°30'	550.08	549.89	-14.40
		δ:	0.01	0.01

#### 4.8.4. Dos direcciones

Línea	azimut	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'	417.26	-79.62	-409.59
B-C		219.78		
C-D	143°45'	374.63	-302.12	221.52
D-E		318.25		
E-A	358°30'	551.40	551.21	-14.43
		δ:	169.47	-202.50

Obtenemos los datos de la línea auxiliar que llamaremos MN.

$$D_{mn} = 264.06 \text{ m}$$

$$Az_{mn} = 309^\circ 56'$$

Fórmalos un triángulo con la línea base y los distancias BC y DE.

Según la geometría podemos construir, con lo datos obtenidos, un solo triángulo, en topografía podemos construir cuatro por las diferentes direcciones de los lados que conforman el triángulo, y que aparecen en los siguientes gráficos.

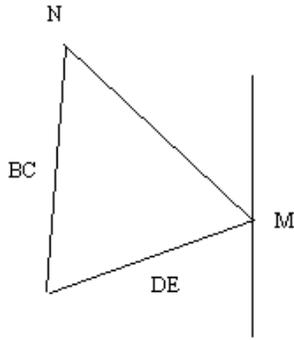


Fig. 18

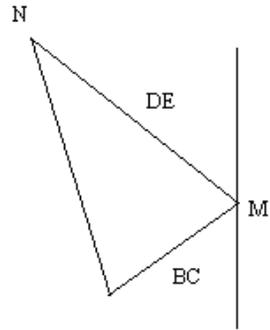


Fig. 19

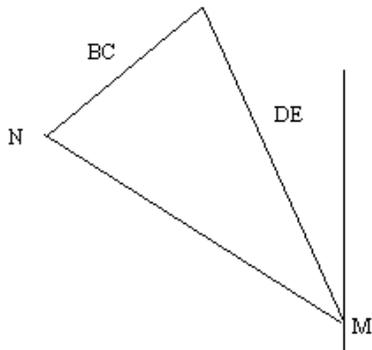


Fig. 20

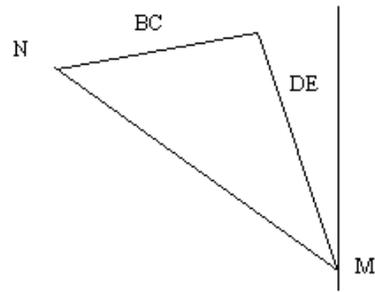


Fig. 21

Observando detenidamente podemos darnos cuenta que en la figura 18 y en la figura 21 las direcciones de los lados BC y De son las mismas, es decir, de esos dos triángulos podemos descartar uno, en forma análoga se puede proceder en el caso de los triángulo de las figuras 19 y 20; quedan entonces solamente dos triángulos a analizar.

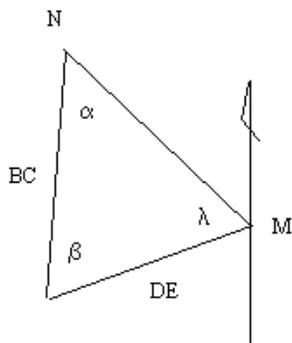


Fig. 22

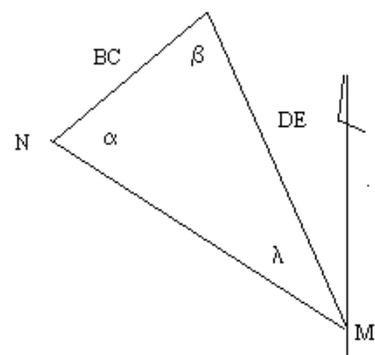


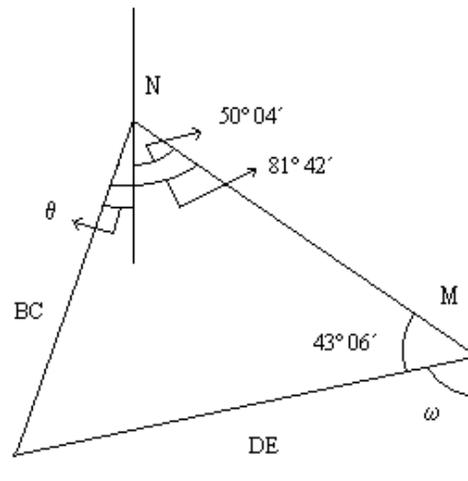
Fig. 23

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= (b^2 + c^2 - a^2) / (2 * b * c) \\ &= (264.062 + 219.702 - 318.252) / (2 * 264.06 * 219.78) \\ &= 0.1443 \\ \alpha &= 81^\circ 42' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= (318.252 + 219.782 - 264.062) / (2 * 318.25 * 219.78) \\ &= 0.5709 \\ \beta &= 55^\circ 10' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= (264.062 + 318.252 - 219.782) / (2 * 318.25 * 264.06) \\ &= 0.7301 \\ \lambda &= 43^\circ 06' \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \lambda = 81^\circ 42' + 55^\circ 12' + 43^\circ 06' = 180^\circ$$



Triangulo A, Fig. 24

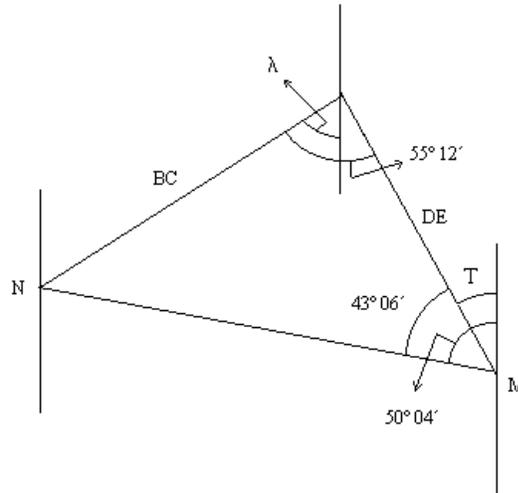
Triangulo A:

$$\theta = 81^\circ 42' - 50^\circ 04' = 31^\circ 38'$$

$$\text{Rumbo BC} = \text{S } 31^\circ 38' \text{ W } \text{ o } \text{N } 31^\circ 38' \text{ E}$$

$$\omega = 180^\circ - 43^\circ 06' - 50^\circ 04' = 86^\circ 50'$$

$$\text{Rumbo DE} = \text{S } 86^\circ 50' \text{ W } \text{ o } \text{N } 86^\circ 50' \text{ E}$$



Triangulo B, Fig. 25

Triangulo B:

$$\tau = 50^{\circ} 04' - 43^{\circ} 06' = 06^{\circ} 58'$$

$$\text{RumboDE} = \text{N } 06^{\circ} 58' \text{ W o S } 06^{\circ} 58' \text{ E}$$

$$\lambda = 55^{\circ} 12' - 06^{\circ} 58' = 48^{\circ} 14' = 48^{\circ} 14'$$

$$\text{RumboBC} = \text{S } 48^{\circ} 24' \text{ W o N } 48^{\circ} 14' \text{ E}$$

En el triangulo A

Línea	azimut	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'	417.26	-79.62	-409.59
B-C	S 31° 38' W 211°38'	219.78	-187.13	-115.27
C-D	143°45'	374.63	-302.12	221.52
D-E	N 86° 50' E 86° 50'	318.25	17.58	317.76
E-A	358°30'	551.40	551.21	-14.43
		δ:	0.08	-0.01

En el triangulo B

Línea	azimut	D.H.	PM	PP
A-B	259°00'	417.26	-79.62	-409.59
B-C	N 48° 14' E 48° 14'	219.78	163.93	163.93
C-D	143°45'	374.63	-302.12	221.52
D-E	S 06° 58' E 173° 02'	318.25	-315.90	+38.60
E-A	358°30'	551.40	551.21	-14.43
		δ:	0.03	0.03

Este problema tiene dos soluciones como hemos podido ver, la ambigüedad puede eliminarse si existe alguna información adicional con respecto a uno de los lados, por ejemplo, un información sobre la dirección aproximada.

#### 4.9. Localización de errores groseros (equivocaciones)

Cuando al finalizar el levantamiento de una poligonal se detectan una equivocación en ángulo o en distancia podemos localizarla como se describe a continuación

##### 4.9.1. Distancia

- Calculamos el error de cierre y su dirección
- Comparamos esta dirección con la de los lados de la poligonal, la línea que tenga el mismo azimut es aquella en la que se presenta el error en distancia.
- Si se presenta en más de una la igualdad se debe revisar el trabajo de campo, pero generalmente indica que existe más de una equivocación.

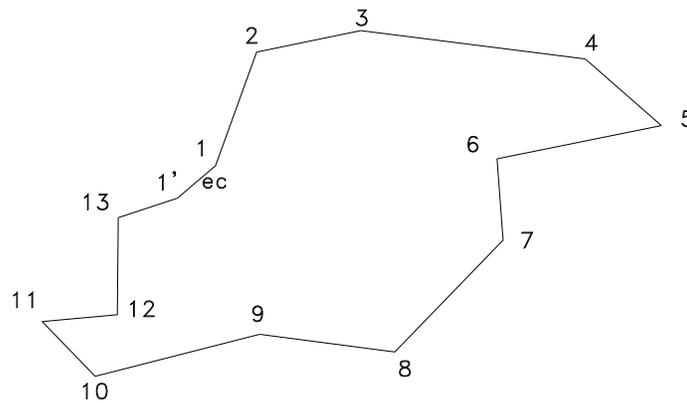


Fig. 26

##### 4.9.2 Angulo

Caso 1

- Determine el error de cierre angular en magnitud y dirección.
- Calcule coordenadas de todos los puntos del polígono
- Determinamos coordenadas del punto medio del error de cierre

$$N_m = \frac{N_1 + N_1'}{2} \quad (7.26)$$

$$E_m = \frac{E_1 + E_{1'}}{2} \quad (7.27)$$

d. Para cada punto de la poligonal reemplazamos sus coordenadas N, E en la expresión.

$$(\tan Az Ec \pm 90^\circ) (N - N_m) = E - E_m \quad (7.28)$$

Esta expresión es la ecuación de la mediatriz del  $E_c$ , si algún par de coordenadas se satisface indica que en este punto se encuentra localizado la equivocación angular, si varios satisfacen la igualdad, no es posible de terminar el punto.

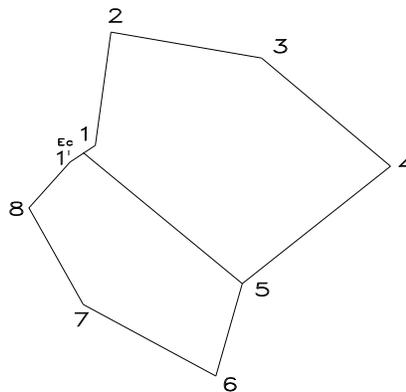


Fig. 27

#### Caso 2

- Calculamos coordenadas de la poligonal empezando en 1 y llegando a n.
- Idem, partiendo del punto n hasta 1.
- Comparamos las coordenadas obtenidas: en el punto en donde sus valores sean aproximadamente iguales, se encuentra el error angular.

#### Caso 3 (Brönniman)

- Calculamos las coordenadas de la poligonal.
- Determinamos el error angular (mayor de la tolerable)
- Calculamos la siguiente expresión:

$$N_p = \frac{N_1' + N_1}{2} + \frac{E_1' - E_1}{2} \cdot \text{Cot} \frac{\delta}{2} \quad (7.29)$$

$$E_p = \frac{E_1' + E_1}{2} - \frac{N_1' - N_1}{2} \cdot \text{Cot} \frac{\delta}{2} \quad (7.30)$$

N<sub>1</sub>, E<sub>1</sub> : Punto de partida

N<sub>1</sub>', E<sub>1</sub>' : Punto de llegada ( sin corregir )

δ : error angular

N<sub>p</sub>, E<sub>p</sub> : Coordenadas de la estación donde se presenta el error angular

d. Se comparan las coordenadas obtenidas (N<sub>p</sub>, E<sub>p</sub>) con las coordenadas calculadas buscando en que punto los valores coinciden.

Nota: Estos métodos no eliminan la necesidad de ir al campo a repetir las medidas, solo permiten ir a puntos específicos con lo que se logra rendimiento en tiempo y dinero.

Se debe ser muy cuidadoso en el empleo de estos métodos de comprobación, no deben emplearse para corregir porque lo que se localizan equivocaciones que no se corrigen, se eliminan por comprobación de campo.

## 4.10. Triangulación Topográfica

### 4.10.1. Redes topográficas (de densificación)

Para la representación de la superficie terrestre en mapas y planos de escalas grandes (1:5000 y mayores), no son suficientes los puntos de las Redes Nacionales, por eso se complementan construyendo redes de densificación.

Este tipo de Redes se construyen de igual forma que las geodésicas, empleando métodos como: Triangulación, Trilateración y Poligonación. Los esquemas más comunes son: Cuadrilátero geodésico (a), Sistema Central (b), Cadena de Triángulos (c), Triángulo con un punto central (d), Triángulos con puntos centrales (e) y Red completa de triangulación (f).

Este último tipo debe apoyarse en por lo menos tres (3) puntos de la Red Geodésica y los sistemas aislados (a-d) deben apoyarse por lo menos en dos puntos geodésicos

ORDEN	TRIANGULACION Y POLIGONACIÓN		TRIANGULACION		POLIGONACION	
	Longitud km.	Error medio cuadrático angular	Error de cierre angular	Error relativo en los lados de inicio	Error de cierre angular	Error relativo en los lados de inicio
<b>1</b>	0.5 - 5	5"	20"	1/50000	10" √ n	1/10000
<b>2</b>	0.25 - 3	10"	40"	1/20000	20" √ n	1/5000

Estos puntos se materializan en el terreno por medio de mojones en concreto, para los cuales existen unas especificaciones especiales, que no se tratan en el presente libro. Los puntos altimétricos, la densificación deben hacerse a partir de los puntos de clases superiores, es decir, a partir de puntos de mayor precisión y por medio de nivelaciones geométricas.

#### **4.10.2. Diseño de una red**

Este tipo de redes por lo general, se diseñan para obras concretas o para el levantamiento de objetos relativamente cerca unos de otros, que tienen que ver con el uso del suelo, movimientos de tierra, construcción de fabricas u obras mayores, asentamientos urbanos, acueductos, etc.

Para el diseño, debe emplearse un mapa de una escala menor, en donde se traza la futura red, de acuerdo al tamaño del territorio y además calculando por medio de formulas especiales la densidad de los puntos, al relieve y otras condiciones físicas.

La visibilidad entre puntos o pares de puntos, puede obviarse por medio de pirámides o torres. En el caso de emplear receptores GPS, estas pirámides no son necesarias en los trabajos de campo, pero sí en el tiempo de explotación de la Red. La altura del rayo visual sobre el obstáculo debe ser mayor a 1.5 m, con el fin de evitar las distorsiones por refracción. En la Red se deben tener triángulos cercanos a triángulos equiláteros, en caso de zonas muy complejas, pueden permitirse ángulos agudos de hasta 20° y obtusos de hasta 140°. En zonas con muchos obstáculos o zonas también llamadas cerradas, se debe emplear el método de la Poligonación de primer y segundo orden (sistema ruso) o de primera y segunda clase (sistema americano).

La numeración de los puntos y el nombre de las Redes se debe hacer en forma que convenga quien las diseñe y no necesariamente depender del sistema de nomenclatura de la Red primaria.

#### **4.10.3. Trabajos de campo preliminares (reconocimiento del terreno y colocación de los puntos)**

El proyecto realizado en el plano se ajusta en el proceso de colocación de los puntos en el terreno, es decir se precisa la posición del punto después de llegar al lugar a colocar el mojón temporal respectivo, el cual será definitivo, después de fundirse en el lugar. Durante este proceso de reconocimiento, se aprovecha para revisar los puntos de apoyo de la Red de mayor jerarquía que será la base para la densificación, se debe colocar atención a la visibilidad entre los puntos y en especial en zonas construidas, para diseñar luego como adelantar los trabajos de campo de medición. Como resultado de este trabajo deben anexarse esquemas de localización y acceso, así como también estado del clima y del terreno en las zonas.

Ejercicios
------------

1.- Calcule los ángulos de la siguiente poligonal trazada por azimutes.

Línea	Azimut
1-2	120° 12'
2-3	052° 42'
3-4	052° 35'
4-5	185° 41'
5-1	267° 16'
1-2	120° 07'

2.- Compense la siguiente poligonal por el método XY. Si las coordenadas de 3 son N : 12504 y E : - 123.45

Línea	Azimut	D.H.
1-2	042° 59'	234,60
2-3	186°15'	189,70
3-4	150°22'	175,20
4-5	278°42'	197,80
5-1	347°36'	142,40

3.- Calcule el área de la poligonal anterior. Expresela en cuadrados y varas cuadradas

4.- Calcular la siguiente poligonal por transito y XY.

Línea	Azimut	Distancia
A B	130° 10'	9.30
B C	100° 00'	8.60
C D	330° 30'	9.00
D E	300° 40'	18.70
E A	153° 36'	12.50

5.- Mediante una poligonal radial, se realizo el siguiente levantamiento de un lote.

Est	Pto	Azimut	D.H.
A	1	035° 11' 17"	19,13
	2	125° 20' 03"	22,14
	3	190° 50' 01"	8,41
	4	263° 11' 50"	12,35
	5	314° 41' 28"	31,19

Calcule el área del lote.

6.- Corregir los ángulos y ajustar por el Método de la Brújula la poligonal levantada por ángulos contra-horarios.

Est	D.H.	A.C.H.
1	60,97	164° 07'
2	40,00	122° 18'
3	36,00	048° 50'
4	51,60	223° 10'
5	80,01	111° 31'
6	61,00	050° 10'

7- Ajustar por el Método del Transito la poligonal que aparece a continuación:

Est	D.H.	Az
1	126,49	065° 21'
2	078,83	031° 50'
3	129,95	301° 59'
4	120,48	197° 48'
5	038,27	173° 02'
6	037,74	202° 08'

8- Compensar por el método XY la siguiente poligonal:

EST	D.H.	Def.
A	55,10	069° 07' D
B	45,70	020° 53' I
C	66,10	126° 23' D
D	51,47	100° 54' D
E	49,98	039° 56' I
F	42,20	124° 31' D

$$Az(AB) = 16^\circ 50'$$

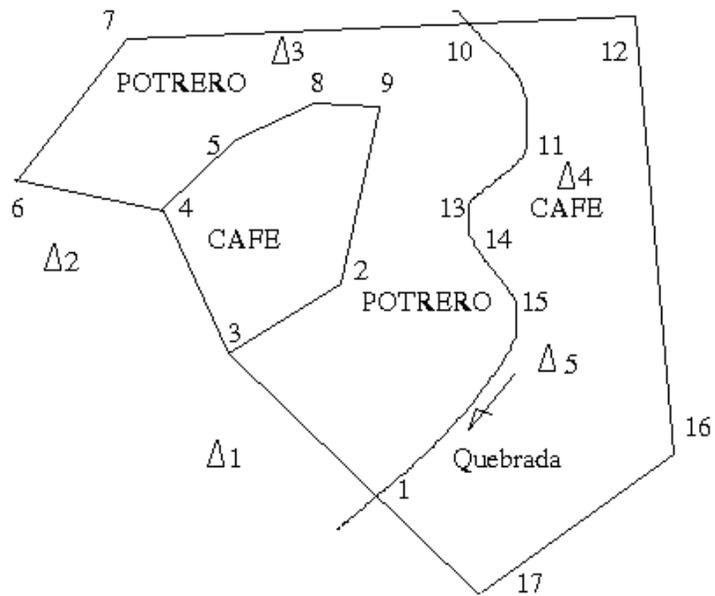
9- Compensar la siguiente poligonal cerrada por el método XY. (N(1)= 100 E(1)= 100)

EST	O	Az.	D.H.
1	2	045° 20'	100,14
2	3	182° 17'	46,72
3	1	250° 58'	73,26

10- Calcule el siguiente levantamiento planimétrico angular y en distancia por el método Crandall.

Estación	55	Az	Hilos	A.V.
	Δ2	335° 38'	cierre	O.K.
Δ1				
	Δ 1	247° 10'	78,90	97° 16'
	17	192° 19'	52,60	90° 40'
	16	046° 01'	39,40	84° 20'
Δ 5				
	Δ 5	178° 40'	82,50	81° 10'

	14	203° 28'	24,20	86° 50'
	13	253° 26'	18,70	Cinta
	12	026° 54'	46,30	93° 15'
Δ4	Δ 4	121° 30'	40,20	93° 15'
	11	096° 10'	27,40	84° 32'
	10	040° 12'	17,50	Cinta
	9	147° 47'	17,42	Cinta
	8	197° 05'	16,20	Cinta
	7	277° 04'	35,60	92° 10'
Δ3	Δ 3	045° 00'	100,50	106° 37'
	6	322° 31'	14,10	Cinta
	5	054° 16'	40,80	93° 21'
	4	087° 53'	26,30	86° 40'
Δ2	Δ 2	335° 40'	74,80	98° 43'
	3	003° 32'	38,00	92° 40'
	2	031° 05'	61,00	94° 20'
	1	092° 20'	38,50	84° 35'
Δ1	N	000° 00'		



11- Determine con su correspondiente signo, el valor de la corrección por el método de la brújula.

$$\Sigma pm : 321,14 \quad \Sigma pm : - 320,12$$

$$\Sigma pp : 937,21 \quad \Sigma pp : - 937,21$$

Lado ( 3-1 )

Az : 121° 31' DH : 300,11

Perímetro: 2371,42

12- En la siguiente poligonal abierta determinar el error angular y corregir los azimutes (minuto).

Est	D.H.	Az
1 - S1		001° 23'
2	059,96	136° 19'
3	123,25	103° 22'
4	050,63	166° 24'
5	063,58	203° 19'
6	070,89	274° 33'
7	055,07	254° 12'
8	047,35	215° 16'
9	094,65	264° 37'
10	047,00	296° 19'
11	044,62	277° 34'
12 - R	036,86	267° 37'
R - S2		353° 56'

Azimut de control R - S2: 354° 09'

13- La poligonal, por ángulos horarios, entre los puntos A35 y B12 es la siguiente:

Est	D.H.	A.H.
1	32,60	170° 30'
2	81,40	186° 08'
3	64,34	180° 15'
4	68,29	180° 04'
5	84,92	258° 13'
6	60,80	173° 54'
7	79,49	213° 08'
8	74,38	128° 54'
9	123,98	129° 00'
10	61,96	298° 03'
11		202° 54'

Azimut de salida A35 - 1: 154° 00'

Azimut de llegada 11 - B12: 294° 59'

Determinar el error angular, ajustar ángulos horarios y azimutes.

14- Aparecen los datos de una poligonal levantada por azimutes:

Línea	Az	D.H.
1- 2	176° 36'	38,54
2- 3	148° 34'	127,78
3- 4	000° 31'	75,96

4- 5	024° 14'	22,00
5- 6	069° 23'	41,59
6- 7	037° 45'	32,99
7- 8	085° 33'	85,89
8- 9	338° 04'	80,86
9-10	334° 41'	14,27
10-11	028° 25'	46,40
11-12	098° 00'	71,77
12-13	038° 10'	97,88
13-14	322° 27'	142,47

Coordenadas

	N	E
1	820,35	1.148,46
14	1.125,77	1.402,70

Ajustar la poligonal por el Método de la Brújula, determinar el error de cierre longitudinal.

15- Poligonal abierta levantada por azimutes:

Línea	Az	D.H.
1- 2	175° 47'	209,72
2- 3	201° 02'	111,40
3- 4	264° 41'	157,16
4- 5	251° 26'	58,72
5- 6	235° 00'	64,75
6- 7	278° 06'	67,24
7- 8	256° 04'	78,22
8- 9	273° 43'	73,05
9-10	224° 20'	41,65
10-11	345° 40'	69,77
11-12	037° 40'	93,57
12-13	023° 53'	107,20

Coordenadas

	N	E
1	1.000,00	1.000,00
13	821,88	549,71

Compensar la poligonal por el Método del Transito, calcular error de cierre longitudinal.

16- Compense la siguiente poligonal abierta y calcular su error en distancia.

Línea	Az	D.H.
1- 2	081° 37'	57,72
2- 3	068° 13'	75,94
3- 4	057° 15'	57,91
4- 5	177° 00'	21,84

5- 6	179° 17'	30,55
6- 7	171° 08'	37,59
7- 8	152° 32'	32,25
8- 9	156° 11'	23,98
9-10	170° 11'	16,29

Coordenadas:

	N	E
1	932,39	822,70
10	843,90	1.034,66

17- Calcular el ajuste angular y compensar la siguiente poligonal por el método XY.

Línea	Az	D.H.
1-2	330° 24'	100,53
2-3	340° 29'	80,11
3-4	287° 21'	64,70
4-5	251° 37'	75,66
5-6	212° 58'	88,65
6-7	190° 29'	85,22
7-8	163° 38'	123,98
8-V	132° 35'	139,99
V-W	104° 33'	

Az (1 - R) = 87° 46'

Az (V - W) = 104° 35'

Coordenadas:

Salida 1:	1.015,55	951,41
Llegada V:	802,96	815,50

18- Compensar el error angular y ajustar por el Método del Transito.

	A.H.	D.H.	N	E
Cat			1.640,11	807,53
Dog	271° 38' 00"	346,21	1.200,00	1.000,00
A	116° 52' 45"	448,62		
B	092° 46' 15"	502,74		
C	176° 10' 00"	270,86		
Cow	237° 08' 45"		524,85	1.407,36
Ox			66,26	1.651,71

19.- Ajuste la siguiente poligonal



22.- Ajustar la siguiente poligonal por el método XY. Si las coordenadas del punto A son N:1000.00, E:1000.00

Línea	Az	DH
A-B	060°30'	07.70
B-C	065°20'	07.90
C-D	205°05'	12.50
D-E	250°15'	16.06
E-A	033°59'	12.30

23.- Ajuste los ángulos de la siguiente poligonal.

Línea	Az	DH
A-B	130°12'	100.01
B-C	025°32'	102.43
C-D	056°25'	054.67
D-E	185°41'	120.30
F-A	277°09'	103.49
F-A	277°03'	Azimut de control

24.- Los datos de campo de una poligonal son:

Est	Az	D.H.
1	321° 03'	83,10
2	253° 01'	129,80
3	159° 11'	61,01
4	092° 59'	88,17
5	055° 13'	45,54

Determinar el error en distancia y ubicar en que línea se presenta.

25.- Se tiene la siguiente poligonal abierta.

Coordenadas

	N	E
P1	500,00	500,00
P7	498,50	624,50

Est	Az	D.H.
1	120° 03'	35,50
2	102° 57'	30,61
3	090° 00'	15,00
4	129° 55'	17,03
5	069° 58'	16,01
6	050° 21'	32,50

Determine desplazamiento angular y error de cierre en distancia.

26.- Los datos de una poligonal abierta son:

Coordenadas

	N	E
1	1.000,00	1.000,00
5	861,98	1.031,58

Línea	Az.	DH.
1-2	042° 59'	234,60
2-3	186° 15'	189,70
3-4	150° 22'	175,20
4-5	278° 42'	197,80

Determine el desplazamiento angular y su error de cierre en distancia.

27.- Los datos de campo de una poligonal cerrada son:

Est	Az	D.H.
A	016° 50'	106,35
B	085° 56'	95,55
C	065° 00'	82,41
D	191° 23'	140,88
E	292° 18'	73,98
F	252° 18'	89,50

Determine en que lado se presenta un error en distancia; cual es su magnitud ?

28.- Dadas las coordenadas no corregidas de un polígono cerrado de terminar en que vértice se presenta el error angular y su magnitud.

Est	Norte	Este
1	1.055	1.050
2	1.060	1.100
3	1.040	1.125
4	1.015	1.040
5	1.035	1.010
6	1.065	1.030
1'	1.045	1.040

29.- Se tiene la siguiente poligonal abierta

Lado	Az	D.H.
1-2	150° 12'	100,13
2-3	075° 17'	110,11
3-4	130° 11'	109,23
4-5	067° 41'	100,13

Coordenadas

N	E
---	---

1	35.325,12	37.123,17
2	35.139,12	37.456,17

Error angular = 1°

Determinar en que estación se encuentra el error angular.

30.- Los datos de campo de una poligonal cerrada son:

Lado	Az	D.H.
1-2	045° 01'	35,10
2-3	047° 29'	41,56
3-4	195° 40'	92,82
4-1	338° 35'	21,53

Determinar el error de ángulo y ubicarlo en la estación en que se presenta.

31.- Se tiene los siguientes datos de campo de una poligonal.

Línea	D.H.	Az.
1-2	69,54	070°00'
2-3	145,62	341°32'
3-4	29,00	274°30'
4-5	33,05	240°51'
5-6	53,67	238°22'
6-1	140,15	148°10'

Encontrar que tipo de error se presenta y donde se encuentra.

32.- Dadas las coordenadas descorregidas de una poligonal abierta determinar por el método de brönniman en que vértice se presenta el error angular.

Est	N	E
1	900,00	1.900,00
2	947,38	2.131,40
3	1.034,20	2.211,60
4	1.121,91	2.321,39
5	1.042,56	2.258,75
5'	1.044,20	2.258,59

Error angular: 2°

33.- Aparentemente la siguiente tabla da distancias y acimutes de los lados de la poligonal, pero en realidad contiene un error en la transcripción de uno de los valores de longitud.

LADO	ACIMUT	DH
AB	20°31'30"	210.67
BC	357°16'00"	433.67
CD	120°04'00"	126.00

DE	188°28'30"	294.33
EA	213°31'00"	223.00

Encuentre el error

34.- Ajuste la siguiente poligonal por el método Crandall. Azimut 1-2 = 113°08'04"  
 Coordenadas de P ( 1827,85 ; 1648,55 )

E	O	A.C. H.	D.H.
1	5	14°45'47"	
	2	123°25'56"	362.72
2	1	0°00'08"	
	P	293°07'56"	202.90
2	1	0° 00'08"	
	3	105°55'46"	443.11
3	2	01°05'08"	
	4	91°22'38"	421.22
4	3	02° 08'09"	
	5	110° 43'09"	310.77
5	4	0° 05' 02"	
	1	126°36' 49"	304.59



En ambos sistemas el ángulo de rotación se conoce comúnmente como azimut o acimut (Az). En el sistema polar, la pareja ordenada es del tipo (d, Az) con d distancia al origen y Az ángulo del radio con el lado origen.

## 5.2 TRANSFORMACIONES

En general se denomina transformaciones a los métodos que nos permiten pasar de un sistema coordinado a otro; si hacemos este pasó sin que se presenten deformaciones, la transformación es conforme o similar.

La transformación que permite relacionar los sistemas polar y cartesiano NE la dan las ecuaciones siguientes.

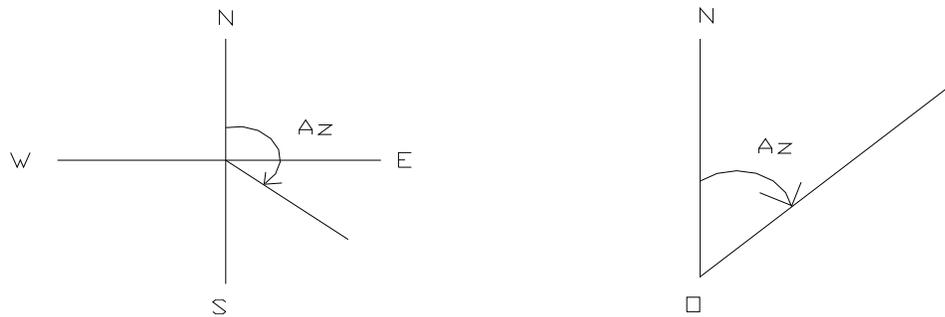
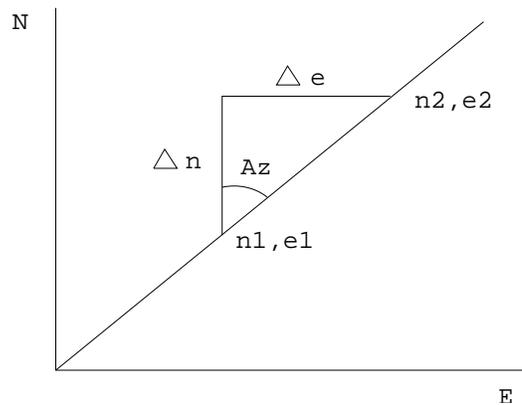


Fig. 2.

Rectangular a Polar



$$\Delta n = n_2 - n_1 \quad (4.1)$$

$$\Delta e = e_2 - e_1 \quad (4.2)$$

$$r = \sqrt{\Delta n^2 + \Delta e^2} \quad (4.3)$$

Fig. 3

$$Az = \arctan \frac{\Delta e}{\Delta n} \quad (4.4)$$

Polar a Rectangular

$$n = d \cos Az \quad (4.5)$$

$$e = d \sin Az \quad (4.6)$$

Veamos otras de uso común en topografía

- Cambio de posición: TRASLACION (T)
- Cambio de tamaño: ESCALA (S)
- Cambio de orientación: ROTACION ( $\theta$ )

Estas transformaciones son conformes si no presentan modificaciones de la figura como resultado del proceso, es decir la forma es igual antes y después del proceso.

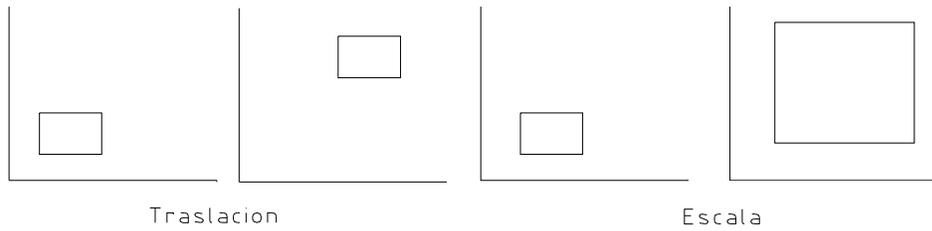


Fig. 4



ROTACION

Fig. 5

Transformación no conforme

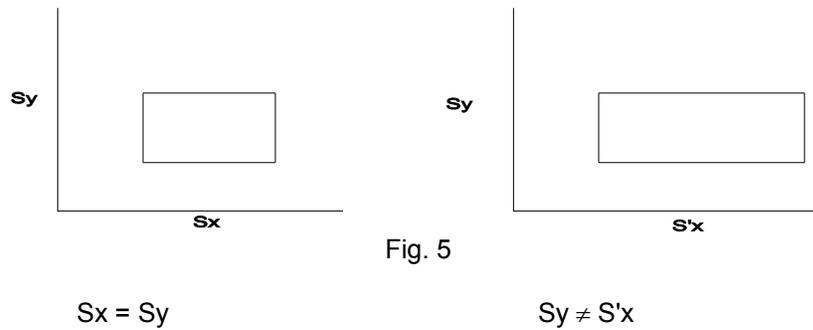


Fig. 5

Pueden ocurrir varias transformaciones simultáneamente que se pueden tratar en forma secuencial o en una sola operación que es un procedimiento sencillo de realizar; se habla de transformaciones de "tantos" parámetros, por ejemplo: traslación

en N y cambio de escala son dos; traslación en N, traslación en E, rotación son 3 parámetros, etc.

### 5.3. TRASLACIÓN

Es el desplazamiento en el sentido de los ejes tanto sobre el eje N como en el eje E en una magnitud no necesariamente igual en ambos ejes. N y E son las coordenadas primitivas, N' y E' son las nuevas coordenadas, T(N), T(E) son las coordenadas del nuevo origen con respecto al sistema de coordenadas primitivo.

Es de un parámetro si ocurre a lo largo de uno de los ejes o de dos si ocurre a lo largo de los dos ejes.

$$N(p) = n \qquad E(p) = e$$

$$n' = n - T(n) \quad (4.7) \qquad e' = e - T(e) \quad (4.8)$$

Para resolver el problema de la traslación es necesario conocer las dos coordenadas de un punto en ambos sistemas (NE y N'E') lo que proporciona dos ecuaciones, o una de las coordenadas si la transformación es de un solo parámetro

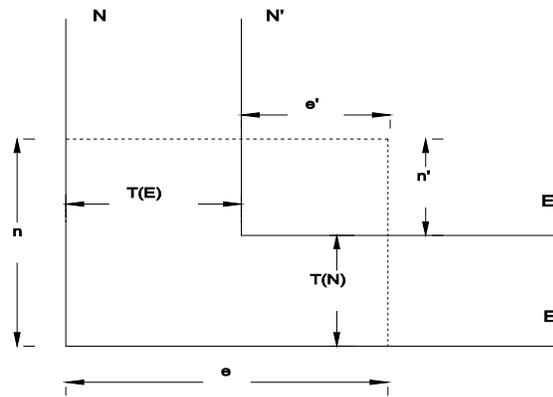


Fig. 6

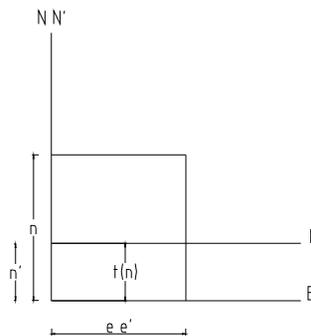


Fig. 7, T(E) = 0

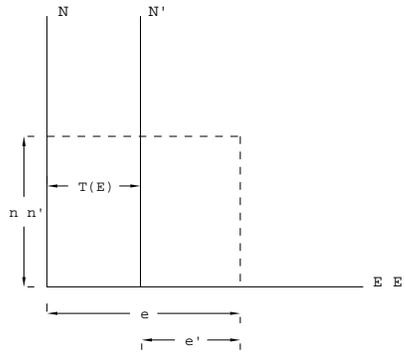


Fig. 8,  $T(N) = 0$

### Ejemplo

Dado un punto R de coordenadas NE (5.500;2.750) m, sus coordenadas en un sistema local son N'E' (1.450; 720); necesitamos determinar las coordenadas del origen de N'E' en el sistema general NE.

$$n' = n(R) - T(N) \Rightarrow T(N) = n(R) - n'(R)$$

$$T(N) = 5.500 - 1450 = 4.050 \text{ m}$$

$$T(N) = 4.050 \text{ m}$$

$$e' = e(R) - T(E) \Rightarrow T(E) = e(R) - e'(R)$$

$$T(E) = 2.750 - 720 = 2.030 \text{ m}$$

$$T(E) = 2.030 \text{ m}$$

## 5.4. ESCALA

Notada S, es la relación constante entre dos valores de una misma magnitud medidas en el terreno en diferentes unidades.

La transformación es conforme si  $S_x = S_y$ . Generalmente se cambia escala debido al empleo de diferentes unidades de longitud en los sistemas coordenados.

$$PM/PM' = S_n (S_x); \quad PP/PP' = S_e (S_y) \quad (4.9)$$

PM o PP varia en longitud según la relación  $PM/PM' = S$  que puede ser mayor o menor que la unidad.

$$PM' = S \cdot PM \quad PP' = S \cdot PP$$

$$n' = S \cdot n \quad e' = S \cdot e$$

Puede resolverse fácilmente así:

$$S = \frac{\text{Distancia N'E'}}{\text{Distancia NE}} \quad (4.10)$$

NOTA: Cuando  $S=1$  no hay cambio de escala

Ejemplo

En un sistema coordenado, con unidad de medida en pies (ft) las coordenadas de dos puntos P y Q son respectivamente (35; 48) y (104; 62), determinar la longitud de la línea en m.

El cambios de escala ocurre al variar de ft a m, en este caso la relación es  $1 / 3,28$ .

$$n'(m) = n (1/3,28) \quad e'(m) = e (1/3,28)$$

$$P (35/3,28; 48/3,28) \quad Q (104/3,28; 62/3,28)$$

$$d(m) = \sqrt{\left(\frac{35}{3,28} - \frac{104}{3,28}\right)^2 + \left(\frac{48}{3,28} - \frac{62}{3,28}\right)^2}$$

$$d(m) = 21.46 \text{ m}$$

## 5.5. ROTACIÓN

Se llama así al giro del sistema de ejes coordenados en una magnitud angular cualquiera, denominada  $\theta$ . Transformación de un parámetro. La rotación horaria se toma como positiva. NE es el sistema original y N'E' el sistema rotado;  $\alpha$  el Az Anterior y  $\beta$  el Az Nuevo;  $\theta$  el ángulo de rotación con origen en ON y lado ON'. Llamamos PM y PP las proyecciones a lo largo de los ejes ON, ON', OE y OE'.

$$AzN = AzA - \text{Rotación} \quad (4.11)$$

NE:

$$PM = d \cos \alpha = n \quad (4.12) \quad PP = d \sin \alpha = e \quad (4.13)$$

N'E':

$$PM' = d \cos \beta = n' \quad (4.14) \quad PP' = d \sin \beta = e' \quad (4.15)$$

$$PM' = d \cos \beta = d \cos (\alpha - \theta) = d(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta)$$

$$PM' = n \cos \theta + e \sin \theta = n'$$

$$PP' = d \sin \beta = d \sin (\alpha - \theta) = d(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta)$$

$$PP' = e \cos \theta - n \sin \theta = e'$$

$$n' = n \cos \theta + e \sin \theta \quad (4.16)$$

$$e' = -n \sin \theta + e \cos \theta \quad (4.17)$$

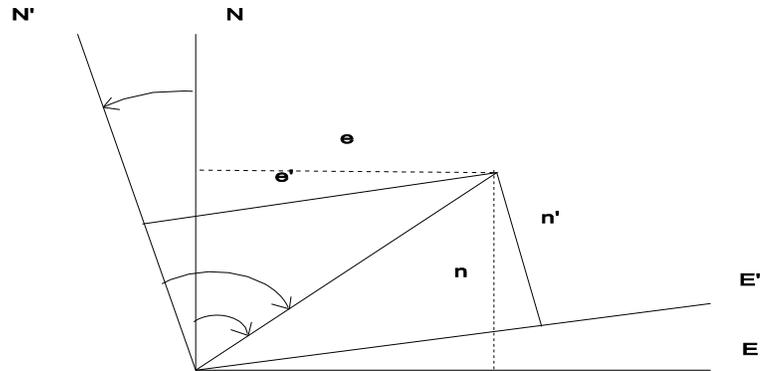


Fig. 9

Escrito en forma matricial

M = Matriz de rotación

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = M \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n' \\ e' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix}$$

Abreviando  $x' = Mx$ ; Para calcular  $x$  y por ser  $M$  matriz ortogonal, (inversa igual a la traspuesta  $M^{-1} = M^T$ )

$$M^{-1} x' = M^{-1} Mx \Rightarrow M^{-1} x' = x \Rightarrow x = M^{-1} x' = M^T x' \Rightarrow$$

$$x = M^T x'$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n' \\ e' \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Expresado como ecuaciones ordinarias

$$n = n' \cos \theta - e' \operatorname{sen} \theta \quad (4.20)$$

$$e = n' \operatorname{sen} \theta + e' \cos \theta \quad (4.21)$$

Ejemplo

Encontrar las coordenadas del punto Q (35; 35) después de haber sido rotado su sistema coordenado un ángulo  $\theta = 60^\circ$

$$n' = 35 \cos 60^\circ + 35 \operatorname{sen} 60^\circ = 47,81$$

$$n' = 47,81 \text{ m}$$

$$e' = -35 \operatorname{sen} 60^\circ + 35 \cos 60^\circ = -12,81$$

$$e' = -12,81 \text{ m}$$

Ejemplo

Encontrar las coordenadas de R si  $Az(OR) = 103^\circ$ ,  $d(OR) = 80 \text{ m}$  y  $\theta = -40^\circ$ .

$$n = d \cos Az = 80 \cos 103^\circ = -18,00 \Rightarrow n = -18,00 \text{ m}$$

$$e = d \operatorname{sen} Az = 80 \operatorname{sen} 103^\circ = 77,95 \Rightarrow e = 77,95 \text{ m}$$

$$n' = -18,00 \cos (-40^\circ) + 77,95 \operatorname{sen} (-40^\circ) = -63,89 \quad m = n'$$

$$e' = -(-18,00) \operatorname{sen} (-40^\circ) + 77,95 \cos (-40^\circ) = 48,14 \quad m = e'$$

Ejemplo

Determinar el ángulo de rotación de un sistema si las coordenadas anteriores de un punto M son (80; 105) y las coordenadas actuales (0; 132).

$$\begin{aligned} 0 &= 80 \cos \theta + 105 \operatorname{sen} \theta \\ 132 &= 105 \cos \theta - 80 \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Resuelvo para seno porque coseno es función par y proporciona da el signo de la rotación.

$$\begin{array}{r} 0 = 80 \cos \theta + 105 \operatorname{sen} \theta \\ -132 = -80 \cos \theta + 105 \operatorname{sen} \theta \\ \hline -10.560 = (11.025 + 6.400) \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 0,6060 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{Arc} \operatorname{sen} -0,6060 = -37^\circ 18' \\ \theta &= -37^\circ 18' \end{aligned}$$

Ejemplo

Conocemos que las coordenadas polares del punto S son  $(-40^\circ; 90)$ , después de haber rotado el sistema un ángulo  $\theta = -250^\circ$ ; determinar sus coordenadas antes de la rotación.

$$n = pm = 90 \cos -40^\circ = 68,94$$

$$e = pp = 90 \operatorname{sen} -40^\circ = -57,85$$

$$n' = 68,94 \cos (-250) - 57,85 \operatorname{sen} (-250) = -77,95$$

$$e = -68,94 \operatorname{sen} (-250) - 57,88 \cos (-250) = -45,00$$

## 5.6. ROTACIÓN Y CAMBIO DE ESCALA

Es una transformación de 2 parámetros:  $\theta$  y S

$$n' = S n = S (n \cos \theta + e \operatorname{sen} \theta) = S n \cos \theta + S e \operatorname{sen} \theta$$

$$e' = S e = S (-n \operatorname{sen} \theta + e \cos \theta) = -S n \operatorname{sen} \theta + S e \cos \theta$$

$$n' = S n \cos \theta + S e \operatorname{sen} \theta \quad (4.22)$$

$$e' = -S n \operatorname{sen} \theta + S e \cos \theta \quad (4.23)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} n' \\ e' \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Para determinar n y e, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} = (1/S) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n' \\ e' \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

y como ecuaciones convencionales

$$n = (n' \cos \theta - e' \text{sen } \theta)/S \quad (4.26)$$

$$e = (n' \text{sen } \theta + e' \cos \theta)/S \quad (4.27)$$

Ejemplo

A un punto de coordenadas (38; 59) le corresponden las coordenadas (-87; -20) en un sistema que ha sido rotado y modificada su escala. Determinar  $\theta$  y S

$$\text{Tan } \theta = -4.373 / -4.486 = 0,9748$$

$$\theta = 44^\circ 16' \text{ ó } 224^\circ 16'$$

Para el caso,  $\theta = 224^\circ 16'$  (ambas proyecciones negativas).

$$S = -87 / (38 \cos 224^\circ 16' + 59 \text{sen } 224^\circ 16') = 1,276$$

Otra forma de solucionarlo:

$$n s = n' * \cos \theta - e' * \text{sen } \theta \quad \text{dh ( A )} = 70.18$$

$$e s = n' * \text{sen } \theta + e' * \cos \theta \quad \text{dh ( A' )} = 89.27$$

$$s = 1.272 \quad \cos \theta = x \quad \text{sen } \theta = y$$

$$\begin{aligned} n s &= n' * x - e' * y \\ e s &= n' * y + e' * x \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} ns & -e' \\ es & n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} n' & -ns \\ e' & es \end{bmatrix}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\begin{bmatrix} 48,336 & 20 \\ 75,048 & -87 \\ -87 & -48,336 \\ -20 & 75,048 \end{bmatrix}}{\frac{x}{y} = \frac{-5562,456}{5706,192} = 0,9748}$$

$$\theta = \arctan 0,9748 \quad \theta = 44^\circ 16'$$

## 5.7. ESCALA, ROTACIÓN Y TRASLACIÓN

Es una transformación de tres parámetros S,  $\theta$  y T(n) ó S y T(e) o de cuatro parámetros S,  $\theta$ , T(N) y T(E).

$$n' = Sn - T(N) = S (n \cos \theta + e \sen \theta) - T(N)$$

$$e' = Se - T(E) = S (-n \sen \theta + e \cos \theta) - T(E)$$

$$n' = S n \cos \theta + S e \sen \theta - T(N) \quad (4.28)$$

$$e' = -S n \sen \theta + S e \cos \theta - T(E) \quad (4.29)$$

Escrito en forma matricula

Para el caso de necesitar n y e, en forma matricula

$$\begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} = (1/S) \begin{bmatrix} \cos \theta & - \sen \theta \\ \sen \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n' + T(N) \\ e' + T(E) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Y en forma convencional

$$n = (\cos \theta (n' + T(N)) - \sen \theta (e' + T(E)))/S \quad (4.31)$$

$$e = (\sen \theta (n' + T(N)) - \cos \theta (e' + T(E)))/S \quad (4.32)$$

Ejemplo

Dados los puntos A, B y C en un sistema coordenado NE, determinar los elementos de la transformación del sistema N' E' y las coordenadas de C en ese sistema.

Puntos	N	E	N'	E'
--------	---	---	----	----

A	121,45	632,17	1.431,09	1.100,64
B	-642,07	355,20	254,15	1.678,39
C	596,37	1.304,81		

Calculo de S

$$\text{Distancia AB (en sist. N' E')} = 1.311,10$$

$$\text{Distancia AB (en sist. N E)} = 812,20$$

$$S = 1.311,10 / 812,20 = 1,6142$$

Calculo de  $\theta$

$$\text{Az A (sist. NE)} = 199^\circ 56' 18''$$

$$\text{Az N (sist. N'E')} = 153^\circ 51' 14''$$

$$\begin{aligned} \theta &= \text{Az A} - \text{Az N} = 199^\circ 56' 18'' - 153^\circ 51' 14'' \\ &= 46^\circ 05' 04'' \end{aligned}$$

Otro procedimiento para el calculo de  $\theta$ :

$$1.431,09 = 1,6142(121,45 \cos \theta) + 1,6142(632,17 \sin \theta) - T(N) \quad (4.33)$$

$$1.100,64 = -1,6142(121,45 \sin \theta) + 1,6142(632,17 \cos \theta) - T(E) \quad (4.34)$$

$$254,15 = 1,6142(-642,07 \cos \theta) + 1,6142(355,20 \sin \theta) - T(N) \quad (4.35)$$

$$1.678,39 = -1,6142(-642,07 \sin \theta) + 1,6142(355,20 \cos \theta) - T(E) \quad (4.36)$$

Eliminando T(N) entre la (4.33) y la (4.35) ecuación:

$$1.176,94 = 1.232,47 \cos \theta + 447,08 \sin \theta \quad (4.37)$$

Eliminando T(E) entre la (4.34) y la (4.36) ecuación:

$$-577,75 = -1.232,47 \sin \theta + 477,08 \cos \theta \quad (4.38)$$

Eliminando  $\cos \theta$  entre las ecuaciones (4.37) y (4.38)

$$\sin \theta = 2,2472 / 3,1195 = 0,7204$$

$$\theta = 46^{\circ} 05' 03''$$

Calculo de T(N):

$$1.431,09 = 196,04 \cos 46^{\circ}05'07'' + 1.020,45 \operatorname{sen} 46^{\circ}05'07'' - T(N)$$

$$T(N) = -560,02$$

Calculo de T(E):

$$1.100,64 + 196,04 \operatorname{sen} 46^{\circ}05'07'' - 1.020,45 \cos 46^{\circ}05'07'' - T(E)$$

$$T(E) = -534,09$$

Calculo de N'(C) y E(C):

$$N'(C) = 1,6142 ( 596,37 \cos 46^{\circ} 05' 07'' + 1.304,81 \operatorname{sen} 46^{\circ} 05' 07'' ) - (-560,02)$$

$$N'(C) = 2.744,96$$

$$E'(C) = 1,6142 (-596,37 \operatorname{sen} 46^{\circ} 05' 07'' + 1.304,81 \cos 46^{\circ} 05' 07'' ) - (-534,09)$$

$$E'(C) = 1.301,51$$

## 5.8. APLICACIONES

- Actualización de un sistema coordenado; por variaciones debido a cambios magnéticos.
- La transferencia de información entre dos o más sistemas coordenados.
- La integración de varios sistemas a un sistema coordenado.
- Para la solución al problema de Hansen.
- Cambio del origen de los sistemas de referencia.

<u>Ejercicios</u>
-------------------

1.- Datos de una poligonal por azimut:

Línea	Az	D.H.
A B	292° 10'	012,94
B C	257° 18'	098,34

C D	249° 20'	119,22
D E	203° 42'	056,22
E F	149° 06'	045,53
F G	117° 58'	087,40
G H	172° 21'	093,86
H I	026° 30'	061,20

Coordenadas:

	N	E
A	1.278,66	1.130,05
I	1.050,98	1.027,24

(Trasladadas) A' 3.266,66 2.069,05

Ajuste la poligonal por el Método del Tránsito y en un sistema con la misma orientación determinar las coordenadas de todos los puntos a partir de las coordenadas de A'; calcular los elementos de la traslación.

2- Una poligonal levantada por azimut:

Est	Az	D.H.
1	000° 40'	238,08
2	267° 04'	155,67
3	223° 48'	176,06
4	207° 09'	247,00
5	090° 00'	277,60
6	043° 20'	160,43

El azimut verdadero de la línea 1-2 es 313° 50', determine los azimutes de los demás lados; calcule las coordenadas de los vértices de la poligonal ajustada por el Método de la brújula, antes y después de la rotación.

3- Las siguientes son las coordenadas de un levantamiento hecho por azimut magnético; se pide determinar las coordenadas verdaderas si la declinación media en la zona es de 3° E.

Pto	Norte	Este
A	407,51	290,63
B	322,12	527,34
C	117,21	585,56
D	311,70	463,97
E	181,21	290,68

4- Dada la siguiente poligonal abierta:

Est	Az	D.H.
1	269° 30'	159,88
2	177° 44'	082,08
3	258° 02'	246,79
4	272° 32'	186,80
5	221° 35'	103,60

6	265° 54'	301,68
7	000° 30'	147,02
8	010° 23'	271,36

Coordenadas:

	N	E
1	712,12	1.403,54
9	898,80	497,12

Después de la transformación, son:

1'	1.256,14	1.490,25
9'	848,35	2.300,18

Ajustar la poligonal por el método de la Brújula y posteriormente calcular ángulo de rotación, escala, los elementos de la traslación y las coordenadas de los puntos en el nuevo sistema.

5- Determine escala, traslación y ángulo de rotación.

	N	E	N'	E'
A	1.034,77	919,48	1.015,89	941,23
M	1.074,10	936,11	1.043,12	974,12

6- Determinar los elementos de la transformación y las coordenadas del punto L. en el sistema N' E'.

Pto	N	E	N'	E'
p	7.595,52	6.177,37	7.470,48	6.214,78
A	1.825,90	7.506,77	1.700,86	7.544,38
L	2.852,85	4.146,35		

7- Dadas coordenadas para los puntos A y B en dos sistemas diferentes:

	A	B
N	12.468,12	3.628,72
E	1.064,27	16.477,08
N'	9.065,47	129,58
E'	269,32	15.626,39

Hallar: Relación entre las escalas, ángulo de rotación y traslación a lo largo de los ejes.

8- La tabla siguiente contiene coordenadas de puntos en un sistema NE y las coordenadas de tres de esos puntos en el sistema N' E'. Calcular las coordenadas N'E' de los otros puntos.

Puntos	N(ft)	E(ft)	N'(m)	E'(m)
A	60,811	-64,033	98.844,8	12.178,4
B	70,614	93,895	98.827,9	9.318,6
C	87,901	67,864	98.489,9	9.769,9
D	87,074	-60,131		
E	256,760	-96,065		
F	486,394	60,497		

9 - En un sistema coordenado, con escala:  $1 / 0,0254$  con los siguientes datos.

Punto	Norte	Este
P	109,17	526,35
T	-194,25	338,94

Determinar las coordenadas N' E', el ángulo de rotación y la distancia entre PT en el nuevo sistema.

10 - La tabla siguiente contiene las coordenadas de puntos en sistema EN y las coordenadas de dos puntos en el sistema XY. Calcule XY del punto G.

Punto	N	E	X	Y
P	60.811	-64.033	98844.80	12178.40
y	70.614	93.859	98827.90	9318.60
G	87.901	67.864		

11 - Determinar los elementos de una transformación conforme y las coordenadas de A en el sistema YX.

Pto	N	E	Y	X
G	7595.52	6177.37	7470.48	6214.78
M	1852.90	7506.77	1700.86	7544.38
A	2852.85	4146.35		

12 - Las siguientes son las coordenadas de un levantamiento hecho por azimut verdadero; se pide determinar las coordenadas magnéticas si la declinación media en la zona es de  $2^\circ$  E.

Pto	Norte	Este
A	1307,71	1240,63
B	1122,52	1327,30
C	1217,26	1585,66
D	1411,40	1443,97
E	1281,31	1295,68

13- Determine la escala, Traslación, rotación y coordenadas de C.

Pto	Norte	Este	N'	E'
A	4376,40	8152,61	028,70	084,01
Y	6201,98	6389,54	948,97	628,33
C	5843,45	6214,93		

14 - Dados los puntos N, M y O en un sistema coordenado NE, determinar los elementos de la transformación en el sistema N'E' y las coordenadas de O en ese sistema.

Pto.	N	E	N'	E'
N	-323.17	231.20	2031.40	-1747.01
M	-547.20	-483.17	3721.32	1237.20
O	123.12	0.00		

15 - Una empresa Alemana, que fue contratada para realizar la ubicación de unos montajes industriales dejó los siguientes resultados.

	Norte	Este
A	1320.12	1214.12

$$\theta = 57^{\circ} 78'$$

Determine las coordenadas de A en el sistema N'E'

16- En un sistema coordenado se posee un punto P, si el origen de los dos sistemas es (0,0)

Punto	Norte '	Este '
P	120.92	-12.34
Punto	Norte	Este
P	109,17	526,35

Determinar, el ángulo de rotación, la escala y la traslación.

# 6

## INTERSECCION

### 6. INTRODUCCION

Willerbrord Snell Fue el pionero en la triangulación, sistema que consiste en determinar la medidas de distancias a través de los ángulos existentes entre distintos puntos.

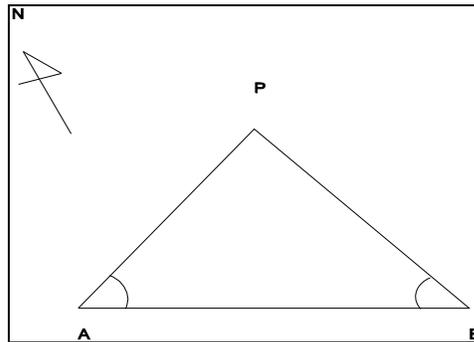
Procedimiento de campo que permite determinar la posición (usualmente horizontal) de un punto en un sistema coordenado, ocupando otros dos de coordenadas conocidas.

La solución analítica consiste en resolver un triángulo para lo cual son necesarios tres elementos

- a- Dos ángulos y un lado (ALA)
- b- Dos lados y un ángulo (LAL)
- c- Tres lados (LLL)

En términos de topografía:

Para determinar la posición de P



- a- Coordenadas de A y B, ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  o azimutes AP y BP
- b- Coordenadas de A y B, ángulo  $\alpha$  o ángulo  $\beta$  o Az AP o Az BP y distancia AP o distancia BP.
- c- Coordenadas de A y B, distancia AP y distancia BP.

Nota: Para el caso de un triángulo rectángulo, un dato (ángulo recto) es dado.

Nota: La solución del problema como esta planteado tiene comprobación matemática, no topográfica, esto quiere decir que no se sabe de la calidad de la posición del punto interceptado.

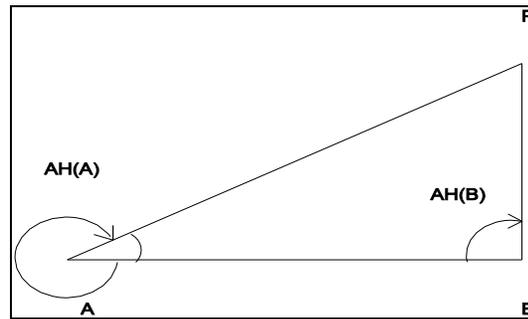


Fig. 2

Nota: La mejor solución se consigue cuando el triángulo formado es muy próximo a un triángulo equilátero.

Nota: Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  deben determinarse claramente para formar el triángulo, pueden ser horarios, contra- horarios, deflexiones, rumbos o azimuts.

### 5.2 Intersecciones

Las intersecciones pueden formarse de acuerdo a la información de los elementos de las figuras, obtenida en el campo y con base en ello se clasifican así (ver Figura 3)

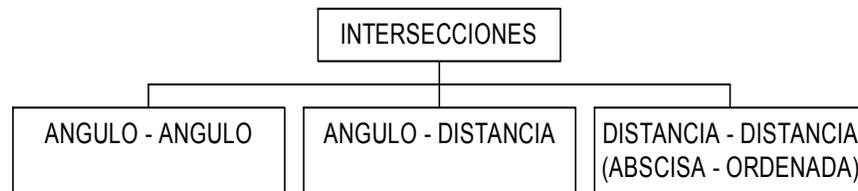


Fig. 3

En todos los casos el paso inicial para la solución del problema es determinar longitud y dirección de AB.

$$D(AB) = \sqrt{PP(AB)^2 + PM(AB)^2} \quad (5.1)$$

$$Az \ AB = \arctan \frac{PP(AB)}{PM(AB)} \quad (5.2)$$

### 5.2.1 Angulo Angulo

a. Solución trigonométrica, conocidos:  $N(A)$ ,  $E(A)$ ,  $N(B)$ ,  $E(B)$ ,  $AH(A)$ ,  $AH(B)$

$AH(A)$  = Angulo Horario en A

$$a = 360^\circ - AH(A)$$

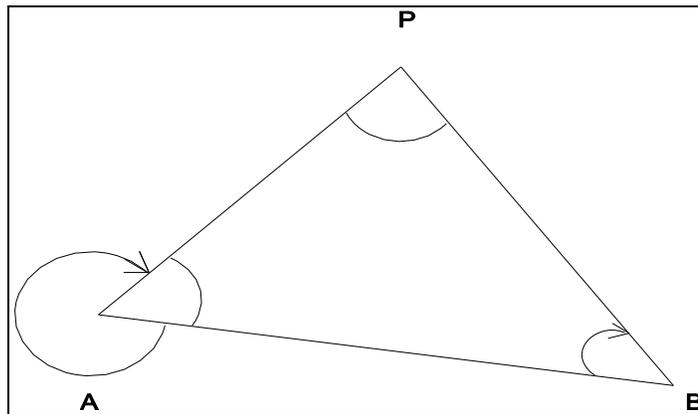


Fig. 4

$$\frac{d(BP)}{\text{sen } \alpha} = \frac{d(AP)}{\text{sen } \beta} = \frac{d(AB)}{\text{sen } \tau}$$

$$\text{sen } \tau = \text{sen } (\alpha + \beta)$$

$$\frac{d(AB) \text{ sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$$

$$\frac{d(AB) \text{ sen } \beta}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$$

$$Az(AP) = Az(AB) + AH(A) = Az(AB) - \alpha$$

$$Az(BP) = CAz(AB) + AH(B) = CAz(BA) + \beta$$

$$Az(BP) = Az(AB) + 180^\circ + \beta$$

Posición de P a partir de A

$$N(P) = N(A) + PM(AP) \quad (5.3)$$

$$N(P) = N(A) + \frac{d(AB) \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cos Az(AP) \quad (5.4)$$

$$E(P) = E(B) + PP(AP) \quad (5.5)$$

$$E(P) = E(A) + \frac{d(AB) \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \operatorname{sen} Az(AP) \quad (5.6)$$

Posición de P a partir de B

$$N(P) = N(B) + \frac{d(AB) \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cos Az(BP) \quad (5.7)$$

$$E(P) = E(B) + \frac{d(AB) \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \operatorname{sen} Az(BP) \quad (5.8)$$

Si  $N(P)A = N(P)B$  y  $E(P)A = E(P)B$  no hay error operacional

b. Solución Young, conocidos:  $N(A)$ ,  $E(A)$ ,  $N(B)$ ,  $E(B)$ ,  $AH(A)$ ,  $AH(B)$

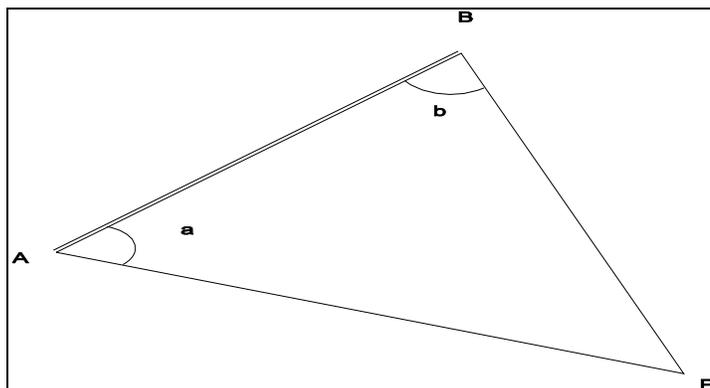


Fig. 5

En la figura 5, en el triángulo ABP

$$NP = NA + AP \cos \theta \quad (5.9)$$

ó

$$NP = NA + \frac{AB \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cos(\theta \text{ AB} + \alpha) \quad (5.10)$$

Entonces

$$\cos(\theta \text{ AB} + \alpha) = \cos \theta \text{ AB} \cos \alpha - \operatorname{sen} \theta \text{ AB} \operatorname{sen} \alpha \quad (5.11)$$

$$\cos(\theta \text{ AB} + \alpha) = \cos \alpha \frac{NB - NA}{AB} - \operatorname{sen} \alpha \frac{EB - EA}{AB}, \quad (5.12)$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación 5.10, se obtiene:

$$NP = NA + (NB - NA) \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} - (EB - EA) \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad (5.13)$$

Simplificando

$$NP = NA + (NB - NA) \frac{\cot \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta} - (EB - EA) \frac{1}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad (5.14)$$

ó

$$NP = \frac{EA - EB + NA \cot \beta + NB \cot \alpha}{\cot \beta + \cot \alpha} \quad (5.15)$$

De forma similar se deduce la ecuación para el cálculo de la coordenada este:

$$EP = \frac{NB - NA + EA \cot \beta + EB \cot \alpha}{\cot \beta + \cot \alpha} \quad (5.16)$$

$$\cot \beta + \cot \alpha$$

En las múltiples soluciones se debe tener cuidado en la escogencia de los puntos de partida, ya que de acuerdo a la posición con respecto a la línea base el método varia; así pues debe seguirse la siguiente norma: Si se esta sobre la línea base, de frente al punto a determinar (P) entonces, el punto conocido que se encuentra a la izquierda se tomara como primero (A) y el que este a la derecha, se tomará como segundo (B). Las coordenadas del punto P se determinaran por medio de las fórmulas de las cotangentes de los ángulos internos del triángulo propuesta por Young.

c. Solución sugerida por el profesor Gómez, conocidos: N(A), E(A), N(B), E(B), Az(AP), Az(BP)

$$a = Az(AB) - Az(AP) \quad \beta = Az(BP) - Az(BA)$$

Posición de P a partir de A

$$N(P) = N(A) + \frac{d(AB) \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \cos Az(AP) \quad (5.17)$$

$$E(P) = E(A) + \frac{d(AB) \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \operatorname{sen} Az(AP) \quad (5.18)$$

- Otra solución

Las ecuaciones de la recta punto pendiente

$$E(2) - E(1) = \tan(12) [N(2) - N(1)] \quad (5.19)$$

$$E(P) - E(A) = \tan Az(AP) [N(P) - N(A)] \quad (5.20)$$

$$E(P) - E(B) = \tan Az(BP) [N(P) - N(B)] \quad (5.21)$$

Restando (5.21) de (5.20) y agrupando términos:

$$N(P) = \frac{[\tan Az(AP) N(A) - E(A)] - [\tan Az(BP) N(B) - E(B)]}{\tan Az(AP) - \tan Az(BP)} \quad (5.22)$$

Reemplazando en (5.20)

$$E(P) = \frac{\tan Az(BP) [ \tan Az(AP) N(A) - E(A) ] - \tan Az(AP) [ \tan Az(BP) N(B) - E(B) ]}{\tan Az(AP) - \tan Az(BP)} \quad (5.23)$$

Para facilitar la solución

$$T(1) = \tan Az(AP) N(A) - E(A) \quad (5.24)$$

$$T(2) = \tan Az(BP) N(B) - E(B) \quad (5.25)$$

$$T = \tan Az(AP) - \tan Az(BP) \quad (5.26)$$

$$N(P) = \frac{T(1) - T(2)}{T} \quad (5.27)$$

$$E(P) = \frac{\tan Az(BP) T(1) - \tan Az(AP) T(2)}{T} \quad (5.28)$$

Ejemplo

	N	E	
A	540,16	16,02	Az AP = 83° 41'
B	300,93	229,16	Az BP = 342° 06'

$$\tan Az BP = \tan 342^\circ 06' = -0,3230$$

$$\tan Az AP = \tan 83^\circ 41' = 9,0338$$

$$T(1) = 9,0338 ( 540,16 ) - 16,02 = 4863,68$$

$$T(2) = - 0,3230 ( 300,93 ) - 229,16 = 326,36$$

$$T = 9,0338 - ( - 0,3230 ) = 9,3568$$

$$N(P) = \frac{4863,68 - ( - 326,36 )}{9,3568} = 554,68$$

$$E(P) = \frac{(-0,3230) 4.863,68 - 9,0338 (-326,36)}{9,3568} = 147,20$$

P: 554,68 m N; 147,20 m E

Ejemplo

	N	E	
A	540,16	16,02	ACH(A) $\alpha = 54^\circ 37'$
B	300,93	229,16	AH(B) $\beta = 23^\circ 48'$

$$AB = 320,40 \quad Az(AB) = 138^\circ 18'$$

$$Az(AP) = 138^\circ 18' - 54^\circ 37' = 83^\circ 41'$$

$$N(P) = 540,16 + \frac{320,40 \operatorname{sen} 23^\circ 48' \cos 83^\circ 41'}{\operatorname{sen} 78^\circ 25'} = 554,68$$

$$E(P) = 16,02 + \frac{320,40 \operatorname{sen} 23^\circ 48' \operatorname{sen} 83^\circ 41'}{\operatorname{sen} 78^\circ 25'} = 147,21$$

P, desde A : 554,68 m N ; 147,21 m E

A partir de B

$$Az(BP) = 318^\circ 18' + 23^\circ 48' = 342^\circ 06'$$

$$N(P) = 300,93 + \frac{320,40 \operatorname{sen} 54^\circ 37' \cos 342^\circ 06'}{\operatorname{sen} 78^\circ 25'} = 554,68$$

$$E(P) = 229,16 + \frac{320,40 \operatorname{sen} 54^\circ 37' \operatorname{sen} 342^\circ 06'}{\operatorname{sen} 78^\circ 25'} = 147,20$$

P, desde B: 554,68 m N; 147,21 m E

d. Solución Gauss, N(A), E(A), N(B), E(B), Az(AP), Az(BP)

En la figura 5 en el triángulo ABP

$$EP - EB = (NP - NB) \tan \theta_{BP} \quad (2.29)$$

Entonces

$$EP - EB = (NP - NA) \tan \theta_{BP} + (NA - NB) \tan \theta_{BP} \quad (5.30)$$

Entonces

$$EP - EA = (NP - NA) \tan \theta_{AP} \quad (5.31)$$

Restando las ecuaciones 5.30 y 5.31, se obtiene:

$$EA - EB = (NP - NA)(\tan \theta_{BP} - \tan \theta_{AP}) + (NA - NB) \tan \theta_{BP} \quad (5.32)$$

ó

$$NP = \frac{EA - EB - NA \tan \theta_{AP} + NB \tan \theta_{BP}}{\tan \theta_{BP} - \tan \theta_{AP}} \quad (5.33)$$

De manera similar se despeja la ecuación para la coordenada este:

$$EP = EA + (NP - NA) \tan \theta_{AP} \quad (5.34)$$

Esta fórmula se emplea cuando los valores de los azimutes están cercanos a  $0^\circ$  o a  $180^\circ$ . Y para aquellos casos en los cuales los azimutes son cercanos a  $90^\circ$  o  $270^\circ$  se recomienda emplear la siguiente fórmula, debido a que la tangente de estos valores se hace demasiado grande:

$$NP = NB + (EP - EB) \cot \theta_{BP} \quad (5.35)$$

ó

$$NP = NA + (EP - EA) \cot \theta_{AP} \quad (5.36)$$

$$EP = \frac{NB \cot \theta_{BP} - EA \cot \theta_{AP} - NB + NA}{\cot \theta_{BP} - \cot \theta_{AP}} \quad (5.37)$$

### 5.2.2 Angulo distancia

- a. Conocidos  $N(A)$ ,  $E(A)$ ,  $N(B)$ ,  $E(B)$ ,  $d(AB)$ ,  $Az(AP)$

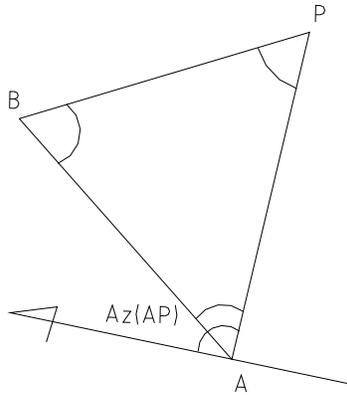


Fig. 7

En la figura 7

$$\alpha = Az(AP) - Az(AB)$$

$$\frac{d(BP)}{\text{sen } \alpha} = \frac{d(AB)}{\text{sen } \tau} = \frac{d(AP)}{\text{sen } \beta}$$

$$\frac{d(AB)}{\text{sen } \tau} = \frac{d(AP)}{\text{sen } \alpha}$$

NOTA: Al resolver  $\text{sen } t$  resultan dos respuestas posibles  $t(1) > 90^\circ$ ,  $t(2) < 90^\circ$  una información adicional permite obviar la ambigüedad; si  $\alpha + \beta = 90^\circ$  la solución es única.

Por ley de cosenos

$$d(AP)^2 = d(AB)^2 + d(BP)^2 - 2d(AB)d(BP)\cos\alpha$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para  $d(AP)$ .

$$d(AP) = \frac{2d(AB)\cos\alpha \pm \sqrt{[2d(AB)\cos\alpha]^2 - 4[d(AB)]^2 - d(BP)^2}}{2}$$

Si una de las respuestas es negativa se descarta, si las dos son positivas se verifica la solución.

$$d(AP)^2 = d(BP)^2 + d(BA)^2 - 2 d(BP) d(BA) \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{d(BP)^2 + d(BA)^2 - d(AP)^2}{2 d(BP) d(BA)}$$

$Az(BP) = Az(AB) + 180^\circ - \beta$ , en la figura 7

Desde A

$$N(P) = N(A) + d(AP) \cos Az(AP)$$

$$E(P) = E(A) + d(AP) \operatorname{sen} Az(AP)$$

Desde B

$$N(P) = N(B) + d(BP) \cos Az(BP)$$

$$E(P) = E(B) + d(BP) \operatorname{sen} Az(BP)$$

Ejemplo

	N	E	
A	103,45	82,50	$Az(AP) = 40^\circ 37'$
B	110,12	305,40	$d(BP) = 238,92 \text{ m}$

$$d(AB) = 223,00 \qquad Az(AB) = 88^\circ 17'$$

$$a = Az(AB) - Az(AP) = 88^\circ 17' - 40^\circ 37' = 47^\circ 40'$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{223,00 \operatorname{sen} 47^\circ 40'}{238,92} = 0,6899$$

$$t = 43^\circ 38' \text{ ó } 136^\circ 22'$$

$$d(AB) = \frac{446 \cos 47^\circ 4'0 + \sqrt{(446 \cos 47^\circ 4'0)^2 - 4[-7353,77]}}{2}$$

$$d(AB) = 323,11 \text{ m}$$

$$\cos \beta = \frac{(238,92)^2 + (223,00)^2 - (323,11)^2}{2 \cdot 223,00 \cdot 238,92} = 0,0226$$

$$\beta = 88^\circ 42'$$

$$Az(BP) = 88^\circ 17' + 180^\circ + 88^\circ 42' = 356^\circ 59'$$

Desde A

$$N(P) = 103,45 + 323,11 \cos 40^\circ 37' = 348,72 \text{ m}$$

$$E(P) = 82,50 + 323,11 \sin 40^\circ 37' = 292,84 \text{ m}$$

Desde B

$$N(P) = 110,12 + 238,92 \cos 356^\circ 59' = 348,71 \text{ m}$$

$$E(P) = 305,40 + 238,92 \sin 356^\circ 59' = 292,83 \text{ m}$$

Ejemplo

	N	E	
A	350	250	a = 35° 00'
B	400	600	d(BP) = 220 m

$$d(AB) = \sqrt{350^2 + 50^2} = 353,55 \text{ m}$$

$$Az(AB) = \arctan \frac{350}{50} = 81^\circ 52'$$

$$Az AP = 81^\circ 52' - 35^\circ 00' = 46^\circ 52'$$

Solución 1

$$b = 353,55 \cos 35^\circ \pm \sqrt{\{(353,55 \cos 35^\circ)^2 - 353,55^2 + 220^2\}}$$

$$b = 374,92 \text{ m}$$

$$\beta = \arccos \frac{220^2 + 353,55^2 - 374,92^2}{2 (220) 353,55} = 77^\circ 49'$$

$$\text{Az BP} = 261^\circ 52' + 77^\circ 49' = 339^\circ 41'$$

A partir de A

$$\text{N(P) A} = 350 + 374,92 \cos 46^\circ 52' = 606,33 \text{ m}$$

$$\text{E(P) A} = 250 + 374,92 \sin 46^\circ 52' = 523,60 \text{ m}$$

A partir de B

$$\text{N(P) B} = 400 + 220 \cos 339^\circ 41' = 606,29 \text{ m}$$

$$\text{E(P) B} = 600 + 220 \sin 339^\circ 41' = 523,55 \text{ m}$$

Solución 2

$$b = 353,55 \cos 35^\circ \pm \sqrt{\{(353,55 \cos 35^\circ)^2 - 353,55^2 + 220^2\}}$$

$$b = 204,30 \text{ m}$$

$$\beta = \arccos \frac{220^2 + 353,55^2 - 204,30^2}{2 (220) 353,55} = 32^\circ 11'$$

$$\text{Az (BP)} = 261^\circ 52' + 32^\circ 11' = 294^\circ 03'$$

A partir de A

$$\text{N(P) A} = 350 + 204,30 \cos 46^\circ 52' = 489,68 \text{ m}$$

$$\text{E(P) A} = 250 + 204,30 \sin 46^\circ 52' = 399,09 \text{ m}$$

A partir de B

$$\text{N(P) B} = 400 + 220 \cos 294^\circ 03' = 489,66 \text{ m}$$

$$\text{E(P) B} = 600 + 220 \sin 294^\circ 03' = 399,10 \text{ m}$$

### 5.2.3 Distancia Distancia

a. Conocidos  $N(A)$ ,  $E(A)$ ,  $N(B)$ ,  $E(B)$ ,  $d(AP)$  Y  $d(BP)$

Nota: Antes de proceder a la solución del triángulo, deben verificarse las desigualdades  $a > b - c$ ,  $a < b + c$  para los tres lados  $a, b, c$ .

Nota: Este problema es ambiguo en la determinación de las coordenadas de P, no de la solución del triángulo,  $a' = a$ ,  $\beta' = \beta$ ,  $AP = AP'$ ,  $BP = BP'$ ,  $AB$  común; información adicional como la dirección aproximada de AP o BP elimina la ambigüedad.

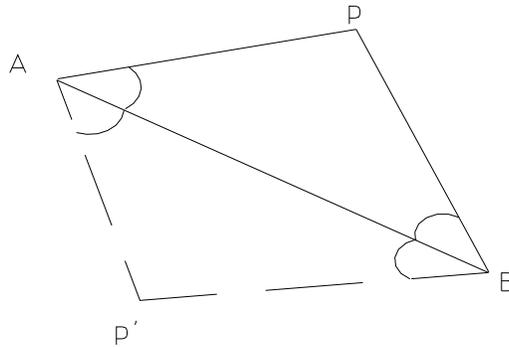


Fig. 8

$$d(AP)^2 = d(AB)^2 + d(BP)^2 - 2 d(AB) d(BP) \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{d(AB)^2 + d(BP)^2 - d(AP)^2}{2 d(AB) d(BP)}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \tau} = \frac{d(AP)}{d(AB)} = \frac{d(BP)}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \frac{d(BP)}{d(AP)}$$

De la figura 8

$$Az(BP) = Az(BA) + \beta$$

$$Az(AP) = Az(AP) - \alpha$$

Posición de P, a partir de B

$$N(P) = N(B) + d(BP) \cos Az(BP) \quad (2.39)$$

$$E(P) = E(B) + d(BP) \operatorname{sen} Az(BP) \quad (2.40)$$

Ejemplo

	N	E	
A	320,48	530,16	AP = b = 203,76 m
B	492,29	608,09	BP = a = 165,16 m

P al noroeste de AB

$$d(AB) = \sqrt{\{77,93^2 + 171,81^2\}} = 188,66 \text{ m}$$

$$Az(AB) = \operatorname{arc} \tan \frac{77,93}{171,81} = 24^\circ 24'$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \cos \frac{203,76^2 + 188,66^2 - 165,16^2}{2 (203,76) 188,66} = 49^\circ 36'$$

$$Az(AP) = 24^\circ 24' + 360^\circ - 49^\circ 36' = 334^\circ 48'$$

$$\beta = \operatorname{arc} \cos \frac{165,17^2 + 188,66^2 - 203,76^2}{2 (165,16) 188,66} = 69^\circ 58'$$

$$Az(BP) = 204^\circ 24' + 69^\circ 58' = 274^\circ 22'$$

A partir de A

$$N(P) A = 320,48 + 203,76 \cos 334^\circ 48' = 504,85$$

$$E(P) A = 530,16 + 203,76 \operatorname{sen} 334^\circ 48' = 443,40$$

A partir de B

$$N(P) B = 492,29 + 165,16 \cos 274^\circ 22' = 504,87$$

$$E(P) B = 608,09 + 165,16 \text{ sen } 274^\circ 22' = 443,41$$

Coordenadas de P

504.86; 443.41

### 5.2.4 Abscisa Ordenada

a. Conocidas N(A), E(A), N(B), E(B) d(AP) (o BP)

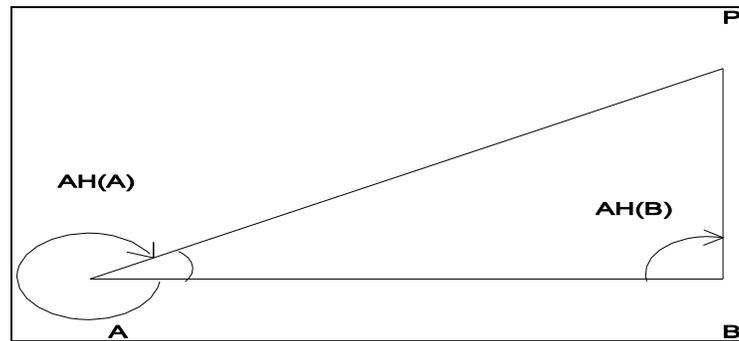


Fig. 9

$$\alpha = \text{arc cos } \frac{d(AB)}{d(AP)}$$

$Az (AP) = Az AB \pm \alpha$  El signo del ángulo  $\alpha$  depende de la posición de P ya que puede ser + o -

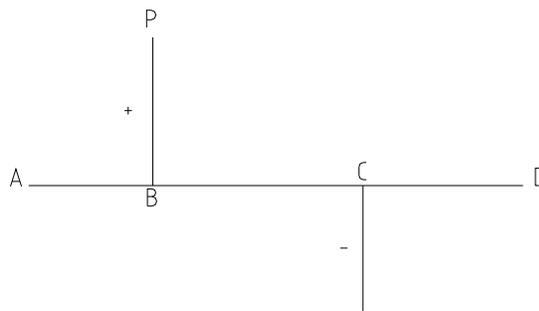


Fig. 10

Por ejemplo; si esta al norte o al este como BP se escribirá su distancia así: +BP, si se encuentra al sur o al oeste se marcará -CQ, no significa que la distancia sea negativa sino su posición con respecto a la línea AD, en caso de no se tenga cuenta con esta notación desconoceríamos la posición de los puntos con respecto a la línea AP presentándonos dos posibles soluciones.

Posición de P a partir de A

$$N(P) = N(A) + d(AP) \cos Az(AP) \quad (5.41)$$

$$E(P) = E(A) + d(AP) \operatorname{sen} Az(AP) \quad (5.42)$$

$$Az(BP) = Az(BA) + AH(B)$$

$$d(BP) = d(AB) \tan \alpha$$

Posición de P a partir de B

$$N(P) = N(B) + d(AB) \tan \alpha \cos Az(BP) \quad (5.43)$$

$$E(P) = E(B) + d(AB) \tan \alpha \operatorname{sen} Az(BP) \quad (5.44)$$

b. Conocidos  $N(A)$ ,  $E(A)$ ,  $N(B)$ ,  $E(B)$ ,  $AH(A)$

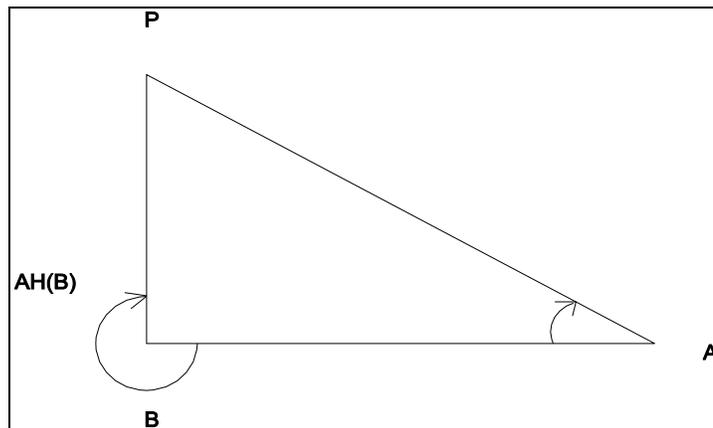


Fig. 11

$$AH(A) = \alpha$$

$$Az(AP) = Az(AB) + \alpha$$

$$d(AP) = d(AB) \sec \alpha$$

$$d(BP) = d(AB) \tan \alpha$$

$$Az(BP) = Az(BA) + AH(B)$$

Posición de P a partir de A

$$N(P) = N(A) + d(AB) \sec \alpha \cos Az(AP) \quad (5.45)$$

$$E(P) = E(A) + d(AB) \sec \alpha \operatorname{sen} Az(AP) \quad (5.46)$$

Posición de P a partir de B

$$N(P) = N(B) + d(AB) \tan \alpha \cos Az(BP) \quad (5.47)$$

$$E(P) = E(B) + d(AB) \tan \alpha \operatorname{sen} Az(BP) \quad (5.48)$$

Ejemplo

	N	E	
A	530	100	D AC = 132
B	420	370	D CD = +42,20

Calculamos

$$Az AB = 112^\circ 09' 59'' \quad D AB = 291,55$$

$$a = \operatorname{arc} \tan CD / AC = \operatorname{arc} \tan 42,20 / 132,00 = 017^\circ 43' 44''$$

$$AD = AC / \cos a = 132 / \cos 017^\circ 43' 44'' = 138,58$$

Solución 1

$$ND = 530 + 138,58 \cos (112^\circ 09' 59'' - 017^\circ 43' 44'')$$

$$ND = 519,28$$

$$ED = 100 + 138,58 \operatorname{sen} (112^\circ 09' 59'' - 017^\circ 43' 44'')$$

$$ED = 238,16$$

Solución 2

$$NC = 100 + 132 \cos (112^\circ 09' 59'')$$

$$NC = 480,20$$

$$EC = 100 + 132 \operatorname{sen} (112^\circ 09' 59'')$$

$$EC = 222,24$$

$$ND = 480,20 + 42,40 \cos (112^\circ 09' 59'' - 90^\circ)$$

$$ND = 519,28$$

$$ED = 222,24 + 42,40 \sin ( 112^\circ 09' 59'' - 90^\circ)$$

$$ED = 238,16$$

### 5.3 Precisión

La precisión de la intersección (figura 2) se expresa por medio del error medio cuadrático del valor del desplazamiento lineal del punto a determinar EMC<sub>p</sub> y es debida a los errores en las mediciones de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ ,

Se calcula de acuerdo a la siguiente formula:

$$EMC_p = D_{AB} \frac{EMC_\beta}{\rho} \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}}{\sin^2 \theta} \quad (5.49)$$

En Donde D<sub>AB</sub>: Distancia AB, EMC<sub>β</sub>: Error medio cuadrático de los ángulos medidos ( $\alpha$  y  $\beta$ ) debe expresarse en segundos,  $\rho$ : Un segundo en radianes.

#### 5.3.1. Método de comprobación

En el capítulo cinco se habla del grado de precisión, que usualmente se presenta como una fracción con numerador la unidad, por ejemplo 1 / 7500, esto quiere decir que el error es una unidad en siete mil quinientas unidades.

En los levantamientos planimétricos se resuelve la posición relativa de puntos referidos a un plano horizontal, este tipo de trabajo se hace por múltiples razones, entre ellas señalar el área de un predio, para este propósito la magnitud del grado de precisión, como se demostrara mas adelante, tiene poca importancia, para otras aplicaciones como por ejemplo la localización de puntos para ubicación de maquinaria o estructuras prefabricadas, importa muchísimo su magnitud a mayor precisión relativa menor la incertidumbre de la determinación de los puntos.

La incertidumbre en la determinación planimétrica de los vértices de una poligonal tiene que ver con el ángulo que hacen las líneas que al interceptarse determinan el punto en referencia. Si las líneas que se cortan hacen un ángulo cercano a 90° hablamos de una intersección fuerte, si el ángulo que hacen es pequeño, cerca de 0° hablamos de una intersección débil. La calidad de la intersección la podemos calificar objetivamente resolviendo el determinante del sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

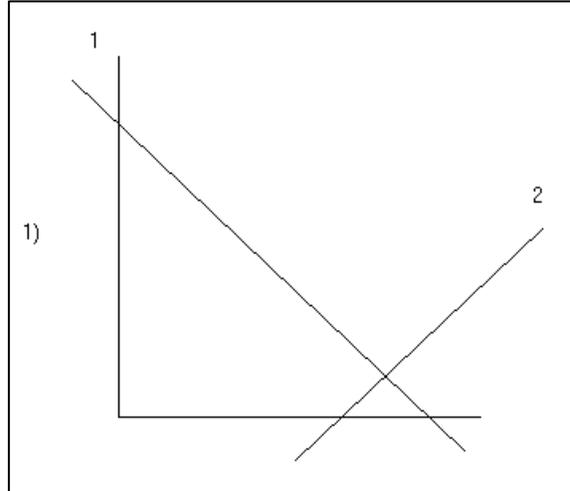
$$1- \quad 4x + 3y = 11$$

$$2- \quad 6x - 8y = 4$$

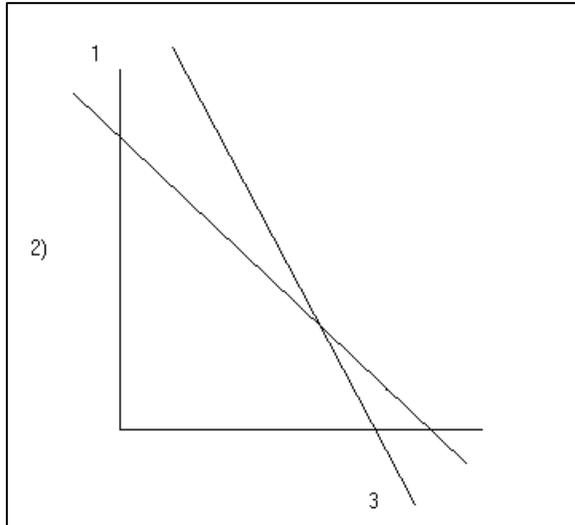
$$3- \quad 5x + 5y = 15$$

$$4- \quad 9x + 7y = 25$$

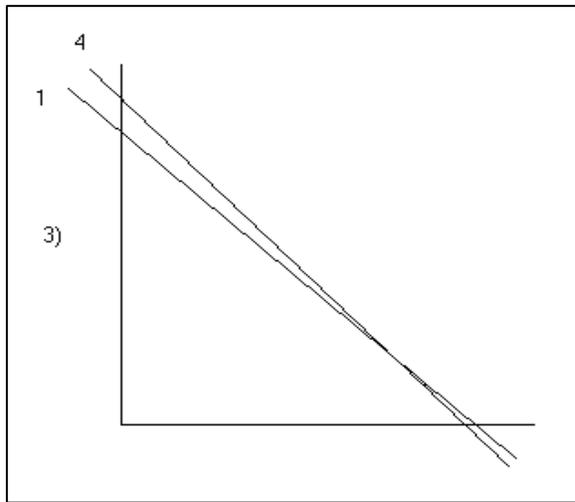
la recta 1 se intercepta con cada una de las tres:



$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 18 = -50$$



$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$$



$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 27 = 1$$

En el caso 3, si resolvemos el sistema, su solución es  $x = 2$ .  $Y = 1$ , pero, otros valores como  $x = 2,75$   $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 3,60$ , también son soluciones con cierta aproximación que afectan la posición (coordenadas) del punto a determinar.

#### 5.4 Aplicaciones

- Determinación horizontal de puntos inaccesibles
- Densificación de detalles
- Calculo de distancias.
- Para ligar puntos a diferentes redes.

### Ejercicios

1 - Determine, por dos caminos, las coordenadas del punto de intersección C a partir de los siguientes datos de campo:

$$\begin{array}{ll} N(A) = 20.579,80 & N(B) = 15.236,30 \\ E(A) = 12.842,70 & E(B) = 13.294,80 \\ AH(BAC) = 52^\circ 37' 49'' & ACH(ABC) = 73^\circ 22' 07'' \end{array}$$

2 - A partir de los siguientes datos, calcule las coordenadas de los puntos C, D y E.

Punto	N	E
A	2.682,91	2.551,64
1	2.559,65	2.558,61
2	2.429,78	2.565,97
3	2.364,78	2.569,65
B	2.314,30	2.572,51

Ordenadas a partir de la línea AB, + hacia el NE

$$\begin{array}{l} 1C = +45,53 \\ 2D = -75,28 \\ 3E = +52,25 \end{array}$$

3 - Dadas las coordenadas de los puntos A y B, las distancias AC y CB hacia el norte de AB. Calcular las coordenadas de C, por dos caminos.

$$\begin{array}{ll} N(A) = 100,01 & E(A) = 100,38 \\ N(B) = 180,91 & E(B) = 250,47 \\ AC = 94,26 & BC = 103,10 \end{array}$$

4 - Los datos de una poligonal son:

Lado	Az	Long
AB	030° 42'	
BC	086° 24'	150,60
CD	032° 30'	186,30
DE	315° 06'	45,00

la línea DE debe prolongarse hasta encontrar la prolongación de AB en F. Calcular EF y FB.

5 - Determinar las coordenadas del punto de intersección P a partir de los siguientes datos de campo.

Coordenadas	N	E
A	1.080,12	1.070,02
B	1.040,00	1.110,02

$$\begin{array}{l} Az AP = 15^\circ 17' 12'' \\ BP = 2.560 \text{ m} \end{array}$$

6 - Realizar el dibujo, calcular el área a partir de las siguientes coordenadas y explicar el resultado o resultados.

Pto	N	E
1	105	100
2	103	102
3	97	98
4	95	100

7 - Se deben colocar dos puntos B y C que pertenecen al segmento de línea curva que parte de A y termina en D las distancias  $AB=BC=CD$ , el punto E no pertenece a la línea curva, calcular las coordenadas de B y C.

PTO	NORTE	ESTE
A	2070.00	4130.00
D	2030.00	4170.00
E	2090.00	4190.00

8 - Que radio debe tener la glorieta que pasa por los puntos coordenados.

Pto	Norte	Este
A	1010	1004
B	1009	1007
C	1006	1010

9 - Desde el punto N, se determino S (centro de una glorieta de radio 15m ) se midió el azimut  $NC 96^\circ 11'$  de manera que NC es tangente a la glorieta; determinar las coordenadas de C.

	Norte	Este
S	1070	1145
N	1090	1095

11 - Las coordenadas de los siguientes puntos son:

Punto	Norte	Este
1	430.62	289.58
2	785.43	416.34
3	699.85	302.21
4	382.47	649.89

Calcule las coordenadas del punto de intersección de las líneas 1-2 y 3-4.

12- Determine por dos caminos, las coordenadas del punto D a partir de los siguientes datos.

$$\begin{array}{ll} N(A) = 1050,00 & N(B) = 1020,00 \\ E(A) = 1050,00 & E(B) = 1090,00 \end{array}$$

$$AH ( BAD ) = 053^{\circ} 20' 47'' \quad ACH ( ABD ) = 022^{\circ} 39'$$

13- Determine el EMC del problema 12

14- Consultar que es bisección

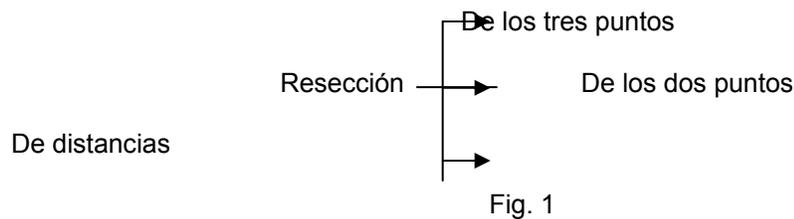
## 6.1. Introducción

Johann Heinrich Lambert, (1728 - 1777) Matemático, físico y filósofo, Publico la solución al problema de tres puntos en 1765.

Procedimiento de campo que permite determinar la posición horizontal del punto ocupado por el instrumento, (plancheta, tránsito, distanciómetro) observando otros de posición conocida.

## 6.2 Resecciones

Se tratara el problema de la resección considerando los siguientes casos de acuerdo a los datos de campo.



### 6.2.1 Problema de los tres puntos

El procedimiento de campo consiste en determinar direcciones o medir ángulos a un mínimo de tres puntos de posición horizontal conocida.

Es un método poderoso y conveniente en triangulaciones de orden inferior para extender el control o densificarlo con precisión aceptable; puede utilizarse también para localizar el punto terminal de una poligonal. Es posible su empleo cuando los puntos a visar son segura y fácilmente identificables.

La condición necesaria para su solución es de tres puntos, si se visan cuatro o más, se dispone de información redundante lo que permite comprobar el resultado. Algunos autores sugieren emplear este método con cuatro puntos a observar tres de los cuales deben ser puntos con coordenadas conocidas y el cuarto es de control; este último puede ser un punto que no pertenezca a la red tales como puntos obtenidos por resección u otro método, además pueden ser objetos del lugar. Se permite la solución de este problema con el empleo de tres puntos con la condición de que se halla medido el azimut real de una de las direcciones que intervienen en la solución.

Según la precisión requerida o el método de cálculo exigido, la solución puede ser simultánea por Mínimos Cuadrados o promedio aritmético si las discrepancias están dentro de tolerancias aceptables.

Este problema es conocido con muchos nombres: Problema de los Tres Puntos, Trisección Inversa, Problema de Pothenot, Problema de la Carta y Problema del vértice de la pirámide.

El problema fue resuelto por el Holandés Willeboard Snellius en 1624, los ingleses consideran que el autor es John Collins que publicó la solución en 1671. El francés Laurent Pothenot en 1692 se apropió de éstas y publicó la solución del problema sin aportar nada nuevo, sólo su nombre.

De este problema se han presentado varias soluciones como Lambert 1765, Cagnoli 1786, Van Swinden 1790, Bassel 1813, Gauss 1823, Gerling 1840, M.G. Lemaire 1905 y Kneills.

Existen solución: Geométrica, gráfica y trigonométrica.

El problema es indeterminado cuando los cuatro puntos A, B, C y P están sobre una circunferencia (arco capaz), en éste caso:

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

La solución es ambigua cuando  $\alpha + \beta + \theta \neq 180^\circ$  en un intervalo aproximado que va de  $175^\circ$  a  $185^\circ$ , debido a que el arco formado por un punto ubicado en la circunferencia también puede ser formado por otro punto distinto que este en la misma circunferencia.

En cualquiera de los casos el punto P debe desplazarse, si esto no es posible, uno de los puntos a visar debe cambiarse.

Solución:

Se determina la posición del punto P, apoyado en los puntos A, B y C con coordenadas X,Y o N,E conocidas.

La posición relativa de los cuatro puntos puede ser:

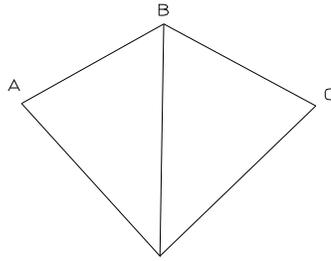


Fig. 2

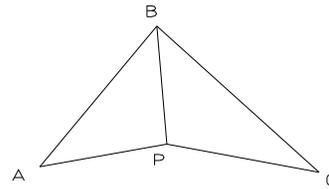


Fig. 3

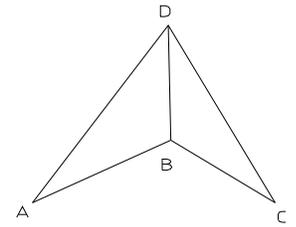


Fig. 4

Se recomienda que el punto a determinar este dentro del triángulo que generan los tres puntos con coordenadas conocidas ( A, B, C ) que intervienen en la solución; o fuera del triángulo pero al frente de un de los vértices preferiblemente del punto B de la figura 3.

Los puntos de apoyo deben simbolizarse en el sentido de las manecillas del reloj desde el punto a determinar P colocado al frente de los mismos

Los tres puntos A, B y C forman un triángulo; en la figura 2, B y P están en distinto lado de AC; en las figuras 3 y 4 están del mismo lado; en la 3, P dentro del triángulo.

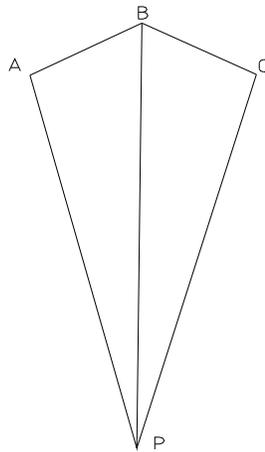


Fig. 5

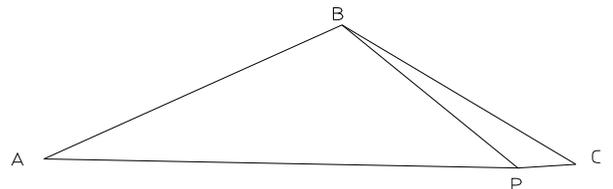


Fig. 6

Para los tres casos la solución es la misma, la que vamos a estudiar fue tomada del libro Fundamentals of Surveying de Rayner y Schmidt.

Se deben evitar conformaciones similares a las que aparecen en la figuras 5 y 6.

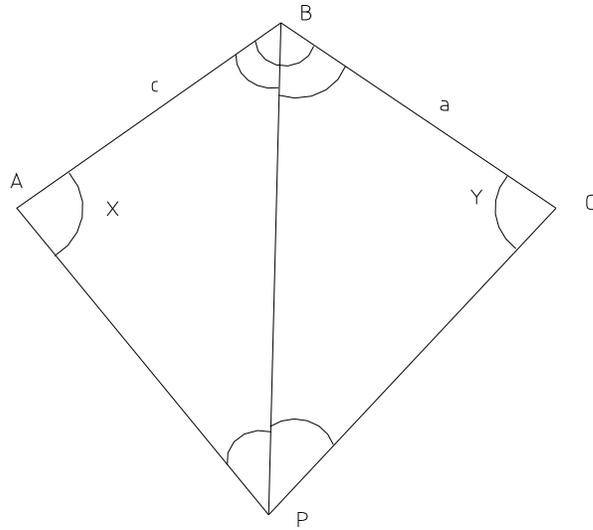


Fig. 7

Con el tránsito ocupando el punto P, se miden los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , también se pueden determinar direcciones a los puntos A, B y C, y de éstas se deducen los ángulos correspondientes  $\alpha$  y  $\beta$ .

Deducción de la fórmula:

$$\alpha + \beta + \theta + x + y = 360^\circ \quad (6.1)$$

$$x + y = J = 360^\circ - (\alpha + \beta + \theta)$$

$$J = 360^\circ - (\alpha + \beta + \theta) \quad (6.2)$$

En los  $\Delta$ s ABP y BPC

$$\frac{AP}{\text{sen } t_1} = \frac{c}{\text{sen } \alpha} = \frac{BP}{\text{sen } x} \implies BP = \frac{c \text{ sen } x}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{CP}{\text{sen } t_2} = \frac{a}{\text{sen } \beta} = \frac{BP}{\text{sen } y} \implies BP = \frac{a \text{ sen } y}{\text{sen } \beta}$$

$$BP = \frac{c \text{ sen } x}{\text{sen } \alpha} = \frac{a \text{ sen } y}{\text{sen } \beta} \quad (6.3)$$

de aquí escribimos:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = H = \frac{a \text{ sen } \alpha}{c \text{ sen } \beta}$$

$$\Rightarrow \text{sen } x = H \text{ sen } y \quad (6.4)$$

$$x = J - y, \wedge, ; \text{sen } x = \text{sen } (J - y)$$

$$x = \text{sen } J \cos y - \text{sen } y \cos J$$

$$H \text{ sen } y = \text{sen } J \cos y - \text{sen } y \cos J$$

Dividimos por  $\cos y$

$$H \tan y = \text{sen } J - \tan y \cos J$$

$$\tan y = \frac{\text{sen } J}{H + \cos J}$$

$$y = \text{arc tan } \frac{\text{sen } J}{H + \cos J} \quad (6.5)$$

Conocidos  $x, y$  se resuelve los triángulos ABP y BCP.

Reemplazando obtenemos la siguiente formula general:

$$y = \text{arc tan } \frac{c \text{ sen } \beta \text{ sen } J}{a \text{ sen } a + c \text{ sen } \beta \cos J} \quad (6.6)$$

De aquí se calculan las coordenadas del punto P por dos caminos, lo que permite la verificación de los cálculos no del posicionamiento.

Pasos a seguir en el cálculo de la resección:

- 1 - Calcular  $a, c, Az AB$  y  $Az CB$
- 2 - Calcular ángulos  $\theta, J, H, x$  e  $y$
- 3 - Calcular  $Az AP, Az CP, Dist. AP$  y  $Dist. CP$
- 4 - Calcular coordenadas de P por dos caminos y Promediar el resultado.

EJEMPLO (Angulo entre líneas)

	A	B	C
N (m)	16.500,00	27.508,80	45.759,05
E (m)	33.000,00	33.000,00	23.455,15

$$\text{ang APB} = 22^\circ 15' 18''$$

$$\text{ang BPC} = 38^\circ 23' 35''$$

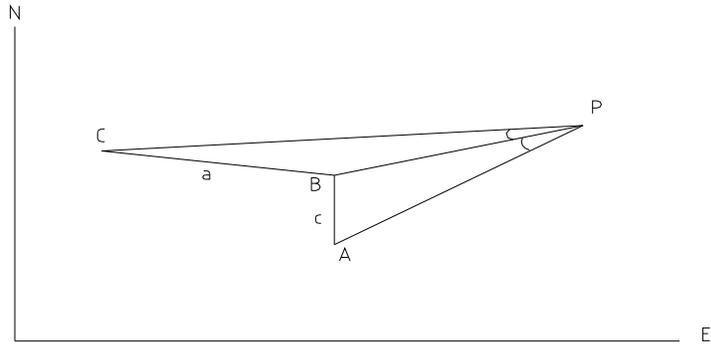


Fig. 8

$$c = \sqrt{\{(27.508,80-16.500,00)^2 + (33.000,00-33.000,00)^2\}}$$

$$c = 11.008,80 \text{ m}$$

$$a = \sqrt{\{(45.759,05-27.508,80)^2 + (23.455,15-33.000,00)^2\}}$$

$$a = 20.595,53\text{m}$$

$$\text{Az(BC)} : \text{E(A)} = \text{E(B)} \Rightarrow \text{N(A)} < \text{N(B)} \Rightarrow \text{Az(BC)} = 000^\circ 00' 00''$$

$$\text{Az BC} = \text{arc tan} \frac{23.455,15 - 33.000,00}{45.759,05 - 27.508,80} = \text{arc tan } -0,5230$$

$$\text{Az BC} = 332^\circ 23' 26''$$

$$Q = \text{Az BA} - \text{Az BC} = 207^\circ 36' 34''$$

$$J = 360^\circ - (22^\circ 15' 18'' + 38^\circ 23' 35'' + 207^\circ 36' 34'')$$

$$J = 91^\circ 44' 33'' \Rightarrow J = 91^\circ 44' 33''$$

$$H = \frac{20.595,53 \text{ sen } 22^\circ 15' 18''}{11.008,80 \text{ sen } 38^\circ 23' 35''} = 1.1409 \Rightarrow H = 1,1409$$

$$y = \arctan \frac{\text{sen } 91^\circ 44' 33''}{1,1409 + \cos 91^\circ 44' 33''} = 41^\circ 59' 27''$$

$$x = 91^\circ 44' 33'' - 41^\circ 59' 27'' = 49^\circ 45' 06''$$

$$\text{Az AP} = \text{Az AB} + x = 00^\circ 00' 00'' + 49^\circ 45' 06'' = 49^\circ 45' 06''$$

$$\text{Az CP} = \text{Az CB} - y = 110^\circ 24' 02''$$

$$\text{AP} = \frac{11.008,80 \text{ sen } 72^\circ 00' 24''}{\text{sen } 22^\circ 15' 18''} = 27.646,09 \text{ m}$$

$$\text{CP} = \frac{20.595,53 \text{ sen } 80^\circ 23' 02''}{\text{sen } 38^\circ 23' 35''} = 32.696,33 \text{ m}$$

Coordenadas de P

$$N(P) = N(A) + PM(AP)$$

$$= 16.500,00 + 27.646,09 \cos 49^\circ 45' 06'' = 34.362,19 \text{ m}$$

$$E(P) = E(A) + PP(AP)$$

$$= 33.000,00 + 27.646,09 \text{ sen } 49^\circ 45' 06'' = 54.100,91 \text{ m}$$

$$N(P) = N(C) + PM(CP)$$

$$= 45.759,05 + 32.696,33 \cos 110^\circ 23' 59'' = 34.362,17 \text{ m}$$

$$E(P) = E(C) + PP(CP)$$

$$= 23.455,15 + 32.696,33 \text{ sen } 110^\circ 23' 59'' = 54.100,89 \text{ m}$$

P por A            N            E

34.362,19      54.100,91

P por B

34.362,17      54.100,89

Promedio de P

34.362,18      54.100,90

### EJEMPLO (Direcciones)

Se miden por reiteración (dos posiciones) los ángulos desde el punto P a las Estaciones E24, E26 y E27 de una poligonal con coordenadas X,Y (sistema europeo).

	X	Y
E24	1.350,86	3.092,40
E26	2.180,14	1.826,91
E27	3.946,04	1.420,16

### Direcciones

Est	T	Angulo	"	prom.	dif.
P E24	D	00° 00'	03 - 04	03.5	
E26	D	22 15	21 - 22	21.5	18.00
E27	D	60 38	56 - 57	56.5	35.00
E27	I	240 38	56 - 56	56.0	35.00
E26	I	202 15	21 - 21	21.0	17.00
E24	I	180 00	04 - 04	04.0	
P E24	I	270 05	20 - 21	20.5	
E26	I	292 20	39 - 40	39.5	19.00
E27	I	330 54	15 - 15	15.0	35.50
E27	D	150 54	14 - 14	14.0	35.50
E26	D	112 20	39 - 38	38.5	18.00
E24	D	90 05	20 - 21	20.5	

Calculo de los ángulos:

E24 - E26    22° 15'    18.00    19.00  
                   17.00    18.00 => 22° 15' 18.00"

E26 - E27    38° 23'    35.00    35.50  
                   35.00    35.50 => 38° 23' 35.25"

para el cálculo:  $\alpha = 22^\circ 15' 18''$  y  $\beta = 38^\circ 23' 35''$

ang 24-P-26 =  $\alpha$  y ang 26-P-27 =  $\beta$ ; 24 = A, 26 = B y 27 = C

(24-26) = c y (26-27) = a

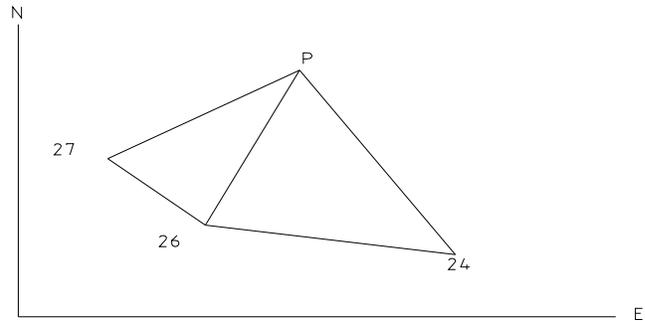


Fig. 9

$$c = \sqrt{(2.180,14 - 1.350,86)^2 + (1.826,91 - 3.092,40)^2}$$

$$c = 1.513,00 \text{ m}$$

$$a = \sqrt{(3.946,04 - 2.180,14)^2 + (1.420,16 - 1.826,91)^2}$$

$$a = 1.812,14 \text{ m}$$

$$\text{Az AB} = \text{arc tan} \frac{1.826,91 - 3.092,40}{2.180,14 - 1.350,86} = \text{arc tan} -1,5260$$

$$\text{Az AB} = 303^\circ 14' 13''$$

$$\text{Az BC} = \text{arc tan} \frac{1.826,91 - 1.420,16}{2.180,14 - 3.946,04} = \text{arc tan} -0,2303$$

$$\text{Az BC} = 167^\circ 01' 44''$$

$$\theta = \text{Az BA} - \text{Az BC} = 136^\circ 12' 29''$$

$$J = 360^\circ - (22^\circ 15' 18'' + 38^\circ 23' 35'' + 136^\circ 12' 29'') = 163^\circ 08' 38''$$

$$H = \frac{1.812,14 \text{ sen } 22^\circ 15' 18''}{1.513,00 \text{ sen } 38^\circ 23' 35''} = 0,7304$$

$$y = \text{arc tan } \frac{\text{sen } 163^\circ 08' 38''}{0,7304 + \text{cos } 163^\circ 08' 38''} = \text{arc tan } -1,2794$$

$$y = 128^\circ 08' 45''$$

$$x = 163^\circ 08' 38'' - 128^\circ 00' 45'' = 35^\circ 07' 53''$$

$$\text{BP 24} = \frac{1.513,00 \text{ sen } 35^\circ 07' 53''}{\text{sen } 22^\circ 15' 18''} = 2.298,91 \text{ m}$$

$$\text{BP 27} = \frac{1.812,14 \text{ sen } 128^\circ 00' 45''}{\text{sen } 38^\circ 23' 35''} = 2.298,91 \text{ m}$$

Ok

$$\text{Az AP} = \text{Az AB} + x = 303^\circ 14' 13'' + 35^\circ 07' 53'' = 338^\circ 22' 06''$$

$$\text{Az CP} = \text{Az CB} - y = 167^\circ 01' 44'' - 128^\circ 00' 45'' = 39^\circ 00' 59''$$

$$\text{AP} = \frac{1.513,00 \text{ sen } 57^\circ 23' 11''}{\text{sen } 22^\circ 15' 18''} = 3.365,03 \text{ m}$$

$$\text{CP} = \frac{1.812,14 \text{ sen } 166^\circ 24' 20''}{\text{sen } 38^\circ 23' 35''} = 685,83 \text{ m}$$

Coordenadas de P

$$N(P) = N(A) + \text{PM}(\text{AP})$$

$$= 1.350,86 + 3.365,03 \text{ cos } 338^\circ 26' 06'' = 4.478,90 \text{ m}$$

$$E(P) = E(A) + PP(AP)$$

$$= 3.092,40 + 3.365,03 \text{ sen } 338^\circ 26' 06'' = 1.851,92 \text{ m}$$

$$N(P) = N(C) + PM(CP)$$

$$= 3.946,04 + 685,83 \text{ cos } 39^\circ 00' 59'' = 4.478,90 \text{ m}$$

$$E(P) = E(C) + PP(CP)$$

$$= 1.420,16 + 685,83 \text{ sen } 39^\circ 00' 59'' = 1.851,92 \text{ m}$$

	por 24	por 27	P
N	4.478,90	4.478,91	4.478,90
E	1.851,92	1.851,92	1.851,92

### 6.2.1.1 Precisión

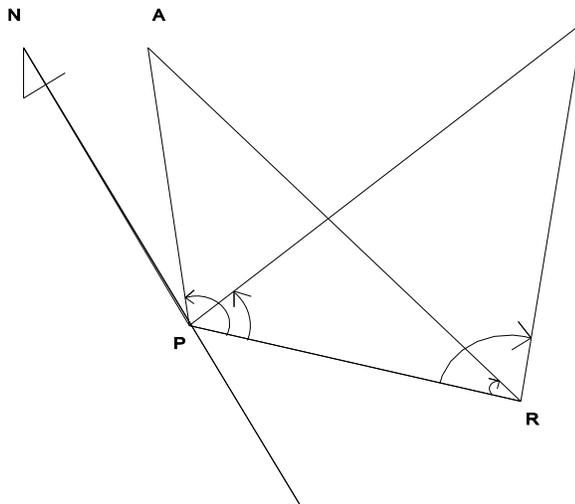
En la practica para la obtención de un control confiable y para elevar la precisión de la determinación de las coordenadas del punto, se emplea la resección con no menos de cuatro puntos de apoyo; lo cual permite procesar los cálculos por medio de la media aritmética o por métodos rigurosos tales como la compensación por mínimos cuadrados.

$$EMC_P = \frac{D_{BP} EMC \beta''}{\rho'' \text{ sen}(x+y)} \sqrt{\frac{D_{AP}^2}{a^2} + \frac{D_{CP}^2}{C^2}} \quad (6.7)$$

### 6.2.2 Problema de los dos puntos o de Hansen

Existe una resección en la que se visan solo dos puntos de coordenadas conocidas, se conoce como Problema de Hansen y tiene la siguiente solución:

B



1Fig. 10

Se debe determinar la posición del punto P conociendo únicamente dos estaciones A y B con coordenadas conocidas ( $N'(A)$ ,  $E'(A)$ ;  $N'(B)$ ,  $E'(B)$ ) visibles desde P; para poder solucionar el problema establecemos un punto auxiliar R a poca distancia de P (intervisible con A, B y P) y se determina el azimut PR.

Se adopta un sistema de coordenadas arbitrarias ( $N(P)$ ,  $E(P)$ ) con origen en P ( en algunos casos P pertenece a otro sistema por lo cual no es necesario establecer ) y determinamos las coordenadas de R.

Con los ángulos APR y ARP resolvemos la intersección y hallamos las coordenadas  $N(A)$ ,  $E(A)$ , en el sistema creado, el mismo procedimiento se aplica con los ángulos BPR, ARB y calculamos las coordenadas  $N(B)$ ,  $E(B)$ , la solución del problema la terminamos usando una transformación conforme, (ver capítulo 4) dando coordenadas a P ( $N'(P)$ ,  $E'(P)$ ); no es necesario calcular las coordenadas de R).

EJEMPLO:

	N'	E'	N	E
A	3217,14	2148,66	P 1000,00	1000,00
B	1347,54	1746,79		

$$\text{Az}(\text{PR}) = 091^\circ 17' 22'' \quad d(\text{PR}) = 320,00$$

ACH	AH
RPB = $037^\circ 14' 29''$	PRA = $029^\circ 44' 17''$
RPA = $088^\circ 21' 30''$	PRB = $087^\circ 32' 45''$

Solución:

$$N(R) = 1000 + 320,00 \cdot \cos 091^\circ 17' 22'' = 992,78$$

$$E(R) = 1000 + 320,00 \cdot \sin 091^\circ 17' 22'' = 1319,92$$

$$a = 088^\circ 21' 30'' \quad \beta = 039^\circ 44' 17''$$

Por intersección ang-ang, entonces

$$N(A) = 1000 + \frac{(992,78-1000) \cot 088^{\circ}21'30'' + (1319,92-1000)}{\cot 088^{\circ} 21' 30'' + \cot 029^{\circ} 44' 17''}$$

$$N(A) = 1179,70$$

$$E(A) = 1000 + \frac{(1319,92-1000) \cot 088^{\circ}21'30'' - (992,78-1000)}{\cot 088^{\circ} 21' 30'' + \cot 029^{\circ} 44' 17''}$$

$$E(A) = 1009,21$$

$$N(A) = 992,78 + \frac{(1000-992,78) \cot 029^{\circ}44'17'' - (1000-1319,92)}{\cot 088^{\circ} 21' 30'' + \cot 029^{\circ} 44' 17''}$$

$$N(A) = 1179,70$$

$$E(A) = 1319,92 + \frac{(1000-1319,92) \cot 029^{\circ}44'17'' - (1000-992,78)}{\cot 088^{\circ} 21' 30'' + \cot 029^{\circ} 44' 17''}$$

$$E(A) = 1109,21$$

$$\alpha = 037^{\circ} 14' 29'' \quad \beta = 087^{\circ} 32' 45''$$

$$N(B) = 1000 + \frac{(992,78-1000) \cot 037^{\circ}14'29'' + (1319,92-1000)}{\cot 037^{\circ} 14' 29'' + \cot 087^{\circ} 32' 45''}$$

$$N(B) = 1128,53$$

$$E(B) = 1000 + \frac{(1319,92-1000) \cot 037^{\circ}14'29'' - (992,78-1000)}{\cot 037^{\circ} 14' 29'' + \cot 087^{\circ} 32' 45''}$$

$$E(B) = 1315,14$$

$$N(B) = 992,78 + \frac{(1000-992,78) \cot 087^{\circ}32'45'' - (1000-1319,92)}{\cot 037^{\circ} 14' 29'' + \cot 087^{\circ} 32' 45''}$$

$$N(B) = 1228,53$$

$$E(B) = 1319,92 + \frac{(1000-1319,92) \cot 087^{\circ} 32' 45'' - (1000-992,78)}{\cot 037^{\circ} 14' 29'' + \cot 087^{\circ} 32' 45''}$$

$$E(B) = 1315,14$$

$$d(A'B') = 1910,23 \quad Az (A'B') = 191^{\circ} 50' 16''$$

$$d(AB) = 309,80 \quad Az (AB) = 080^{\circ} 55' 53''$$

$$S = 1910,23 / 309,80 = 6,16601$$

$$\theta = 080^{\circ} 55' 53'' - 191^{\circ} 50' 16'' = - 110^{\circ} 54' 23''$$

$$T(N) = S (1179,70 \cos \theta + 1009,21 \sin \theta) - 3217,14$$

$$T(N) = 11625,94$$

$$T(E) = - S (1179,70 \sin \theta + 1009,21 \cos \theta) - 2148,66$$

$$T(E) = 6867,05$$

$$N(P) = S (1000 \cos \theta + 1000 \sin \theta) + 11625,94 = 3665,58$$

$$E(P) = - S (1000 \sin \theta + 1000 \cos \theta) - 6867,05 = 1039,31$$

### 6.2.3 Distancias

El problema consiste en determinar las coordenadas de un punto P, desde el cual se miden distancias a puntos de coordenadas conocidas pertenecientes a un mismo sistema.

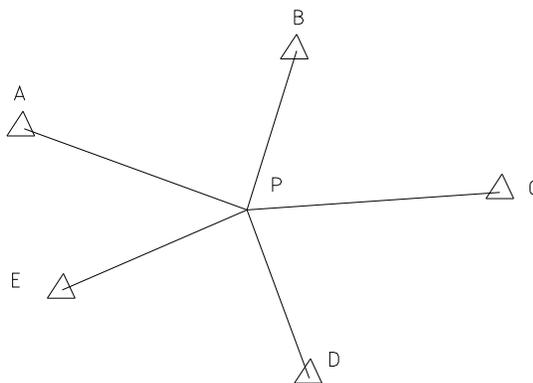


Fig. 11

La compensación se realiza por mínimos cuadrados por el método de ecuaciones de observación. Para la solución es necesario conocer las coordenadas aproximadas, cuyos valores deben estar muy cerca de las coordenadas buscadas.

La ventaja de este método es que no modifica las observaciones de campo.

La ecuación general para la relación de observaciones de distancias es:

$$V_1 = \frac{1}{D_{cal}} [(E_1 - E_2)d_{E1} + (N_1 - N_2)d_{N1} - (E_1 - E_2)d_{E2} - (N_1 - N_2)d_{N2}] + D_{cal} - D_{obs} \quad (6.8)$$

Simplificando

$$V_1 = \frac{1}{D_{cal}} [(E_2 - E_1) d_{E1} + (N_2 - N_1) d_{N1}] + D_{cal} - D_{obs} \quad (6.9)$$

Calculamos las coordenadas aproximadas del punto P partiendo de la distancia y el azimut correspondiente a dos puntos (Ej: A y B).

a, c : Distancias medidas

b : Distancia calculadas a partir de las coordenadas de A y B.

Az AB: Azimut a partir de A hacia B.

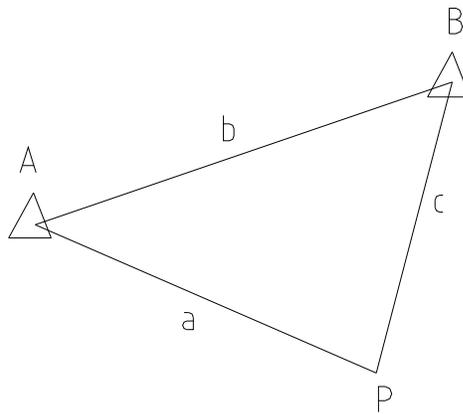


Fig. 12

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Despejando

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$Az(AP) = Az(AB) + \alpha$$

Coordenadas aproximadas de P.

$$N_{PA} = N(A) + d(AP) \cos(Az(AP))$$

$$E_{PA} = E(A) + d(AP) \sin(Az(AP))$$

Calculamos las distancias entre el punto P y cada uno de los puntos (A, B, C, D, E, F)

$$D = \sqrt{[(N(P)-N)^2 - (E(P)-E)^2]}$$

Reemplazamos en la formula general para cada punto (A,B,C,D,E,F).

$$V1 = A1 dE + B1 dN - e1$$

$$V2 = A2 dE + B2 dN - e2$$

·  
·  
·  
·

$$V_n = A_n dE + B_n dN - e_n$$

Este sistema puede escribirse en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E \\ \delta N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_n \\ B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & B_n \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por  $M^T$

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_n \\ B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_n \\ B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E \\ \delta N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_n \\ B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum A^2 & \sum AB \\ \sum AB & \sum B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E \\ \delta N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot & A_n \\ B_1 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

Escribimos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$S A^2 dE + S AB dN = T1$$

$$S AB dE + S B^2 dN = T2$$

La solución de estas ecuaciones nos da dE y dN

$$NP = N PA + dN$$

$$EP = E PA + dE$$

N PA, E PA : Coordenadas aproximadas de P.

N(P), E(P) : Coordenadas definitivas de P.

Ejemplo:

Calcular las coordenadas de P a partir de los siguientes datos:

Pto	Coordenadas		Distancias	
	N	E	Línea	(m)
A	1.100	1.020	AP	50,00
B	1.105	1.090	BP	60,21
C	1.030	1.095	CP	54,08
D	1.025	1.010	DP	53,15

Calculamos

$$d(AB) = 70,18$$

$$Az(AB) = 085^{\circ} 54' 52''$$

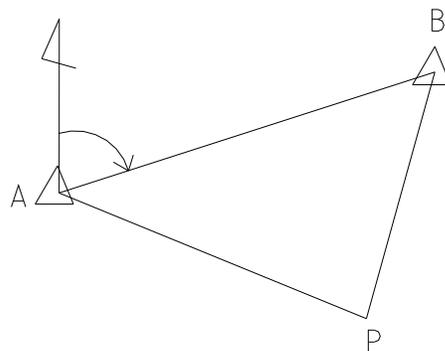


Fig. 13

$$\alpha = \text{Arcos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$70,18^2 + 50^2 - 60^2$$

$$\alpha = \arccos \frac{2(70,18)(50)}{50^2} = 056^\circ 58' 16''$$

$$Az(AP) = Az(AB) + \alpha$$

$$Az(AP) = 142^\circ 53' 08''$$

$$N(P) = N(A) + PM(AP) = 1.100 + (-39,87) = 1.060,13$$

$$E(P) = E(A) + PP(AP) = 1.020 + (30,17) = 1.050,17$$

Con las distancias de P y las de ABCD calculamos las distancias:

$$d(AP) = 50,00 \quad d(BP) = 60,00 \quad d(CP) = 54,01$$

$$d(EP) = 53,36$$

$$V1 = \frac{1}{50} (30,17 \text{ dE} - 39,87 \text{ dN}) + 50 - 50$$

$$V1 = 0,6034 \text{ dE} - 0,7974 \text{ dN}$$

$$V2 = \frac{1}{60} (-39,83 \text{ dE} - 44,87 \text{ dN}) + 60,21 - 60$$

$$V2 = -0,6638 \text{ dE} - 0,7478 \text{ dN} + 0,21$$

$$V3 = \frac{1}{60} (-44,83 \text{ dE} + 30,13 \text{ dN}) + 54,01 - 54,08$$

$$V3 = -0,8300 \text{ dE} + 0,5578 \text{ dN} - 0,07$$

$$V4 = \frac{1}{53,36} (40,17 \text{ dE} + 35,13 \text{ dN}) + 53,36 - 53,15$$

$$V4 = 0,7528 \text{ dE} + 0,6584 \text{ dN} + 0,21$$

En forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 0,6034 & -0,6638 & -0,8300 & 0,7528 \\ -0,7974 & -0,7478 & 0,5578 & 0,6584 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6034 & -0,7974 \\ -0,6638 & -0,7478 \\ -0,8300 & 0,5578 \\ 0,7528 & 0,6584 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E \\ \delta N \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,6034 & -0,6638 & -0,8300 & 0,7528 \\ -0,7974 & -0,7478 & 0,5578 & 0,6584 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,21 \\ -0,07 \\ 0,21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,0603 & 0,047808 \\ 0,0479 & 1,939683 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta E \\ \delta N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,07679 \\ -0,05782 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones:

$$2,06033 \text{ dE} + 0,047908 \text{ dN} = 0,07679$$

$$0,04790 \text{ dE} + 1,939683 \text{ dN} = -0,05782$$

$$\begin{aligned} \text{dE} &= + 0,14 \\ \text{dN} &= - 0,03 \end{aligned}$$

$$\text{NP} = 1060,13 + 0,14 = 1060,27$$

$$\text{EP} = 1050,17 - 0,03 = 1050,14$$

### 6.3. Aplicaciones

- Integración de información planimétrica, unión de polígonos a vértices geodésicos o triangulaciones topográficas.
- Ubicación de puntos para realizar el control terrestre necesario para las fototransformaciones.
- Medición de grandes distancias, con ciertas limitantes.
- Para generar redes de monitoreo planimétrico.
- Determinación de coordenadas para puntos inaccesibles

Ejercicios

1 - Para determinar la posición de K, se dirigen desde los puntos conocidos A, B, C. Visuales así:

Azimutes

AK: 327° 30' 48"  
BK: 038° 38' 37"  
CK: 102° 48' 50"

Coordenadas

	N	E
A	6.989,75	7.484,05
B	7.050,71	6.449,49
C	8.017,20	5.801,90

Hallar las coordenadas del punto K.

2 - Determinar las coordenadas del punto P a partir de los siguientes datos.

N(A) = 565,35    N(B) = 580,00  
N(C) = 545,04    E(A) = 470,91  
E(B) = 500,88    E(C) = 525,27

Angulos Horarios

APB = 111° 44' 38,4"    BPC = 103° 34' 26,4"

3 - Determinar las coordenadas del punto A a partir de los siguientes datos.

N(X): 1.060,40    N(Y): 1.055,47    N(Z): 1.045,88  
E(X): 1.015,41    E(Y): 1.065,53    E(Z): 1.040,46

AZ(AX): 031° 58'    AZ(AY): 330° 59'    AZ(AZ): 000° 01'

4 - Calcular las coordenadas del punto P.

Angulos

APB = 030° 23' 34"    APR = 103° 45' 19"  
PRA = 025° 09' 45"    PRB = 089° 17' 56"

Coordenadas

	N	E
A	918,39	1.064,06
B	1.084,43	1.370,16

PR = 15,00

5 - Encontrar las coordenadas de P en un sistema anterior.

Coordenadas

	N	E
A	1.022,87	1.102,46
B	1.180,75	1.021,47

P 5.732,17 3.817,11 (sistema nuevo)

Angulos Horarios

PRA = 20° 08' 13" PRB = 105° 23' 32"

Angulos Contrahorarios

RPB = 25° 43' 54" RPA = 130° 12' 34"

Az PR = 65° 17' PR = 35,13

6 - Se conocen las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E que se visan desde un punto midiéndose con distanciómetro las distancias a cada uno de ellos.

Pto	Norte	Este	D.H.
A	14.012,98	5.525,37	6.761,08
B	11.527,53	10.584,07	5.930,53
C	6.251,24	12.834,62	6.281,98
D	2.482,86	8.711,22	5.282,30
E	4.930,52	429,12	6.672,18

Calcular las coordenadas del punto P.

7 - Las coordenadas de tres puntos de control son como sigue:

	NORTE	ESTE
Estación		
1	300	300
2	100	350
3	110	100

Se colocó un teodolito en la estación P y se hicieron las siguientes lecturas, habiendo girado la alidada en sentido de las manecillas del reloj.

3P1 35°  
1P2 37°

### **8.1. DEFINICION**

Conjunto de puntos situados en el terreno, establecidos físicamente mediante hitos permanentes sobre los cuales se han realizado observaciones directas, con el fin de obtener parámetros físicos, que permitan la interconexión y determinación de la posición y altura.

### **8.2. METODOS DE AJUSTE**

De acuerdo a la precisión de la nivelación y los requerimientos se pueden usar diferentes métodos para ajustar estas redes

#### **NO RIGUROSOS**

Para redes de menor precisión

#### **APROXIMACIONES SUCESIVAS**

#### **DELL**

#### **RIGUROSOS**

Para redes de mayor precisión

1. ECUACIONES DE CONDICION (método empleado en esta guía)

2. ECUACIONES DE OBSERVACION

### **8.3. APLICACIONES**

- ◆ Urbanismo
- ◆ Control estático de obras civiles
- ◆ Levantamientos de control
- ◆ Densificación de redes nacionales

### 8.4. ECUACIONES DE CONDICION

Postulado de Legendre

En 1806 Legendre propuso un método para obtener el valor más probable de una cantidad, dado un conjunto de n valores igualmente fiables.

Según Legendre el valor mas probable (VMP) es el que hace la suma de los mínimos cuadrados de los residuos, donde el residuo ( $v_i$ ) es definido como:

$$v_i = (x - x_i)$$

Suponga que los VMPs de n cantidades observadas ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) tiene que satisfacer m independiente, ecuaciones de la condición lineal ( $m < n$ ).

Sustituyendo por  $X_i = v_i + M_i$  de la ecuación inicial, tenemos:

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n &= L_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n &= L_2 \\ \vdots & \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n &= L_m \end{aligned}$$

Para :

$$\begin{aligned} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n &= L_1 - (a_{11} M_1 + a_{12} M_2 + \dots + a_{1n} M_n) \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2n} v_n &= L_2 - (a_{21} M_1 + a_{22} M_2 + \dots + a_{2n} M_n) \\ \vdots & \\ a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + \dots + a_{mn} v_n &= L_m - (a_{m1} M_1 + a_{m2} M_2 + \dots + a_{mn} M_n) \end{aligned}$$

$$Av = b$$

La solución de mínimos cuadrados es obtenida minimizando  $v^T W v$ , que es igual a minimizar  $v^T W v - 2(Av - b)^T k$ , donde k es el  $m \times 1$  matriz de Lagrange coeficientes o correlaciones.

$$v = W^{-1} A^T k$$

Donde k es obtenido para las correlaciones normales

$$(A^T W^{-1} A)^{-1} k = b$$

Así, la sustitución de k para  $(A^T W^{-1} A)^{-1} k = b$  en  $v = W^{-1} A^T k$  da  $n \times 1$  matriz v como :

$$v = W^{-1} A^T (A^T W^{-1} A)^{-1} b$$

Esta solución para  $v_1, v_2, \dots, v_n$  habilita los VMPs ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) de las cantidades medidas se encuentra para  $X_i = M_i + v_i$ . Como en el método indirecto, la matriz varianza-covarianza de las incógnitas pueden ser determinadas.

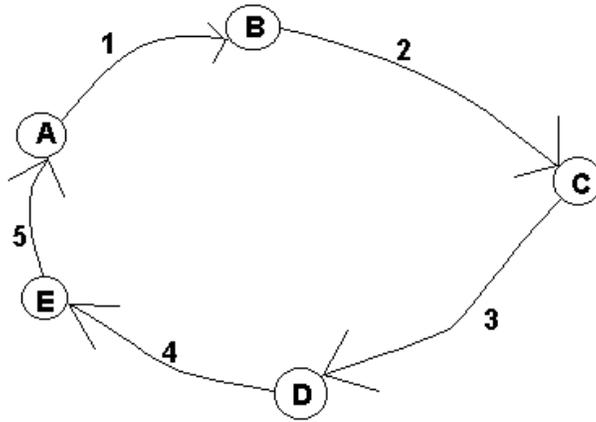


Fig. 1

### EJEMPLO

Ajustar la siguiente red.

LÍNEA	DE	HASTA	DESNIVEL	DH (KM)	
1	A	B		0.573	1.7
2	B	C		-2.317	1.5
3	C	D		0.312	1.8
4	D	E		3.415	1.3
5	E	A		-1.977	1.0

Numero de ecuaciones

$$N = \text{itinerarios} - (\text{No Bms} - 1)$$

$$N = 5 - (5 - 1) = 1$$

Circuitos

Circuito	Ecuación de condición
ABCDE	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 0$

$$+V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 0.006$$

$$a = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$b^T = [0.006]$$

Entonces:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{1.7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1.8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1.3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$aw^{-1} = [1.7 \quad 1.5 \quad 1.8 \quad 1.3 \quad 1]$$

$$aw^{-1}a^T = [7.3]$$

$$w^{-1}a^T = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 1.5 \\ 1.8 \\ 1.3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w^{-1}a^T (aw^{-1}a^T)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.002 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

Desniveles definitivos

Línea descorregido	Desnivel	Corrección Corregido	Desnivel
1	0.573	0.001	0.572
2	-2.318	0.001	-2.318

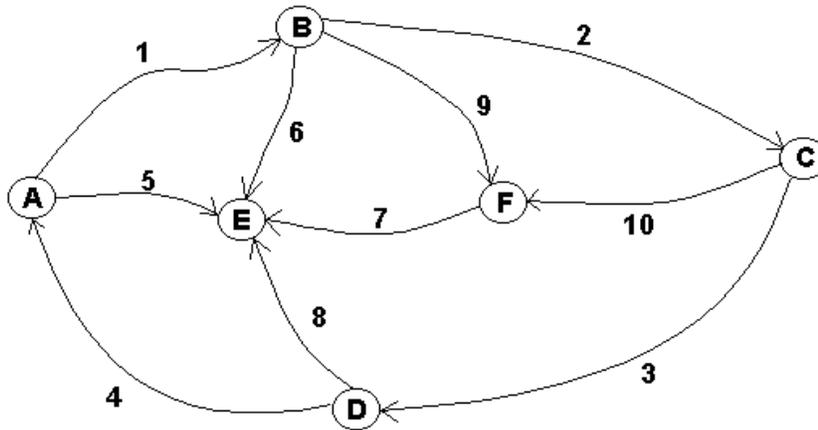
3	0.312	0.002	0.310
4	3.415	0.001	3.414
5	-1.977	0.001	-1.978

Cotas definitivas

Punto	Cota
A	7540.00
B	$7540.000+0.572= 7540.572$
C	$7540.572-2.318= 7538.254$
D	$7538.254+0.310=7538.564$
E	$7538.565+3.414=7541.978$

EJEMPLO

Dada la siguiente red ajustarlas por el método de ecuaciones de condición:



Línea	De	Hasta	Desnivel (m)	Distancia Horizontal (Km)
1	A	B	+ 16.298	1.3
2	B	C	- 17.700	1.9
3	C	D	- 00.687	2.3
4	D	A	+ 02.086	2.7
5	A	E	+ 23.615	0.3
6	B	E	+ 07.304	0.9
7	F	E	+ 14.162	1.2
8	D	E	+ 25.709	1.6
9	B	F	- 06.855	1.1
10	C	F	+ 10.863	0.5

Número de ecuaciones

$$N = 10 - (6 - 1) = 5$$

## Circuitos

Circuito	Ecuaciones de condición
ABEA	$X1 + X6 - X5 = 0$
BFEB	$X9 + X7 - X6 = 0$
BCFB	$X2 + X10 - X9 = 0$
EFCDE	$-X7 - X10 + X3 + X8 = 0$
EDAE	$X5 - X8 + X4 = 0$

$$\begin{aligned} +v_1 - v_5 + v_6 &= +0.013 \\ -v_6 + v_7 + v_9 &= -0.003 \\ v_2 - v_9 + v_{10} &= -0.018 \\ v_3 - v_7 + v_8 - v_{10} &= +0.003 \\ v_4 + v_5 - v_8 &= +0.008 \end{aligned}$$

Para  $Av = b$ , entonces

$$A = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^T = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \quad v_7 \quad v_8 \quad v_9 \quad v_{10}]$$

$$b^T = [+0.013 \quad -0.003 \quad -0.018 \quad +0.003 \quad +0.008]$$

Determinamos la matriz de los pesos ( $W$ ), que es la matriz diagonal, siendo los pesos inversamente proporcional a la longitud de la líneas ( $W = 1 / L$ )

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{1.3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2.3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2.7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1.2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1.6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1.1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.5} \end{bmatrix}$$

AW-1AT

$$\begin{bmatrix} 2.5 & -0.9 & 0 & 0 & -0.3 \\ -0.9 & 3.2 & -1.1 & -1.2 & 0 \\ 0 & -1.1 & 3.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1.2 & -0.5 & 5.6 & -1.6 \\ -0.3 & 0 & 0 & -1.6 & 4.6 \end{bmatrix}$$

W-1AT

$$\begin{bmatrix} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.9 & -0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6 & -1.6 \\ 0 & 1.1 & -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

W-1AT(AW-1AT )-1b

$$\begin{bmatrix} +0.007 \\ -0.010 \\ +0.001 \\ +0.006 \\ -0.001 \\ +0.006 \\ -0.002 \\ -0.003 \\ +0.005 \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

Desniveles definitivos

Línea	Desnivel descorregido	Corrección	Desnivel corregido
1	16.298	+0.007	16.305
2	-17.700	-0.010	-17.710
3	-0.687	+0.001	-0.686
4	2.086	+0.006	2.092
5	23.615	-0.001	23.614
6	7.304	+0.006	7.310
7	14.162	-0.002	14.160
8	25.709	-0.003	25.706

9	-6.855	+0.005	-6.850
10	10.863	-0.003	10.860

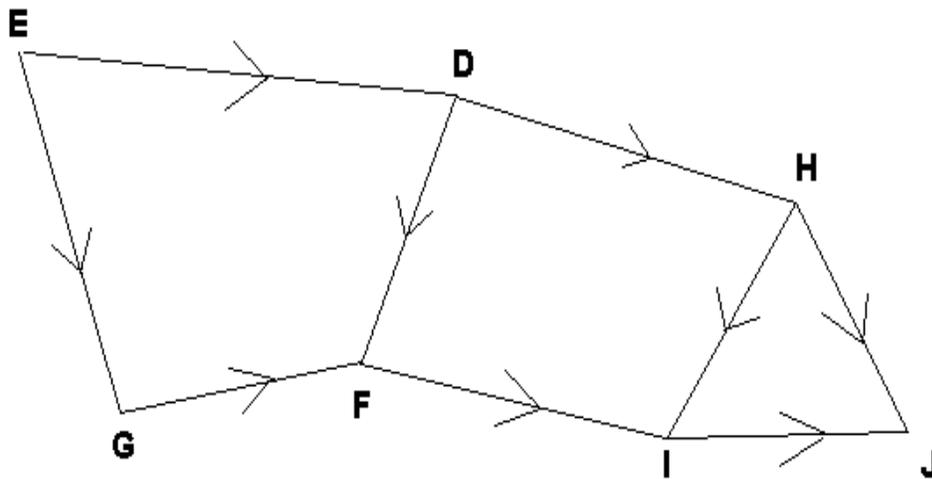
Cotas definitivas

Punto	Cota
A	500.000
B	$500.000 + 16.305 = 516.305$
C	$516.305 - 17.710 = 498.595$
D	$498.595 - 0.686 = 497.909$
E	$497.909 + 25.706 = 523.615$
F	$523.615 - 14.160 = 509.455$

## Ejercicios

1. Resolver la siguiente red nivelación, cota de G = 12504

Línea	De	Hasta	Desnivel (m)	Distancia Horizontal (Km)
1	E	D	+ 6.481	12
2	E	G	+ 6.999	22
3	D	F	+ 1.712	17
4	G	F	+ 1.212	5
5	D	H	+ 126.214	33
6	H	I	+ 39.844	13
7	F	I	+ 164.388	26
8	H	J	+ 40.628	12
9	I	J	+ 0.816	14



2. Ajuste la siguiente red de nivelación

Pto	Desnivel	Distancia
a	+21.14	23.45
b	+ 5.08	25.67
c	-10.06	26.12
d	-15.96	22.65
e	- 5.20	15.98

3. Ajuste la siguiente red de nivelación:

AB 15 Km; d: -22,93 m; BC 12 Km; d: +10,94 m;  
 CD 28 Km; d: +21,04 m; DA 26 Km; d: - 8,92 m;  
 EA 11 Km; d: +17,91 m; EB 17 Km; d: - 5,23 m;  
 DE 13 Km; d: -27,15 m.

(Circuitos ABCDA, ABEA, AEDA, BCDEB).

4. Ajuste la red de nivelación y determine las cotas de los puntos B, C, D, E, F. Cota A = 125,04.

Circuito	Lado	long. (Km.)	Desnivel
ABFA	AB	6,4	+5,241
	BF	5,6	-3,261
	FA	8,3	-1,878
BCEFB	BC	5,3	+3,564
	CE	2,6	-2,544
	EF	4,2	-4,203
	FB	5,6	+3,261
CDEC	CD	4,3	-4,908
	DE	5,4	+2,277
	EC	2,6	+2,544

5. Ajuste la siguiente red de nivelación

Lado	long. (Km.)	Desnivel
AB	1,3	+16,298
BC	1,9	-17,700
CD	2,3	- 6,870
DA	2,7	- 2,086
AE	0,3	+23,615
BE	0,9	+ 7,302
FE	1,2	+14,162
DE	1,6	+25,709
BF	1,1	- 6,855
CF	0,5	+10,863

Circuitos ABE, BDF, BFE, AED, EFCD

6. Ajuste la siguiente red de nivelación y calcule las cotas de A, B, C. Cota de D = 151,88

Lado	Desnivel	long. (km)
AB	+20,14	1,83
BC	+ 5,20	5,51
CD	+10,04	1,77
DA	-35,14	1,26
BD	+15,10	6,62

## Introducción

El diccionario de la Real Academia define una partición como la división o repartimiento que se hace entre algunas personas, de hacienda, herencia o cosa semejante.

En el tema que se trata aquí, hacemos referencia a la división o partición de predios rurales.

El punto de partida es un levantamiento planimétrico del predio en el que deben aparecer construcciones de todo tipo, caminos internos y de acceso, información sobre cercos o divisiones con los colindantes, cercos internos, cultivos y separación entre ellos, vías de agua, informaciones sobre las servidumbres que afectan al predio (activas y pasivas), facilidades de servicios de agua y electricidad, información sobre obras públicas a desarrollar en el cercano futuro y que afecten directamente la propiedad.

## 9.2 Consideraciones generales

Una partición puede realizarse de dos formas, excluyentes entre sí:

- ◆ AREAS
- ◆ VALORES



Para una partición por valores, adicionalmente al levantamiento planimétrico debe conocerse el avalo del predio en el que deben estar incluidos: valor de la tierra, valor de las construcciones, valor de la maquinaria y dependiendo del tipo de finca, valor de los animales que tengan que ver con la actividad económica (el ganado en una finca ganadera). Este avalo, imprescindible para realizar la partición, puede ser suministrado por la persona que solicita el trabajo, puede realizarlo el topógrafo partidor o puede obtenerse de un tercero.

## 9.3. Algunas leyes relacionadas

(Teclado el 20 / 02 / 03)

Artículos del Código Civil que tienen relación con el trabajo del Topógrafo

Art. 653 Definición de los Bienes

Art. 654 División de los Bienes

Art. 656 Bienes inmuebles  
Art. 677 Propiedad de los ríos  
Art. 719 Definición de aluvión  
Art. 720 Aluvión  
Art. 721 Aluvión  
Art. 722 Aluvión  
Art. 724 Aluvión  
Art. 725 Aluvión  
Art. 726 Formación de islas  
Art. 740 Definición de Tradición  
Art. 879 Definición de Servidumbre  
Art. 880 Servidumbres  
Art. 881 Servidumbres  
Art. 883 Servidumbres  
Art. 887 Servidumbres  
Art. 888 Servidumbres  
Art. 890 Servidumbres  
Art. 894 Servidumbres  
Art. 900 Deslindes  
Art. 901 Deslindes  
Art. 1887 Definición de inmueble como cuerpo cierto  
Art. 1888 Definición de inmueble por cabida real declarada  
Art. 1889 Inmueble como cuerpo cierto  
Art. 2432 Definición de hipoteca  
Art. 2434 Hipotecas  
Art. 2435 Hipotecas

Partición de bienes CC Art. 1374

Ninguno de los consignatarios de una cosa universal o singular ser a obligado a permanecer en la indivisión, la participación del objeto asignado poder siempre pedirse con tal que los consignatarios no hayan estipulado lo contrario.

No puede estipularse proindivisión por mas de 3 años, pero cumplido el plazo puede prorrogarse.

Art. 1378

Si falleciese uno de los varios consignatarios después de haberse le diferido la asignación, cualesquiera de los herederos de éste poder pedir la partición pero formaron en ello una sola persona y no podrán obrar sino todos juntos o por medio de un procurador común.

Reforma Agraria Ley 135 de 1961

Art. 87: Los fundos de una extensión superficiaria igual o menor de 3 Ha se consideran, pasara todos los efectos legales, como una especie que no admite división material.

No podrá llevarse a cabo acto alguno de división de un predio que resulte en la constitución de propiedades cuya superficie sea inferior a la señalada. En consecuencia, son absolutamente nulos los actos o contratos que contravengan la prohibición establecida en el inciso precedente.

Decreto 3203 de 1965, reglamentario de los Art. 87 y 88 de la Ley 135 de 1961

Art. 3: En los instrumentos públicos relativos a actos o contratos que entraren división material de propiedades rústicas, los otorgantes deberán declarar, en hectáreas (Ha), la superficie de todas las porciones que produzca la división. Las Notaras deberán advertir a los otorgantes, dejando constancia en el respectivo documento, que si a pesar de la referida declaración la cabida de las partes resultantes de la división material realizada, a alguna de ellas, fuere inferior a 3 Ha, el acto o contrato del caso es absolutamente nulo en los términos del Art. 87 de la Ley 135 de 1961 y del Art. 1741 del CC.

#### **9.4. Metodología particiones**

Las particiones las podemos clasificar en

1. Línea que pasa por un punto dado sobre el perímetro
2. línea paralela a una línea, sea o no lindero
3. Línea que pasa por un punto interior

##### **9. 4.1. Línea que pasa por un punto dado sobre el perímetro**

Separar una superficie ABMEFA de 25.000 m<sup>2</sup> del polígono dado. El punto M debe pertenecer al alineamiento AB ó al BC.

Cuadro de coordenadas

Punto	Norte	Este
A	500.00	500.00
B	587.88	550.65
C	673.92	583.62
D	642.03	818.95
E	397.72	851.02
F	412.55	664.31

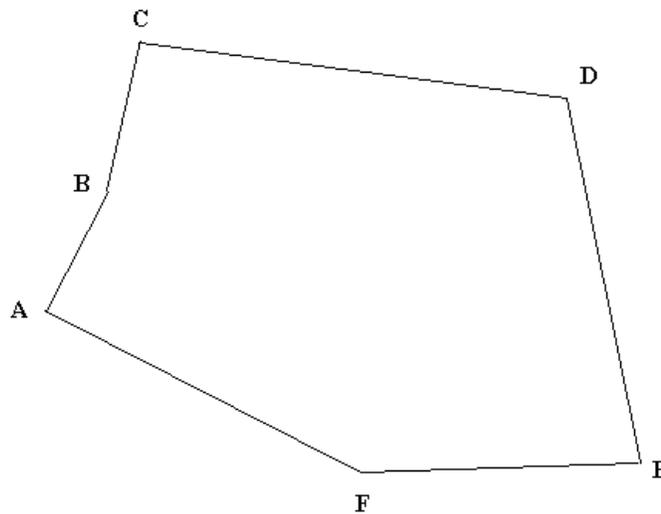


Fig. 1

Área ABEFA: 24.959 m<sup>2</sup>

Se determina  $\Delta A$ , es decir, el área que le falta para completar el área pedida  $\Delta A = 25.000 \text{ m}^2 - 24.959 \text{ m}^2 = 40.40 \text{ m}^2$ .

Determinar el triángulo de área  $\Delta A$  para sumar al polígono ABEFA.

$$BE = \sqrt{(E(E) - E(B))^2 + (N(E) - N(B))^2} = 335.50 \text{ m}$$

$$\tan R(\text{BE}) = \frac{(E(E) - E(B))}{(N(E) - N(B))} = \frac{300.37}{(-190.16)} = 1.5795$$

$$R(\text{BE}) = \text{S } 57^\circ 40' \text{ E}$$

$$\text{Az}(\text{BE}) = 122^\circ 20'$$

$$\angle \text{MBE} = \text{AzBE} - \text{AzBC} = 122^\circ 20' - 21^\circ 00' = 101^\circ 20'$$

$$\angle \text{MBE} = 101^\circ 20'$$

$$\text{Area del triángulo MBE: } 2 * 40.40 = 335.50 * \text{BM} * \text{Sen } 101^\circ 20'$$

$$\text{BM} = 2 * 40.40 / 335.50 \text{ Sen } 101^\circ 20' = 0.23$$

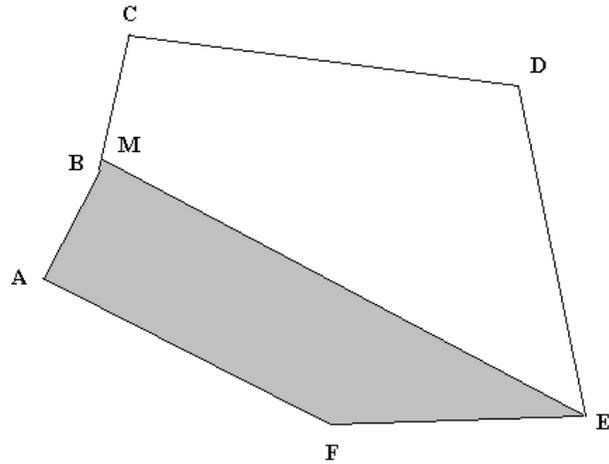


Fig. 2

El punto M pertenece al alineamiento BC, le damos coordenadas a dicho punto.

$$NM = NB + PMBM = 587.88 + 0.23 * \cos 21^\circ 00' = 588.09$$

$$Em = EB + PPBM = 550.65 + 0.23 * \sin 21^\circ 00' = 550.73$$

$$M(588.09; 550.73)$$

$$\text{Area ABMEFA} = 24\,998.74 \text{ m}^2$$

$$\text{Error} = 25\,000 - 24\,998.74 = 1.26$$

$$\text{Error \%} = 1.26 / 25\,000 = 0.0050 \%$$

#### 9.4.2. Línea paralela a una línea, sea o no lindero

Separar una parcela con una superficie de 20 000 m<sup>2</sup>, mediante una línea que sea paralela a CD.

Debemos encontrar las coordenadas de la intersección de los alineamientos BM (paralelo a CD) y BE

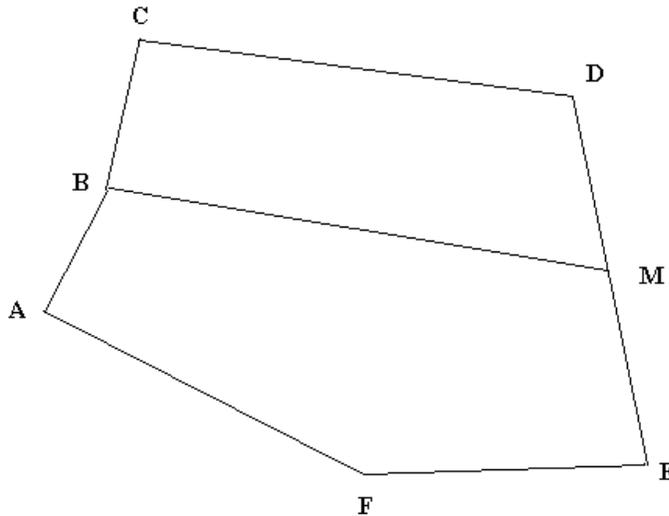


Fig. 3.

D( 642.03; 818.95) ; E( 397,72; 851,02); B(587.88; 550.65)

AzBM = 097° 45'

AzDE = 172° 30'

Recta BM:  $E - EB = (\tan R(CD)) * (N - NB)$

Recta DE :  $E - ED = (\tan R(DE)) * (N - ND)$

Solución del sistema de ecuaciones:

$$E - 550.65 = -7.3479 * (N - 587.88)$$

$$E + 7.3479 * N = 4.87.33$$

$$E - 818.95 = 0.1317 * (N - 642.03)$$

$$E + 0.1317 * N = 903.51$$

$$E = 831.11 \quad N = 549.71$$

Comprobación:

$$831.11 - 550.65 = -7.3479 * (549.71 - 587.88)$$

$$\Rightarrow 280.46 = 280.47, \text{ si satisface}$$

Área BCDMB = 23 363.56 m<sup>2</sup>

$$\Delta \text{Área} = 23\,363.56 - 20\,000 = 3.363.56 \Rightarrow \Delta \text{Área} = 3363.56 \text{ m}^2$$

Hemos obtenido una superficie mayor de la pedida, debemos de terminar un trapecio de áreas;  $\Delta \text{Área}$  restarla al polígono BCDM.

$$AzBM = AzCD = 97^{\circ} 45'$$

$$BP \parallel D \parallel MQ \quad BP \perp BM \quad MQ \perp BM$$

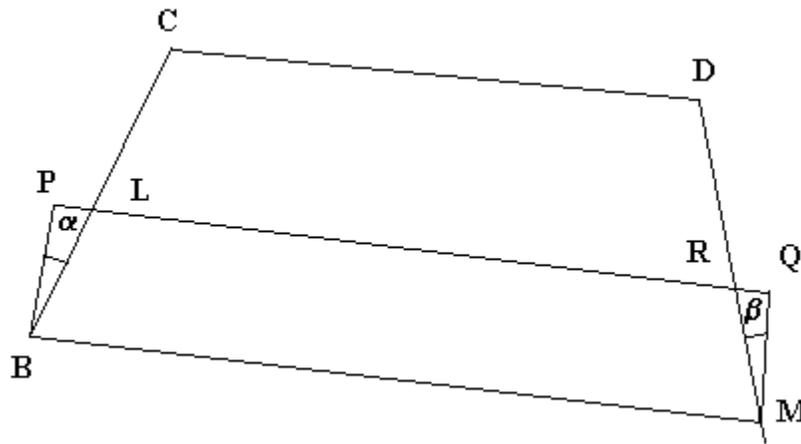


Fig. 4

$$AzBP = AzBM - 90^{\circ} = 97^{\circ} 45' - 90^{\circ} = 7^{\circ} 45' \Rightarrow$$

$$AzBP = 07^{\circ}45' = AzMQ$$

$$\angle PBC = \alpha = AzBC - AzBP = 21^{\circ} 00' - 07^{\circ} 45' = 13^{\circ} 15' = \alpha$$

$$\angle DNQ = \beta = AzMQ - AzMD = 360^{\circ} + 07^{\circ} 45' - 352^{\circ} 30' = 15^{\circ}15' = \beta$$

El cuadrilátero BPQM es rectángulo, entonces  $BM = PQ$  y

$$PQ = PL + LR + RQ.$$

$$BM = \sqrt{(E(B) - E(M))^2 + (N(B) - N(M))^2} = 238.05 \text{ m}$$

$$BM = 2383.05 = PQ$$

Si llamamos  $BP = MQ = h$ , podemos expresar  $PL = QR$  en función de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $h$ .

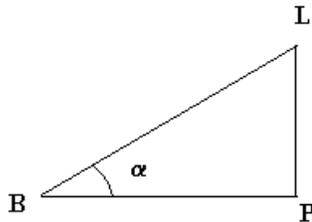


Fig. 5

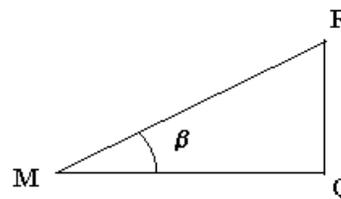


Fig. 6

$$\tan \alpha = PL / h \Rightarrow PL = h * \tan \alpha$$

y

$$\tan \beta = RQ / h \Rightarrow RQ = h \tan \beta$$

El cuadrilátero BLRM es un trapecio:

BM (Base Mayor, B) D LR (Base Menor, b)

$$\begin{aligned} LR = b &= PQ - PL - RQ = 283.05 - h \cdot \tan \alpha - h \cdot \tan \beta \\ &= 283.05 - h \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{Área} &= (B + b) \cdot h / 2 \Rightarrow 2 \Delta \text{Área} = (B + b) \cdot h \\ &= ((283.05) + (283.05 - h \cdot (\tan \alpha + \tan \beta))) \cdot h \\ &= 566.10 - h \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \\ &= 566.10 \cdot h - h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \\ \Rightarrow h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) - 566.10 \cdot h &= 2 \Delta \text{Área} = 0 \end{aligned}$$

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} h^2 \cdot (\tan 13^\circ 15' + \tan 15^\circ 15') - 566.10 \cdot h + 2 \cdot 3363.56 &\Rightarrow \\ 0.51 \cdot h^2 - 566.10 \cdot h + 6727.12 &= 0 \\ \Rightarrow h = 12.09 \text{ ó } 1097.99 \text{ usamos } h &= 12.01 \end{aligned}$$

Calculamos de BL y MR:

$$\cos \alpha = BP / BL = h / BL \Rightarrow BL = 12.01 / \cos 13^\circ 15' = 12.34$$

$$\cos \beta = MQ / MR = h / MR \Rightarrow MR = 12.01 / \cos 15^\circ 15' = 12.45$$

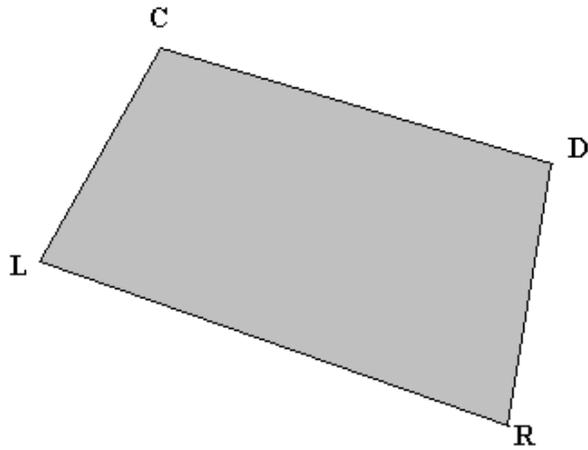


Fig. 7

Coordenadas de L y R:

$$NL = NB + PMBL = 587.88 + 12.34 * \text{Cos Az BC} = 599.40$$

$$EL = EB + PPBL = 550.65 + 12.34 * \text{Sen Az BC} = 555.07$$

$$NR = NM + PMMR = 549.71 + 12.45 * \text{Cos Az ED} = 562.05$$

$$ER = EB + PPMR = 831.11 + 12.45 * \text{Sen Az ED} = 829.48$$

$$\text{Area LCDRL} = 20\,000.63 \text{ m}^2$$

$$\text{Error} = 20\,000.63 - 20\,000 = 0.63 \text{ m}^2$$

$$\text{Error \%} = 0.63 / 20\,000 = 0.0032 \%$$

#### 9. 4.3 Línea que pasa por un punto interior

Separa una superficie de 20 000 m<sup>2</sup> del polígono propuesto, mediante una recta que pasa por el punto P, interior al polígono y de coordenadas (550.00; 750.00)

Determinar una recta que pase por P y un vértice adecuado de la poligonal, E en este caso.

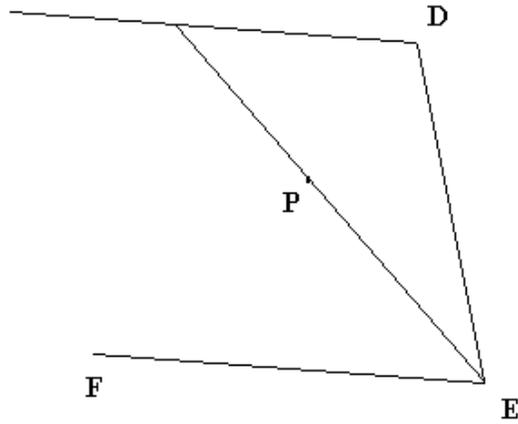


Fig. 8

Línea EP:

E(397.72; 851,02)

$$E - EE = (EP - EE) / (NP - NE) * (N - NE)$$

$$E - 851.02 = ((750.00 - 851.02) / (550.00 - 397.72)) * (N - 397.72)$$

$$E - 851.02 = -0.06654 * (N - 397.72)$$

$$E + 0.06654 * N = 1114.86$$

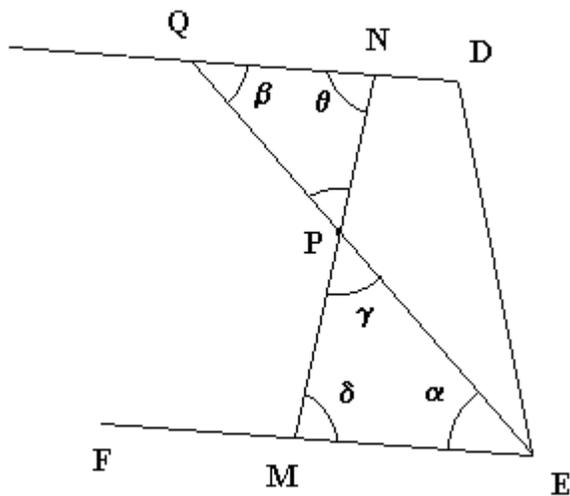


Fig. 9

Línea CD

C(673.92; 583.62) D ( 642.03; 818.95) AzCD = 97° 45'

$$E - EC = \text{Tan AzCD} * (N - NC)$$

$$E - 583.62 = -7.3479 * (N - 673.92)$$

$$E + 7.3479 * N = 5535.49$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las líneas EP y CD, para determinar las coordenadas de su intersección Q:

$$E + 0.6634 * N = 1114.86$$

$$E + 7.3479 * N = 5535.49$$

$$E = 676.14 \text{ y } N = 661.33 \quad Q(676.14; 661.33)$$

$$\text{Comprobación } 676.14 + 0.6634 * 661.33 = 1114.86 \Rightarrow$$

$$1114.87 = 1114.$$

$$\text{Área } QDEQ = 17135.48 \text{ m}^2$$

$$\Delta \text{Área} = 20000 - 17135.48 = 2864.52 \text{ m}^2$$

Esta área debemos agregarla para obtener el área prevista para hacerlos debemos rotar la recta alrededor de P, de tal manera que la diferencia entre las áreas de los triángulos QPN (que se resta) y MPE (que se suma) sea positiva.

$$Q(676.14; 661.33) \quad E(397.72; 851.02) \quad P(550.00; 750.00)$$

$$PQ = \sqrt{(661.33 - 550.00)^2 + (676.14 - 750)^2} = 133.60$$

$$PE = \sqrt{(550.00 - 397.72)^2 + (750.00 - 851.02)^2} = 182.74$$

Al girar la recta QPE en sentido horario, podemos observar que la línea NPM soluciona el problema, pero debemos determinarla.

$$\text{Área } QDEQ - \text{Área } QNPQ + \text{Área } MPEM = 20000 \Rightarrow$$

$$\text{Área } MPEM - \text{Área } QNPQ = 2864.52 \text{ m}^2$$

$$\text{Área } QNPQ = (QN * QP * \text{Sen } \beta) / 2$$

$$\text{Área } MPEM = (ME * EP * \text{Sen } \alpha) / 2$$

Aplicando ley de senos en estos dos triángulos:

$$QN / \text{Sen } \gamma = QP / \text{Sen } \theta \Rightarrow QN = QP * \text{Sen } \gamma / \text{Sen } \theta$$

$$EM / \text{Sen } \Upsilon = PE / \text{Sen } \delta \Rightarrow EM = QP * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } \delta$$

$$\theta = 180^\circ - (\beta + \Upsilon) \Rightarrow \text{Sen } \theta = \text{Sen } (\beta + \Upsilon)$$

$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \Upsilon) \Rightarrow \text{Sen } \theta = \text{Sen } (\alpha + \Upsilon)$$

$$QN = QP * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } \theta = QP * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } (\beta + \Upsilon)$$

$$EM = PE * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } \delta = PE * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } (\beta + \Upsilon)$$

$$\text{Area QNPQ} = (QN * QP * \text{Sen } \beta) / 2$$

$$= (QP * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } (\beta + \Upsilon) * QP * \text{Sen } \beta) / 2$$

$$= ((QP)^2 \text{Sen } \Upsilon * \text{Sen } \beta) / (2 * \text{Sen } (\alpha + \Upsilon))$$

$$\text{Area EMPE} = (ME * EP * \text{Sen } \alpha) / 2$$

$$= (PE * \text{Sen } \Upsilon / \text{Sen } (\alpha + \Upsilon) * PE * \text{Sen } \alpha) / 2$$

$$= ((PE)^2 * \text{Sen } \Upsilon * \text{Sen } \alpha) / (2 * \text{Sen } (\alpha + \Upsilon))$$

Reemplazando las áreas de los triángulos que hemos encontrado

$$\text{Area QDEQ} = + ((PE)^2 * \text{Sen } \Upsilon * \text{Sen } \alpha) / (2 * \text{Sen } (\alpha + \Upsilon)) - ((QP)^2 \text{Sen } \Upsilon * \text{Sen } \beta) / (2 * \text{Sen } (\alpha + \Upsilon)) = 20\,000$$

$$\frac{PE^2 \text{Sen} \Upsilon \text{Sen} \alpha}{2(\text{Sen} \alpha \text{Cos} \Upsilon + \text{Sen} \Upsilon \text{Cos} \alpha)} - \frac{QP^2 \text{Sen} \Upsilon \text{Sen} \beta}{2(\text{Sen} \beta \text{Cos} \Upsilon + \text{Sen} \Upsilon \text{Cos} \beta)} = 20000 - 17135.45 = 2864.52$$

$$\frac{PE^2 / 2}{\frac{\text{Sen} \alpha \text{Cos} \Upsilon}{\text{Sen} \Upsilon \text{Sen} \alpha} + \frac{\text{Sen} \Upsilon \text{Cos} \alpha}{\text{Sen} \Upsilon \text{Sen} \alpha}} - \frac{QP^2 / 2}{\frac{\text{Sen} \beta \text{Cos} \Upsilon}{\text{Sen} \Upsilon \text{Sen} \beta} + \frac{\text{Sen} \Upsilon \text{Cos} \beta}{\text{Sen} \Upsilon \text{Sen} \beta}} = 2864.52$$

$$\frac{PE^2}{\text{Cot} \Upsilon + \text{Cot} \alpha} - \frac{QP^2}{\text{Cot} \Upsilon + \text{Cot} \beta} = 5729.04$$

Haciendo

$$\text{Cot } \alpha = a, \quad \text{Cot } \beta = b, \quad \text{Cot } \Upsilon = c$$

$$PE^2 (c + b) - QP^2 (c+a) = 5729.04 (c+a) (c+b)$$

$$182.742 c + 182.742b - 133.602c - 133.602a - 5729.04 (c^2+c(a+b)+ab) = 0$$

$$5729.04c^2 - (182.742 - 133.602 - 5729.04 (a+b))c - (182.742b - 133.602a - 5729.04 ab) = 0$$

$$\alpha = AzEP - AzEM$$

$$AzEP = \text{Arc Tan } EP - EE / NP - NE$$

$$= (750.00 - 676.14) / (550.00 - 661.33) = -0.6634$$

$$= -33^\circ 33'$$

$$= 326^\circ 26'$$

$$AzEM = AzEF = 274^\circ 30'$$

$$\alpha = 326^\circ 26' - 274^\circ 30' = 51^\circ 56'$$

$$\beta = AzQP - AzQD;$$

$$AzQD = CAzQP = CAzEP = 326^\circ 26' - 180^\circ = 146^\circ 26'$$

$$AzQD = AzCD = 97^\circ 45'$$

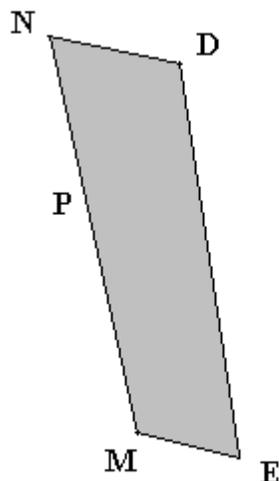
$$\beta = 48^\circ 41'; \quad a = \text{Cot } 51^\circ 56' = 0.7832; \quad b = \text{Cot } 48^\circ 41' = 0.8790$$

$$5729.04c^2 - 6022.14c - 11600.89 = 0$$

$$\text{Puesto que } c = \text{Cot } \gamma \Rightarrow \text{Cot } \gamma = 1.0512 \pm \sqrt{1.0512 + (4 * 1 * 2.0246)^2} / 2$$

$$\text{Cot } \gamma = 2.0426 \text{ ó } 0.9714$$

$$\Rightarrow \gamma = 26^\circ 05' \text{ ó } -45^\circ 15', \text{ es decir } 134^\circ 45'$$



Tomamos el valor menor, el otro haría caer N en la prolongación de CD

Calculamos QN y EM

$$QN = QP * \text{Sen } \gamma / \text{Sen } (\beta + \gamma)$$

$$QN = 133.60 * \text{Sen } 26^\circ 05' / \text{Sen } (48^\circ 41' + 26^\circ 05') = 60.88$$

$$QN = 60.88$$

$$EM = PE * \text{Sen } \gamma / \text{Sen } (\alpha + \gamma)$$

$$EM = 182.74 * \text{Sen } 26^{\circ}05' / \text{Sen } 51^{\circ}56' + 26^{\circ}05' = 82.14$$

Fig. 10

$$EM = 86.14$$

$$Az_{QN} = Az_{QD} = 97^{\circ}45'$$

$$Az_{EM} = 274^{\circ}30'$$

Coordenadas de N y M

$$NN = NQ + PM_{QN} = 661.33 + 60.88 * \text{Cos } Az_{97^{\circ}45'} = 653.12$$

$$EN = EQ + PP_{QN} = 676.24 + 60.88 * \text{Sen } Az_{97^{\circ}45'} = 736.46$$

$$Nm = NE + PM_{EN} = 397.72 + 82.14 * \text{Cos } Az_{274^{\circ}30'} = 404.16$$

$$EM = EM + PP_{EN} = 851.02 + 82.14 * \text{Sen } Az_{274^{\circ}30'} = 769.13$$

$$\text{Area NDEM} = 19\,987.21 \text{ m}^2$$

Área que debió obtenerse: 20 000

$$\text{Diferencia: } 20\,000 - 19\,987.21 = 12.79$$

$$\text{Error } \% = 12.79 / 20\,000 = 0.0639 \%$$

#### 9.4. Alindramiento

Toda descripción de un lindero parte de un punto de partida, este se tiene que referenciar a: vías principales, departamento, municipio ciudad, vereda etc. A partir de este y con rumbos magnéticos o verdaderos (en algunos casos Azimutes) y distancias se realiza una descripción que incluye los rasgos principales de los elementos que se encuentran sobre muy cerca de los linderos, teniendo en cuenta el nombre de los colindantes o preferiblemente el nombre del predio ya que este varía menos que el del propietario. El topógrafo debe incluir la fecha o clase de equipo empleado.

## Ejercicios

1. Copia de la Cartera del levantamiento de un predio para la realización de una partición por áreas o valores, utilizando distintos ángulos horizontales.

Est		A. H.	D. Ob.	Ang. Cen.	Obs.
P1	N	000° 00'			
	1	260° 26'	89,60	95° 42'	Az
	2	334° 14'	62,20	96° 16'	Az
	3	150° 18'	19,50	88° 25'	Az
	4	126° 40'	23,50	87° 30'	Az
	Aux 1	182° 24'	58,00	89° 18'	Az
	P2	007° 15'	55,00	98° 25'	Az
P2	P1	000° 00'			
	5	260° 20'	115,00	87° 12'	A. H.
	P3	259° 15'	152,00	90° 48'	A. H.
P3	P2	000° 00'			
	Aux 2	022° 54'	35,40	93° 58'	D. I.
	P4	093° 15'	104,80	94° 22'	D. D.
P4	P3	000° 00'			
	P5	132° 18'	84,50	98° 54'	A. C. H.
P5	P6	232° 15'	35,80		Az
P6	P5	000° 00'			
	6	095° 20'	18,20	92° 12'	A. H.
	P7	270° 50'	88,00	88° 05'	A. H.
P7	P6	000° 00'			
	P1	162° 37'	52,20	96° 48'	A. C. H.
AUX1	P1	000° 00'			
	7	165° 40'	119,80	92° 00'	A. H.
	8	205° 20'	176,50	108° 42'	A. H.
AUX2	P3	000° 00'			
	9	015° 20'	15,30		D. D.
	10	104° 45'	108,50	98° 46'	D. D.
	AUX 3	108° 20'	144,50	89° 50'	D. D.
AUX3	AUX 2	000° 00'			
	11	030° 20'	94,20	108° 16'	D. I.
	AUX4	000° 02'	48,50	108° 59'	D. I.
AUX4	AUX3	000° 00'			
	12	192° 15'	74,50	100° 10'	A. H.
	13	300° 10'	45,20	95° 01'	A. H.

La casa tiene un fondo de 10 m. Asumir que es una construcción rectangular, calcule las coordenadas de las cuatro esquinas, compense la poligonal por el Método XY y calcule el área total.

2. Dividir un triángulo equilátero de lado 100 m, en 3 triángulos de igual área. Describir cada uno de los triángulos resultantes mediante sus ángulos internos y sus lados.

3. Dividir un pentágono regular de lado 100 m, en 3 polígonos de iguales área de manera que las divisorias sean paralelas a uno de los lados, describir las figuras resultantes mediante ángulos internos y sus lados.
4. Dividir en dos lotes de áreas iguales según una línea que pase por el punto medio de 1 - 8.
5. Dividir en 3 lotes de áreas iguales, de tal manera que las líneas divisorias pasen por el punto 6
6. Dividir en 3 lotes de áreas iguales, de tal manera que cada uno tenga la misma longitud sobre la línea 1 - 8.
7. Dividir en 2 lotes de tal manera que las áreas están en relación 1:2, mediante una línea paralela a 9 - 10.
8. Dividir en 3 lotes de áreas iguales, de tal manera que la divisoria pase por P, a 10 m de 5, sobre 2 - 5.
9. Dividir en tres lotes de áreas iguales mediante meridianos.
10. Dividir en tres lotes, sus áreas en relación 1:2:3, mediante líneas paralelas a la línea 13 - 12.
11. Dividir en 3 lotes de áreas en relación 1:2:3, de tal manera que tengan la misma longitud sobre el lado 1 - 8.
12. Dividir en 3 lotes de áreas iguales de manera que una de las divisorias sea paralela a 1 - 2 y la otra a 9 - 10.
13. Dividir en 3 lotes de áreas iguales, de manera que las divisorias sean perpendiculares entre sí.
14. Dividir el predio en 4 lotes iguales; las divisorias deben concurrir en el punto medio de la línea 5 - 6.
15. Dividir en 2 lotes de áreas iguales de manera que la línea divisoria sea perpendicular a 9 - 10.
16. Dividir en 4 lotes de áreas iguales de manera que las divisorias sean paralelas a 1 - 8.
17. Dividir el predio en 4 lotes de manera que sus áreas están en la relación 1:2:3:4.
18. Dividir en 3 lotes de áreas iguales de tal manera que todos tengan la misma longitud sobre la quebrada.
19. Dividir en 4 lotes de igual área, el frente sobre la va debe repartirse en proporción 1:1,5:2,5:3.
20. Determine el avalo del predio de la figura, ubicado en ---- sobre la va que conduce a ----; la casa-elba construida en material se encuentra en buenas condiciones. Terreno plano.
21. Utilizando la misma figura, cambie los cultivos por otros diferentes y haga el avalúo correspondiente.

22. Dividir el predio en 3 lotes, de manera que tengan igual valor y la misma longitud sobre la quebrada.

23 - Dividir en 3 lotes de valores en proporción 1:2:2,5, todos con acceso a la casa.

24. Partir por valores en relación 1:1:2, los lotes deben tener igual frente sobre la vía.

25. Dividir en 3 lotes de igual valor, haciendo que todos tengan igual área en potrero.

26. Dividir en 3 lotes de igual valor asignando a uno la parte en café y yuca, si existiera diferencia en valor, esta se debe pagar por solo uno de los predios.

27. Partir en 4 lotes de valores iguales.

28. Divida en 4 lotes con valores en relación 1:2:3:4, al mayor valor se le asigna la casa; al menor, la mitad del frente sobre la vía.

29. Dividir en 4 lotes de igual valor, todos con el mismo frente sobre la vía.

30. Dividir en 4 lotes de igual valor, mediante líneas de  $Az = 5$

31. Partir en 2 lotes de igual valor; cada predio debe tener cultivos de todos los tipos.

32. Dividir el predio en 2 lotes, de manera que sus valores están en relación 1:4, c/u de ellos debe quedar por lo menos con 2 cultivos diferentes.

33. Dividir el predio en 2 lotes de igual valor de manera que tengan igual longitud de lindero sobre la quebrada.

34. Dividir el predio en 2 lotes con valores iguales, de manera que el frente sobre la vía está en proporción 1:2.

35. La siguiente poligonal corresponde a un lindero irregular:

Línea	Rumbo	D.H.
AB	N 32° 45' E	50
BC	N 71° 30' E	30
CD	S 61° 15' E	52
DE	N 71° 30' E	76
EF	S 40° 30' E	48

El punto A sobre el lindero XY de dirección N 07° 30' W; rectificar ABCDEF mediante la línea FG, de manera que las áreas al norte y al sur de ella permanezcan iguales. Determinar AG y FG.

36. ABCDE es un lindero irregular:

Línea	Rumbo	D.H.
AB	N 83° 14' E	253,20

BC	S 46° 30' E	426,40
CD	N 36° 13' E	543,80
DE	S 23° 54' E	1260,20

Se Debió reemplazar el lindero ABCDE por otro AXE, en donde AX es una recta, con X sobre DE. Calcular EX de tal manera, que no haya variación en la superficie del predio.

37. Con un teodolito se hicieron las siguientes observaciones

Línea	Az	D.H.
AB	055° 30'	80,00
BC	098° 30'	70,00
CD	063° 00'	100,00
DE	153° 00'	70,00
EF	240° 00'	100,00
FG	284° 10'	40,00
GH	255° 00'	80,00
HA	308° 00'	70,00

Se quiere rectificar el lindero ABCDE mediante una recta AM que intercepte el lindero DE en M. Hallar la posición planimétrica de M.

38. Realizar un bosquejo del siguiente alinderamiento

Consta de mas o menos 100 has, Desde el punto donde bifurca la quebrada del silencio en dos se sigue por la quebrada de la derecha hasta un nacimiento y se sigue por el alambrado arriba con una inclinación de  $s16^{\circ} 12'$ , hasta una piedra grande y visible que se encuentra sobre una cuchilla cerca de la casa de habitación que ocupa la señora María Teresa Orozco de Alzate, de aquí se sigue hacia la izquierda en línea sinuosa por encima de la acequia hasta donde parte la acequia que conduce el agua para la casa de la finca de aquí se sigue de para abajo unas cuarenta varas, lindando con tierras del señor Manuel Suárez hoy de Alcides Combita, hasta donde se encuentra una puerta de golpe; de aquí se sigue en línea oblicua, hasta donde se encuentra un nacimiento de una quebradita sin nombre; de aquí hasta donde se bifurca la quebrada del silencio, punto citado como primer lindero.

39. Realice el dibujo del siguiente alinderamiento.

Partiendo del punto donde atraviesa la quebrada del saltito, el camino que va para San Julián, se sigue por dicha quebrada aguas arriba hasta encontrar una zanja seca a la margen izquierda de dicha quebrada, lindando por esta parte con terrenos de Leonidas Jiménez, por esta zanja arriba hasta encontrar el mojón de piedra clavado y marcado con la letra C de este mojón línea recta al extremo de un surco de matas de fique que servia de cerco al solar de la casa nombrada "la Aurora" por la parte superior de dicha casa pero que hoy ya no existe, habiendo quedado reemplazada por un cerco de alambre hasta su terminación; se sigue por dicho cerco de alambre hasta su terminación en el lindero con terrenos actualmente de Victoriano Arias, antes de Jesús Muñoz, lindando en todo ese trayecto con terrenos de Ismael Porras; de dicha terminación del cerco de alambre, se sigue en dirección occidental, línea recta hasta

dar a un segundo mojón de piedra clavado en una cuchilla y marcado con la misma letra C., de aquí, línea pero de travesía, hasta encontrar la quebrada de Salto Grande, partiendo linderos con Victoriano Arias; quebrada de Salto Grande, aguas abajo hasta donde la atraviesa el camino para San Julián; y siguiendo el actual curso de dicho camino, hacia acá hasta donde se encuentra una chamba vieja que sirve de lindero con el resto de lote la Aurora, pertenecientes hoy a Francisco Mahecha y Claudio Gutiérrez; por esta chamba abajo hasta su terminación; de aquí, en línea recta hasta la quebrada del Saltito; y por esta arriba hasta donde la atraviesa el camino que va para San Julián, punto de partida.

# BIBLIOGRAFIA

Anderson James M., Mikhail Edward M., Introducción a la Topografía. McGraw Hill. México. 1988. 753 págs.

Bannister, A. y Raymond. S.. Técnicas Modernas en Topografía. Representaciones y servicios, s.a., México 1984. 514 págs.

Barry B. Austin. Errors in Practical Measurement in Surveying, Engineering, and Technology. Wiley-Interscience publication. United States of America. 1991. 183 págs.

Bird R. G. Edm traverses: measurement, computation and adjustment. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1989. 148 págs.

Brinker, Russell C. y Wolf, Paul R.. Topografía Moderna. 6a. Ed.. Harper & Row. México. 1982. 542 págs.

Bolshokov V., Gaidáyev P., Teoría de la Elaboración Matemática de mediciones geodésicas. Editorial MIR. Moscú. 1977. 397 págs.

Casanova Madera Leonardo. Topografía Plana. Taller de Publicaciones de Ingeniería ULA. Mérida. Venezuela. 2002. 280 págs.

Chueca Pazos., Manuel. Herráez Boquera., José . Berné Valero., José Luis. Tratado de topografía 1, Teoría de errores e instrumentación. Paraninfo. Madrid. 1996. 522 págs.

Chueca Pazos., Manuel. Herráez Boquera., José. Berné Valero., José Luis. Tratado de topografía 2, Métodos topográficos. Paraninfo. Madrid. 1996. 744 págs.

Cooper, M. A.. Fundamentals of Survey measurement and analysis. Crosby Lockwood Staples. London 1974. 107 págs.

Davis, Raymond E., Foote, Francis S. and Kelly Joe W.. Surveying: Theory and Practice. 5th. Ed.. McGraw-Hill Co.. New York 1966. 1096 págs.

Davis, Raymond E., Foote, Francis s., Anderson, James M. and Mikhail, Edward M.. Surveying Theory and Practice. 6th, Ed.. McGraw-Hill Book Co.. New York. 1981. 992 Págs.

Dowdell Gerd R. Measuring Systems IE. The University of Queensland. 1997. Australia.

Durbec Gérard., Cours de Topogramétrie Générale. Tome I, II. Quatrième édition. Éditions Eyrolles. Paris. 1981. 298, 278 Págs.

El-Sheimy Nasser . Adjustment of Observations. Department of Geomatics Engineering. University of Calgary. 2000

Gómez G., Gilberto. Jiménez C. Gonzalo. 100 Problemas de Topografía Analítica. Armenia. 1987. 20 Págs. Fotocopias.

Gómez G., Gilberto. Jiménez C. Gonzalo. Topografía Analítica. Armenia. 1994. 223 Págs.

Jiménez Cleves., Gonzalo. Vila Ortega, José Joaquin. Hurtado Bedoya, Carlos Alberto. Introducción al diseño de especificaciones en topografía. Armenia 1995. 116 Págs.

Kissam Philip. Surveying Practice. 2nd Ed.. McGraw-Hill Book Co.. New York. 1971. 482 Págs.

Kennie T. J. M. and Petrie G. Engineering Surveying Technology. John Wiley & Sons. Inc. Great Britain. 1990. 485 Págs.

Laurila Simo H., Electronic Surveying in Practice. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1983. 388 Págs.

Leick Alfred. GPS Satellite Surveying. A Wiley – Interscience publication. United States of America. 352 Págs.

McCormac Jack. Topografía. Limusa Wiley. Mexico. 2004. 434 Págs.

Mijhail, Edward M. with F. Ackerman . Observations Least Squares . University press of America. United States of America. 1982 497 pags.

Mousset, J.. La medida de distancias y la poligonación. Paraninfo. Madrid. 1976. 93 Págs.

Rayner, Willian H., Schmidt, Milton o.. Fundamentos de Topografía. Cecs. México. 1983. 447 págs.

Richardus, P. assisted by Allman, J. S.. Project Surveying. North-Holland Publishing Co. Amsterdam. 1966. 467 Págs.

Ruiz-Castillo Basala, Luís. Métodos Planimetricos. 4a Ed.. Sección de publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Madrid. 1970. 392 Págs.

Sánchez del Río Carlos. Análisis de errores Eudema. España. 1989. 180 Págs.

Shepherd, F. A.. Surveying Problems and Solutions. Edward Arnold Ltd.. London 1968. 654 Págs.

Sickle, Jan Van. Surveying Fundamentals Problems. Second Edition, Professional Publications , Belmont California. 1997.596 Págs.

Wolf Paul R. and Brinker Rusell C. Topografía. Alfaomega. Novena edición. México 1997. 834 Págs.

Wolf, Paul R. y Ghiliani d. Charles d. Adjustment Computations, Statistics and Least Squares in Surveying and Gis. 3a ed. Wiley - interscience United States of America 1997. 564 Págs.

Paginas de internet

[www.dioptra.es](http://www.dioptra.es)

[www.leica.com](http://www.leica.com)

[www.profsurv.com](http://www.profsurv.com)

[www.topcon.com](http://www.topcon.com)

[www.microsurvey.com](http://www.microsurvey.com)

[www.cartesia.org](http://www.cartesia.org)

[www.elagrimensor.com.ar](http://www.elagrimensor.com.ar)

