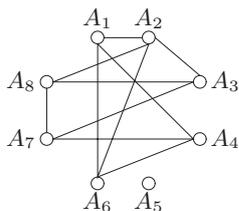


Capítulo 9

El lenguaje de los grafos

Los grafos, los objetos y el lenguaje cuyo estudio iniciamos aquí, son extremadamente útiles para representar primero, y luego analizar, problemas muy diversos. Informalmente, un grafo es una colección de *vértices*, a la que acompaña un conjunto de *aristas* que relacionan estos vértices. Cuando argumentamos con grafos es habitual dibujar los vértices como puntos (o pequeños círculos) sobre el plano, y representar las aristas como líneas que unen estos puntos. Adelantándonos a las definiciones formales, y para que el lector vaya comprobando la amplia capacidad de representación del lenguaje de los grafos, exhibimos algunos ejemplos que analizaremos con detalle más adelante.

1) **Un problema de horarios.** El plan de estudios de una cierta licenciatura universitaria consta de ocho asignaturas. Para programar los horarios en los que se cursan estas asignaturas, queremos excluir la posibilidad de que dos asignaturas que tengan alumnos matriculados en ambas se emplacen en el mismo horario. Queremos, además, minimizar el número de horas necesario para programar todas las asignaturas, teniendo en cuenta la restricción anterior.

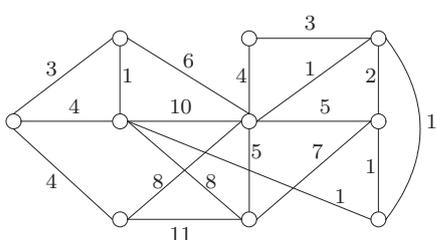
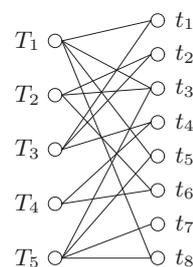


Representamos primero la información con un grafo: cada asignatura es un vértice, y si dos asignaturas presentan la incompatibilidad descrita antes, dibujamos una arista entre los vértices correspondientes. Digamos, por ejemplo, que el grafo resultante es el de la izquierda. El diseño de un horario equivale a asignar a cada vértice un símbolo (la hora a la que se imparte la asignatura) de manera que vértices que vayan unidos por una arista *no* lleven el mismo símbolo. Pero además nos interesará hacerlo empleando el mínimo número posible de símbolos. Abordaremos este tipo de cuestiones en la sección 10.2, utilizando un peculiar lenguaje que daremos en llamar *coloreado de grafos*.

2) **Asignación de tareas.** Formamos parte del departamento de estajanovismo a destajo de un empresa¹. Contamos con un conjunto de trabajadores y otro de tareas, así como de la información sobre para qué tareas está capacitado cada trabajador. Buscamos una asignación de tareas (a cada trabajador, una tarea distinta para la que esté preparado) de forma que consigamos ocupar al mayor número de trabajadores posible.

¹A veces conocido como departamento de recursos humanos.

Digamos que en la empresa hay cinco trabajadores, T_1, \dots, T_5 , y ocho tareas, t_1, \dots, t_8 . El grafo va a tener 13 vértices en total, tantos como trabajadores y tareas, pero dibujamos, pues así resulta conveniente, los de los trabajadores a un lado, y los de las tareas a otro. Además, trazamos una arista entre un vértice que represente a un trabajador y otro que represente a una tarea si efectivamente el trabajador está preparado para realizar esa tarea (véase el dibujo de la derecha). La asignación de tareas, en estos términos, consiste en seleccionar cinco aristas de manera que de cada vértice de la izquierda parta una y sólo una. En la sección 11.1 revisaremos condiciones necesarias para que este tipo de asignaciones exista, además de presentar algoritmos que permiten obtenerlas.

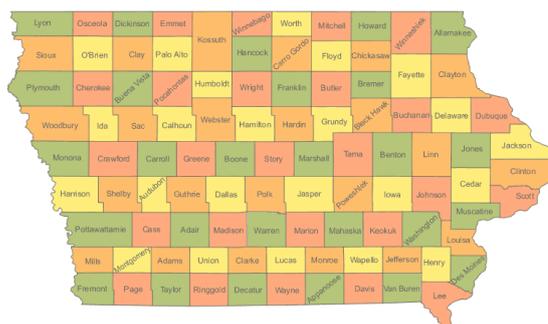


3) Construcción de redes. Se busca conectar una serie de ciudades mediante, por ejemplo, tramos de oleoducto. Un estudio de ingeniería previo nos permite conocer qué tramos se pueden construir, y quizás el coste de cada uno de ellos.

Las ciudades serán los vértices y las conexiones, las aristas. Cada arista lleva asociado un número (su “peso”), que indica el coste de construcción de cada tramo (véase el dibujo de la izquierda). Buscamos, por ejemplo, unir todos los vértices del grafo utilizando el menor número posible de aristas. O en la versión con pesos, encontrar conexiones lo más baratas posibles. Vea el lector

los apartados 9.2.2 y 11.2.1. Alternativamente, podríamos interpretar el dibujo anterior como un red de transporte ya construida, en la que los pesos representan las capacidades de cada tramo (por ejemplo, para canalizar agua, petróleo, número de vehículos, etc.), quizás con el añadido de que los tramos estén orientados (es decir, que el flujo sólo pueda recorrer cada tramo en un cierto sentido), y con el objetivo de calcular el máximo flujo que puede transportar la red. Vea el lector el apartado 11.3.

4) Coloreado de mapas. El de la derecha es el mapa del estado norteamericano de Iowa, dividido en sus 99 condados². Repare, lector, en que cada condado lleva un color que se ha elegido, con ánimo clarificador, de manera que condados colindantes lleven distinto color. Por cierto, sólo se utilizan *cuatro* colores. Nos preguntamos si se trata de una situación general, es decir, si *todo* mapa se puede colorear utilizando únicamente cuatro colores, o si los habrá que requieran más. Ésta es también una cuestión de *coloreado* de grafos, como la cuestión 1, aunque aquí los grafos asociados a la cuestión son un tanto especiales; *grafos planos*, diremos. En la sección 10.4 trataremos esta cuestión, junto con otras muchas relacionadas con estos grafos planos, alguna de las cuales, como comprobará el lector, tienen conexiones fascinantes.



²¡Ah!, ¿que no sabía que Iowa...? ¡Qué vasta cultura general proporciona la lectura de este libro!

El lector atento habrá reparado sin duda en el permanente uso de expresiones como “minimizar el número de...”, “conseguir la máxima asignación...”, “determinar la red más barata que...”, “colorear con el mínimo número de colores”, etc., en las cuestiones anteriores. El lenguaje de los grafos, que primero permite *representar* adecuadamente y de forma manejable la *información* de un cierto sistema, resulta además estar especialmente adaptado al planteamiento (y resolución) de problemas de *optimización* como los anteriores.

Dedicaremos tres capítulos a introducir y sacar³ partido de este lenguaje, con el siguiente plan. El capítulo que ahora comienza servirá para presentar las nociones y el lenguaje básico de grafos; un lenguaje un tanto peculiar, en el que tienen cabida desde expresiones tan pictóricas como coloreado y número cromático, hasta términos tan botánicos como árboles y bosques. Los dos siguientes capítulos contienen variadas aplicaciones de este lenguaje: agruparemos las que consideramos más de corte matemático en el capítulo 10, y las que tienen connotaciones más algorítmicas en el capítulo 11.

9.1. Grafos

Empecemos, como corresponde⁴, con la definición matemática formal.

Definición 9.1.1 Un **grafo** $G = (V, A)$ está conformado por un conjunto no vacío V de **vértices** y un conjunto A de **aristas** extraído de la colección de subconjuntos de dos elementos de V . Cada arista de G es, pues, un subconjunto $\{u, v\}$, con $u, v \in V$, $u \neq v$.

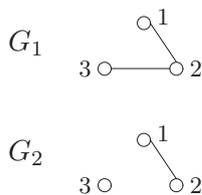
Las aristas son *pares* (no ordenados) de vértices, y escribiremos indistintamente $\{u, v\}$ ó $\{v, u\}$ para referirnos a la arista que *une* o *conecta* los vértices u y v .

En ocasiones, sobre todo cuando en ciertos argumentos manejemos varios grafos a la vez, utilizaremos símbolos como $V(G)$ y $A(G)$ para recordar a qué grafo corresponden los conjuntos de vértices y aristas a los que nos estamos refiriendo.

La definición anterior se refiere a los llamados **grafos simples**. En la sección 9.1.1 presentaremos algunas generalizaciones de esta noción inicial de grafo. Pero, en lo que sigue, y salvo mención explícita en sentido contrario, cuando hablemos de un grafo siempre estaremos refiriéndonos a este caso.

Diremos que dos grafos son **iguales** si tienen el mismo conjunto de vértices y la misma colección de aristas.

EJEMPLO 9.1.1 Consideremos un conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3\}$. Construyamos algunos grafos distintos con ese conjunto de vértices.



Como el conjunto de vértices está fijo, determinar aquí el grafo exige únicamente decidir el conjunto de aristas. Los subconjuntos de dos elementos de V son $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$. De ellos, deberemos escoger unos cuantos (o quizás ninguno) para formar el conjunto de aristas. Las elecciones $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ y $A_2 = \{\{1, 2\}\}$ dan lugar a los grafos $G_1 = (V, A_1)$ y $G_2 = (V, A_2)$ dibujados a la izquierda. ♣

³Un mete saca.

⁴No olviden que éste es un libro de matemáticas. Tampoco olviden supervitaminarse y mineralizarse.

A. Recuento del número de grafos distintos. Si fijamos el conjunto de vértices, por ejemplo $\{1, 2, 3\}$, hay ocho grafos distintos, pues hay tres “candidatos” a ser aristas y, por tanto, $2^3 = 8$ posibles elecciones de conjuntos de aristas (incluyendo el conjunto vacío). En general, si el conjunto de vértices tiene n elementos, por ejemplo $V = \{1, 2, \dots, n\}$, entonces tendremos

$$\#\{\text{subconjuntos de tamaño 2 extraídos de } \{1, \dots, n\}\} = \binom{n}{2}$$

“candidatos” para ser aristas. Y, por tanto,

$$\#\{\text{número de grafos distintos con vértices } \{1, 2, \dots, n\}\} = 2^{\binom{n}{2}},$$

tantos como subconjuntos se pueden seleccionar de $\{1, \dots, \binom{n}{2}\}$. El número anterior, por cierto, es enorme, en cuanto n sea grande. Por ejemplo, para un modesto $n = 7$ hay ya $2^{21} = 2\,097\,152$ grafos distintos, más de dos millones.

El número de grafos con vértices $\{1, \dots, n\}$ y con un número fijo, digamos k , de aristas (donde $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$) es

$$\binom{\binom{n}{2}}{k}$$

pues basta elegir k de entre las $\binom{n}{2}$ posibles.

Agrupamos ahora los $2^{\binom{n}{2}}$ grafos distintos con vértices $\{1, \dots, n\}$ en función del número de aristas que tengan. Habrá uno sin arista alguna, $\binom{n}{2}$ con una arista, $\frac{1}{2}\binom{n}{2}(\binom{n}{2} - 1)$ con dos, etc., hasta terminar en el único grafo con todas las aristas posibles. Nos preguntamos por el *número medio* de aristas que tiene un grafo con n vértices. El resultado, siguiendo un cálculo con el teorema del binomio análogo al del ejemplo 5.1.2, que convendrá que el lector revise, es que

$$\text{número medio de aristas} = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} k \binom{\binom{n}{2}}{k} = \frac{1}{2} \binom{n}{2},$$

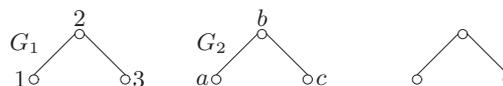
de manera que, en media, los grafos tienen la *mitad* de las aristas posibles.

Así que, en cuanto n sea moderadamente grande, hay muchísimos grafos distintos, incluso si prefijamos el número de aristas, y un grafo elegido al azar tiene, en media, bastantes aristas. Lo que indica que realizar cálculos sobre la colección completa de grafos será exigente desde el punto de vista computacional, y que estrategias del tipo “vamos a comprobar, uno a uno, si cierta propiedad se verifica para cada grafo” serán, como mínimo, aventuradas.

B. Grafos con y sin etiquetas. Habitualmente representaremos los vértices con los símbolos $\{1, \dots, n\}$, o con los símbolos como $u, v, w \dots$, o quizás con $v_1, v_2, v_3 \dots$. Para las aristas utilizaremos los símbolos a (por arista) o quizás e (del inglés *edge*).

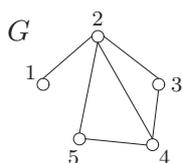
La cuestión de “etiquetar” o no los vértices de un grafo es un tanto sutil. Por ejemplo, siguiendo la definición anterior, los grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, donde $V_1 = \{1, 2, 3\}$ y $A_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, y $G_2 = (V_2, A_2)$, con $V_2 = \{a, b, c\}$ y $A_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ son claramente distintos, pues primero no tienen el mismo conjunto de vértices, y además tampoco tienen el mismo conjunto de aristas.

Sin embargo, salvo por el nombre de los vértices, ambos contienen la misma “información” (en cierto sentido que convendrá precisar). Vea el lector los dibujos de la derecha y confirme, a la vista de ellos, si está o no de acuerdo. Más aún, reconozca que siente la tentación de quedarse, simplemente, con el esquema desnudo, sin etiquetas, que aparece más a la derecha. Confiamos en que la discusión de la sección 9.1.2 arroje luz sobre esta cuestión.

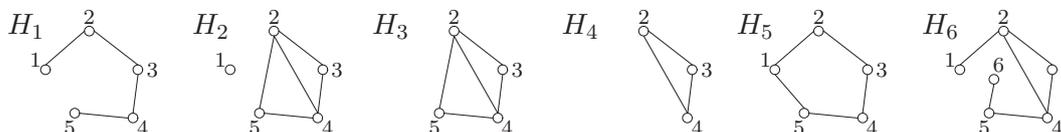


C. Subgrafos. En muchas ocasiones, conviene considerar grafos que están incluidos “dentro” de otros. Dado un grafo $G = (V, A)$, formamos un **subgrafo** $H = (V', A')$ de G seleccionando primero algunos de los vértices de G (esto es, $V' \subseteq V$) para después, de las aristas que unieran vértices del conjunto V' en el grafo original G , quedarnos con algunas de ellas (o todas)⁵.

Un caso especialmente relevante es aquél en el que el subgrafo incluye *todos* los vértices del grafo original. Un subgrafo H (de G) con $V(H) = V(G)$ se llamará un **subgrafo abarcador**. Algunos de los ejemplos que expusimos al principio del capítulo requieren hallar subgrafos abarcadores (en realidad, “árboles” abarcadores; esto lo veremos en la sección 9.2.2).



Consideremos, por ejemplo, el grafo G dibujado a la izquierda. El conjunto de vértices es $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y el de aristas $A(G) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. De los seis grafos que representamos debajo de estas líneas, sólo los cuatro primeros son subgrafos de G . Porque H_5 contiene una arista (la $\{1, 5\}$) que no estaba en el original, mientras que H_6 tiene un vértice (y alguna arista) de más.



Los grafos H_1 y H_2 son, además, subgrafos abarcadores de G , porque incluyen a todos los vértices de G . Los subgrafos H_3 y H_4 son también especiales: son los subgrafos que se obtienen considerando sólo los conjuntos de vértices $\{2, 3, 4, 5\}$ y $\{2, 3, 4\}$, respectivamente, y quedándonos con todas las aristas que unieran esos vértices en G . A estos últimos subgrafos nos referiremos como los **subgrafos inducidos** por esos conjuntos de vértices.

9.1.1. Representación matricial de un grafo

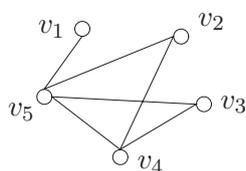
La definición 9.1.1 oficial de grafo habla de conjuntos de vértices y conjuntos de aristas, que se seleccionan de entre las parejas de vértices. Pero en los ejemplos que hemos visto hasta ahora, y en muchas de las ilustraciones y argumentos que desarrollaremos en lo que sigue, el grafo es ese dibujo en el papel en el que vamos ubicamos círculos para representar vértices, y líneas, curvas o rectas, dependiendo de las pulsiones estéticas de cada uno, uniéndolos entre sí.

⁵Si sólo exigiéramos que H contuviera algunos de los vértices y algunas de las aristas de G , podríamos llegar a situaciones sin sentido como incluir una arista pero no alguno de sus vértices.

Vale, bien, de acuerdo. Pero si lo que pretendemos es utilizar grafos para representar sistemas de puntos conectados y para resolver en ellos cuestiones algorítmicas, ordenador mediante, necesitamos una manera eficaz de codificar la información contenida en el grafo.

La representación más habitual⁶ de un grafo $G = (V, A)$ utiliza su **matriz de vecindades**, o **matriz de adyacencia**. Se construye como sigue. Digamos que el conjunto de vértices es $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ordenamos esos vértices de cierta manera, por ejemplo (v_1, \dots, v_n) . Y ahora construimos la matriz $n \times n$, cuyas filas y columnas van etiquetadas con esos vértices, y cuyas entradas, para cada $1 \leq i, j \leq n$, llevan un 1 en la posición (v_i, v_j) si $\{v_i, v_j\} \in A$, y un 0 en caso contrario.

La matriz tendrá ceros en la diagonal y será simétrica: si en la posición (v_i, v_j) aparece un 1 es porque $\{v_i, v_j\} \in A$; por tanto, en la posición (v_j, v_i) deberá aparecer también un 1. Véase la siguiente ilustración:



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	0	0	0	1
v_2	0	0	0	1	1
v_3	0	0	0	1	1
v_4	0	1	1	0	1
v_5	1	1	1	1	0

Por ejemplo, el 1 que aparece en la fila tercera, columna cuarta, y el 1 de la correspondiente posición simétrica, fila cuarta, columna tercera, significan que el grafo contiene la arista entre los vértices v_3 y v_4 .

(Observe el lector que la matriz depende de la ordenación de los vértices elegida. Más sobre esto, en el apartado 9.1.2).

Así que un grafo G simple con vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ es exactamente lo mismo que una matriz $n \times n$ de ceros y unos, simétrica, y con ceros en la diagonal, cuyas filas y columnas van etiquetadas con los símbolos $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Hacemos notar que esta representación matricial abre la posibilidad de utilizar técnicas de álgebra lineal para analizar cuestiones relacionadas con grafos. La matriz de vecindades de un grafo verifica algunas propiedades, como ser simétrica, o que sus entradas son números no negativos (ceros y unos, de hecho). Podría ocurrir, y de hecho así ocurre, que algunas de las características del grafo se reflejaran en ciertos invariantes de la matriz, como por ejemplo sus autovalores y autovectores. Esta línea de análisis, conocida como *teoría espectral de grafos*, es extremadamente útil en ocasiones, aunque aquí sólo la utilizaremos en contadas ocasiones. Véase al respecto la sección 9.1.5.

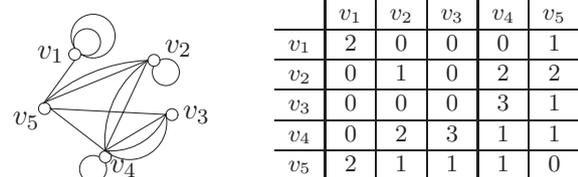
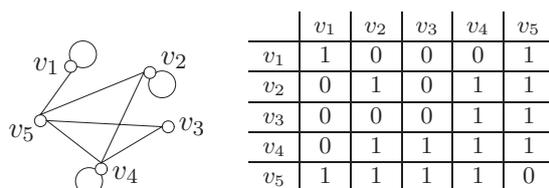
El lector que revise la discusión sobre relaciones binarias de la sección 5.5 se percatará también de que un grafo $G = (V, A)$ se corresponde con una relación definida en el conjunto V , sin más que interpretar que dos elementos de V están relacionados si hay una arista que conecta los correspondientes vértices. Para el caso de los grafos simples, se tratará de una relación simétrica, desde luego no reflexiva y que, en algún caso, será además transitiva. Véase la discusión más general al respecto en la sección 9.3.

⁶No es la única. Vea por ejemplo, en la demostración de la proposición 9.1.3, una representación alternativa, conocida como la “matriz de incidencias”.

A. Grafos dirigidos, aristas múltiples, lazos y pesos

Algunas cuestiones que trataremos en este texto exigen generalizar el concepto de grafo. Presentamos ahora algunas de estas variaciones sobre la definición 9.1.1, atendiendo también a las representaciones matriciales a que dan lugar. Algunas propiedades adicionales de estas generalizaciones serán analizadas con más detalle cuando el problema de interés lo exija.

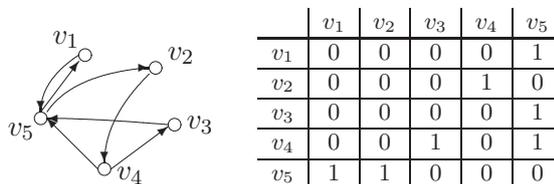
La primera generalización consiste en permitir la presencia de **lazos**, esto es, de aristas cuyos dos vértices sean el mismo. Sobre la definición 9.1.1, esto supone admitir aristas del tipo $\{v, v\}$; y sobre la matriz de vecindades, la eventual presencia de unos en la diagonal. A la derecha mostramos un ejemplo.



Conviene también a veces permitir aristas múltiples, esto es, que algunos pares de vértices estén conectados por dos o más aristas. En este caso, al que nos referiremos como **multigrafos**, la definición 9.1.1 se ampliaría permitiendo aristas repetidas, y en la matriz de vecindades las entradas serían

ceros o números naturales (incluyendo la diagonal, si es que quisiéramos permitir lazos múltiples). A la izquierda exhibimos un ejemplo, en el que se pueden apreciar aristas dobles y triples, y hasta lazos dobles⁷.

Otra posibilidad, que estudiaremos con detalle en la sección 9.3, es la de dar *orientación* a las aristas. En los **grafos dirigidos** o **digrafos** (con lazos o sin ellos), las aristas se definen como *pares ordenados*, y la matriz, cuyas entradas siguen siendo



ceros o unos, ya no será necesariamente simétrica. Véase el ejemplo de la derecha. Hacemos notar, por cierto, que en la matriz leemos las aristas de filas a columnas; véase, por ejemplo, el 1 en la fila v_4 y columna v_3 . En el dibujo, además, cada arco ha sido decorado con una “flecha”.

La última generalización consiste en asociar, en cualquiera de los esquemas anteriores (grafos simples, multigrafos o grafos dirigidos), un número real a cada arista a , su **peso** $p(a)$. En este caso, hablaremos de un **grafo con pesos** (o grafo ponderado⁸, o incluso grafo pesado⁹). La matriz de un grafo (simple y sin lazos, por ejemplo) ponderado es simétrica y sus entradas son los pesos de cada arista. La matriz de un grafo dirigido con pesos (que tendrán papel destacado en la sección 11.3) apenas tiene propiedades más allá de ser cuadrada.

⁷Esta representación matricial sólo tiene en cuenta *cuántas* aristas hay entre cada par de vértices. Eso es todo lo que necesitaremos aquí. Pero es concebible que quisiéramos distinguir entre, por ejemplo, dos aristas que unan el mismo par de vértices (por ejemplo, dos carreteras distintas que unieran las mismas ciudades) ¿Cómo se le ocurre al lector representar matricialmente esta situación?

⁸Dícese del grafo sobre el que se piensa mucho, y muy detenidamente.

⁹Sin comentarios.

Esperen, no se vayan todavía, que queda una última generalización. Todas las definiciones anteriores, cada una con sus particularidades, parten de que las aristas conectan *parejas* de vértices (ordenadas o no). En otros términos, nos hemos restringido a relaciones *binarias*. Los llamados **hipergrafos** constan del habitual conjunto de vértices, V , y además de un conjunto A de *hiperaristas*, que son subconjuntos de vértices, no necesariamente de tamaño 2. Es decir, $A \subseteq \mathcal{P}(V)$, la colección de todos los subconjuntos de V . En ocasiones conviene restringirse a que las aristas sean todas del mismo tamaño, por ejemplo parejas (el caso del grafo habitual), o tríos, o cuartetos, etc, de vértices. Aunque estos hipergrafos resultan útiles para representar ciertas cuestiones, no los utilizaremos en estos capítulos. Por otra parte, intente el lector representar sobre el papel un hipergrafo que por ejemplo involucre tríos.

Pero, ¡insistimos!, en lo sucesivo, mientras no se diga lo contrario, todos los grafos a los que nos referiremos serán... simples (y sin lazos).

B. Vértices vecinos, grado de los vértices y sucesión de grados

En lo que sigue utilizaremos en repetidas ocasiones las siguientes nociones, que tienen que ver con relaciones de vecindad en un grafo.

Definición 9.1.2 Dado un grafo $G = (V, A)$, diremos que dos vértices $v, w \in V$ son **vecinos** si $\{v, w\} \in A$. El **grado de un vértice** es el número de vecinos que tiene en el grafo:

$$\text{grado}(v) = \#\{w \in V : \{v, w\} \in A(G)\}.$$

Si los vértices de G son $\{v_1, \dots, v_n\}$, la **sucesión de grados** del grafo G es la lista

$$(\text{grado}(v_1), \text{grado}(v_2), \dots, \text{grado}(v_n)).$$

El grado de un vértice es un número entre 0 y $n - 1$, si es que el grafo tiene n vértices. Si el grado de un vértice es 0, es decir, si no tiene vecinos en el grafo, diremos que el vértice es **aislado**. Con la matriz de vecindades, el grado de un vértice se determina *sumando* las entradas (los unos) que aparezcan en su fila¹⁰.

Por convenio (o costumbre), en la sucesión de grados éstos se escriben en orden de tamaño, bien de menor a mayor, bien de mayor a menor¹¹.

Las relaciones de vecindad se codifican con la matriz de vecindades; la sucesión de grados se obtiene sumando sus filas, de manera que se trata sólo de un resumen parcial de la información que contiene la matriz. Así que habrá grafos que tengan la misma sucesión de grados, pero cuyas relaciones de vecindad sean bien distintas. Vea el lector algún ejemplo en el apartado siguiente.

Además, no toda lista de n enteros, todos ellos entre 0 y $n - 1$, se corresponde con la sucesión de grados de un grafo con n vértices. Por ejemplo, se tiene la siguiente restricción que nos dice, en particular, que la suma de los grados de un grafo es siempre un número par.

¹⁰Un lazo, si los permitiéramos y los hubiere, debe contribuir con un 2 al grado del vértice. Pero como en la matriz de vecindades hemos representado los lazos con unos en la posición de la diagonal correspondiente, para este caso tendremos que la suma de las entradas de la fila (o columna) de un vértice v es el grado de v menos el número de lazos. Pequeña inconveniencia que confiamos el lector sepa disculpar.

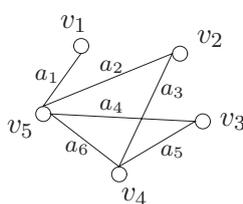
¹¹Sobre gustos... El nuestro será: de menor a mayor.

Proposición 9.1.3 *En cualquier grafo $G = (V, A)$ se tiene que*

$$\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|A|.$$

Hacemos notar, no obstante, que la condición anterior no *caracteriza* las sucesiones de grados de un grafo. Es decir, hay sucesiones de enteros no negativos $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n \leq n-1$, con $d_1 + \dots + d_n$ par, que no se corresponden con la sucesión de grados de un grafo simple. Por ejemplo, la sucesión $(1, 1, 3, 3)$ de números entre 0 y 4 cumple las condiciones de paridad, pero no se corresponde con ningún grafo con cuatro vértices, como podrá comprobar el lector que se afane en tratar de dibujar un tal grafo. Vea el lector interesado el ejercicio 9.1.11.

DEMOSTRACIÓN (véase también el *lema de los saludos*, ejemplo 2.1.4). Vamos a argumentar sobre otra manera de registrar la información contenida en el grafo, conocida como “matriz de incidencias”: sus columnas están etiquetadas con los vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$, pero ahora, como etiquetas de las filas, situamos las aristas $\{a_1, \dots, a_m\}$.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
a_1	1	0	0	0	1
a_2	0	1	0	0	1
a_3	0	1	0	1	0
a_4	0	0	1	0	1
a_5	0	0	1	1	0
a_6	0	0	0	1	1

En la posición (a_i, v_j) colocaremos un 1 si el vértice v_j es extremo de la arista a_i ; y un 0 en caso contrario. Véase el ejemplo de la figura.

En la fila etiquetada con la arista a_1 aparecerán sólo dos unos (sus dos extremos); lo mismo ocurre con el resto de las filas. Así que, sumando por filas, obtenemos $2|A|$. La columna correspondiente al vértice v_j contendrá tantos unos como vecinos tenga: su suma valdrá justamente $gr(v_j)$. Sumando los resultados de todas las columnas, y por doble conteo, obtenemos la conclusión. Piense el lector si el resultado sigue siendo válido si permitimos lazos y/o aristas múltiples (ejercicio 9.1.7; recomendamos también el ejercicio 9.1.8). ■

Finalizamos la sección presentando unas cuantas nociones adicionales asociadas a los grados de los vértices de un grafo:

Definición 9.1.4 Dado un grafo $G = (V, A)$, su **mínimo grado** y su **máximo grado** vienen dados por

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \{\text{grado}(v)\} \quad \text{y} \quad \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \{\text{grado}(v)\}.$$

Si los dos números anteriores coinciden, digamos que ambos valen k , entonces todos los vértices del grafo tendrán grado k , y hablaremos de un grafo **k -regular**.

Llamaremos **grado medio** de los vértices del grafo G a la cantidad

$$\text{grado}(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \text{grado}(v)$$

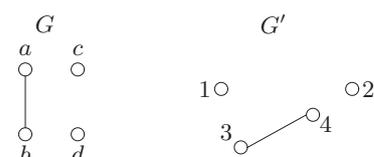
Obsérvese que $0 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq n-1$, si el grafo tiene n vértices. El grado medio, que cumple que $\delta(G) \leq \text{grado}(G) \leq \Delta(G)$, es una medida del número de aristas que hay en el grafo G por cada vértice. De hecho, a la vista de la proposición 9.1.3, se tiene que

$$\text{grado}(G) = 2 \frac{|A(G)|}{|V(G)|}.$$

9.1.2. Grafos en cuerpo y alma: isomorfía de grafos

Los grafos, como hemos visto, tienen como objeto representar relaciones (binarias) entre los elementos de una colección de vértices. La verdadera naturaleza de esta relación variará según el problema considerado; por ejemplo, pueden ser personas que se conozcan o no, ciudades conectadas o no mediante carreteras, asignaturas con incompatibilidades, etc. Pero sea cual sea su carácter, nos gusta interpretar esta relación en términos genéricos de *vecindad*: así, “estar relacionados” lo entendamos como “ser vecinos” en el grafo.

Para que dos grafos sean iguales han de tener primero, los mismos vértices, exactamente, y después, las mismas aristas, exactamente. Los dos grafos de la derecha tienen vértices distintos: los del de la izquierda son $\{a, b, c, d\}$ y los del de la derecha, $\{1, 2, 3, 4\}$, y cada uno tiene una única arista. Son grafos distintos, simplemente porque tienen vértices distintos.



Pero el lector condescendiente admitirá que, en realidad, los dos grafos se corresponden con la misma relación de vecindad, que, de hecho, podemos describir en palabras que no hacen referencia ni a los vértices concretos ni a las aristas concretas; a saber, se trata de una relación en un conjunto de 4 elementos en la que hay exactamente un par de ellos relacionados.

El lector convendrá con nosotros en que resultará provechoso disponer de un concepto que capture el hecho de que esos dos grafos, en realidad, *dicen* lo mismo. Vamos, que son iguales aunque sean formalmente distintos, *sensu stricto*¹². Ese concepto es el de **grafos isomorfos**. Isomorfo significa, filológicamente hablando, con la misma forma.

Definición 9.1.5 Decimos que dos grafos $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$ son **isomorfos** si existe una aplicación *biyectiva* entre los conjuntos de vértices, $\phi: V \rightarrow V'$, de manera que

$$\{v, w\} \in A \quad \text{si y solamente si} \quad \{\phi(v), \phi(w)\} \in A'.$$

La aplicación ϕ es un diccionario que traduce la información del primer grafo en la del segundo (o viceversa). Si dos vértices son vecinos en el primer grafo, entonces los vértices correspondientes en el segundo también son vecinos, y recíprocamente. Así queda exactamente trasladada la relación de vecindad: es, a todos los efectos, la misma. Nótese que el isomorfismo se define con una biyección entre los vértices, pero induce automáticamente otra entre las aristas: basta asociar a una arista con vértices v y w la arista con vértices $\phi(v)$ y $\phi(w)$.

Por ejemplo, la aplicación ϕ de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$ definida por $\phi(a) = 3$, $\phi(b) = 4$, $\phi(c) = 1$ y $\phi(d) = 2$ es un isomorfismo entre los grafos que considerábamos antes, pues justamente hace corresponder la única arista, $\{a, b\}$, de G , con la única arista, $\{3, 4\}$, de G' .

Muchas de las nociones y propiedades de grafos que iremos introduciendo en las páginas que siguen serán **invariantes por isomorfía**. Es decir, que si un grafo G tiene una tal propiedad, los grafos isomorfos a él gozarán asimismo de esa propiedad. En cierto sentido, sólo las propiedades invariantes por isomorfía son importantes, porque sólo ellas refieren exclusivamente a lo esencial de la estructura de vecindad. Por ejemplo, el número de vértices y el número de aristas son invariantes por isomorfía. También la lista de grados de los vértices

¹²Disculpe el amable lector el tono escolástico, y es que tanta disquisición quintaesencial. . .

es invariante por isomorfía; de hecho, si ϕ define un isomorfismo entre G y G' , entonces $\text{grado}(v) = \text{grado}(\phi(v))$ para cada vértice v de G .

No suele resultar fácil decidir si dos grafos dados son isomorfos o no. De hecho no se dispone de ningún procedimiento *efectivo y general* para ello, y la cuestión es considerada un problema computacionalmente difícil.

Para comprobar que dos grafos son isomorfos bastará con exhibir un isomorfismo. Encontrarlo puede no ser fácil, pero comprobar que el supuesto isomorfismo es tal es un asunto directo. Para buscar un isomorfismo entre dos grafos (o, si es el caso, comprobar que no hay tal) con n vértices –si no tuvieran igual número de vértices ya estaría claro que no son isomorfos– podríamos analizar las $n!$ biyecciones del primer conjunto de vértices en el segundo, y comprobar una a una si lleva aristas en aristas. Pero $n!$ es, a poco que n no sea pequeño, un número desorbitadamente grande.

En sentido contrario, para comprobar que dos grafos no son isomorfos habrá que argumentar que no existe ningún isomorfismo entre ellos, lo que no es tarea fácil. Piense en abstracto el aplicado lector: cuán difícil es demostrar que algo (por ejemplo, la isla de San Borondón¹³) no existe. Pero las matemáticas, como ciencia de lo abstracto –ésta es la clave–, están cabalmente pertrechadas para este fin.

Una posible estrategia pasa por comprobar si ambos grafos comparten o no las diversas propiedades invariantes por isomorfía que iremos descubriendo en estas páginas: el número de vértices, la sucesión de grados, etc. Pues si comprobamos que uno de los grafos en cuestión tiene una tal propiedad y el otro no, entonces *no* pueden ser isomorfos. Pero no se conoce una lista (completa y razonable) de invariantes cuya comprobación resolviera la cuestión, bien en negativo (los grafos no son isomorfos), si alguna de las propiedades no se compartiera, bien en positivo (los grafos son isomorfos) si *todas* ellas fueran comunes a los dos grafos.

Por cierto, la interpretación de la noción de isomorfía en términos de matrices de vecindades es directa. Sean M y M' las respectivas matrices de vecindades de los grafos G y G' . (Las matrices en sí dependen de las ordenaciones de los dos conjuntos de vértices). Entonces G y G' serán isomorfos si existe una forma *común* de reordenar las filas y las columnas de M que nos dé la matriz M' . La receta para esa reordenación común es simple: si el vértice v de G etiqueta, por ejemplo, la tercera fila (y tercera columna) de M y el vértice $\phi(v)$ etiqueta, por ejemplo, la sexta fila (y sexta columna) de M' , entonces en la reordenación la fila 3 pasa a ser la fila 6, y la columna 3 pasa a ser la columna 6. Nótese el significado del término “reordenación común”, que en términos más formales supone lo siguiente.

Definición 9.1.6 Dos grafos $G = (V, A)$ y $G' = (V', A')$, representados por sendas matrices de vecindades M y M' , son **isomorfos** si existe una *matriz de permutaciones* P tal que

$$M' = P M P^{-1}.$$

Una matriz (cuadrada) P con ceros y unos se dice de permutaciones si tiene un único 1 por fila, y un único 1 por columna. Revise el lector el ejercicio 5.2.10. Estas matrices son *ortogonales*, es decir, $P^{-1} = P^T$. En la identidad de arriba, multiplicar por P por la izquierda intercambia las filas, y multiplicar por P^{-1} (o mejor, por P^T) por la derecha, las columnas.

¹³O Saint Brendan, si no tiene usted la suerte de ser canario.

Para cercioranos de la equivalencia entre las definiciones 9.1.5 y 9.1.6, y comprobar cómo la matriz de permutaciones P se corresponde exactamente con la biyección ϕ entre vértices, veamos el ejemplo que abría este apartado: si tomamos

$$M = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

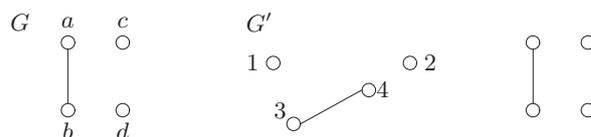
entonces

$$M' = P \cdot M \cdot P^T, \quad \text{donde} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese cómo P se corresponde con la aplicación ϕ descrita anteriormente.

A. Almas de grafos

Lo común de los dos grafos que tratábamos antes queda recogido por la representación que aparece en el último esquema de la derecha, que es una suerte de grafo *desnudo*, sin etiquetas en los nodos que representan vértices, al que nos referiremos como el **alma del grafo**¹⁴. En las almas no hablamos de vértices sino de nodos, y no hablamos de aristas, sino de conexiones entre nodos, simplemente para resaltar que las almas de los grafos son entes¹⁵ de naturaleza distinta a la de los grafos en sí. Usaremos almas de grafos, y no los grafos en sí, en las discusiones en las que los nombres de los vértices no aportan información relevante.



Obsérvese que los grafos en sí guardan, respecto de sus almas, la misma relación que la matriz de vecindades (con sus filas y columnas etiquetadas) respecto de esa misma matriz pero sin etiquetas ni nombres en filas o columnas.

A un alma se le puede dar *cuerpo*¹⁶ de grafo asignándole nombres a los nodos para transformarlos en vértices. Nótese que dos grafos son isomorfos si tienen la misma alma, o recíprocamente, si se obtienen de la misma alma asignando nombres a los nodos del alma.

B. Almas en acción¹⁷

Las almas son muy útiles (como paso intermedio) cuando intentamos exhibir todos los grafos que cumplen determinadas características. Veamos aquí un ejemplo para ilustrar esta idea, aunque más adelante la usaremos con denuedo. Supongamos que queremos exhibir todos los grafos con los cuatro vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ que tienen 3 aristas. En total hay

$$\binom{\binom{4}{2}}{3} = 20 \quad \text{de ellos.}$$

¹⁴¡Ah!, pero, ¿los grafos tienen alma? Y cuerpo, sí señor. Un alma es un grafo desnudo: metafísica escolástica.

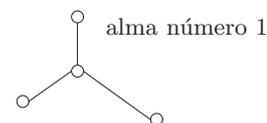
¹⁵¿Entelequias? Esta discusión empieza a exigir, como música ambiental, canto gregoriano.

¹⁶Reencarnaciones. Quizás ahora música de tambores, crótalos y cuencos tibetanos.

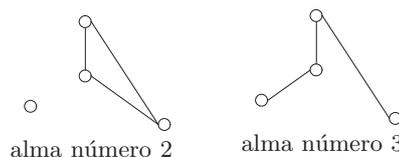
¹⁷No, no es una ONG.

A la vista de la proposición 9.1.3, las posibles sucesiones de grados son cuatro números $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq g_4$, todos ellos entre 0 y 3, de manera que $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 6$. Toca ser metódico y analizar la consiguiente casuística. Vamos con ello.

Si hay un vértice de grado 3, ya se usan las 3 aristas y los otros vértices habrán de ser de grado 1. La sucesión de grados es $(1, 1, 1, 3)$, que se corresponde con el alma de la derecha.



Suponemos ya que no hay vértices de grado 3. Ha de haber al menos dos vértices de grado 2, porque si no la suma de los cuatro grados no llegaría a 6. Por tanto, restan dos posibilidades para la sucesión de grados: $(0, 2, 2, 2)$ y $(1, 1, 2, 2)$, que dan lugar a las dos almas que dibujamos a la derecha.



Puesto que las sucesiones de grados en estas almas son distintas, no hay posibles isomorfismos entre los grafos que tengan distintas almas, y, por tanto, a mayor abundamiento, grafos con distintas almas serán distintos. Por tanto, he ahí nuestro enfoque: para cada una de las tres almas buscaremos todos los grafos distintos que podemos tener con ese alma concreta, es decir, asignaremos nombres de entre $\{1, 2, 3, 4\}$ a los nodos (para transformarlos en vértices). El alma es como una plantilla en la que al poner nombres damos cuerpo al grafo.

A primera vista, sin pensar, podíamos decir que, como hay cuatro posiciones en el alma y cuatro símbolos posibles, entonces cada alma da lugar a $4!$ grafos: cierto, pero no son todos distintos. Procedamos con cuidado.

Consideremos el alma número 1. Observará el lector atento que aquí basta con decidir cuál es el nombre del nodo de grado 3. De manera que sólo hay 4 grafos distintos con vértices de $\{1, 2, 3, 4\}$ con este alma. Por ejemplo, si decidimos que el nodo de grado 3 recibe el nombre de 2, entonces el grafo tiene aristas: $A = \{\{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$.

Vamos con el alma 2. De nuevo, hay sólo 4 grafos distintos: aquí basta con decidir el nombre del nodo de grado 0. Si, por ejemplo, el nodo de grado 0 recibe el nombre de 2, entonces el grafo tiene aristas: $A = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$.

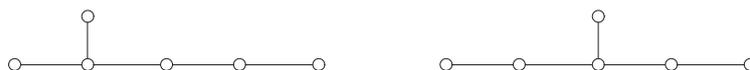
Finalmente, analicemos el alma 3, que es sin duda la que más trabajo da de las tres. Elegimos nombre para uno de los nodos de grado 1, después nombre para el vecino de grado 2, y luego, por último, de los dos nombres restantes elegimos el que asignamos al nodo de grado 1, y el grafo queda determinado. Este proceso se puede llevar a cabo de $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneras. Por ejemplo, si en este proceso elegimos, por orden, el nombre “2” para el nodo de grado 1, el nombre “4” para el nodo vecino de grado 2 y el nombre “1” para el otro nodo de grado 1, tendremos las aristas $A = \{\{2, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 1\}\}$.

Pero – tenía que haber un pero – hemos impuesto un orden espurio en los nodos de grado 1 y no hay tal. Por ejemplo, si en este proceso elegimos por orden el nombre “1” para un nodo de grado 1, el “3” para el nodo vecino de grado 2 y el “2” para el otro nodo de grado 1, obtenemos las mismas aristas. Como consecuencia del orden impuesto en los nodos de grado 1, cada grafo aparece 2 veces. De manera que tenemos que dividir por 2, para obtener finalmente que con este alma tenemos $24/2 = 12$ grafos distintos.

Reuniendo las consideraciones sobre las tres almas, vemos que tenemos un total de $20 =$

$4 + 4 + 12$ grafos distintos con vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ y 3 aristas. Los que tienen alma 1 son todos isomorfos entre sí, y lo mismo ocurre para los que tienen alma 2 o los que tienen alma 3. De manera que distintos hay 20, y no isomorfos sólo tenemos 3, tantos como almas.

No quisiéramos que el ejemplo anterior pudiera inducir al lector a creer que la sucesión de grados determina el alma de un grafo. Si así fuera tendríamos un discriminador de isomorfía. Pero no, qué pena¹⁸. Las dos almas que siguen,



tienen la misma sucesión de grados, a saber, $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$, pero no son la misma. Para argumentar por qué estos dos grafos (almas) no son isomorfos conviene darles cuerpo nombrando los vértices; usaremos números para el de la izquierda y letras para el de la derecha¹⁹:



Si hubiera un isomorfismo ϕ entre los conjuntos de vértices $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\{a, b, c, d, e, f\}$, los respectivos vértices de grado tres deberían corresponderse, así que necesariamente tendríamos que $\phi(2) = c$. El vértice 3 tiene grado dos y es vecino del vértice 2, así que su imagen $\phi(3)$ ha de tener grado dos y ser vecino de $\phi(2) = c$. Hay dos posibilidades para $\phi(3)$, puede ser b ó d . Supongamos que fuera b (el argumento si fuera d es análogo, como puede comprobar el lector), esto es, que $\phi(3) = b$. Seguimos. Nos fijamos ahora en el vértice 4, que tiene grado dos y es vecino del vértice 3. Así que $\phi(4)$ ha de ser un vértice de grado dos, vecino de $\phi(3) = b$, pero, ¡ b no tiene vecinos de grado dos!. Concluimos que no hay tal isomorfismo ϕ .

Más expeditivamente, para ver que estos grafos no son isomorfos basta con observar que el grafo de la izquierda tiene un par de vértices de grado 2 que son vecinos entre sí (propiedad invariante por isomorfismos), pero el de la derecha no.

Puede sorprender lo sencillo que resulta contar el número de grafos que hay con n vértices y k aristas, en comparación con lo laborioso que resulta clasificarlos (en función de las distintas almas) y luego contar los posibles etiquetados. El recuento del número de grafos *no isomorfos* con n vértices y k aristas es complicado. Remitimos al lector al capítulo 28, en el que, aplicando la combinación de funciones generatrices y teoría de grupos que se conoce como teoría de Pólya (¡alta tecnología!), exhibiremos un método para enumerar grafos no isomorfos.

C. Sobre cuerpos y almas²⁰

El meticuloso lector, quizás abrumado por tanta disquisición de tinte escolástico sobre cuerpos y almas de grafos, echará en falta una definición formal de alma de un grafo.

Parece, y así es en realidad, a qué negarlo, que hemos argumentado con la representación pictórica de un grafo como puntos (vértices) etiquetados en el plano y arcos entre ellos. Que el alma no es sino ese mismo dibujo, en el que eliminamos las etiquetas de los vértices (para

¹⁸Alma en pena: dícese del lector que se ha perdido en la contabilidad anterior. No, usted no, el otro.

¹⁹No atribuya el suspicaz lector, por favor, connotación política o cultural alguna a esta asignación. Nada más lejos de nuestra intención.

²⁰*Corps et âmes*, que diría Van der Meersch.

que queden en simples nodos). Y que dar cuerpo no es sino la operación de nombrar nodos. La definición formal casi puede sonar a una argumentación *ad divinitatem*:

Definición 9.1.7 El **alma de un grafo** es su clase de equivalencia por isomorfía.

Es decir, el alma de un grafo es la colección completa de grafos que son isomorfos a él. El lector interesado debería comprobar que la relación de isomorfía entre grafos define una relación de equivalencia en la colección de todos los grafos²¹.

La críptica y económica frase de que, por ejemplo, los grafos que se exhiben a continuación son todos los grafos con 3 vértices, *salvo isomorfismos*, quiere decir que son un sistema de representantes de las clases de isomorfía de los grafos con 3 vértices. Es decir, que no son isomorfos entre sí, y que cualquier grafo con 3 vértices es isomorfo a uno de ellos. O, finalmente (nótese que, en realidad, se trata de almas de grafos), que cualquier grafo de 3 vértices se obtiene dando cuerpo (asignando nombre a los nodos) a uno (y sólo uno) de ellos.



Por cierto, a las almas de grafos se les suele denominar (en definición negativa) **grafos no etiquetados**, y a la operación de dar cuerpo, **etiquetar**.

Nuestra última precisión en este contexto concierne a las matrices de vecindades. Las almas y los grafos no etiquetados con n vértices (nodos) pueden también entenderse como clases de equivalencia en el conjunto \mathcal{M} de matrices cuadradas $n \times n$ simétricas, con entradas que son ceros y unos, y con ceros en la diagonal. En esta relación de equivalencia (el lector comprobará sin dificultad que es tal), dos matrices de \mathcal{M} se dicen equivalentes si una se obtiene de la otra aplicando una misma permutación a las filas y a las columnas.

9.1.3. Algunas familias de grafos

En muchas de las cuestiones que trataremos en estas páginas aparecerán repetidamente algunos grafos particulares, para los que conviene disponer de nombres y notaciones específicas. Enumeramos a continuación, y describimos someramente, algunos de los más relevantes. Hablaremos aquí de grafos salvo isomorfía, por lo que no haremos explícitas las etiquetas de los vértices. Nos estaremos refiriendo, pues, a almas de grafos²².

Diremos que un grafo es un L_n , un **grafo lineal** con n vértices ($n \geq 2$) si tiene n vértices, de los que dos son de grado 1 y el resto, si los hay, de grado 2. Por lo tanto, es isomorfo a:

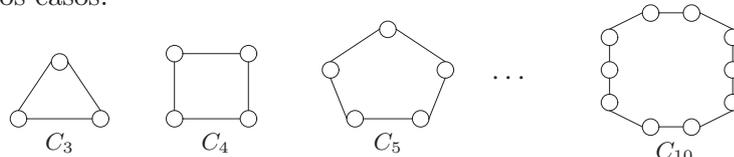


Los **grafos circulares** C_n tienen n vértices, $n \geq 3$, y todos de grado 2. De hecho, es el único grafo conexo con estas propiedades (ejercicio 9.1.21). Los siguientes dibujos representan

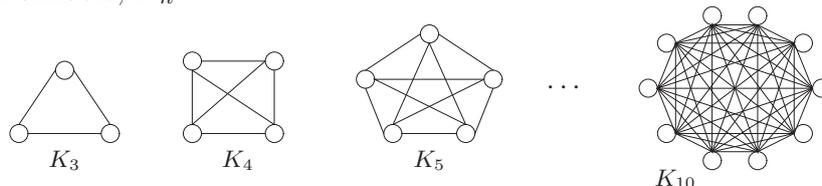
²¹Como ya sabemos que la isomorfía entre grafos requiere tener un mismo número de vértices, el lector que se pudiera sentir (lógicamente) cohibido ante la inmensidad de la colección de *todos* los grafos concebibles quizás prefiera restringirse a los de n vértices, de los que “sólo” hay $2^{\binom{n}{2}}$, y comprobar que en ese conjunto de grafos la isomorfía es relación de equivalencia.

²²Almas gemelas, podríamos decir, que en lugar de vagar eternamente se reúnen, por afinidades, en familias.

los primeros casos:



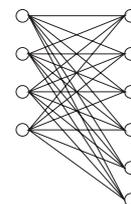
Un grafo con n vértices con *todas* las $\binom{n}{2}$ posibles aristas será un **grafo completo** con n vértices; en símbolo, K_n :



En el otro extremo encontramos los **grafos vacíos** N_n , con n vértices y ninguna arista (son los *grafos complementarios* de los completos, véase el ejercicio 9.1.6).

En diversas ocasiones utilizaremos una clase de grafos conocidos como **grafos bipartitos**, en los que el conjunto de vértices se parte en dos clases, de manera que no hay aristas entre vértices de la misma clase. Dentro de esta familia habitan los **grafos bipartitos completos**, a los que nos referiremos con el símbolo $K_{r,s}$, donde los subíndices indican los tamaños de los dos conjuntos de vértices.

El grafo $K_{r,s}$ tiene, pues $r + s$ vértices, divididos en dos clases, una con r vértices, y la otra con s ; e incluye (todas) las $r \times s$ posibles aristas que van de los vértices de un tipo a los del otro (de ahí el apelativo de “completo”, y la letra K usada en su descripción). En el dibujo de la derecha aparece un $K_{4,6}$. Un grafo bipartito con r vértices de un tipo y s de otro se puede obtener del $K_{r,s}$ sin más que seleccionar un cierto subconjunto de sus aristas.

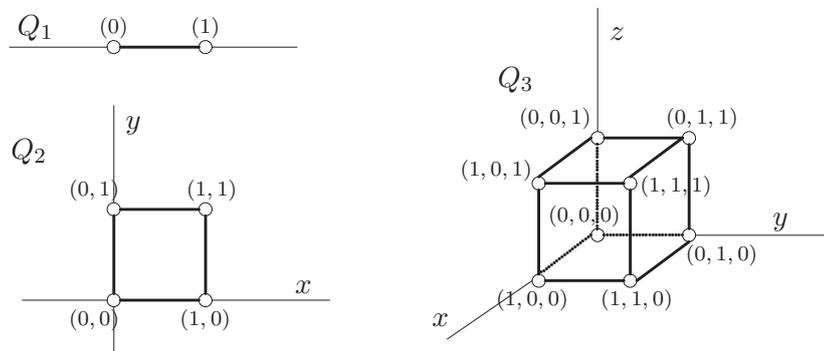


Estos grafos bipartitos aparecerán a menudo, y en particular en la descripción del problema de “asignación de tareas” que presentamos al comienzo de este capítulo, y que analizaremos en detalle en el apartado 11.1. Más adelante, cuando dispongamos de más lenguaje, veremos un par de caracterizaciones alternativas de los grafos bipartitos: en términos de la ausencia de “ciclos” de orden impar (lema 9.1.12), de autovalores de su matriz de vecindades (lema 9.1.19), y de coloreado (ejercicio 10.2.2). Con estas herramientas será directo comprobar, por ejemplo, que los grafos L_n , o los grafos circulares C_n con n par (pero no si n es impar), son grafos bipartitos; aunque quizás el lector quiera hacerlo apelando a la definición, separando los vértices en dos clases y comprobando que...

La definición de la siguiente familia de grafos es abstracta: en el grafo del **cubo**, Q_n , $n \geq 1$, sus vértices van etiquetados con las listas de longitud n que podemos formar con ceros y unos. En total, pues, tiene 2^n vértices. Dos vértices de Q_n serán vecinos si las listas de ceros y unos que los identifican difieren en una *única* posición.

Mostramos a continuación los dibujos de Q_1 , Q_2 y Q_3 en los retículos de una, dos y tres dimensiones, que nos ayudan a entender su estructura (y justifican su nombre). Obsérvese que Q_1 es isomorfo a L_2 , y Q_2 , a C_4 . Quizás el lector quiera intentar²³ dibujar el grafo Q_4 .

²³Allá él.

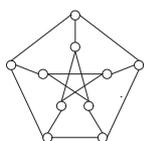
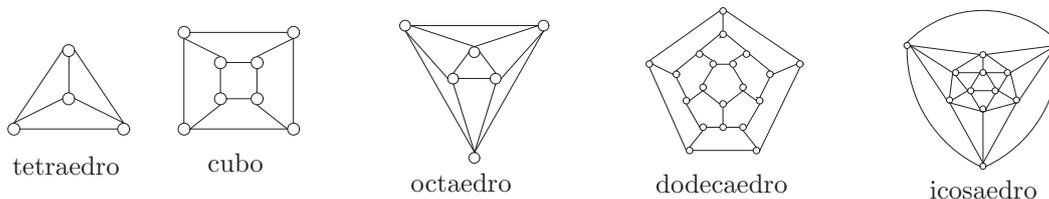


Como hay n distintas maneras de variar una posición en una n -lista, todos los vértices de Q_n tienen grado n (por lo que Q_n es un grafo n -regular). De lo que deducimos que el número de aristas de un Q_n es

$$2|A(Q_n)| = \sum_{v \in V(Q_n)} \text{grado}(v) = \sum_{j=1}^{2^n} n = n 2^n \implies |A(Q_n)| = n 2^{n-1}.$$

Los grafos Q_n son también bipartitos. Veamos: la mitad de los vértices de Q_n están etiquetados con n -listas con número par de ceros, y la otra mitad, con un número impar. Pero dos listas que tienen un número par de ceros no pueden ser vecinas en este grafo, y lo mismo ocurre para las impares. Quizás el lector se anime a dibujar Q_3 de manera que se haga evidente ese carácter bipartito, situando a la izquierda los cuatro vértices etiquetados con listas con un número par (o cero) de ceros, y a la derecha los otros cuatro, para luego trazar las aristas correspondientes.

El grafo del cubo (tridimensional) Q_3 , por cierto, es uno de los cinco grafos conocidos como **grafos platónicos**, que están asociados a los conocidos y casi mágicos sólidos platónicos, y que aparecerán, con luz y brillo propios, en la discusión sobre planaridad de la sección 10.4. Debajo de estas líneas puede contemplar el lector su elegante aspecto.

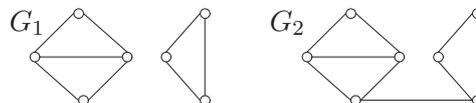


Hay, por supuesto, otros muchos grafos interesantes que no pertenecen a ninguna de las familias anteriores: algunos son parte de familias más exóticas, otros son casi huérfanos. . . En el dibujo de la izquierda se representa el **grafo de Petersen**²⁴, que consta de 10 vértices, todos ellos de grado 3.

²⁴Bautizado así en honor de su “diseñador”, el matemático danés Julius Peter Christian Petersen (1839–1910). Las portadas de dos afamadas revistas de investigación en cuestiones relacionadas con la teoría de grafos, como son *Journal of Graph Theory* y *Discrete Mathematics*, ilustran sus portadas con él.

9.1.4. De paseo por un grafo. Conexión

Si el lector observa con detenimiento los dos grafos que dibujamos a la derecha, se percatará de que en el grafo G_2 las aristas del grafo permiten “llegar” de un vértice a cualquier otro, algo que no ocurre en G_1 . Así que G_1 es “conexo”, mientras que G_2 no lo es. Para introducir formalmente esta noción, necesitamos algo de lenguaje previo.



A. Paseos

La siguiente noción define formalmente la acción de “moverse” por un grafo: ir pasando de vértice a vértice siguiendo *siempre* las aristas del grafo.

Definición 9.1.8 Un **paseo** en un grafo $G = (V, A)$ es una sucesión finita de vértices

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_l \quad (\text{pueden repetirse vértices})$$

de forma que $\{x_i, x_{i+1}\}$ es una arista de G , para cada $i = 0, 1, \dots, l - 1$.

Sítiese el lector en un vértice del grafo: ya tiene x_0 . Decida entonces, a la vista de las aristas que inciden en x_0 , a qué vértice puede trasladarse, escoja uno de ellos y ya tendrá x_1 (podría ser el mismo vértice, si es que hubiera un lazo y lo eligiéramos). Ahora observe detenidamente las aristas que parten de x_1 y vuelva a elegir. Cuando haya terminado este entretenido recorrido, le rogamos que anote los vértices que haya ido visitando (en riguroso orden). Ya tendrá un paseo.

Diremos que el primer vértice de un paseo es el vértice **inicial**, que el último es el vértice **final**, y que el paseo **conecta** estos dos vértices. Si ambos extremos coinciden, esto es, si el paseo comienza y termina en el mismo vértice, hablaremos de un paseo **cerrado**.

Hay quien escribe los paseos añadiendo las aristas que se usan, en la forma

$$x_0, (a_1), x_1, (a_2), x_2, (a_3), \dots, x_{l-1}, (a_l), x_l$$

donde cada arista a_j une los vértices x_{j-1} y x_j ; aunque esta lista tiene la misma información que la anterior²⁵. La **longitud** del paseo es el *número de aristas* que se recorren (l , en el ejemplo anterior). Note el lector que no nos referimos al número de aristas distintas utilizadas, pues éstas se pueden repetir, sino al número de “pasos” por arista que efectuamos durante el paseo. Por conveniencia, incluiremos la posibilidad de tener paseos de longitud 0, “paseos vacíos” en los que no se sale del vértice inicial.

B. Paseos eficientes

Muchos de los algoritmos y procedimientos que veremos en las páginas siguientes buscan maneras de recorrer las aristas o los vértices de un grafo de manera “económica”. Si los

²⁵No así en el caso de un multigrafo, pues entre dos vértices puede haber más de una arista, y quizás sea necesario registrar cuál se usa realmente.

vértices del grafo representan ciudades y las aristas carreteras entre ellas, puede interesar conectarlos con paseos que no repitan aristas; o más aún, con paseos en los que no se repitan vértices (lo que, en particular, impide que se repitan aristas). Aunque a veces, al tiempo que pretendemos ser económicos, también seremos ambiciosos, y nos interesará recorrer todas las aristas, o quizás visitar todos los vértices.

Estos diversos objetivos dan lugar, en la literatura de grafos, a un amplio repertorio de términos para describir distintos tipos de paseos adaptados a cada situación particular: los que no repiten aristas, los que no repiten vértices, los que visitan todos los vértices, etc.

Desafortunadamente, no hay nomenclaturas bien establecidas, y el lector podrá encontrar en otros textos nombres como caminos, caminos simples, circuitos, ciclos, sendas, etc., y no en todos ellos con el mismo significado²⁶. Así que, en alarde de continencia, no nos dejaremos llevar por la tentación taxonómica, y en lugar de bautizar cada tipo de paseo con un nombre especial, algo que despista, se olvida y obliga a repasar las definiciones en cada ocasión, optaremos²⁷ por utilizar circunloquios como “paseos que no repiten vértices”, “paseos que no repiten aristas”, “paseos que visitan todos los vértices sin repetir aristas”, etc. Confiamos en que el lector sepa disculpar estos excesos perifrásticos.

La siguiente observación, que habla de cómo extraer paseos “económicos” a partir de un paseo dado, será usada repetidamente en lo que sigue:

Lema 9.1.9 *Supongamos que en un grafo G con n vértices existe un paseo que conecta dos vértices u y v distintos. Entonces*

- a) *existe un paseo entre u y v que no repite vértices;*
- b) *existe un paseo entre u y v de longitud a lo sumo $n - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el paseo que conecta u con v tiene longitud l y es de la forma $(x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l)$, donde $x_0 = u$ y $x_l = v$. Si en esa lista no hay vértices repetidos, no hay nada que probar. En caso contrario, existirán x_i y x_j , con $0 \leq i < j \leq l$, tales que $x_i = x_j$. De la lista original podremos “cortar” el tramo entre x_{i+1} y x_j de manera que el paseo resultante siga conectando u con v . Si en este nuevo paseo no se repiten vértices, habremos terminado, y en caso contrario repetimos la cirugía. En cada ocasión, la lista pierde al menos un vértice (y la longitud del paseo se reduce en al menos en dos unidades), de manera que, tras un número finito de iteraciones tendremos un paseo entre u y v que no repite vértices.

La segunda parte se sigue de la primera, pues el peor caso sería que el paseo incluyera, sin repetirlos, los n vértices del grafo. ■

De entre los múltiples tipos de paseos que podemos considerar, los siguientes reciben un nombre que, éste sí, es de uso frecuente y bien establecido:

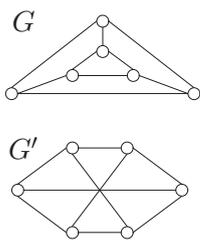
Definición 9.1.10 Un **ciclo** en un grafo G es un paseo x_0, x_1, \dots, x_l , con $l \geq 3$, donde $x_0 = x_l$ (esto es, el paseo es cerrado) y tal que los vértices son todos distintos (excepto el primero y el último, claro). La **longitud** del ciclo x_0, x_1, \dots, x_l (con $x_0 = x_l$) es justamente l .

²⁶Tampoco la literatura anglosajona es unánime, y se pueden encontrar términos como *walk*, *path*, *trail*, *circuit*, *cycle*, etc., (o *chemin*, *boucle*, *cheminement*, etc., en la literatura francesa) con diversos significados.

²⁷Con dos salvedades: en la sección 10.1 elevaremos la categoría de ciertos paseos honrándolos con los ilustres nombres de Euler y Hamilton (lo que no es mala distinción).

Recalcamos que un ciclo contiene al menos tres vértices. Además, si tenemos un paseo cerrado con al menos tres vértices, siempre podemos extraer de él un ciclo, sin más que seguir la misma estrategia usada en el lema 9.1.9. Por cierto, decir que un grafo G contiene un ciclo de longitud l es lo mismo que afirmar que contiene un grafo tipo C_l como subgrafo.

Definición 9.1.11 Llamaremos **cuello** de un grafo G , en símbolo $\text{cuello}(G)$, al mínimo de las longitudes de los ciclos de G . En el caso en el que G no contenga ciclos, convenimos que $\text{cuello}(G) = +\infty$.



Un ciclo es una estructura invariante por isomorfismos. Y el cuello de un grafo también lo es. Esta observación permite, en ocasiones, decidir que dos grafos no son isomorfos. Véanse, por ejemplo, los que dibujamos a la izquierda, que tienen iguales número de vértices y de aristas, y todos los vértices son de grado 3. Parece difícil determinar si son o no isomorfos sin recurrir a la comprobación de las $6! = 720$ posibles biyecciones. Pero como $\text{cuello}(G) = 3$ y $\text{cuello}(G') = 4$, no pueden ser isomorfos.

Los ciclos que pueda (o no) contener un grafo dan mucha información sobre su estructura. Por ejemplo, dedicaremos la sección 9.2 al estudio de los “árboles”, los grafos conexos que no contienen ciclos. También los grafos bipartitos se pueden caracterizar en términos de ciclos.

Lema 9.1.12 *Un grafo G es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

DEMOSTRACIÓN. a) Sea $V(G) = A \cup B$ el conjunto de vértices del grafo bipartito G . Si no tiene ciclos, no hay nada que probar. Supongamos que contiene un ciclo $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$ de longitud k . Podemos suponer que $v_0 \in A$. Entonces $v_1 \in B$, luego $v_2 \in A$, etc. Si k fuera impar, entonces v_{k-1} estaría en A . Pero la arista (v_0, v_{k-1}) no puede pertenecer al grafo.

b) Supongamos, en el otro sentido, que G es un grafo sin ciclos impares. Podemos suponer que G es conexo, pues de lo contrario argumentaríamos sobre cada una de sus componentes. Fijamos un vértice v_0 y dividimos los vértices de G en dos clases: en A ubicamos aquellos vértices v de $V(G)$ tales que el paseo *más corto* desde v_0 hasta v tiene longitud par, mientras que en B irían aquellos con paseos más cortos desde v_0 de longitud impar. Claramente A y B forman una partición de $V(G)$, y además $v_0 \in A$. Queda comprobar que no hay aristas entre los vértices de A (ni entre los de B). Supongamos que hubiera una arista entre dos vértices v_1 y v_2 de A . Obsérvese que ni v_1 ni v_2 pueden ser v_0 . Entonces, el paseo de v_0 a v_1 , esa arista entre v_1 y v_2 , y luego el paseo de v_2 hasta v_0 , conformarían un ciclo de orden longitud impar en el grafo. El argumento para los vértices de B es análogo. ■

C. Conexión y componentes conexas

Definición 9.1.13 Un grafo $G = (V, A)$ se dice **conexo** si, dados cualesquiera dos vértices $v, w \in V$, existe un paseo que los conecta.

Por convenio²⁸, diremos que un grafo con un único vértice es también conexo (estará conectado consigo mismo por un “paseo vacío”, de longitud 0).

²⁸Más bien por comodidad, para que todo cuadre; poderoso estímulo a la hora de diseñar definiciones.

¿Cómo se comprueba que un grafo es conexo? Lector, no nos referimos a los pequeños ejemplos dibujados en este libro, en los que la conexión se verifica por simple inspección visual. Si por ejemplo el grafo constara de 1000 vértices, siguiendo fielmente la definición anterior, y su (altamente inquietante) exigencia “dados cualesquiera dos vértices. . .”, tendríamos que comprobar la existencia (o no) de paseos para las $\binom{1000}{2}$ parejas posibles. Pero como veremos más adelante, hay métodos bastante más eficaces para dirimir la cuestión; vea el lector interesado el apartado C de esta misma sección, o los algoritmos de la sección 9.2.2.

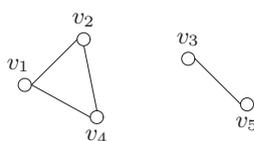
Si el grafo *no* es conexo, es decir, si contiene vértices que no pueden ser conectados por paseos, es natural esperar que el grafo esté formado por diversos “bloques” de vértices, cada uno de los cuales será un grafo conexo. Para formalizar esta intuición introducimos ahora cierto lenguaje, confiando en que el lector no se desconecte por el camino.

En el conjunto de los vértices de G definimos la siguiente relación \mathcal{R} : $u\mathcal{R}v$ si y sólo si u es “conectable” en G con v (esto es, existe un paseo en G que conecta u con v). Vamos a comprobar que esta relación es de equivalencia.

La reflexividad es evidente, gracias al ardid de admitir paseos de longitud 0. Para la simetría, observemos que si dos vértices (distintos) u y v cumplen que $u\mathcal{R}v$, será porque existe un paseo conectando u con v . Ese mismo paseo, “leído” al revés, conecta v con u , así que $v\mathcal{R}u$. Finalmente, para la transitividad, digamos que tres vértices u, v, w , con $u \neq v$ y $v \neq w$, cumplen que $u\mathcal{R}v$ y $v\mathcal{R}w$. Como $u\mathcal{R}v$, hay un paseo que conecta u con v . Y como $v\mathcal{R}w$, habrá otro conectando v con w . “Uniendo” ambos, es decir, siguiendo el paseo de u a v y luego el de v a w , hallamos un paseo que conecta u con w . Así que $u\mathcal{R}w$.

Esta relación de equivalencia parte el conjunto de vértices de G en unas clases de equivalencia. Las **componentes conexas**, o simplemente componentes, de G son²⁹ los subgrafos inducidos por cada uno de estos conjuntos de vértices (los subgrafos formado por esos vértices y todas las aristas que los unieran en G).

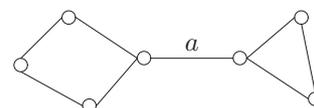
Las componentes conexas (que podrían constar de un único vértice, si es que éste era aislado) son grafos conexos. Un grafo G es la unión de sus componentes conexas. El lector podrá comprobar que la matriz de



	v_1	v_2	v_4	v_3	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0	0
v_4	1	1	0	0	0
v_3	0	0	0	0	1
v_5	0	0	0	1	0

vecindades de un grafo con varias componentes conexas se puede escribir, quizás permutando adecuada y simultáneamente las filas y las columnas, como una matriz por *cajas* (en el sentido habitual del álgebra lineal). Véanse, en el ejemplo de grafo con dos componentes conexas que mostramos a la derecha, las correspondientes cajas con ceros.

En ocasiones, como en la figura, un grafo conexo deja de serlo al quitarle una arista particular (la arista a , en la figura). Una arista a de un grafo G es un **punte** si el grafo $G \setminus \{a\}$ que se obtiene de G al quitar la arista a (y dejar los mismos vértices)



tiene más componentes conexas que G . El lector puede comprobar que, en realidad, tendrá exactamente una componente conexa más que G . Así que si G es conexo y a es una arista puente, $G \setminus \{a\}$ consta de exactamente *dos* componentes conexas (véase el ejercicio 9.1.23).

²⁹Definición alternativa y visual: imagine a cada vértice como un botón sobre la mesa, y a cada arista como un hilo que une dos botones. Tome uno de ellos y levántelo: lo que cuelgue de él será una componente conexa.

Parece razonable suponer que un grafo conexo, es decir, en el que todos los vértices son conectables, deba contener un número “suficiente grande” de aristas. Pinte el lector n vértices e intente luego ubicar aristas, lo más económicamente posible, de manera que el grafo resultante sea conexo. ¿Cuántas ha usado? Al menos $n - 1$, seguro. El siguiente resultado certifica esta intuición (véase también la generalización del ejercicio 9.1.22):

Proposición 9.1.14 *Si G es un grafo conexo, entonces $|A(G)| \geq |V(G)| - 1$.*

DEMOSTRACIÓN (por inducción en $|A|$, el número de aristas). Si $|A| = 0$, esto es, si no tenemos aristas, para que el grafo sea conexo, sólo puede haber un vértice. Si $|A| = 1$ y el grafo ha de ser conexo, sólo cabe la posibilidad de que sea el grafo L_2 , que tiene dos vértices.

Supongamos cierto que si tenemos un grafo conexo con k aristas, para cualquier $k \leq m$, entonces $|V| \leq k + 1$. Y consideremos un grafo conexo G con $|A(G)| = m + 1$ y una arista a de G cualquiera. Llamemos $H = G \setminus \{a\}$ al grafo que se obtiene de G quitando la arista a . El grafo H tiene los mismos vértices y una arista menos que G . Caben dos posibilidades:

1) Si H sigue siendo conexo (es decir, si a no era arista puente en G), por hipótesis de inducción (tiene m aristas), como $|A(H)| = |A(G)| - 1$ y $V(G) = V(H)$, tendremos que

$$|A(H)| \geq |V(H)| - 1 \implies |A(G)| \geq |V(G)|.$$

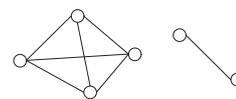
2) Pero si a era puente en G , H ya no es conexo, sino que tiene dos componentes conexas; llamémoslas H_1 y H_2 . Ambas son grafos conexos y tienen menos aristas que G (podría incluso ocurrir que estos subgrafos constaran de un único vértice). Teniendo en cuenta que

$$|A(H_1)| + |A(H_2)| = |A(H)| = |A(G)| - 1 \quad \text{y} \quad |V(H_1)| + |V(H_2)| = |V(H)|,$$

y con la hipótesis de inducción, terminamos la demostración:

$$\left. \begin{array}{l} |A(H_1)| \geq |V(H_1)| - 1 \\ |A(H_2)| \geq |V(H_2)| - 1 \end{array} \right\} \implies |A(G)| - 1 \geq |V(G)| - 2 \implies |A(G)| \geq |V(G)| - 1. \quad \blacksquare$$

Note el lector que la mera condición $|A| \geq |V| - 1$ no garantiza que el grafo sea conexo. Véase a la derecha el dibujo de un grafo con 7 aristas y 6 vértices que claramente no es conexo. Los grafos conexos en los que se alcanza la igualdad $|A| = |V| - 1$ son conocidos como *árboles*; a ellos dedicaremos atención especial en la sección 9.2.



D. Número de paseos, matriz de vecindades y conexión

Llamemos m_{ij} a las entradas de la matriz M de vecindades de un grafo G con vértices (ya ordenados) (v_1, \dots, v_n) . Los números m_{ii} son 0 para cada $i = 1, \dots, n$. Y si $i \neq j$, m_{ij} será 1 si v_i es vecino de v_j y 0 en caso contrario. Obsérvese que, por tanto, cada m_{ij} cuenta el número de paseos de longitud 1 que hay entre el vértice v_i y el vértice v_j . Pero, ¿cómo contar el número de paseos de longitud mayor entre cada par (v_i, v_j) ? El siguiente resultado proporciona un método de cálculo a través de las sucesivas *potencias* de M .

Teorema 9.1.15 Si M es la matriz de vecindades de un grafo G , la entrada (i, j) de la matriz $M^a = M \times \overset{a \text{ veces}}{\dots} \times M$, que denotamos como $m_{ij}^{(a)}$, cuenta el número de paseos de longitud a entre los vértices v_i y v_j .

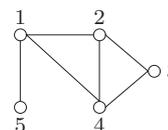
DEMOSTRACIÓN (por inducción en l). El caso $a = 1$ ha sido mencionado hace un momento. Consideremos todos los paseos de longitud a entre v_i y v_j cuyo penúltimo vértice visitado es v_k . Por hipótesis de inducción, $m_{ik}^{(a-1)}$ cuenta el número de paseos de longitud $a - 1$ entre v_i y v_k . Por otro lado, $m_{kj} = 0$ si es que v_k no es vecino de v_j y es un 1 en caso contrario. Así que, aplicando la regla del producto, hay $m_{ik}^{(a-1)} m_{kj}$ paseos de longitud a entre v_i y v_j cuyo penúltimo vértice visitado es v_k . Por la regla de la suma, el número total de caminos de longitud a entre v_i y v_j es

$$\sum_{k=1}^n m_{ik}^{(a-1)} m_{kj}.$$

Para completar la demostración, sólo queda observar que, como $M^a = M^{a-1}M$, las reglas de multiplicación de matrices nos dicen que $m_{ij}^{(a)}$ coincide con la suma anterior. ■

Obsérvese, como caso particular, que $m_{ii}^{(2)} = \text{grado}(v_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, pues cada paseo de longitud 2 de un vértice a sí mismo se corresponde con una arista que incide en ese vértice. Esto es, la diagonal de la matriz M^2 contiene la sucesión de grados del grafo.

EJEMPLO 9.1.2 Consideremos el grafo G de la figura de la derecha, que consta de cinco vértices y seis aristas, y sobre el que queremos calcular, por ejemplo, el número de paseos de longitud tres que hay entre los vértices 1 y 2.



La matriz de vecindades del grafo G , que denotamos por M , aparece debajo de estas líneas, junto con sus primeras potencias:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la matriz M^3 deducimos que hay seis paseos distintos de longitud tres entre los vértices 1 y 2. Verifique el lector, sobre el dibujo del grafo, que son los siguientes: $(1, 5, 1, 2)$, $(1, 4, 1, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 2, 3, 2)$, $(1, 2, 4, 2)$ y $(1, 4, 3, 2)$. ♣

El teorema 9.1.15 proporciona, adicionalmente, una manera de comprobar si un grafo G con n vértices y matriz de vecindades M es o no conexo. Ya sabemos (lema 9.1.9) que si dos vértices se pueden conectar en un grafo con n vértices, es seguro que lo podrán hacer utilizando un paseo cuya longitud sea a lo sumo $n - 1$. Como la entrada (i, j) de la matriz

$$\widetilde{M} = I_n + M + M^2 + \dots + M^{n-1}$$

(donde I_n es la matriz identidad $n \times n$) cuenta el número de paseos de longitud a lo sumo $n - 1$ que existen entre los vértices v_i y v_j , tenemos que:

Teorema 9.1.16 *Si todas las entradas de la matriz*

$$\widetilde{M} = I_n + M + M^2 + \cdots + M^{n-1}$$

son positivas, entonces G es conexo. Y viceversa, G no será conexo si \widetilde{M} contiene algún 0.

Para el grafo del ejemplo 9.1.2, que consta de 5 vértices,

$$I_5 + M + M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{pero} \quad I_5 + M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 7 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & 5 & 7 & 2 \\ 8 & 8 & 7 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

lo que nos dice que el grafo es conexo, pero además que todos sus vértices se pueden conectar con paseos de longitud a lo sumo tres, en lugar del cuatro que daría en este caso la cota general del lema 9.1.9. Compruébelo, lector, sobre el propio dibujo.

Si el grafo no es conexo, la matriz \widetilde{M} del teorema 9.1.16 permite establecer las distintas componentes conexas. Para comprobarlo, viene al caso la siguiente caracterización (en negativo) de conectividad en un grafo.

Proposición 9.1.17 *Un grafo G con matriz M no es conexo si y sólo si existe una matriz de permutaciones P tal que*

$$PMP^T = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & M_2 \end{array} \right),$$

donde M_1 y M_2 son matrices cuadradas no nulas.

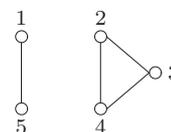
Recuerde el lector, de la discusión del apartado 9.1.2, que una matriz de permutaciones solo tiene un 1 por fila y por columna, y que el resto de sus entradas son ceros. El producto de arriba (por P por la izquierda y por P^T por la derecha) significa una reordenación común de filas y columnas de la matriz M . De manera que la matriz de vecindades de un grafo desconexo tiene (tras quizás una oportuna reordenación de los vértices) una estructura en cajas, que se corresponden con los vértices de cada componente, y esa estructura se conserva con las sucesivas potencias que sugiere calcular el teorema 9.1.16. Y al revés, si el grafo es conexo, no hay tal estructura en cajas, y (la suma de) las sucesivas potencias de la matriz termina por hacer desaparecer los posibles ceros de la matriz de partida.

La proposición 9.1.17 tiene un limitado interés práctico para determinar la conectividad de un grafo, pues requiere encontrar una matriz de permutaciones para la que la matriz resultante tenga una estructura en cajas, o en sentido contrario, descartar su existencia. El método del teorema 9.1.16, que requiere calcular potencias, sumarlas, e inspeccionar los elementos de la matriz resultante, es también un costoso desde el punto de vista computacional, sobre todo para matrices grandes (recuerde el lector los análisis del apartado 6.2.2). En la sección 9.2.2 veremos métodos más eficaces para decidir si un grafo es o no conexo.

Volviendo al caso de un grafo no conexo, veamos cómo la matriz \widetilde{M} del teorema 9.1.16 permite determinar componentes conexas. Tomemos, por ejemplo, la primera fila de la matriz, etiquetada con el vértice v_1 : las posiciones que no contengan ceros determinan los vértices

de la componente conexa a la que pertenece v_1 . El procedimiento se repetiría para la fila correspondiente al primer vértice no incluido en la componente anterior. Y así sucesivamente, hasta determinar todas las componentes conexas del grafo.

Consideremos, por ejemplo, el grafo de cinco vértices dibujado a la derecha, que consta de dos componentes conexas, una formada por los vértices 1 y 5, y la otra por los vértices 2, 3 y 4. Las matrices correspondientes serían



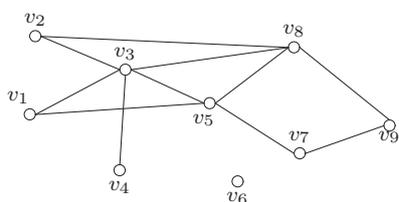
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = I_5 + M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 11 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 11 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

y esta última matriz informa sobre la composición de las dos componentes conexas del grafo: los vértices 1 y 5 por un lado, los restantes por otro. Por cierto, si hubiéramos partido de la matriz de vecindades con los vertices ordenados $(1, 5, 2, 3, 4)$, entonces ocurriría que

$$M' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \widetilde{M}' = I_5 + M' + M'^2 + M'^3 + M'^4 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 11 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 11 \end{array} \right).$$

En este caso, la estructura en cajas es ya evidente desde la matriz M' .

E. Distancias en un grafo



Consideremos el grafo que dibujamos a la izquierda, que representa las posibles rutas existentes entre las ciudades v_1, \dots, v_9 . Un conductor tiene que elegir una ruta que conecte las ciudades v_1 y v_9 . Hay muchos paseos que conectan los dos vértices. Nuestro conductor, que no siente especiales inclinaciones peripatéticas, desea hallar la ruta

más corta, en términos del número de aristas recorridas.

Por simple inspección del grafo, concluimos que el paseo más corto emplea exactamente *tres* aristas. No hay un único “paseo más corto”: por ejemplo, los paseos (v_1, v_3, v_8, v_9) y (v_1, v_5, v_7, v_9) recorren, ambos, tres aristas. Pero aunque disponga de varias posibilidades, y sea cual sea el paseo corto elegido, nuestro conductor concluirá sin duda que la “distancia” entre los vértices v_1 y v_9 es 3. Formalizamos ahora esta noción de distancia en un grafo.

Definición 9.1.18 En un grafo G conexo³⁰, la **distancia** entre dos vértices cualesquiera $u, v \in V(G)$ es

$$d_G(u, v) = \inf_{\gamma} \{ \text{longitud}(\gamma) \},$$

donde el ínfimo se calcula sobre todos los paseos γ que conectan los vértices u y v en G .

³⁰Esta definición se restringe a grafos conexos. Si no fuera conexo, podemos definir como $+\infty$ la distancia entre dos vértices no conectables en un grafo (es decir, que estén en distintas componentes conexas).

Como ejemplos de aplicación inmediata de esta definición, dos vértices u y v de un grafo G son vecinos si (y sólo si) $d_G(u, v) = 1$; y $d_G(v, v) = 0$, para cada vértice $v \in V(G)$.

Lector: la definición anterior incluye un ínfimo. Es natural, pues el conjunto de paseos que unen dos vértices u y v es infinito, dado que estos paseos pueden tener una longitud arbitraria. Quizás usted prefiera, por comodidad de espíritu y a la vista del lema 9.1.9, pergeñar una definición alternativa, en la que sólo se consideren paseos que no repitan vértices (que es un conjunto finito), para así poder sustituir el ínfimo por un más manejable mínimo.

Puede que también quiera aprovechar la ocasión para revisar la discusión de las inmediaciones del teorema 9.1.16, y concluir que la distancia entre u y v se puede calcular como el primer valor de j para el que la entrada de la fila correspondiente a u y la columna correspondiente a v en la matriz $I_n + M + \cdots + M^j$ se hace no nula.

Consideremos un grafo conexo $G = (V, A)$ cualquiera. Tomemos cada par de vértices suyos y calculemos, con el procedimiento que el lector prefiera, la distancia entre ellos. Cuando lo hayamos hecho para todos los pares de vértices, tendremos definida una función de $V \times V$ (los pares de vértices) en el conjunto de los enteros no negativos.

Esta función cumple unas determinadas propiedades (por ejemplo, la desigualdad triangular) que hacen que podamos referirnos a ella como una *distancia*, en el sentido matemático del término. Dejamos al lector que se ejercite con la comprobación (véase el ejercicio 9.1.27).

Una vez que lo haya hecho, ¡vivan los conceptos matemáticos abstractos!, estará autorizado a establecer analogías mentales entre distancias en grafos y, por ejemplo, distancias euclídeas en el plano, sobre las que tendrá intuiciones más arraigadas; a trasladar a este contexto nociones como la de **geodésicas** entre u a v (paseos entre u y v de longitud³¹ exactamente $d_G(u, v)$); o a construir la geometría de bolas³², por analogía con las bolas euclídeas.

La noción de “paseo más corto” que aquí hemos considerado se refiere a un grafo (conexo) sin pesos. En muchas ocasiones conviene asociar a cada arista un *peso* que refleje, por ejemplo, la distancia en kilómetros que separa sus dos extremos. El objetivo del conductor sería establecer una ruta cuya longitud total (en kilómetros) fuera lo más corta posible. Ahora podría ocurrir que el paseo “más corto”, en este nuevo sentido, no fuera necesariamente el que menos aristas empleara. Véase la sección 11.2.2.

9.1.5. El álgebra (lineal) de los grafos

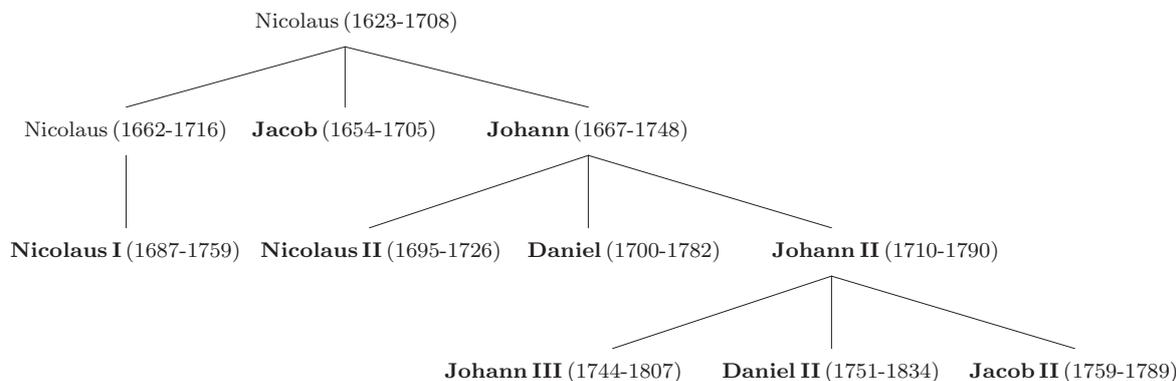
Iniciamos ahora una breve excursión por la disciplina que se ocupa de establecer conexiones entre ciertas propiedades de un grafo G y algunas características de las diversas matrices que asociamos con G , lo que en los mentideros se conoce como *teoría espectral de grafos*. Es ésta una teoría extraordinariamente rica, que no desarrollaremos aquí en extenso: para empezar, restringiremos nuestro análisis al caso de grafos simples y sin lazos, aunque se puede extender a contextos más generales, como grafos dirigidos y/o grafos con pesos; y para este caso de los grafos habituales, mostraremos sólo algunos de nuestros resultados favoritos, para que el lector pueda hacerse una idea cabal de su elegancia y utilidad.

³¹En principio, puede haber varias geodésicas entre un par de vértices, y sólo en ciertas circunstancias la geodésica será única (véase, por ejemplo, el ejercicio 9.1.29).

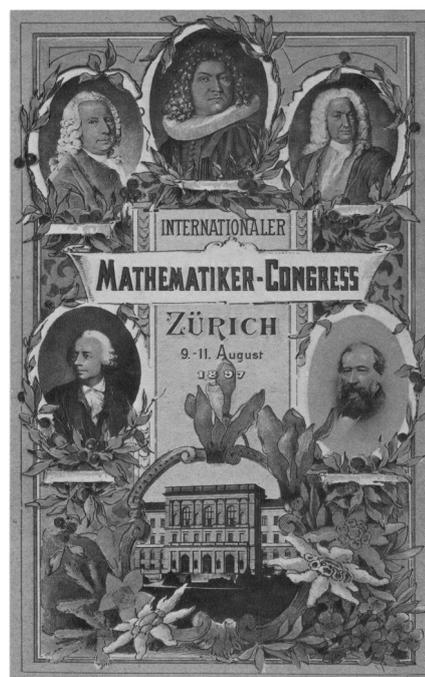
³²Una bola de radio r contendría los vértices a distancia $\leq r$.

9.2. Árboles

La de los Bernoulli de Basilea es, quizás, la familia más famosa de la historia de las Matemáticas.



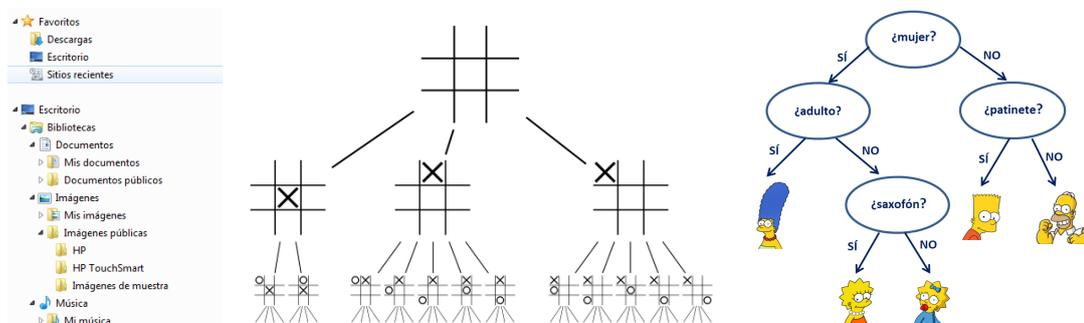
Famosa por la cantidad de excelentes matemáticos que entre ellos se contaban (hasta nueve, en negrita en el esquema anterior, en tres generaciones distintas) y, también, por qué no decirlo, por sus peculiares personalidades. Vea el lector interesado en alguna de sus gresecas familiares las reseñas biográficas de los patriarcas del clan, Jacob y Johann, en la sección 12.2.4, y la de Daniel, el heredero de la saga, en el apartado 15.4.4. A la derecha los vemos a los tres, coronando el espléndido cartel anunciador del Primer Congreso Internacional de Matemáticos³⁷, celebrado en Zurich, en 1897. En la parte de abajo del cartel, completando el Olimpo de matemáticos suizos³⁸ encontramos a Euler y a Steiner (de quien hablaremos en el capítulo 29). Pero no son estas consideraciones histórico-geográficas las que aquí nos interesan, sino, precisamente, la manera en que hemos exhibido arriba la información sobre la familia Bernoulli, su *árbol genealógico*. Se trata de un grafo cuyos vértices, que van etiquetados con los nombres de los Bernoulli, se disponen en una estructura jerárquica que, en este caso, refleja las sucesivas generaciones de la familia.



³⁷Los matemáticos se reúnen cada cuatro años en un congreso en el que se exponen los últimos avances de las diversas disciplinas que integran el edificio de las Matemáticas. En cada congreso se anuncian los ganadores de las medallas Fields, el equivalente de los Nobel para las Matemáticas (con permiso de los más recientes Premios Abel). El Congreso Internacional de Matemáticos del 2006 se celebró en Madrid.

³⁸Por cierto, los Bernoulli, Euler. . . , ¿quién dijo lo de que los suizos sólo habían inventado el reloj de cuco? Se cuenta que, tras el estreno de *El tercer hombre*, los suizos, eso sí, muy educadamente, le hicieron notar a Orson Welles que el reloj de cuco era un invento alemán.

Este tipo particular de grafos aparece muy a menudo, y resulta extremadamente útil para representar un buen número de cuestiones: algoritmos, estructura en carpetas y subcarpetas de archivos en el ordenador, representación de juegos, etc.



Quizás recuerde también el lector la descripción de la regla del producto, allá por la sección 2.2, con estas estructuras arbóreas. Merece la pena dedicarles una sección propia; más adelante (secciones 10.3 y 11.2) nos ocuparemos de algunas de sus aplicaciones.

A. Definición de árbol y caracterizaciones

La primera definición de la noción de árbol (de las varias que daremos) viene sugerida por el “aspecto” del grafo genealógico de la página anterior:

Definición 9.2.1 Un **árbol** es un grafo **conexo** y **sin ciclos**.

En el mismo tono botánico, se define un **bosque** como un grafo sin ciclos. Si un bosque es conexo, es un árbol, y si no lo es, sus componentes conexas son árboles.

Por ejemplo, los grafos lineales L_n son árboles, mientras que los circulares C_n o los completos K_n no lo son en cuanto $n \geq 3$. Los bipartitos completos $K_{r,s}$, que son siempre conexos, sólo son árboles si $s = 1$ ó $r = 1$, puesto que si $r \geq 2$ y $s \geq 2$, hay al menos un ciclo de orden cuatro, como comprobará inmediatamente el lector.

Obsérvese que ser conexo exige tener “bastantes” aristas, para así poder conectar todos los vértices, mientras que no tener ciclos supone, en principio, que haya “pocas” aristas, para que no se formen ciclos. Los árboles están justo en el punto de equilibrio.

El siguiente resultado formaliza esta idea. Tiene dos apartados. El primero de ellos nos dice que los árboles son los conexos “más económicos”, en el sentido de que tienen el número mínimo de aristas que permiten la conexión; en otros términos, un árbol es un grafo minimalmente conectado. El segundo apartado nos dice que los árboles son los más “eficientes” en cuanto a no tener ciclos; en otros términos, un árbol es un grafo maximalmente sin ciclos.

Proposición 9.2.2 Sea G un grafo.

- i) El grafo G es un árbol si y solamente si es conexo y tiene la propiedad de que al eliminar una arista cualquiera el grafo deja de ser conexo.
- ii) El grafo G es un árbol si y solamente si no tiene ciclos y, si le añadiéramos una arista cualquiera, se formaría un ciclo.

DEMOSTRACIÓN. i) Supongamos primero que tenemos un grafo G conexo y sin ciclos. Queremos probar que se desconecta al quitar una arista cualquiera.

Dada una arista a de G , formamos el grafo $G \setminus \{a\}$ eliminándola. Si $G \setminus \{a\}$ fuera conexo, podríamos conectar en $G \setminus \{a\}$ los vértices de la arista a , y añadiendo la arista a tendríamos un ciclo en G : contradicción. Así que $G \setminus \{a\}$ no es conexo (sea cual sea la arista a elegida).

En el otro sentido, supongamos que G es un grafo conexo que se desconecta si quitamos cualquier arista. Si el grafo contuviera un ciclo, siempre podríamos quitar una arista de ese hipotético ciclo sin que el grafo dejara de ser conexo, lo que supone una contradicción. Luego ese tal ciclo no puede existir.

ii) Supongamos primero que G es un grafo conexo y sin ciclos, es decir, un árbol. Consideremos dos vértices cualesquiera que no sean vecinos en G . Por estar en un grafo conexo, existirá un paseo que los conecte en G . Al añadir una arista entre los vértices, tendremos un paseo cerrado (con al menos tres vértices), del que podremos extraer un ciclo.

En el otro sentido, sea G un grafo sin ciclos para el que añadir una arista cualquiera supone la formación de un ciclo. Supongamos que no fuera conexo. En este caso, al menos existirían dos vértices que no podríamos conectar en G . Pero entonces todavía podríamos añadir la arista que los une sin que se nos formara un ciclo, de nuevo una contradicción. ■

Recordemos que si de un grafo conexo quitamos una arista y éste se desconecta, lo hace en exactamente dos componentes conexas (ejercicio 9.1.23). En el caso de un árbol, al quitar una arista cualquiera se forma un bosque con dos componentes conexas. La parte a) de la proposición 9.2.2 afirma que toda arista de un árbol es un *punte*.

Sigamos adelante. Sabemos, por la proposición 9.1.14, que en un grafo conexo se tiene que $|A(G)| \geq |V(G)| - 1$. La igualdad se alcanza justamente para los árboles, como proclama la siguiente caracterización alternativa:

Proposición 9.2.3 *Un grafo G es un árbol si y solo si es conexo y $|A(G)| = |V(G)| - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow) Procedemos por inducción sobre el número de aristas $|A|$: la inducción es en sentido fuerte, es decir, la hipótesis de inducción para d aristas es que el resultado es cierto para grafos con un número de aristas $\leq d$.

1) Si G es un árbol con una arista, $|A(G)| = 1$, sólo cabe la posibilidad de que sea un L_2 , para el que $|V(G)| = 2$.

2) Supongamos cierto que para todo árbol con $|A(G)| \leq d$ se tiene que $|A(G)| = |V(G)| - 1$. Consideremos un árbol cualquiera G con $|A(G)| = d + 1$ y tomamos una arista a cualquiera de G . El grafo $G \setminus \{a\}$ que se forma quitando de G la arista a no es conexo (proposición 9.2.2). De hecho,

$$G \setminus \{a\} = G_1 \cup G_2,$$

donde G_1 y G_2 son árboles con no más de d aristas (pues $|A(G_1)| + |A(G_2)| = d$). Aplicamos a G_1 y G_2 la hipótesis de inducción, para obtener que $|A(G_1)| = |V(G_1)| - 1$ y $|A(G_2)| = |V(G_2)| - 1$. Sumando estas dos igualdades, obtenemos que $|A(G)| - 1 = |V(G)| - 2$, que es lo que queríamos demostrar.

\Leftarrow) En el otro sentido, tomemos un grafo conexo G tal que $|A(G)| = |V(G)| - 1$. Si contuviera un ciclo, podríamos quitar una arista a de ese ciclo sin que el grafo se desconectara.

Pero habríamos llegado a un grafo, $G \setminus \{a\}$, conexo con

$$|A(G \setminus \{a\})| = |A(G)| - 1 \quad \text{y} \quad |V(G \setminus \{a\})| = |V(G)|.$$

Utilizando que $|A(G)| = |V(G)| - 1$,

$$|A(G \setminus \{a\})| = |V(G)| - 2 = |V(G \setminus \{a\})| - 2;$$

y esto contradice (¡nos faltan aristas!) el que $G \setminus \{a\}$ sea conexo. ■

El perspicaz lector echará en falta una caracterización similar en términos de la igualdad $|A| = |V| - 1$ y la ausencia de ciclos. Podrá satisfacer su curiosidad al respecto en el ejercicio 9.2.1. Y si aún con eso se muestra insaciado, consulte alguna otra caracterización en el ejercicio 9.2.2.

Resumamos las características que hacen de un grafo G un árbol: es conexo, sin ciclos, tiene $|A(G)| = |V(G)| - 1$ aristas; si quitamos una arista cualquiera, se desconecta; y si añadimos una arista cualquiera, se forma un ciclo. Es decir, como ya adelantábamos, es el grafo conexo más “económico” (en el sentido de que no sobra ni falta arista alguna) posible.

B. Sucesión de grados de un árbol

Como el lector habrá ya apreciado, un árbol es un tipo de grafo muy especial, que cumple un buen número de condiciones. No le extrañará, pues, que la sucesión de grados de un árbol sea bastante particular. Ya sabemos que en cualquier grafo $G = (V, A)$ se tiene que

$$\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|A|.$$

Pero si además G es un árbol, como $|A| = |V| - 1$, se tendrá:

Proposición 9.2.4 *En cualquier árbol $G = (V, A)$ se tiene que*

$$\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|V| - 2.$$

Obsérvese que ahora sólo tenemos un “grado de libertad”, el número de vértices $|V|$, pues el de aristas ya queda fijado. De esta igualdad podemos deducir, por ejemplo, el siguiente resultado.

Proposición 9.2.5 *Todo árbol con $|V| \geq 2$ tiene, al menos, dos vértices de grado 1.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no hay vértices de grado 1, es decir, que $\text{grado}(v) \geq 2$, para todo $v \in V$. Entonces,

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \text{grado}(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|,$$

lo que resulta imposible. Pero tampoco puede ocurrir que haya un único vértice w de grado 1, porque tendríamos que

$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \text{grado}(v) = \text{grado}(w) + \sum_{v \neq w} \text{grado}(v) \geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1$$

Así que al menos ha de haber dos de grado 1. ■

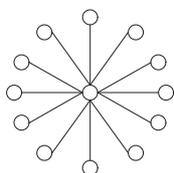
EJEMPLO 9.2.1 ¿Cómo son los árboles con n vértices que tienen el menor y el mayor número posible de vértices de grado 1?

Sabemos que el mínimo número de vértices de grado 1 es 2. Así que, si un árbol con n vértices tiene exactamente dos vértices, digamos w y u , de grado 1, se cumplirá que

$$2n - 2 = \sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 1 + 1 + \sum_{v \neq u, w} \text{grado}(v).$$

En la suma final tenemos $n - 2$ términos, todos ellos mayores o iguales que 2; la única forma de conseguir la igualdad será que $\text{grado}(v) = 2$ para todo $v \in V$, $v \neq u, w$. Y esta configuración de grados es la del grafo lineal con n vértices, L_n .

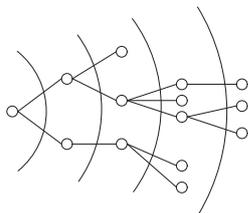
En el otro extremo, es imposible que todos los vértices tengan grado 1, pues no se cumpliría la fórmula de los grados. Pero sí podría ocurrir que el árbol contuviera $n - 1$ vértices de grado 1. Llamemos w al vértice restante. Aplicando de nuevo la fórmula de los grados,



$$2n - 2 = \sum_{v \in V} \text{grado}(v) = (n - 1) + \text{grado}(w),$$

de donde se deduce que $\text{grado}(w) = n - 1$, que, por cierto, es el máximo grado que puede tener un vértice en un grafo con n vértices. En este caso, tenemos el grafo estrellado de la izquierda. ♣

C. Árboles con raíz



En muchas ocasiones conviene señalar un vértice especial en un árbol, bien porque corresponda al punto de arranque de un cierto algoritmo, bien porque represente al fundador de una saga familiar, bien porque... A un árbol en el que se haya señalado un vértice distinguido nos referiremos como un **árbol con raíz**, donde la raíz, por supuesto, es ese vértice especial, que habitualmente sirve de origen de coordenadas. Sí, querido lector, hablamos de árboles, pero los representamos boca arriba, boca abajo, o apuntando en las direcciones más inverosímiles. Y ahora añadimos raíces, que en muchos casos situaremos en la parte superior de los esquemas (o, como en el dibujo, a la izquierda del todo). Curiosa fidelidad a la Botánica. Por supuesto, cualquier árbol se convierte en uno con raíz en cuanto decidamos qué vértice actúa como tal.

En un árbol con raíz los vértices se agrupan por **generaciones**: la primera contiene sólo a la raíz, la segunda está formada por todos los vértices vecinos de la raíz (sus “descendientes”); la tercera, por los vecinos de estos últimos (salvo la raíz); la cuarta, por los vecinos de los de la tercera generación (excepto los que ya estaban en la segunda)... y así sucesivamente, de manera que los vértices de la generación k son aquéllos que están a distancia exactamente $k - 1$ de la raíz. Cada vértice de un generación sólo puede estar unido a vértices de las generaciones anterior y posterior, pues de lo contrario aparecerían ciclos. Esta estructura jerarquizada y ordenada en capas explica el frecuente uso que haremos de estas estructuras. Los vértices “terminales” del árbol, aquellos que no tienen descendientes, se denominan *hojas*.

En la sección 10.3.1 estudiaremos con detalle la jerga propia de estas estructuras, algunas de sus propiedades y diversas aplicaciones.

9.2.1. Contando el número de árboles distintos

Cayley y Sylvester³⁹ se interesaron, allá por el siglo XIX, por contar y enumerar ciertos compuestos orgánicos, uno de los primeros escarceos con la caracterización de estructuras químicas en términos matemáticos. Veán al respecto, por cierto, lo que decía el filósofo positivista Auguste Comte allá por 1830:

[...] cualquier intento de emplear métodos matemáticos en el estudio de la Química ha ser considerado como profundamente irracional y contrario al propio espíritu de la Química.

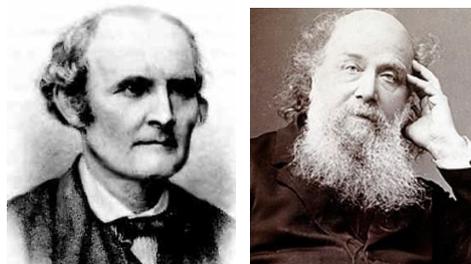
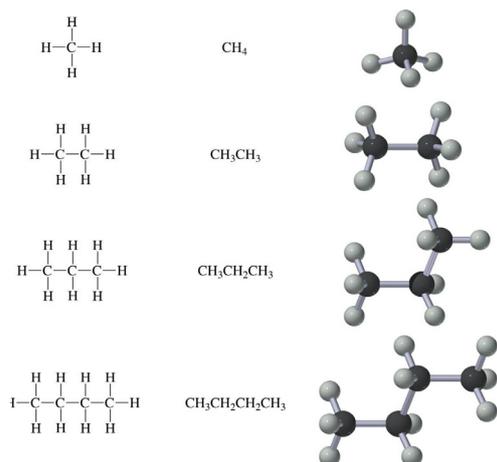


FIGURA 9.1: Cayley y Sylvester

Nuestros dos protagonistas trataron, por ejemplo, de enumerar los isómeros de hidrocarburos saturados, de fórmula $C_k H_{2k+2}$: los átomos de carbono tienen valencia 4, mientras que los hidrógenos tienen valencia 1.



Se trata de grafos (conexos) con $3k+2$ vértices, cuya suma de grados es $4k+(2k+2)=6k+2$, de manera que tienen $3k+1$ aristas; una menos que vértices: ¡árboles! A la izquierda representamos, en orden, las estructuras arbóreas del metano, etano, butano y propano, por si despertaran en el lector tiernos recuerdos de los tiempos de su Bachillerato.

Enumerar los grafos con ciertas propiedades (ser árboles, tener determinada sucesión de grados, etc.) es, en general, una cuestión muy complicada. El lector que haya revisado (entregado en cuerpo y alma, claro) la discusión de la sección 9.1.2 tendrá ya una idea cabal de esa dificultad. Pero en ocasiones, sobre todo si etiquetamos los vértices, las cosas se simplifican. Un caso ilustrativo es el de los

³⁹Las vidas de los ingleses Arthur Cayley (1821-1895) y James Joseph Sylvester (1814-1897) corren paralelas. Estudiaron ambos en Cambridge pero, por diversas razones, durante muchos años no ejercieron como matemáticos. Cayley fue abogado durante 14 años, aunque durante ese periodo de “matemático aficionado” llegó a publicar más de 200 artículos de investigación. En esa labor coincidió con Sylvester, que no había llegado a graduarse por negarse a realizar juramento de fidelidad a la Iglesia de Inglaterra (Sylvester era judío). Juntos gustaban de discutir sobre casos judiciales y teoremas (incluyendo algunos de teoría de grafos). A partir de 1863, Cayley se dedicó en exclusiva a las Matemáticas, desde su puesto en Cambridge. Sylvester, por su parte, fue matemático, abogado... y poeta. A los 27 años fue contratado por la Universidad de Virginia. Se cuenta que allí, durante una lección, tuvo un serio incidente con un alumno que estaba leyendo un periódico en clase, al que Sylvester (a quien se describe como un hombre de fuerte carácter) golpeó. Creyéndolo muerto, tomó el primer barco de regreso a Inglaterra. En 1877 volvió a cruzar el charco, contratado por la Universidad John Hopkins. Un año después fundaría la primera revista norteamericana de matemáticas: *American Journal of Mathematics*. De vuelta a Inglaterra (sin más incidentes por medio, que se sepa), enseñó en Oxford hasta su muerte. Gran parte de los trabajos de Sylvester sobre invariantes algebraicos, matrices y determinantes fueron realizados en colaboración con Cayley, quien es considerado uno de los padres de la teoría de grupos. También son fundamentales sus aportaciones a la geometría no euclídea y la geometría proyectiva.

grafos distintos (esto es, etiquetados) que se pueden formar con un conjunto dado de n vértices, de los ya sabemos que hay $2^{\binom{n}{2}}$. En el caso de los árboles con n vértices dados también tenemos, como vamos a ver a continuación, una fórmula (sorprendentemente) sencilla.

Empecemos nuestra investigación, como parece prudente y razonable, analizando ejemplos de árboles con pocos vértices.

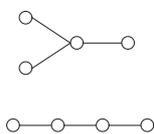
EJEMPLO 9.2.2 *Contemos el número de árboles distintos con 2, 3, 4 y 5 vértices.*

Como en la sección 9.1.2, determinaremos primero las distintas almas, para luego, para cada una de esas almas, contar los posibles etiquetados. Para ser sistemáticos, nos iremos guiando por las distintas sucesiones de grados posibles. En un grafo G con n vértices, el grado de un vértice no puede ser mayor que $n - 1$. Si además G es un árbol, no podrá haber vértices de grado 0 (pues es conexo) y la sucesión de grados debe cumplir que

$$\sum_{v \in V(G)} \text{grado}(v) = 2|V(G)| - 2, \quad \text{donde } 1 \leq \text{grado}(v) \leq |V(G)| - 1 \text{ para todo } v \in V(G).$$

En el caso de dos vértices sólo cabe la posibilidad de que el árbol sea isomorfo a un L_2 . Si el conjunto de vértices es $\{1, 2\}$, hay también un único árbol (los dos “posibles” etiquetados de los vértices dan el mismo resultado).

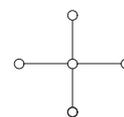
Si tenemos tres vértices, sólo tenemos un alma posible, la que corresponde al grafo lineal L_3 . Para etiquetarlo con el conjunto $\{1, 2, 3\}$, basta con decidir qué símbolo va, por ejemplo, en la posición central (cuál es el vértice de grado 2). Esto se puede hacer de tres formas distintas, así que hay 3 árboles distintos con vértices $\{1, 2, 3\}$.



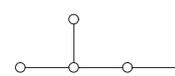
Vamos con el caso de cuatro vértices. El grado máximo es ahora 3. Tras un somero análisis, que recomendamos haga el lector, concluimos que sólo hay dos sucesiones de grados admisibles, $(1, 1, 1, 3)$ y $(1, 1, 2, 2)$. La primera de ellas se corresponde con el (alma del) grafo que dibujamos a la izquierda y arriba, mientras que la segunda se traduce en el de debajo.

Para etiquetar el primer grafo con $\{1, 2, 3, 4\}$, basta con decidir el símbolo que va en la posición central; así que hay 4 maneras distintas de hacerlo. El etiquetado del otro es más delicado: elegimos primero las etiquetas de los dos vértices de grado 2 (se puede hacer de $\binom{4}{2}$ formas); y para cada elección de éstas, hay luego dos posibilidades para nombrar los vecinos. En total, 12 maneras distintas. En resumen, con cuatro vértices hay 2 árboles no isomorfos y $12 + 4 = 16$ árboles distintos con vértices $\{1, 2, 3, 4\}$.

Para el caso de cinco vértices, el grado de los vértices es a lo sumo 4. Si hay alguno de grado 4, la sucesión de grados debe ser $(1, 1, 1, 1, 4)$, a la que le corresponde un único árbol salvo isomorfismos, el que aparece a la derecha. Etiquetarlo con $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es directo, pues basta decidir qué etiqueta asignamos al vértice central: en total, 5 posibilidades.



Si no hay de grado 4, pero sí de grado 3, la única sucesión de grados posible es $(1, 1, 1, 2, 3)$ (alma de la derecha). Para etiquetarla, fijamos el símbolo del vértice de grado 3 (5 posibilidades), luego el del de grado 2 (4 posibilidades) y, finalmente, elegimos (3 posibilidades) el vecino de grado 1 del vértice de grado 2 (o bien los dos vecinos de grado 1 del vértice de grado 3). En total, 60 posibilidades.



Por último, si no hay vértices de grado 3, entonces sólo podremos tener la sucesión de grados $(1, 1, 2, 2, 2)$, que corresponde a un L_5 . Para etiquetarlo, elegimos el símbolo del vértice central (5 posibilidades), luego los otros dos de grado 2 ($\binom{4}{2} = 6$ posibilidades) y ya sólo quedan dos posibilidades para etiquetar los vértices finales. En total, $5 \times 6 \times 2 = 60$ formas distintas. Resumiendo – casi agotados –, con 5 vértices hay tres árboles no isomorfos y 125 árboles distintos con vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. ♣

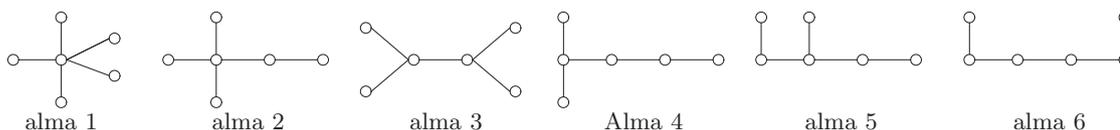
EJEMPLO 9.2.3 *Un poco más difícil: árboles con seis vértices $\{v_1, \dots, v_6\}$.*

Los grados son ahora seis números entre 1 y 5 que suman 10. Si hay vértices de grado 5, sólo podrá haber uno, y la sucesión de grados será $(1, 1, 1, 1, 1, 5)$. El único grafo con estas características es el que aparece debajo de estas líneas como alma 1. El etiquetado de los vértices con $\{v_1, \dots, v_6\}$ sólo requiere decidir el símbolo del vértice central: seis posibilidades.

Si no hay vértices de grado 5, pero sí de grado 4, tenemos la sucesión $(1, 1, 1, 1, 2, 4)$ (véase el alma 2). Hay $6 \times 5 \times 4 = 120$ árboles distintos asociados a esta estructura, pues basta etiquetar el de grado 4, luego el de grado 2 y, finalmente, elegir el vértice de grado 1 que va unido al de grado 2.

Si no hay vértices de grado 4, pero sí de grado 3, las cosas se ponen más interesantes. Por un lado, la sucesión de grados $(1, 1, 1, 1, 3, 3)$ está asociada al alma 3. Convéznase, lector, de que hay $\binom{6}{2} \binom{4}{2} = 90$ formas distintas de etiquetar sus vértices, pues basta elegir los dos vértices “centrales”, y luego seleccionar qué otros dos vértices (de los 4 disponibles) van a unirse a uno de los dos seleccionados antes.

Pero, por otro lado, y como ya vimos en la sección 9.1.2, hay *dos* árboles no isomorfos (almas 4 y 5) asociados a la sucesión de grados $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$. Dejamos que el lector se convenza por sí mismo de que hay 180 etiquetados distintos para la primera y 360 para segunda.



Por último, si no hay vértices de grado 3, entonces la sucesión de grados es $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$ (véase el alma 6, un L_6), que tiene 360 distintos etiquetados de sus vértices. En resumen, hay seis árboles no isomorfos con 6 vértices y 1296 árboles distintos con vértices $\{1, \dots, 6\}$. ♣

Cayley⁴⁰, en 1889, probó que el patrón que se observa en los resultados obtenidos en el laborioso y meticuloso análisis hecho hasta aquí,

n	2	3	4	5	6
árboles distintos	$1 = 2^0$	$3 = 3^1$	$16 = 4^2$	$125 = 5^3$	$1296 = 6^4$

es completamente general.

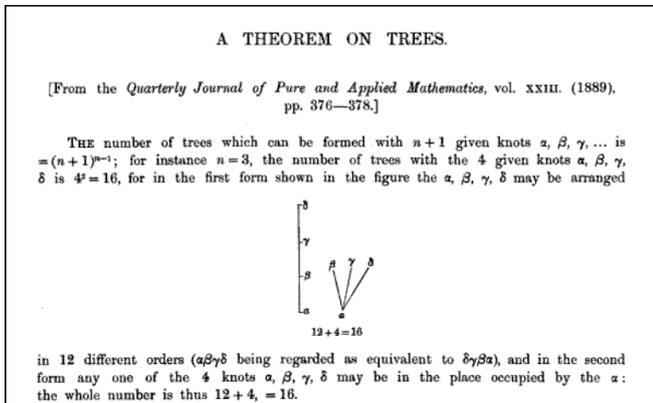
⁴⁰Parece ser que fue Sylvester el primero que propuso este resultado, en 1857, y que la primera demostración fue de Borchardt, en 1860. Los trabajos de Cayley en este campo son de 1889, y en ellos enumeró grafos con diversas propiedades. Años después, Pólya desarrollaría una teoría enumerativa general (véase el capítulo 28) para abordar estas cuestiones.

Teorema 9.2.6 (Cayley) *Hay n^{n-2} árboles distintos con el conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$.*

A la derecha mostramos las primeras líneas del artículo de Cayley. Quizás el lector pueda hasta entrever en él las dos estructuras arbóreas que dibujamos, y la subsecuente numerología, en el análisis del caso $n = 4$ del ejemplo 9.2.2.

Lector: no se deje cegar por la aparente magnitud del número n^{n-2} ; sí, es un número enorme en cuanto n sea moderadamente grande. Pero paldice si lo comparamos con, por ejemplo, el número total de grafos con n vértices, que es $2^{\binom{n}{2}}$. Convéznase por usted mismo, mirando ambas cantidades, por ejemplo, en escala logarítmica. Por ejemplo, para $n = 5$ vértices, un 12 % de los grafos resultan ser árboles, pero con $n = 8$ vértices ya sólo hay un 0.1 % de árboles.

Quizás el lector considere que sería más justo comparar el número de árboles con n vértices (que tienen todos $n - 1$ aristas) con el número de grafos con exactamente $n - 1$ aristas. Es decir, si escogemos al azar $n - 1$ aristas para unir los n vértices, ¿cuán probable es que el grafo resultante sea conexo? Pues bien poco probable; en concreto, esa probabilidad es



$$\frac{n^{n-2}}{\binom{n(n-1)/2}{n-1}},$$

que para $n = 5$ es de casi un 60 %, pero para $n = 20$ es ya apenas del 0.4 %.

Vamos, que ser un árbol es casi un milagro.

Por cierto, como para cada árbol con vértices $\{1, \dots, n\}$ hay n árboles con raíz distintos con esos mismos vértices, tenemos la siguiente reescritura del teorema de Cayley:

Corolario 9.2.7 (Cayley) *Hay n^{n-1} árboles con raíz distintos con vértices $\{1, \dots, n\}$.*

Como comentario final, antes de entrar en la demostración del teorema de Cayley, avisamos al lector de que la misma cuestión, el recuento de árboles, pero ahora sin etiquetas (árboles no isomorfos), es asunto mucho más complicado. Contar cuántas formas de árboles hay con n vértices, como hicimos como parte del argumento de recuento de los árboles distintos con $n \leq 6$ vértices en los ejemplos 9.2.2 y 9.2.3, requiere una tecnología mucho más avanzada, de funciones generatrices, como veremos en el capítulo 13.

De este elegante resultado de Cayley existen un buen número de demostraciones, de características muy diversas. A continuación exhibimos dos de ellas. La primera es de corte algorítmico, y se basa en una codificación de árboles conocida como *códigos de Prüfer*. Daremos luego una prueba alternativa, de corte más combinatorio, debida a Zeilberger. En el ejercicio 9.2.8 esbozaremos una tercera demostración. Si con esto el lector no se queda satisfecho, le recomendamos revisar el argumento algebraico del ejemplo 9.2.7, e incluso embarcarse, provisto ya del lenguaje de las funciones generatrices, en la lectura del capítulo 13.

Códigos de Prüfer. Vamos a ver ahora cómo resumir la información sobre un árbol con vértices $\{1, \dots, n\}$ en una lista de longitud $n - 2$, con posible repetición, formadas con los símbolos $\{1, \dots, n\}$. Esa tal lista se conoce como el *código de Prüfer*⁴¹ del árbol. El que hay una biyección entre los dos conjuntos de objetos, el de los árboles y el de las listas, da como conclusión el teorema 9.2.6 de Cayley.

El algoritmo que describimos a continuación toma un árbol T con n vértices etiquetados con los números $\{1, \dots, n\}$, y las correspondientes $n - 1$ aristas, y da lugar a una lista de $n - 2$ números (entre 1 y n) que nombraremos como $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})$.

En el primer paso, localizamos el vértice de grado 1 con menor etiqueta, que llamamos β_1 , y anotamos quién es su único vecino, que será α_1 . Borrarnos entonces β_1 y su arista.

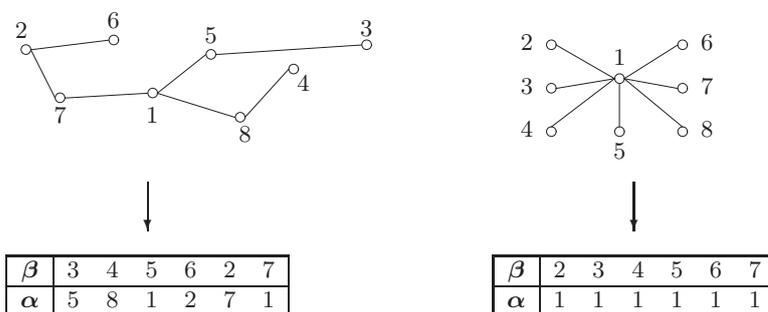
En el segundo paso, tomamos el nuevo árbol y repetimos el procedimiento: localizamos el vértice de grado 1 con menor etiqueta, β_2 , anotamos quién es su vecino, α_2 , y borramos β_2 y su arista. Y así, sucesivamente.

Observe, lector, que cada paso arranca con un árbol, lo que garantiza que haya vértices de grado 1; y que en cada paso eliminamos una arista (y un vértice): en el paso j se empieza con un árbol con $n - j$ aristas, y sale uno con una arista menos. De forma que, en principio, el algoritmo da $n - 1$ pasos.

Pero prestemos atención al último paso, en el que sólo queda una arista (y sus dos vértices), y del que se obtendrían los valores β_{n-1} y α_{n-1} . De esos dos vértices, uno de ellos necesariamente ha de tener la etiqueta n , pues esa etiqueta no ha podido ser eliminada en pasos anteriores; de forma que $\alpha_{n-1} = n$, y no es necesario reseñar este valor.

La lista $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})$ es el código de Prüfer del árbol T (la lista $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-2})$ es auxiliar). Convéznase el lector, analizando con detalle el algoritmo, que en esa lista α el número de apariciones de cada vértice i es justamente $\text{gr}(i) - 1$. Así que, por ejemplo, los etiquetas de las hojas de T no aparecen nunca en α ; y recíprocamente, si un vértice no aparece en α , entonces es hoja en el árbol T .

Sugerimos al lector que se entrene en este procedimiento de codificación con los dos ejemplos que dibujamos debajo de estas líneas: prepare un papel, pinte los dos grafos, vaya tachando aristas siguiendo el procedimiento descrito arriba, y cerciúrese de que obtiene los códigos de Prüfer que aparecen reseñados en la figura.



⁴¹Ernst Paul Heinz Prüfer (1896-1934) fue un matemático alemán, especialista en teoría de grupos y álgebra. Muerto prematuramente de un cáncer de pulmón, la prueba del teorema de Cayley que aquí nos ocupa fue publicada en 1918, cuando Prüfer era todavía estudiante en la Universidad de Berlín.

En cuanto al camino de vuelta, la reconstrucción del árbol T a partir de su código de Prüfer, procedemos como sigue: tenemos la lista $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})$ y el conjunto de etiquetas $V = \{1, 2, \dots, n\}$. En el primer paso, declaramos que β_1 es el menor elemento de V que no esté en la lista α , y formamos la arista $\{\alpha_1, \beta_1\}$. Eliminamos ahora el símbolo β_1 de V , recortamos la lista α quitándole su primer elemento, y repetimos el proceso para obtener β_2 (el menor elemento de $V \setminus \{\beta_1\}$ que no esté en la lista recortada en el paso anterior), y formar la arista $\{\alpha_2, \beta_2\}$. Y así sucesivamente. En fórmula, si lo prefiere el lector, cada β_j viene dado por $\beta_j = \min \{k : k \notin \{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \alpha_j, \dots, \alpha_{n-2}\}\}$, y las aristas son siempre de la forma $\{\alpha_j, \beta_j\}$. En la figura de la derecha representamos la reconstrucción tras cuatro pasos del procedimiento para la lista del ejemplo de arriba. Observe, lector, que se van añadiendo aristas y que sólo en el último paso queda garantizado que sea un árbol. Por cierto, en ese último paso, en V sólo quedarán n y otra etiqueta, que uniremos como arista final.

β	3	4	5	6
α	5	8	1	2

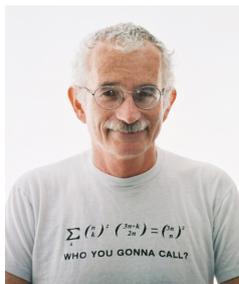
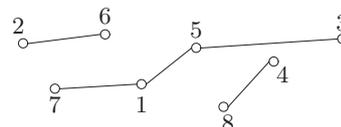


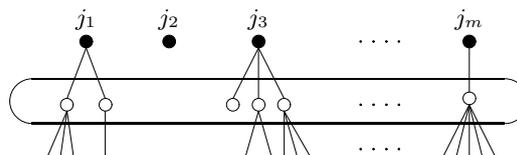
FIGURA 9.2: Zeilberger

Dejamos al lector que complete los detalles que prueban que hay una biyección entre los árboles con etiquetas $\{1, \dots, n\}$ y las listas con esos símbolos, y repetición permitida, de longitud $n - 2$. Una ojeada al ejercicio 9.2.8 puede venirle bien.

Damos a continuación una prueba alternativa del resultado de Cayley que nos parece especialmente sugerente. Se debe a Zeilberger⁴².

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9.2.6 DE CAYLEY. En una cierta empresa hay m jefes y k empleados, con sus respectivos nombres y apellidos⁴³. Los queremos organizar de manera que cada empleado tenga un *único* supervisor, que pudiera ser otro empleado o quizás un jefe. Los jefes no tienen supervisor (lo que quizás sea una tautología), y podrían no tener subordinados (principio de Peter, seguro⁴⁴). Llamaremos $P(m, k)$ al número de formas distintas de organizar la empresa con m jefes y k empleados.

En el lenguaje de los grafos⁴⁵, $P(m, k)$ cuenta el número de bosques (con $m + k$ vértices) formados por m árboles con raíz, donde las raíces van etiquetadas con los nombres de los jefes. Nos interesará en especial el caso $m = 1$ y $k = n - 1$, que se corresponde con árboles con raíz con n vértices en total, con la raíz ya etiquetada con el nombre del (único) jefe.



⁴²Doron Zeilberger (1950-), nacido en Haifa (Israel), trabaja en la Universidad de Rutgers. Su página *web* www.math.rutgers.edu/~zeilberg/ es una auténtica delicia que recomendamos al lector.

⁴³¿Éstos de qué van?, ¿qué pasó con los árboles?

⁴⁴Principio de Peter: en una jerarquía, todo empleado tiende a ascender hasta su nivel de incompetencia. Corolario: con el tiempo, todo puesto tiende a ser ocupado por un empleado que es incompetente para desempeñar sus obligaciones.

⁴⁵¡Ah!, menos mal, han vuelto al redil.

El rango de interés para los parámetros es $m \geq 1$ y $k \geq 0$. Vamos a obtener ahora una regla (recurrente) de cálculo para $P(n, k)$. Para empezar, es claro que, para cada $m \geq 1$, $P(m, 0) = 1$. Para analizar el resto de los casos, argumentamos como sigue:

- 1) Distinguímos a los empleados cuyos supervisores son jefes. A estos empleados, de los que habrá un cierto número s , con $1 \leq s \leq k$, se les asigna, desde este momento, el papel de *jefecillos*⁴⁶.
- 2) Decidimos qué s empleados son jefecillos, lo que se puede hacer de $\binom{k}{s}$ maneras.
- 3) Y ahora asignamos el jefe ante el que responde cada jefecillo: m^s maneras.
- 4) Queda organizar a los restantes $k - s$ empleados. Pero, para éstos, los s jefecillos actúan como jefes. Así que los podremos organizar de tantas maneras como nos diga $P(s, k - s)$.

En total,

$$(\star) \quad P(m, k) = \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} m^s P(s, k - s).$$

El argumento anterior, en el lenguaje de grafos, consiste en decidir qué vértices van en la segunda generación (por debajo de las raíces), asociarlos con los vértices superiores, y luego distribuir los restantes vértices en generaciones siguientes.

La regla de recurrencia (\star) es un tanto peculiar. Vamos a comprobar cómo esta regla de recurrencia, junto con los valores iniciales $P(m, 0) = 1$, determina de manera única el valor de los $P(m, k)$.

Para $k = 1$, tenemos que, para cada $m \geq 1$,

$$P(m, 1) = \binom{1}{1} m P(1, 0) = m,$$

usando que $P(1, 0) = 1$, mientras que el caso $k = 2$ de (\star) nos da, para cada $m \geq 1$,

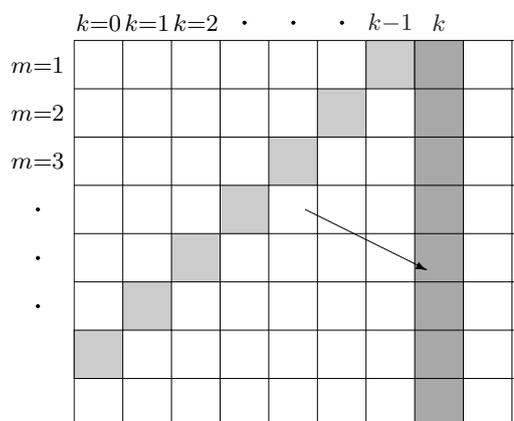
$$\begin{aligned} P(m, 2) &= \binom{2}{1} m P(1, 1) + \binom{2}{2} m^2 P(2, 0) \\ &= 2m + m^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado, además de que $P(2, 0) = 1$, el que $P(1, 1) = 1$, por el paso anterior. Y, en general, todos los valores de $P(m, k)$, para k fijo (situados en una columna), se generan a partir de los valores situados en la diagonal que se aprecia en el dibujo de la derecha.

Considere ahora el lector la función

$$f(m, k) = m(m + k)^{k-1},$$

definida para cada $m \geq 1$ y $k \geq 0$. Obsérvese que $f(m, 0) = m/m = 1$. Usando el teorema del binomio de Newton, es un ejercicio casi rutinario (para aquel lector que haya batallado



⁴⁶Se lo merecen.

con las cuentas del binomio de la sección 5.1.2; por si acaso, lo dejamos como ejercicio 9.2.7) comprobar que $f(m, k)$ cumple la misma recurrencia que $P(m, k)$, de lo que se deduce que

$$P(m, k) = m(m + k)^{k-1} \quad , \text{ para cada } m \geq 1 \text{ y } k \geq 0;$$

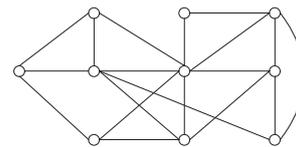
y en particular, para el caso que nos incumbe, que $P(1, n - 1) = n^{n-2}$.

Ya casi hemos terminado. Con $P(1, n - 1)$ contamos el número de árboles con raíz con n vértices, con la raíz *ya etiquetada* con el nombre del jefe. Preste ahora atención, querido lector, al ida y vuelta. Nos ponemos revolucionarios y cooperativistas⁴⁷: permitimos a cualquiera de los n miembros de la empresa ser el jefe. Esto nos da $n \cdot n^{n-2} = n^{n-1}$ organizaciones empresariales distintas, o mejor, n^{n-1} árboles con raíz y n vértices.

Esto prueba la versión del resultado de Cayley recogida en el corolario 9.2.7, y argumentando como allí, pero ahora dividiendo por n para diluir el papel de la raíz, concluimos que el número de árboles con n vértices es n^{n-2} . ■

9.2.2. Árboles abarcadores de un grafo

En la introducción del capítulo planteamos la siguiente cuestión: construir una red que conecte una serie de puntos (por ejemplo, un sistemas de oleoductos, una red de ordenadores) de la forma más barata (en cuanto a número de conexiones) a partir de un diseño previo, como el de la figura. El objetivo es eliminar el mayor número posible de aristas de manera que el grafo siga siendo conexo. O, dicho de otra manera, quedarnos con el número mínimo de aristas que garantizan la conexión del grafo. Estamos buscando, en definitiva, un subgrafo que sea árbol y que incluya a todos los vértices.



Definición 9.2.8 Un árbol H es **árbol abarcador**⁴⁸ de un grafo $G = (V, A)$ si $V(H) = V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Un árbol abarcador de G tiene los mismos vértices que G , y algunas de –o todas– sus aristas. Conviene asegurarse primero de que tales árboles existen si, como es razonable, partimos de un grafo conexo.

Proposición 9.2.9 *Un grafo G es conexo si y sólo si tiene, al menos, un árbol abarcador.*

DEMOSTRACIÓN. En un sentido, si un grafo tiene un árbol abarcador, que por definición es conexo, es obvio que G también lo será.

En el otro: consideremos un grafo G conexo. Si es un árbol, hemos acabado: G es su propio árbol abarcador. Si no es árbol, como es conexo, podemos todavía quitar una cierta arista a sin que se desconecte (recordemos, de la proposición 9.2.2, el carácter extremal de los árboles en este sentido). Así que el grafo $G \setminus \{a\}$ sigue siendo conexo. Si fuera un árbol, habríamos acabado; pero si no lo fuera, podríamos quitar una arista b de forma que $(G \setminus \{a\}) \setminus \{b\}$ siguiera siendo conexo. Y así, sucesivamente. En cada paso, los sucesivos grafos son conexos; cuando el número de aristas llegue a $|V(G)| - 1$, tendremos un árbol abarcador. ■

⁴⁷¡Vivan los años 60!

⁴⁸*Spanning tree*, en inglés, *arbre de recouvrement* en francés. En castellano se utilizan términos como “árbol generador” o “árbol recubridor”. Nos gusta más “árbol abarcador”.

De la demostración anterior, además, deducimos que si el grafo G es conexo y $|A(G)| = |V(G)| - 1 + k$, con $k \geq 0$, entonces podemos quitar k aristas (convenientemente escogidas para no perder la conexión) y quedarnos con un árbol abarcador. Se trataría de ir “eliminando aristas” hasta quedarnos con el número adecuado de ellas, siguiendo, como criterio de eliminación, ir identificando y “rompiendo” los ciclos del grafo.

Existen procedimientos alternativos, y de hecho más eficaces, para construir un árbol abarcador en un grafo (o para concluir que no los hay), que consisten en ir “haciendo crecer” el árbol en pasos sucesivos, como vamos a ver a continuación. Se trata de algoritmos diseñados, en principio, para buscar y etiquetar vértices de un grafo⁴⁹. Piense por ejemplo el lector en el grafo de internet, en el que cada página se representa con un vértice, y cada arista es un hipervínculo⁵⁰. Los motores de búsqueda en internet requieren programas que primero exploren la red (*web crawlers*) y que localicen las diferentes páginas, para luego crear los correspondientes índices y almacenar contenidos.

A. Algoritmos de búsqueda en grafos y (su conexión con) conexión

Los dos procedimientos que vamos a describir, aunque siguen estrategias distintas, dan ambos como resultado árboles (con raíz) que incluyen unos cuantos vértices del grafo de partida (o quizás todos). Los traemos a colación en esta sección, adelantándonos al capítulo 11 dedicado a los algoritmos en árboles, porque en particular permiten resolver, de manera computacionalmente eficiente, cuestiones como la de decidir si un grafo es conexo (o, en caso contrario, identificar componentes conexas), localizar ciclos o aristas puente, etc.

Advertimos al lector, no obstante, de que la descripción que ahora iniciamos será somera, casi filosófica. Dejamos al lector con especiales inclinaciones algorítmicas que se entretenga en traducir estas pinceladas en un código detallado.

A1. Algoritmo de búsqueda a lo ancho (BA)⁵¹.

El procedimiento parte de un grafo $G = (V, A)$ y construye un árbol (con raíz) cuyos vértices están agrupados por generaciones en función de su distancia a la raíz.

Marcamos un cierto vértice inicial, digamos v_1 . Localizamos todos sus vecinos y los etiquetamos. Las aristas correspondientes quedan incorporadas al árbol. Una vez numerados los vértices vecinos del inicial, pasamos al que sea primero en esa ordenación y repetimos el proceso: localizamos todos sus vecinos *nuevos* y los añadimos al árbol (obsérvese que no se forman ciclos en el proceso). Y así sucesivamente, hasta que no podamos incorporar más vértices (ni aristas) al árbol.

En el proceso de “localización” de vértices nuevos, cada arista es examinada como mucho dos veces (una por cada uno de sus extremos), así que el número de pasos en este algoritmo es⁵² $O(|A|)$. Si G tiene n vértices, el número de pasos será $O(n^2)$.

Si el grafo es conexo, el resultado final es un árbol abarcador (con raíz) de G . Si no lo

⁴⁹Muchos de los algoritmos que veremos en la sección 11.2 son variaciones de éstos adaptadas a distintos problemas (paseos más cortos, árboles abarcadores de peso mínimo, etc.).

⁵⁰Aunque este grafo sería, en realidad, dirigido, véase la sección 9.3.

⁵¹*Breadth-First Search* (BFS), en la terminología anglosajona.

⁵²Para ser más precisos, es $O(|V| + |A|)$.

fuera, se detendría al completar un árbol abarcador de la componente conexa de G en la que estuviera emplazado el vértice inicial v_1 .

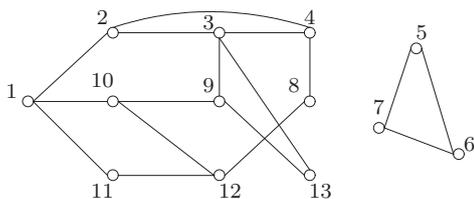
A2. Algoritmo de búsqueda en profundidad (BP)⁵³

Ahora procedemos de la siguiente manera: empezamos de nuevo con un cierto vértice v_1 y localizamos sus vecinos. Se toma uno de ellos como v_2 e incorporamos la arista $\{v_1, v_2\}$ al árbol. Entonces **avanzamos** a v_2 y buscamos vecinos que no hayan sido ya visitados; tomamos cualquiera de ellos como v_3 , y así sucesivamente. Cuando llegemos a un vértice que no tenga vecinos nuevos que añadir, digamos v_k , **retrocedemos** al vértice anterior, v_{k-1} , y ahí repetimos el proceso (buscamos nuevos vecinos que añadir al árbol).

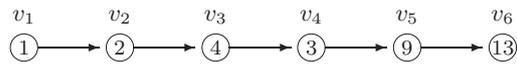
Si en algún momento del proceso nos encontramos en v_1 sin sitios nuevos a donde ir (quizás hayamos pasado antes varias veces por v_1 , pero pudiendo añadir nuevos vértices), se termina el algoritmo. El árbol T así generado es un árbol abarcador de la componente conexa que incluye al vértice v_1 . Como cada arista del grafo se utiliza, como mucho, dos veces en el algoritmo (una en el “avance”, otra en el “retroceso”), el número de pasos del algoritmo será $O(|A|)$ (o quizás $O(|V| + |A|)$), lo que nos da de nuevo $O(n^2)$ si el grafo tiene n vértices.

Ilustramos las diferencias entre los dos algoritmos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9.2.4 Apliquemos los algoritmos BA y BP al siguiente grafo.



Empecemos, por ejemplo, con el algoritmo BP, digamos partiendo del vértice 1 (que sería el v_1).

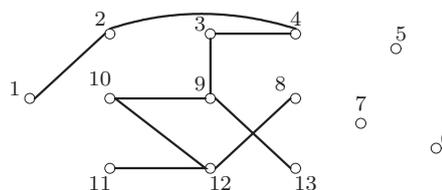


De él pasamos al 2, al 4, al 3, al 9 y al 13. Una vez en el vértice 13 (que es v_6) vemos que todos sus vecinos ya han sido visitados, así que retrocedemos a v_5 (el vértice 9).

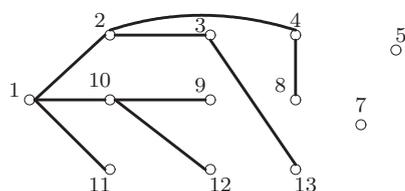
Desde allí podemos visitar nuevos vecinos (observemos que la arista entre 9 y 13 la recorremos en los dos sentidos, de ida y de vuelta). Por ejemplo, con el camino que mostramos a la derecha. Al no poder añadir vecinos desde el vértice 11 (v_9), retrocedemos a v_8 , el vértice 12. Desde allí podemos incluir al vértice 8 como v_{10} . Y una vez en éste, nos vemos obligados a retroceder a v_9 , v_8 , etc., hasta volver a v_1 .



Como ya no podemos añadir nuevos vértices, el algoritmo termina. A la derecha dibujamos el árbol resultante, que no incluye a todos los vértices del grafo (el grafo original no era conexo), sólo a los de la componente conexa del vértice 1. Nótese que en el proceso hemos recorrido cada arista del árbol en ambos sentidos.



⁵³Depth-First Search (DFS), en la terminología anglosajona.



Vamos ahora con el algoritmo BA. De nuevo etiquetaríamos el vértice 1 como v_1 , y a sus vecinos 2, 10 y 11 como v_2 , v_3 y v_4 , respectivamente. Una vez considerados todos los posibles vecinos de v_1 (y añadidas sus correspondientes aristas al árbol), nos movemos a v_2 , el vértice 2; ahí añadimos a 3 como v_5 y a 4 como v_6 . Es hora de ir al vértice $v_3 = 10$ y añadir a 9 como v_7 y a 12 como v_8 . En el vértice $v_4 = 11$ no hay vértices nuevos que considerar, pero sí en el v_5 (el vértice 3): etiquetamos el 13 como v_9 . Desde $v_6 = 4$ añadimos el vértice 8 como v_{10} . Y al mirar en los vértices del v_7 al v_{10} comprobamos que no podemos ir más allá con el árbol. El algoritmo ha terminado y ha producido el árbol de la izquierda. De nuevo, el árbol sólo abarca a los vértices de la componente conexa a la que pertenecía el vértice 1. ♣

Ambos algoritmos, que por otro lado tienen sus ventajas y sus desventajas, en función del problema que se esté tratando, permiten resolver eficientemente (desde el punto de vista computacional) la siguiente cuestión básica:

- *determinar si un cierto grafo G es conexo o no* (comprobando si el árbol que produce el algoritmo incluye todos los vértices del grafo; esto es, si es árbol abarcador o no).

Con ligeras variaciones, permiten también resolver las siguientes cuestiones:

- *determinar componentes conexas de G* (arrancando con un vértice, identificando su componente conexa, y repitiendo luego el proceso para vértices que no estén en ella);
- *determinar si G tiene o no ciclos* (localizando las componentes conexas y contando las aristas de cada una de ellas; esto es, comprobando si son árboles);
- *decidir si una cierta arista es puente o no del grafo* (comparando el número de componentes conexas antes y después de eliminar la arista en cuestión).

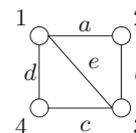
O algunas otras, algo más sofisticadas, sobre las que no daremos los detalles:

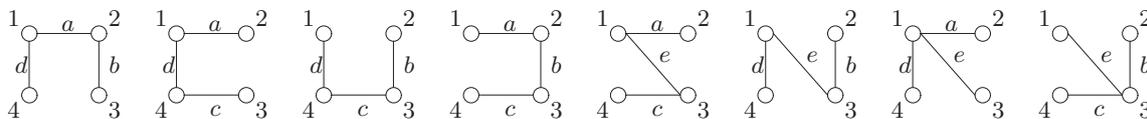
- *encontrar el ciclo más corto en el grafo G* (y, por tanto, determinar $\text{cuello}(G)$);
- *determinar si un grafo G es bipartito o no* (utilizando la caracterización, en términos de la presencia de ciclos de longitud impar del lema 9.1.12).

Por su propia estructura, además, el algoritmo BA permite determinar las distancias de un vértice a los demás del grafo. En la sección 11.2.2 volveremos sobre este asunto, aunque allí en el contexto más general de los grafos con pesos.

B. El número de árboles abarcadores de un grafo

Que un grafo conexo tiene, en general, más de un árbol abarcador es bastante evidente. ¿Cuántos, exactamente? Dependerá, claro, del grafo considerado. En el que aparece dibujado a la derecha nos “sobran” dos aristas. Pero no cualesquiera: por ejemplo, si quitáramos las aristas a y b , desconectaríamos el grafo. Encomendamos al lector la (paciente) comprobación de que este grafo tiene ocho árboles abarcadores distintos, que se muestran a continuación:





Observe el lector que la pregunta trata sobre número de árboles *distintos*; es decir, el grafo G de partida está etiquetado, y los árboles abarcadores llevan esas mismas etiquetas. En el ejemplo anterior, las seis primeras configuraciones se corresponden con (su alma es) el grafo lineal con cuatro vértices. Ahora bien, una vez que hemos determinado que hay ocho árboles abarcadores distintos, cuáles sean las etiquetas del grafo inicial es completamente irrelevante. Esto es, el número de árboles abarcadores distintos de un grafo G , que en lo sucesivo nombraremos como $\tau(G)$, es un invariante por isomorfía. Determinar $\tau(G)$ es relativamente sencillo para algunas familias especiales de grafos.

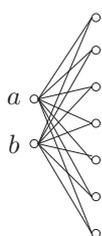
EJEMPLO 9.2.5 *El número de árboles abarcadores de los grafos circulares, los grafos lineales, los grafos completos... ¡y de los propios árboles!*

Consideremos un *grafo circular* con n vértices, C_n , para el que $|A(C_n)| = |V(C_n)|$. Formar un árbol abarcador consiste, simplemente, en quitar una arista; y cualquiera de las n que hay vale para ello. Así que C_n tiene n posibles árboles abarcadores: $\tau(C_n) = n$

Un *grafo lineal* con n vértices, L_n , es ya un árbol, así que es su propio árbol abarcador. Éste es un resultado general: un árbol G tiene sólo un árbol abarcador (él mismo).

Un *grafo completo* K_n contiene todas las aristas posibles, así que hay tantos árboles abarcadores como árboles con n vértices haya: es decir, $\tau(K_n) = n^{n-2}$, por el teorema 9.2.6 de Cayley. ♣

EJEMPLO 9.2.6 *¿Cuántos árboles abarcadores distintos contiene un $K_{2,s}$?*



Un grafo bipartito completo $K_{2,s}$, $s \geq 2$, tiene $2s$ aristas y $s + 2$ vértices. Necesitamos quitar $s - 1$ aristas sin que se desconecte el grafo. Obsérvese que un árbol abarcador del grafo contendrá a una serie de vértices de los de la derecha conectados al vértice a y otros conectados a b . Pero ha de haber al menos uno que se conecte a ambos, para que sea conexo. Y sólo uno, porque si de dos (o más) vértices a la derecha se conservaran sus dos aristas, se formaría un ciclo. De manera que, si los vértices de la “derecha” son $\{1, \dots, s\}$, elegir un árbol abarcador es *exactamente* lo mismo que escoger dos conjuntos A y B , que incluyen los vértices que comparten arista, respectivamente, con a y b en el árbol abarcador, y que cumplan que $A \cup B = \{1, \dots, s\}$ y $|A \cap B| = 1$. Para contar el número de maneras de elegir A y B , sigamos el siguiente proceso:

- 1) Elegimos el elemento de la intersección (hay s posibilidades).
 - 2) Luego basta decidir si el resto de los elementos están en A ó en B . Equivalentemente, formar una $(s - 1)$ -lista con repetición permitida con dos símbolos (“estar en A ” o “estar en B ”). Esto se puede hacer de 2^{s-1} formas distintas.
- Así que $\tau(K_{2,s}) = s 2^{s-1}$. ♣

Quizás el lector quiera entretenerse (ejercicio 9.2.11) con el cálculo del número de árboles abarcadores del caso $K_{3,s}$ siguiendo un razonamiento similar al visto para $K_{2,s}$. Aunque el

argumento combinatorio se complica en ese caso, lo que sugiere que determinar $\tau(K_{r,s})$, para un grafo bipartito general $K_{r,s}$, no es tarea sencilla. Por cierto, $\tau(K_{r,s})$ resulta ser $s^{r-1} r^{s-1}$ (véase el final del apartado).

¿Qué sabemos sobre $\tau(G)$? Veamos. Si un grafo conexo G tiene n vértices, el número $\tau(G)$ de árboles abarcadores distintos de G puede oscilar entre 1 (si G ya es un árbol) y n^{n-2} (si se trata del grafo completo). Pero el valor exacto depende de la estructura particular del grafo.

Ésta no es una cuestión que tenga únicamente interés teórico. Digamos, por ejemplo, que un grafo (conexo) representa una red eléctrica, y que estamos interesados en la *fiabilidad*⁵⁴ de nuestra red. Esto es, si puede ser capaz de soportar la pérdida de algunos tramos (aristas) sin que el fluido se interrumpa. El que el grafo tenga muchos árboles abarcadores sugiere que el sistema será bastante robusto, y que podrá sobreponerse a estas pérdidas.

Estas cuestiones le interesaban, y mucho, a Kirchhoff⁵⁵, que en 1847 enunció el siguiente resultado, que permite calcular algebraicamente el número de árboles abarcadores de un grafo arbitrario (véase un procedimiento alternativo en el ejercicio 9.2.13).



FIGURA 9.3: Kirchhoff

Teorema 9.2.10 (Kirchhoff) *Sea G un grafo conexo con n vértices, y sea M la matriz de vecindades M asociada. Consideramos la matriz $L = D - M$, donde D es la matriz diagonal cuyos registros son los grados de los vértices.*

a) Llamamos $L^{(i)}$ a la matriz que se obtiene de L eliminando la fila y la columna i . Entonces, para cualquier i entre 1 y n ,

$$\tau(G) = \det(L^{(i)}).$$

b) Alternativamente,

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \mu_2 \cdots \mu_n,$$

donde μ_2, \dots, μ_n son los autovalores no nulos de la matriz L .

¡Póngase en piel!, querido lector⁵⁶, ¡y asómbrese! Estábamos con grafos, con árboles abarcadores, y de repente, como por ensalmo, aparecen matrices y determinantes, además de autovalores. ¡Qué cosas tienen las matemáticas!

Como ya mencionamos en la sección 9.1.5, la matriz $L = D - M$ es conocida, en la jerga habitual de la teoría espectral de grafos, como la *matriz laplaciana* del grafo. Buen momento para que el lector revise la citada sección⁵⁷.

⁵⁴*Reliability*, diría un anglosajón, que además sabría pronunciar la palabra sin trabarse.

⁵⁵Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) es uno de los padres de la teoría de grafos. Nació en Königsberg, lo que de por sí ya era bastante premonitorio (vea el lector el apartado 10.1.1). En sus estudios sobre circuitos eléctricos formuló las famosas *leyes de Kirchhoff*, que relacionan corrientes, voltajes y resistencias, generalizando así las leyes de Ohm. Kirchhoff se ocupó también de analizar otros fenómenos físicos, como la radiación del cuerpo negro, o el estudio de los espectros de los cuerpos celestes. Junto con el químico Bunsen, diseñó uno de los primeros espectroscopios, con el que, por ejemplo, se descubrirían elementos como el cesio y el rubidio.

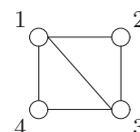
⁵⁶Si le place claro, y sobre todo si lleva toda la tarde leyendo este texto.

⁵⁷Si es que, quizás impresionado por el despliegue de álgebra lineal que contenía, no lo hizo en su momento.

Veamos. El primer enunciado del teorema 9.2.10 es, además de sorprendente, un tanto misterioso, por aquello de que se pueda tomar cualquier cofactor (y que todos ellos tengan el mismo valor). La segunda versión, la de los autovalores, que iguala a la anterior en cuota de sorpresa, es al menos un enunciado único: se trata multiplicar los $n - 1$ autovalores no nulos. ¡Ajá!, de manera que L tiene autovalores no negativos, uno de ellos es 0, y el resto son positivos. Sí, toca revisar la sección 9.1.5.

No vamos a dar la demostración de este teorema. Aunque el lector con certificada habilidad con el álgebra lineal puede convencerse, en el ejercicio 9.2.14, de que los dos enunciados del teorema son equivalentes.

Vamos, sin más dilación, a poner en acción este excelso teorema. Empezamos con el cálculo del número de árboles abarcadores del grafo que aparece a la derecha, el que abría este apartado y del que sabemos, tras la enumeración correspondiente, que tiene ocho árboles abarcadores distintos.



Las correspondientes matrices M y D son

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{ así que } L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el cofactor que se obtiene eliminando la primera fila y columna resulta ser

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Compruebe el lector que los demás cofactores llevan al mismo resultado. ♣

EJEMPLO 9.2.7 *Kirchhoff y Cayley.*

Queremos contar, de nuevo, cuántos árboles abarcadores tiene un grafo completo K_n . Las matrices de vecindades y laplaciana, de dimensiones $n \times n$, son en este caso:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \implies L = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \boxed{n-1} & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo la parte a) del teorema 9.2.10 de Kirchhoff, necesitamos calcular (por ejemplo) el determinante de la matriz de dimensiones $(n - 1) \times (n - 1)$ que hemos recuadrado en la fórmula anterior. Le proponemos al lector dos posibilidades. La primera pasa por que exhiba sus habilidades con las operaciones de eliminación gaussiana; el ejercicio 9.2.9 contiene una guía detallada de los posibles pasos. La segunda, que revise el ejemplo 8.1.16 del capítulo dedicado a las recurrencias, y la fórmula que obtuvimos allí para el determinante de una matriz con unos en la diagonal y con el resto de sus entradas iguales a una cierta cantidad. Obsérvese que el determinante que nos incumbe aquí es de ese tipo si sacamos factores comunes $n - 1$ en cada fila.

Como tercera alternativa, le proponemos que deduzca el resultado de Cayley, de manera harto directa, si es que es capaz de comprobar que los autovalores no nulos de la matriz L valen todos n , y que hay $n - 1$ de ellos (revise, si lo desea, el final del apartado 9.1.5). De donde se deduce, usando la parte b) del teorema 9.2.10 de Kirchhoff, que $\tau(K_n) = n^{n-2}$. ♣

Terminamos esta sección mencionando dos casos particulares más. El primero, aquél que dejamos caer, como el que no quiere la cosa, tras el ejemplo 9.2.6, y que dice que

$$\tau(K_{r,s}) = s^{r-1} r^{s-1}.$$

Y el segundo, que trata sobre el número de árboles abarcadores del grafo Q_n del cubo:

$$\tau(Q_n) = \prod_{k=2}^n (2k) \binom{n}{k}.$$

Por ejemplo, $\tau(Q_2) = 4$, como ya sabíamos, pues Q_2 es como un grafo circular C_4 , mientras que $\tau(Q_3) = 384$. Para comprobar estos dos resultados, puede el lector ponerse a calcular determinantes (en el primer caso, el del $K_{r,s}$, analizando la matriz en cajas que representa al grafo), o bien, quizás más directamente, embarcarse en el cálculo de autovalores; recomendamos para esto, una vez más, el final de la sección 9.1.5.